제 2 교시

2020 기대 모의고사 수학 나형 Vol.2 4회

수학 영역

(나형)

홀수형

성명	

수험번호					–				

○ 자신이 선택한 유형 ('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

가자 이 새벽이 끝나는 곳으로

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

smart is sexy

Orbi

제 2 교시

수학 영역(나 형)

홀수형

5지선다형

1. $2^{-2} \times 4^{3}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

2. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 3, 6\}$에 대하여 $n(A-B)$의 값은? [2점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

3. 함수 $y = \dfrac{ax+1}{x-2}$의 두 점근선의 교점이 $(b, 3)$일 때, $a+b$의 값은? (단, $2a+1 \neq 0$) [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

4. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = 8a_1$일 때, $\dfrac{a_6}{a_2}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

5. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \ge 0)$ 에서의 위치 x가

$$x = t^2 - 4t + 3$$

이다. 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 시각은? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

6. 자연수 9를 서로 다른 세 자연수로 분할하는 경우의 수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 5\}$에 대하여 집합 $(A \cup B^C)^C$의 모든 원소의 합은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

8. 직선 $y=2x+1$이 점 $(\log_2 a,\ \log_4 a^3)$을 지날 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

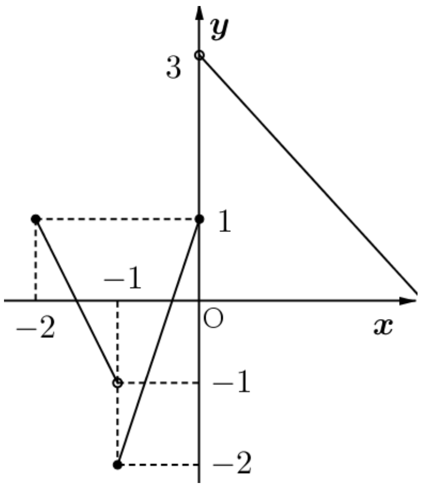
9. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(B),\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{3}{4}$　② $\frac{11}{16}$　③ $\frac{5}{8}$　④ $\frac{9}{16}$　⑤ $\frac{1}{2}$

10. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to -1-} f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

11. $\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2=25$, $\sum_{k=1}^{5}a_k=5$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)^2$의 값은? [3점]

① 42 ② 40 ③ 38 ④ 36 ⑤ 34

12. 함수 $f(x)=2x^m$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{10}$ 일 때, 양수 m의 값은? [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

13. 어떤 대학교 축구팀의 M 선수를 알고 있는 사람의 비율을 조사하기 위해 이 대학교의 학생 n명을 임의추출하여 조사한 결과 20%가 M 선수를 알고 있다 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 대학교 전체 학생 중에서 M 선수를 알고 있는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 90%의 신뢰구간을 구하면 $\frac{1}{5}-\frac{2}{50}\times 1.64 \le p \le \frac{1}{5}+\frac{2}{50}\times 1.64$ 이다. 자연수 n의 값은? (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.64)=\frac{9}{20}$이다.) [3점]

① 64 ② 81 ③ 100 ④ 121 ⑤ 144

14. 수열 $\{a_n\}$은 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$a_n = \begin{cases} a_m + 3 & (n\text{이 홀수일 때}) \\ 2a_m & (n\text{이 짝수일 때}) \end{cases} \qquad (\text{단, } m = \left[\frac{n}{2}\right])$$

를 만족시킨다. $a_6 + a_8 = 26$일 때, a_{12}의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않는 최대의 정수이다.) [4점]

① 17 ② 20 ③ 23 ④ 26 ⑤ 29

15. 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 64)$를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균을 $\overline{X}$ 라고 하자.

$$\mathrm{P}\left(4 \le \left(\overline{X}\right)^2\right) \le 0.0456$$

을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 64 ② 81 ③ 100 ④ 121 ⑤ 144

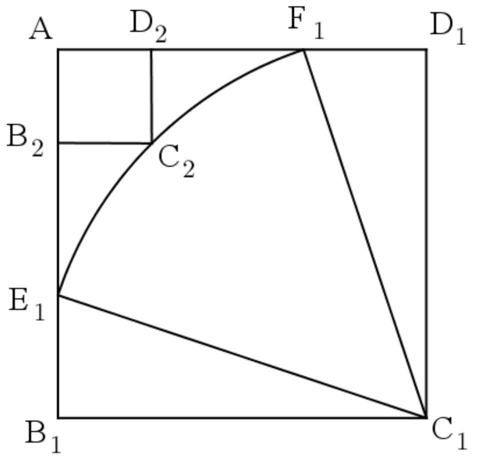
16. $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 모든 자연수 n에 대하여

$$\int_0^{(-1)^n} |f(x)|\,dx = \int_0^{(-1)^n} f(x)\,dx = \frac{1}{4}+(-1)^n \text{ 일 때,}$$

$f(2)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $AB_1C_1D_1$의 두 변 AB_1, AD_1을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1이라 하자. 중심을 C_1으로 하고 두 점 E_1, F_1을 지나는 부채꼴을 그린다. 사각형 $AB_2C_2D_2$가 정사각형이 되도록 변 AB_1 위의 점 B_2, 부채꼴 호 위의 점 C_2, 변 AD_1 위의 점 D_2를 잡는다.
두 변 AB_2, AD_2을 $2:1$로 내분하는 점 E_2, F_2을 잡고 중심을 C_2으로 하고 E_2, F_2을 지나는 부채꼴을 그린 후 정사각형 $AB_3C_3D_3$을 같은 방법으로 그린다.
이와 같은 과정으로 정사각형 $AB_nC_nD_n$을 그릴 때, 정사각형 $AB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{81}{155}(6\sqrt{5}-5)$ ② $\frac{81}{145}(6\sqrt{5}-5)$ ③ $\frac{486}{155}\sqrt{5}$
④ $\frac{81}{155}(6\sqrt{5}+5)$ ⑤ $\frac{81}{145}(6\sqrt{5}+5)$

18. 1부터 5까지의 자연수를 값으로 갖는 이산확률변수 X와 자연수 n에 대하여 $f(n)=\mathrm{P}(X \le n)$ (단, $1 \le n \le 4$) 이라 하자. $f(n)+f(5-n)=1$이고 $f(2)=\frac{1}{3}$일 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은?
[4점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

19. 각 공에 1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적혀있는 공 12개가 상자에 들어있다.
상자에서 하나의 공을 뽑아 공에 적힌 숫자를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 두 번 할 때, 첫 시행에서 확인한 숫자를 a, 다음 시행에서 확인한 숫자를 b라 하자.
$7 \leq n \leq 12$인 자연수 n에 대하여 $a+b \leq n$일 때 $ab < 6$ 일 확률을 p_n이라 하자. 다음은 $\sum_{k=7}^{12} p_k$의 값을 구하는 과정이다.

> $ab < 6$을 만족시키는 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값은 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.
> 따라서 $7 \leq n \leq 12$일 때 $ab < 6$를 만족시키는 a, b는 $a+b \leq n$도 항상 만족시킨다.
>
> $a+b \leq n$을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 음이 아닌 정수 c에 대하여 $a+b+c=n$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수와 같고, 이러한 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.
>
> 따라서 $p_n = \boxed{\text{(다)}}$ (단, $7 \leq n \leq 12$) 이고
> $\sum_{k=7}^{12} p_k = \frac{5}{3}$이다.

위의 (가)에 알맞은 숫자를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $f(p+2) \times g(p+1)$의 값은? [4점]

① $\frac{40}{3}$ ② $\frac{25}{2}$ ③ $\frac{35}{3}$ ④ $\frac{65}{6}$ ⑤ 10

20. 자연수 a에 대하여 미분가능한 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^3+4x^2+3x & (x \leq a) \\ mx+n & (x > a) \end{cases}$$

가 극대인 점이 존재하지 않을 때, <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> <보 기>
>
> ㄱ. $m = -3a^2+8a+3$
> ㄴ. 가능한 자연수 a의 개수는 3이다.
> ㄷ. 방정식 $f(x)=k$의 모든 실근의 합이 자연수 a의 값에 관계없이 같도록 하는 자연수 k의 개수는 6이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 상수 k, a, b, c에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^3-2a^2x+b & (x \geq k) \\ 20ax+c & (x<k) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수 $f^{-1}(x)$를 갖는다.
곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $x+4y=8$이 만나는 점은 오직 3개이고, 이 세 점의 y좌표는 각각 -2, 1, 2이다.
이 때, $(k+a)^2-bc$의 값은? [4점]

① $\frac{89}{4}$ ② $\frac{105}{4}$ ③ $\frac{121}{4}$ ④ $\frac{137}{4}$ ⑤ $\frac{153}{4}$

단답형

22. $\lim_{x \to 4} \frac{x^3-64}{x-4}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{15n^2}{3n+1} < a_n < \frac{15n^2+n}{3n-1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. [3점]

24. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3+a_4=7$, $a_1+a_3+a_5=9$일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

25. 방정식 $x^3+x-a=0$의 근 α에 대하여 $1<\alpha<3$를 만족시키는 자연수 a의 개수를 구하시오. [3점]

26. 실수 x에 대하여 명제

'$x^2-8x+a<0$이면 $x<5$이다.'

가 참이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

27. 집합 $X=\{2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$에 대하여 $f(3)f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 함수 f의 역함수가 존재한다.
> (나) $f(2)+f^{-1}(2)=8$
> (다) 방정식 $f(f(x))=x$의 해는 존재하지 않는다.

28. 네 자연수 a, b, c, d 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $abcd=280$
> (나) a, b, c, d 중 세 수를 골라 임의로 나열할 때, 어느 경우에도 등비수열을 이루지 않는다.

29. 다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)$으로 가능한 값의 개수는 n이고 그 중 최댓값은 M 이다. $M+n$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(x-n)^n f'(n) \le 0$
(단, $n=1, 2, 3$)
(나) 극대 또는 극소인 점이 오직 하나이다.
(다) $\left|f'\left(\frac{5}{2}\right)\right|=9$

30. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 연속함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge 0) \\ g(x) & (x < 0) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to -\infty}\frac{h(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t^3}=1$
(나) $\{x \mid \lim_{t\to 0} h'(x-t)h'(x+t) \le 0\}=\{-1, 1\}$

$h(0)<0$ 이고 함수 $y=|h(x)|$가 두 점에서 미분가능하지 않을 때, $h(3)h(-3)$의 값을 구하시오. [4점]

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

기대 모의고사 (ver.2020) Vol.2 나형 해설지

〈기대모의고사 특징〉

1. 최신 수능의 트렌드가 녹아든 모의고사.

쉬운 27문제와 어려운 3문제 조합으로 나오던 과거추세에서 변화된 추세를 보여주는 현 수능은
고득점을 원하는 학생이라면 무조건 맞춰야하는 25문제와
상위권이 아니라면 시간이 오래 지체될 2문제
어중간한 상위권들도 어려워할 2문제,
모두가 어려워하는 극악의 1문제의 구성으로 출제되고 있습니다.

기대모의고사는 위 트렌드를 적극 반영하는 테두리 안에서
난이도를 소폭 올림으로서 모래주머니 효과를 누릴 수 있게끔
하였습니다.

2. 평가원이 보여주었던 출제방침 및 습관 적극 반영

중단원별로 고른 문제 출제, 소단원별 교과이수과정표 참고,
수능과 똑같은 과목별 출제문항비율 등의 평가원의 굵직한 출제
매뉴얼까지 문제편과 해설편에 담아냈습니다.

3. 대학수학능력시험에서 필요한 사고력과 필수개념 활용을 강조한 문항구성

지나치게 발상적인 문제는 출제하지 않았습니다.
수능에서 요구하는 '교과서적 지식'과 '사고력'만으로 자연스럽게
풀리는 문제들로만 구성된 교재입니다.

4. 등급과 상관없이 만족하며 풀 수 있는 모의고사

본 모의고사는 지나치게 쉽지도, 지나치게 어렵지도 않습니다.
하위권이 풀기에도 어려운 느낌이 들지는 않는데,
100점 받기도 어려운 '중도를 지킨 모의고사'입니다.

하위권 학생들은 본인이 어렵게 느낀 문항들은 해설지로 반드시
챙겨가시고, 상위권 학생들은 눈 앞에 보이는 100점을 꼭
쟁취해보세요!

〈기대모의고사 구성품 및 활용법〉

1. 문제지

반드시 100분을 재고 푸세요.
자기 전에 50분 풀고 다음 날 남은 50분을 푸는 건 정말이지
죄악입니다. 실모는 양치기용이 아닙니다.
실전을 경험하고 준비할 수 있는 최고의 교재포맷임을 잊지
마세요.

2. 해설지

반드시 해설지를 한 번 정독하는 습관을 들이세요.
여러분들은 모든 문제를 정확히 풀어내지 못합니다.
출제자의 의도가 무엇이었고, 왜 그런 풀이를 떠올려야 하는지의
필연성을 반드시 해설지를 통해 배워가세요.

3. OMR 카드

기대모의고사 OMR 카드는 자체편집 해놓았습니다.
다른 OMR 카드에는 없는 시간작성란이 있습니다.
각 구간에서 걸린 시간을 총정리하고 본인 점수와 대조해봤을 때,
비킬러 구간에선 이 정도 시간 내에 끊어내야만 본인의 목표점수를
받을 수 있는지, 이 정도 시간이 남았을 땐 212930 중 몇 개를
포기할지 선택하는 것을 미리 경험해보는 겁니다.

9월 평가원 시험지가 나오면, 그 시험지를 기준으로 각 등급별
시간배분에 관한 칼럼을 오르비에 올리겠습니다. 참고 바랍니다.

〈스 포 주 의〉

다음 장에 학생 수준별 회차 추천순서 다음으로 등급컷이 있습니다.

등급컷을 가리고 수준별 문풀 추천순서 참고하는 것은 좋습니다.

가형 회차풀이 추천)

고정 1등급 목표 : Vol.1부터 Vol.2 순으로
1등급 목표 : 둘을 랜덤하게 섞어 풀어보기
2등급 이하 목표 : Vol.2부터 Vol.1 순으로 (역순)

나형 회차풀이 추천)

고정 1등급 목표 : Vol.1부터 Vol.2 순으로
1등급 목표 : 둘을 랜덤하게 섞어 풀어보기
2등급 이하 목표 : Vol.2부터 Vol.1 순으로 (역순)

검은색의 큰 숫자는 저자 및 검토진 추정 등급컷입니다.

회색의 작은 숫자는 약간의 가능성이 있는 등급컷입니다.

Vol.1 가형	1등급	2등급
1회	85~88	80
2회	84~85	77~78
3회	88	78~79

Vol.2 가형	1등급	2등급
1회	88~89	80
2회	92	84
3회	88	80~81
4회	88	80~81

Vol.1 나형	1등급	2등급
1회	85~88	79
2회	84~85	78~79
3회	84~85	76~77

Vol.2 나형	1등급	2등급
1회	89~92	84
2회	92	81~84
3회	92	84
4회	89~92	81~84

〈저작권을 보호해주세요.〉

최근 '컨텐츠'의 중요성이 부각되는 교육계에서
자작물을 도용하는 사례가 늘고 있습니다.

교재 원형을 수업교재로 사용하는 것은 상관없으나, 다음 사례들은
모두 저작권법에 위배됩니다.

1) 스캔파일, PDF변환파일
2) 한글로 원본 그대로를 타이핑, 2차 저작물 제작
3) 일부 문항만을 따서 교재에 사용
   (저자의 허락 없이는 출처를 기재해도 위배대상)

이외에도 본 교재를 영리적 목적으로 사용한 사례가 있다면
제보해주세요.

**공익을 위한 일 이외에는 그 누구에게도 본 교재의 문제사용을
허용하지 않았습니다.
(검토진 포함)
저자에게 사용을 허락받았다, 과거에 자신에게 배우던 제자라
상관없다는 등의 거짓말에 속지 마세요.**

또한 이 모의고사의 문제들은 100% 순수창작 문제입니다.
수능 기출문제조차도 '단순변형'이 아닌 경향, 표현을 참고하는
수준으로만 반영되었기 때문에
타 교재에서 같은 문제가 나오기 힘듭니다.

따라서 **이 교재의 문제가 노골적으로 포함되어 있는 타 교재
혹은 학원 수업물**이 있다면
kidae6150@naver.com로 메일 부탁드립니다.
관련사실을 입증하려면 증거자료가 필요하기 때문에,
증거자료(문제가 도용된 교재나 사진)를 확보하신 후 제보해주시면
손해배상금의 일부를 드리겠습니다.

본 모의고사의 문제들과 해설들은 저자와 검토진들의 정성과
노력으로 만들어진 자작물입니다.

학생 여러분들의 적극적인 신고가 좋은 컨텐츠를 만드는 원동력이
됩니다.

2020 기대모의고사 나형 Vol.2 4회

문제	답	문제	답	문제	답
1	④	11	②	21	①
2	⑤	12	③	22	48
3	③	13	③	23	5
4	⑤	14	②	24	10
5	⑤	15	①	25	27
6	③	16	①	26	15
7	④	17	④	27	8
8	②	18	③	28	288
9	⑤	19	①	29	218
10	②	20	①	30	16

무단복제/무단배포 신고

기대모의고사의 무단복제 및 무단배포 신고는
kidae6150@naver.com 으로 제보해주세요.
제보사례금 최소 5만원부터 최대 50만원까지 드립니다.

교재 원형을 수업교재로 사용하는 것은 상관없으나,
다음 사례들은 모두 저작권법에 위배됩니다.
1) 스캔파일, PDF파일 영리적 배포
2) 한글로 원본 그대로를 타이핑(2차 저작물) 배포
3) 일부 문항만을 따서 교재에 사용
(2020학년도 기준 어느 누구에게도 사용 허락 X)

본 모의고사의 문제들과 해설들은 저자와 검토진들의 정성과 노력으로 만들어진 자작물입니다.
적극적인 신고, 근본적으로는 저작권을 지키는 여러분들의 양심이 좋은 컨텐츠를 만드는 원동력이 됩니다.

Volume	출판시기	교재 컨셉
Vol.1 가/나형 (ver. 2020) 3회분	19년 8월	* 최근 수능에 제일 어울리는 트렌디한 모의고사 * 너무 어려워서 흡수하기 힘들거나 너무 쉬워서 흡수할게 없는 모의고사를 지양한 수능에 최적화된 모의고사
Vol.2 가/나형 (ver. 2020) 4회분	19년 8월	

Vol.1은 신규제작 + 공모문항으로 구성된 모의고사이며
Vol.2는 과거 기대모의고사 우수문항 + 공모문항으로 재탄생한 모의고사입니다. (나형 기준)

출제진 소개

김기대 T
- 고려대학교 수학과 13 / 오르비 Class
- 수학 실전모의고사 '기대모의고사' 저자 5년차
- 수능수학 3회 연속 가형 100점
- 고려대, 서강대, 시립대, 인하대 수리논술 최초합격
- 2020학년도 수리논술 Final 수업 예정

2020 추가 컨텐츠

EBS 수완, 수특 선별문항 목록을 오르비에서 무료배포 합니다.
(미적분2, 미적분1, 확률과 통계)

목록은 무료배포하는 대신 선별된 문항들의 연계/변형 포인트가 반영된 변형문제를 https://docs.orbi.kr/docs/ 에 유료 업로드할 예정입니다. (10월 초)

2020 수리논술 Final 예고

아직 한 발 남았다. 수능 후 반전을 꿈꾸는 학생들에게 희망을 주기 위한 Final 수업.

더 이상 뇌피셜로 수업하는 논술 Final은 No!
쓸모없는 교과외 내용과 대학수학만 가르치는 논술수업은 No!

대학 라인별로 전부 논술로 합격해본 진짜 합격자가 가르치고
서울대, 고려대 수학전공 대학원 조교들이 첨삭 해주는 알짜배기 논술수업입니다.

수업일자 및 수업장소

확정된 수업 학교는 한양대와 인하대입니다.
한양대 (시험 7일 전부터 하루 전까지 총 7회)
인하대 (시험 7일 전부터 하루 전까지 총 7회)

한양/인하 수업 횟수가 조정되거나 대비 학교가 추가되어 수업이 더 개설될 수 있으니 자세한 일정은 11/1부터
대치 오르비 학원 (☎ 02-3454-0207)으로 문의 바랍니다.

1. $2^{-2}\times 4^3=4^2=16$.

2. $A-B=\{1,2,4,5\}$이므로 $n(A-B)=4$

3. $y=\dfrac{ax+1}{x-2}=a+\dfrac{2a+1}{x-2}$ 이므로, 점근선의 교점은 $(2, a)$이다.

따라서 $b=2$, $a=3$이므로 $a+b=5$이다.

4. $a_4=r^3a_1=8a_1$이므로 $r=2$이다.

따라서 $\dfrac{a_6}{a_2}=r^4=16$이다.

5. x를 t에 대하여 미분하면 속도 $v(t)$가 나온다.

$v(t)=2t-4$이고, 점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때는 속도의 부호가 달라지므로, $t=2$일 때 움직이는 방향이 바뀐다.

6. $9=6+2+1=5+3+1=4+3+2$로 총 3가지이다.

7. $B^C=\{2,3\}$이므로 $A\cup B^C=A=\{1,2,3\}$이다. 따라서

$(A\cup B^C)^C=\{4,5\}$이므로 원소의 합은 9이다.

8. $\log_4 a^3=2\times\log_2 a+1=\log_2(2a^2)=\log_4(4a^4)$ 이므로

$4a^4=a^3$, $a=\dfrac{1}{4}$임을 알 수 있다.

9. $\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(B)$에서 $1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{8}$ ($\because$독립) 이므로 두 식을 $\mathrm{P}(A)$로

정리해주면 $\left(\mathrm{P}(A)-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$. 따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$이다.

10. 그래프를 통해 $x=0$에서의 우극한은 3, $x=-1$에서의 좌극한은 -1임을 알 수 있다. 따라서 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)+\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=2$

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{5}\{(a_k)^2+2a_k+1\}=\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{5}a_k+5$

이므로 정답은 $25+10+5=40$이다.

(주의!! $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}1$은 1이 아니고 5이다.)

12. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{2}{m+1}x^{m+1}\right]_0^1=\frac{1}{10}$ 로부터

$\dfrac{2}{m+1}=\dfrac{1}{10}$인 양수 m의 값은 19 이다.

13. 표본비율이 $\hat{p}=\dfrac{1}{5}$이므로, 신뢰도 90%의 신뢰구간을 구하면,

$\mathrm{P}(-\alpha\le Z\le\alpha)=\dfrac{90}{100}$에 대하여

$\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5\sqrt{n}}\times\alpha\le p\le\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5\sqrt{n}}\times\alpha$로 둘 수 있다. 신뢰구간이

$\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{50}\times 1.64\le p\le\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{50}\times 1.64$로 주어졌으므로,

$\dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}=\dfrac{1.64}{10}$이다.

그런데, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.64)=\dfrac{9}{20}$이므로,

$\mathrm{P}(-1.64\le Z\le 1.64)=\dfrac{9}{10}$ 이다.

따라서 $\alpha=1.64$이고 $\sqrt{n}=10$이므로 $n=100$이다.

14. 문제에서 제시된 수열의 귀납적 정의에 의하여

$a_6=2a_3=2(a_1+3)$, $a_8=2a_4=4a_2=8a_1$ 이므로

$a_6+a_8=10a_1+6=26$에서 $a_1=2$.

따라서 $a_{12}=2a_6=4a_3=4(a_1+3)=20$이다.

15. X의 평균이 0이므로 $\mathrm{E}(\overline{X})=0$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\left(\dfrac{8}{\sqrt{n}}\right)^2$이다.

또한 X가 정규분포를 따르면, $\overline{X}$도 정규분포를 따른다는 사실이 알려져 있으므로

$\mathrm{P}(4\le(\overline{X})^2)=\mathrm{P}(2\le\overline{X})+\mathrm{P}(\overline{X}\le -2)=2\times\mathrm{P}(2\le\overline{X})$이다.

이제, $\mathrm{P}(2\le\overline{X})\le 0.0228$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 찾자.

$\mathrm{P}(2\le\overline{X})=\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{n}}{4}\le Z\right)$이고 $0.0228=\mathrm{P}(2\le Z)$이므로 $\dfrac{\sqrt{n}}{4}\ge 2$

여야 한다. 따라서 n의 최솟값은 64이다.

16. n이 홀수일 때,

$\displaystyle\int_0^{-1}|f(x)|dx=\int_0^{-1}f(x)dx=\frac{1}{4}-1$

n이 짝수일 때,

$\displaystyle\int_0^{1}|f(x)|dx=\int_0^{1}f(x)dx=\frac{1}{4}+1$이다.

우선, 앞 등식들을 봐보자.

$\displaystyle\int_0^{-1}|f(x)|dx=\int_0^{-1}f(x)dx$이므로 $-1\le x\le 0$에서 $f(x)$가 음수인 x가 존재하지 않음을 알 수 있다.

(2016학년도 수능 29번에 출제된 아이디어이다. 잘 모르겠다면 실모를 덮고 얼른 다시 기출문제집으로 돌아가자.)

또한 $\int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx$ 이므로 $0 \le x \le 1$에서도 $f(x)$가 음수인 x가 존재하지 않음을 알 수 있다.
종합하면 $-1 \le x \le 1$에서 $f(x)$가 음수인 x가 존재하지 않는데, 문제 조건에서 $f(0)=0$이다. 어떻게 되어야 $f(0)=0$이면서 $x=0$에서 $f(x)$의 부호변화가 없을 수 있을까?

바로, $f(x)$가 $x=0$에서 x축에 접하는 상황이 정답이다.
즉, x의 인수를 2개를 가지면 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$의 부호변화가 없으므로, $f(x)=ax^2(x+b)$ (단, $b \neq 0$) 꼴임을 알 수 있다.

또한 n이 홀수일 때 $\int_0^{-1} f(x)dx = \frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$이고, n이 짝수일 때 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$이므로 $f(x)=ax^3+abx^2$을 이 두 식에 각각 대입하여 정적분을 계산해주면
$\frac{1}{4}a-\frac{1}{3}ab=-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}ab=\frac{5}{4}$ 를 얻을 수 있다.
이 두 식을 더하면 $a=1$, 뺀 후 $a=1$을 대입하면 $b=3$까지 알 수 있다.

따라서 $f(x)=x^3+3x^2$. 즉, $f(2)=20$이다.

17. 정사각형 $AB_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 l이라 하면 선분 AC_2의 길이는 $\sqrt{2}l$이다.
또한 선분 C_2C_1의 길이는 부채꼴의 반지름의 길이인 $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ 이고 AC_1의 길이는 $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{2}l+\sqrt{10}=3\sqrt{2}$ 이다. 따라서 $l=3-\sqrt{5}$.

수열 $\{S_n\}$의 첫 번째 항은 정사각형 $AB_1C_1D_1$의 넓이인 9이고 공비는 $\left(\frac{l}{3}\right)^2=\frac{14-6\sqrt{5}}{9}$이므로
$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{9}{1-\frac{14-6\sqrt{5}}{9}} = \frac{81}{6\sqrt{5}-5} = \frac{81}{155}(6\sqrt{5}+5)$ 이다.

18. $f(n)+f(5-n)=1$에 $n=1, 2$를 대입하면 각각 $f(1)+f(4)=1$, $f(2)+f(3)=1$이다.
우선 $f(1)+f(4)=1$을 보자. 확률변수 X는 $1 \sim 5$까지의 자연수 값을 가지므로 $f(4)=1-\mathrm{P}(X=5)$임을 알 수 있다.
따라서 $f(1)=\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=5)$임을 알 수 있다.

(현재 풀이 경과)

X	1	2	3	4	5	합
p	a	$\frac{1}{3}-a$	?	?	a	1

($cf.$ $\mathrm{P}(X=2)$를 $\mathrm{P}(X=1)$로 표현할 수 있는 이유는 문제의 조건 $f(2)=\frac{1}{3}$을 활용한 것이다.)

$f(2)+f(3)=1$에서 $f(2)=\frac{1}{3}$이므로 $f(3)=\frac{2}{3}$이다. 따라서 $\mathrm{P}(X=3)=f(3)-f(2)=\frac{1}{3}$임을 알 수 있다.

확률의 합이 1이 되어야 하므로, 따라서 $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{3}-a$임을 알 수 있다. (참고로 각 값의 확률이 $X=3$을 대칭으로 같다.)

따라서 $\mathrm{E}(X)=1\times a+2\left(\frac{1}{3}-a\right)+3\times\frac{1}{3}+4\left(\frac{1}{3}-a\right)+5a=3$으로 a에 관계없이 항상 일정한 값이 나오게 된다.

19.

〈 (가) 해석〉
$ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b)은
$(5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1)$
로 총 10개이고, $(5, 1), (1, 5)$일 때 $a+b$는 최댓값 6을 갖는다.
$\therefore p=6$

$a+b$의 최댓값이 6이고, 문제 조건에서 n은 7 이상의 자연수이기 때문에 자연스럽게 $a+b \le n$를 항상 만족시킬 수 밖에 없음을 확인하자.

〈 (나) 해석〉
a, b는 자연수이고, c는 음이 아닌 정수이므로
$a=a'+1$, $b=b'+1$로 두면 $a+b+c=a'+b'+c+2=n$에서
$a'+b'+c=n-2$이다.
이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c)의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_2$이다.
$\therefore f(n)=\frac{n(n-1)}{2}$

〈 (다) 해석〉
조건부확률에 의하여
$g(n)=\frac{10}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{20}{n(n-1)}$이다. (10은 $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b)의 개수를 뜻한다.)

따라서 $f(p+2)\times g(p+1)=f(8)\times g(7)=28\times\frac{10}{21}=\frac{40}{3}$이다.

출제자의 한마디
보통 '확률에서는 중복조합을 쓰면 안된다.' 는 말을 많이 들었을 것이다. 하지만, 각각 근원사건의 확률이 같은 경우, 중복조합으로 구한 경우의 수로도 확률을 구할 수 있다.
근원사건이 기대되는 정도가 같은 경우, 어떤 방법을 쓰든 상관이 없다.

20.

ㄱ.

$x=a$에서 미분가능해야 하므로 $-3a^2+8a+3=m$임을 알 수 있다. (참)

ㄴ.

미분가능한 함수에서 극대인 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호변화가 생기게 된다. $y=-x^3+4x^2+3x$는 원래 $x=3$에서 극대인 삼차함수이므로, $x<a$ 범위에 점 $(3,\ f(3))$이 포함되지 않도록 a값을 설정해줘야 한다.
따라서 자연수 a는 $1,\ 2$만 가능하여 개수는 2이다.

〈주의〉
여러 학생들이, $a=3$이어도 $x<a$ 범위에 점 $(3,\ f(3))$이 포함되지 않지 않느냐고 할 수 도 있다.
$a=3$일 때를 따로 조사해보자.
함수 $f(x)$를 완성시켜보면 $a=3$일 때 $m=0$이므로

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+4x^2+3x & (x\le 3) \\ 18 & (x>3) \end{cases} \quad \text{(연속성에 의하여 } n=18\text{)}$$

이므로 상수함수 구간이 생긴다.

하지만 상수함수는 모든 점에서 극대, 극소이므로 $a\neq 3$이다.

*** '상수함수는 모든 점에서 극대, 극소이다.' 라는 문장이 이해가 안되거나 생소하다면 지금 즉시 미적분 I 교과서의 *극대와 극소의 정의* 를 읽어봐야 한다.**
생소할 수 있으나, 18수능 가형 30번 출제 시 본 개념을 의식하여 넣은 조건이 있는 것으로 보아 평가원도 극값의 정의를 신경 쓰고 있고, 언제든 출제가능한 소재라 생각한다.

출제자의 한마디
교과서에서의 극대와 극소의 정의, 친절하게 퍼왔습니다. ^^ 극댓값의 정의는 '$x=a$를 포함하는 어떤 개구간에 대하여 그 개구간 내의 모든 원소 x들에 대하여 $f(x)\le f(a)$을 만족하면 $f(a)$는 $f(x)$의 극댓값' 이고 극솟값의 정의는 '$x=a$를 포함하는 어떤 개구간에 대하여 그 개구간 내의 모든 원소 x들에 대하여 $f(x)\ge f(a)$을 만족하면 $f(a)$는 $f(x)$의 극솟값'이라 한다. 위 정의에 상수함수를 떠올려보면, 두 정의 모두 동시에 만족시킴을 알 수 있으므로, 상수함수의 모든 점은 극대이자 극소입니다.

ㄷ.
ㄴ.에 의하여 $a=1,\ 2$만 가능함을 알 수 있다.

$a=1$일 때 함수 $f(x)$를 완성시켜보면

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+4x^2+3x & (x\le 1) \\ 8x-2 & (x>1) \end{cases}$$ 이고

$a=2$일 때 함수 $f(x)$를 완성시켜보면

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+4x^2+3x & (x\le 2) \\ 7x & (x>2) \end{cases}$$

이다.

두 그래프는 $x\le 1$까지는 같은 그래프인 $y=-x^3+4x^2+3x$를 가진다. 따라서 함수 $y=-x^3+4x^2+3x$의 극솟값인
$-\left(-\frac{1}{3}\right)^3+4\left(-\frac{1}{3}\right)^2+3\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{14}{27}$ 부터
$x=1$에서의 함숫값 6 사이에서 직선 $y=k$을 그으면, a의 값에 관계없이 만나는 점이 같게 되어 문제의 조건을 성립하게 된다.

따라서, 우선 $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이 가능하다.

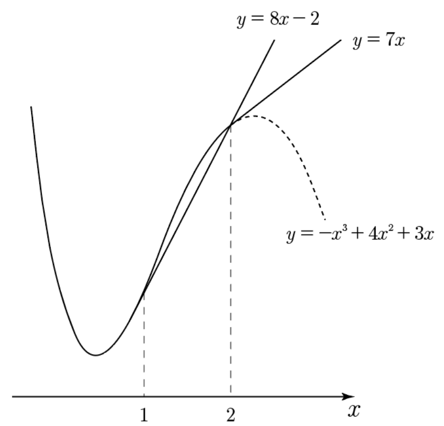
여기까지만 하면 ㄷ 보기가 맞다고 할 수 있으나, 아직 $x>1$인 부분을 신경 쓰지 않았다.
$a=1$일 때, $x>1$에서의 함수는 $8x-2$이며

$a=2$일 때, $x>1$에서의 함수는

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+4x^2+3x & (1<x\le 2) \\ 7x & (x>2) \end{cases}$$ 로 나뉜다.

이 때, $y=8x-2$와 $y=-x^3+4x^2+3x$의 교점을 $1<x\le 2$에서 구하면 $x=2,\ y=14$가 나오며, 마찬가지로 $8x-2$와 $7x$의 교점을 $x\ge 2$에서 구하면 $x=2,\ y=14$가 나온다.

즉, $k=14$여도 문제의 조건을 잘 만족시킬 수 있다는 뜻이다.
따라서 가능한 k의 개수는 7이다.



〈참고 그림〉

21. 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $x+4y=8$이 만나는 점들을 모두 $y=x$에 대하여 대칭시키면, 그 이동한 세 교점들은 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $x+4y=8$을 $y=x$에 대하여 각각 대칭시킨 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y+4x=8$ 사이의 세 교점과 동일하다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y+4x=8$ 사이의 세 교점의 x좌표가 각각 $-2,\ 1,\ 2$임을 알 수 있으므로
$f(-2)=16,\ f(1)=4,\ f(2)=0$임을 알 수 있다.

출제자의 한마디
위의 해설이 이해가 안된다면 이렇게 해보자. 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $x+4y=8$이 만나는 점은 3개이고, 이 세 점의 y좌표는 각각 $-2,\ 1,\ 2$이므로 세 교점은 각각 $(16,\ -2),\ (4,\ 1),\ (0,\ 2)$임을 직선 $x+4y=8$에 $y=-2,\ 1,\ 2$를 대입함으로써 알 수 있다. 즉, 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위에 세 점 $(16,\ -2),\ (4,\ 1),\ (0,\ 2)$이 있으므로 $f^{-1}(16)=-2,\ f^{-1}(4)=1,\ f^{-1}(0)=2$, 즉 $f(-2)=16,\ f(1)=4,\ f(2)=0$임을 알 수 있다.

또한, $f(x)$가 지나는 세 점 $(-2,\ 16),\ (1,\ 4),\ (2,\ 0)$은 x좌표의 값이 커질수록 y좌표의 값이 작아지고 있다.

즉, 역함수를 갖는 $f(x)$는 감소함수 여야 함을 알 수 있고,
이는 a의 값이 음수여야 함을 알려준다.
($20ax+c$ 부분만 봐도, 기울기인 $20a$가 음수여야 감소함수의 경향을 띄겠죠?)

이제, 세 점 $(-2,\ 16),\ (1,\ 4),\ (2,\ 0)$의 x좌표의 값이 범위 $x\geq k,\ x<k$ 중 어디에 속하는지에 따라 대입해줘야 하는 함수가 달라진다.

만약 1과 -2가 $x<k$에 포함된다면 $20ax+c$라는 일차함수는 $(1,4),\ (-2,\ 16)$을 지나야한다.
즉, 이는 위에서 한 번 언급된 $y+4x=8$이라는 직선과 같다.

그런데 이 경우 함수 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y+4x=8$ 사이의 교점이 $x<k$ 범위에서 무한개가 나오므로 교점이 정확히 3개라는 조건에 모순이 된다.

따라서 $x<k$ 범위엔 $-2,\ 1,\ 2$가 모두 포함되지 않거나 $-2,\ 1,\ 2$ 중 -2만 포함되어야 한다.
(1이 포함되는 순간 위에 설명한대로 모순!)

만약 $x<k$ 범위에 $-2,\ 1,\ 2$가 모두 포함되지 않으면
$-2,\ 1,\ 2$는 모두 $x\geq k$에 속하므로
$f(-2)=16,\ f(1)=4,\ f(2)=0$인 함수 $y=ax^3-2a^2x+b$ 가 존재하는지 확인해주면 된다.

비교적 숫자가 작은 $f(1)=4,\ f(2)=0$를 이용해서
$y=ax^3-2a^2x+b$에 대입해주면
$-2a^2+a+b=4,\ -4a^2+8a+b=0$이고, 두 식을 빼서 b를 소거해주면 $2a^2-7a-4=0$으로부터 $a=4$ or $-\dfrac{1}{2}$이다.

그런데 위에서 a가 음수임을 밝혔으므로 $a=-\dfrac{1}{2}$이다.
이를 위의 관계식에 대입해주면 b는 5임을 알 수 있다.

따라서 우리가 구하는 함수는 $-\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x+5$인데,
이 함수는 점 $(-2,\ 16)$을 지나지 않는다.

따라서 $x<k$ 범위엔 $-2,\ 1,\ 2$ 중 -2만 포함되어야 한다.

이 경우도 마찬가지로 $f(1)=4,\ f(2)=0$를 이용하여 함수 $y=ax^3-2a^2x+b$를 결정하고, $f(-2)=16$을 이용하여 함수 $y=20ax+c$를 결정하면 $a,\ b$는 위에서 구한 것과 같이 각각 $-\dfrac{1}{2}$, 5가 나오고 c는 -4가 나온다.

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x+5 & (x\geq k) \\ -10x-4 & (x<k) \end{cases}$가 완성되었다.

이제 k를 구해야 하는데, 함수 $f(x)$가 평범한 역함수를 갖는 것이 아니고 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 가져야 하므로, 함수 $f(x)$가
① 일대일 대응!
이고
② 실수 전체의 집합을 치역으로!
가져야만 $f^{-1}(x)$의 정의역이 실수 전체의 집합이 될 수 있다.

따라서 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이어야 ①, ②를 만족시킬 수 있다.
(2018학년도 9월 평가원 21번도 같은 논리가 사용되었다.)

이제, $x=k$에서의 연속이기 위한 조건을 적용시켜주면
$-\dfrac{1}{2}k^3-\dfrac{1}{2}k+5=-10k-4$을 만족시켜야 하고,
이 삼차방정식을 정리해주면 $k^3-19k-18=0$이 나온다.
좌변을 인수분해 하면 $(k+1)(k^2-k-18)=0$이 나온다.
따라서 $k=-1$ or $k=\dfrac{1\pm\sqrt{73}}{2}$가 나오는데,
$x<k$ 범위에는 $-2,\ 1,\ 2$ 중 -2만 유일하게 포함되어야 한다고 위에서 보였으므로 이 중 가능한 값은 $k=-1$ 뿐이다.

따라서 $(k+a)^2-bc=\dfrac{9}{4}+20=\dfrac{89}{4}$ 이다.

22. $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{x^3-64}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{x-4}=\lim_{x\to4}(x^2+4x+16)=48$
이다.

23. $\frac{15n^2}{3n+1} < a_n < \frac{15n^2+n}{3n-1} \Leftrightarrow \frac{15n^2}{3n^2+n} < \frac{a_n}{n} < \frac{15n^2+n}{3n^2-n}$의

모든 변에 극한 $\lim_{n\to\infty}$을 취해주면 샌드위치 정리에 의하여

$5 \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \le 5$ 임을 알 수 있다. 따라서 정답은 5.

24. 세 수 a_1, a_3, a_5도 등차수열을 이루므로

$a_1+a_3+a_5=3a_3=9$이고, $a_3=3$임을 알 수 있다.

따라서 $a_4=4$이고, 공차 d는 $a_4-a_3=1$임을 알 수 있다.

따라서 $a_{10}=a_3+7d=10$임을 알 수 있다.

25. $f(x)=x^3+x-a$라 하면 $f'(x)=3x^2+1>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

따라서 사이값정리에 의하여 $f(1)f(3)<0$이면 $f(x)=0$의 해 α가 $1<\alpha<3$ 이하이다.

$(2-a)(30-a)<0 \Leftrightarrow (a-2)(a-30)<0$에서 $2<a<30$이므로

자연수 a의 개수는 27이다.

출제자의 한마디
본 해설은 사이값정리의 '역'을 쓴 것이다. 일반적으로 사이값정리의 역은 성립하지 않으나, 함수의 증감이 일정한 경우, 즉 증가함수이거나 감소함수일 때는 역도 성립함을 어렵지 않게 알 수 있다.

26. 미지수가 있는 이차부등식을 먼저 풀기 어려우므로, 본 명제의 '대우'를 생각하면 '$x\ge5$이면 $x^2-8x+a\ge0$이다.' 가 된다.

이것이 참이 되도록 하는 a의 최솟값을 구하자.

x^2-8x+a는 $x=4$에서 최솟값 $a-16$를 갖는 이차식이므로

$x\ge5$에서 x^2-8x+a의 최솟값은 $5^2-8\times5+a=a-15$이다.

따라서 $a-15\ge0$이여야 문제의 명제를 만족시키므로 a의 최솟값은 15이다.

27. X에서 X로의 함수이므로 두 함수 f, f^{-1}의 치역은 모두 X이다. (f^{-1}은 f의 역함수)

따라서 $f(2)+f^{-1}(2)=8$을 만족하는 케이스는

$(f(2), f^{-1}(2))=(5, 3), (4, 4), (3, 5)$ 뿐인데,

$(f(2), f^{-1}(2))=(4, 4)$라 가정하면 $f^{-1}(2)=4$에서 $f(4)=2$임을 알 수 있다.

하지만 방정식 $f(f(x))=x$에 $x=2$을 대입해보면

$f(f(2))=f(4)=2$이므로 방정식 $f(f(x))=x$의 근이 존재하게 된다. 이는 (다) 조건에 위배된다.

따라서 $(f(2), f^{-1}(2))=(5, 3), (3, 5)$인 경우만 체크해주면 된다.

$(f(2), f^{-1}(2))=(5, 3)$인 경우, $f(2)=5$, $f(3)=2$이다.

$f(4)$가 가질 수 있는 값인 이제 3, 4가 남았는데

(f의 역함수가 존재하므로 일대일대응인데 2, 5를 이미 $f(2), f(3)$이 가져갔으므로)

만약 $f(4)=4$이면 (다)조건에 모순이므로 $f(4)$는 반드시 3이고,

마찬가지로 $f(5)$는 반드시 4이다.

따라서 이 때 $f(3)f(5)$의 값은 8이다.

또한 $(f(2), f^{-1}(2))=(5, 3)$인 경우, $f(2)=3$, $f(5)=2$이다.

$f(4)$가 가질 수 있는 값인 이제 4, 5가 남았는데

(f의 역함수가 존재하므로 일대일대응인데 3, 2를 이미 $f(2), f(5)$가 가져갔으므로)

만약 $f(4)=4$이면 (다)조건에 모순이므로 $f(4)$는 반드시 5이고,

마찬가지로 $f(3)$는 반드시 4이다.

이 때 $f(3)f(5)$의 값 역시 8이므로, 정답은 8 이다.

28. $280=2^3\times5\times7$이므로, $abcd=280$을 만족시키는 순서쌍

(a, b, c, d)의 개수는 ${}_4H_3\times({}_4C_1)^2=320$이다.

(추가설명 : ${}_4H_3$은 문자 4개 중 중복을 허락하여 3개를 고른 후, 골라진 횟수만큼 소인수 2를 부여하는 과정이며, 뒤의 ${}_4C_1$은 각각 5, 7을 가질 문자를 4개 중 하나 선택해주는 것이다.)

이 중 등비수열을 이루는 숫자구성이 있는 경우를 빼줘야 한다.

a, b, c, d중 임의로 a, b, c가 등비수열을 이룬다고 가정하면

등비중항에 의하여 $b^2=ac$이고, 따라서 $b^3d=280$이다.

즉, 등비중항 b가 가능한 값은 1, 2 뿐이므로, 이 때 케이스를 나눠 구하도록 하자.

$i)$ 등비중항이 1일 때,

나머지 두 항은 무조건 1, 1이어야 하므로

a, b, c, d는 1 3개와 280 1개로 구성되어야 한다.

이 경우는 총 4가지.

$ii)$ 등비중항이 2일 때,

나머지 두 항이 2, 2인 경우에는

a, b, c, d는 2 3개와 35 1개로 구성되어야 한다.

이 경우는 $i)$과 마찬가지로 4가지이며

나머지 두 항이 1, 4인 경우에는

a, b, c, d는 1, 2, 4, 35로 구성되어야 한다.

이 경우는 4! 가지이다.

따라서 320에서 4+4+4!을 빼주면 288이다.

출제자의 한마디
검토진들이 제일 많이 대답한 오답은 292였다. 혹시... 님도..?

29. (가)조건을 보면 $(x-1)f'(1) \le 0$, $(x-2)^2 f'(2) \le 0$, $(x-3)^3 f'(3) \le 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.
$(x-1)f'(1) \le 0$와 $(x-3)^3 f'(3) \le 0$를 봐보자.
$(x-1)f'(1) \le 0$를 보면, $x=1$의 좌, 우에서 $(x-1)$의 부호가 바뀜을 알 수 있다.
($x>1$일 때는 $x-1>0$이고, $x<1$일 때는 $x-1<0$이다.)

하지만 $f'(1)$은 상수이기 때문에, $f'(1)$이 0이 아니라고 가정하면, $x=1$의 좌, 우 근방에서 $(x-1)f'(1)$의 부호가 바뀐다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)f'(1) \le 0$를 만족한다는 조건을 충족시키지 못한다.
이는 $f'(1)$이 0이 아니라고 가정한 것이 잘못된 것이다.
따라서 $f'(1)=0$이다. (귀류법을 사용)

(참고 : 혹은, $x=0, x=2$를 $(x-1)f'(1) \le 0$에 대입하여 $f'(1) \ge 0$, $f'(1) \le 0$를 얻음으로써 $f'(1)=0$임을 알아도 무방하다. 하지만 이 해설 역시 $x=1$를 기준으로 좌, 우의 x값을 잡아줘야 된다는 점에서 위의 풀이와 비슷하다.)

마찬가지로 $(x-3)^3 f'(3) \le 0$에서 $(x-3)^3$의 부호가 $x=3$의 좌, 우에서 부호변화가 생기므로, 위의 논리와 똑같이 설명하면 $f'(3)=0$임을 알 수 있다.

위에서 구한 두 조건 $f'(1)=f'(3)=0$에서 $f'(x)=0$은 두 근 1, 3을 갖는 삼차방정식 이므로
$f'(x)=k(x-1)(x-3)(x-a)$ $(k \ne 0)$
(단, <u>k는 $f'(x)$의 최고차항의 계수이고, a는 상수</u>)로 둘 수 있다.

$(x-2)^2 f'(2) \le 0$에서는 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)^2$의 부호가 음수인 경우가 없기 때문에, 저 부등식이 항상 성립하기 위해서는 $f'(2) \le 0$여야 한다.
$f'(2)=k \times 1 \times (-1) \times (2-a)=k(a-2)$ 이므로
<u>$k>0$일 때, $a \le 2$이고 $k<0$일 때, $a \ge 2$</u>임을 알 수 있다.

이제 (나)조건을 보자.
$f(x)$의 극대 또는 극소인 점은 오직 하나이기 위해선 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 어떤 x가 오직 하나만 존재해야 한다.

a가 1이나 3이 아닌 다른 숫자라고 가정해보자. 그러면 $f'(x)=0$는 서로 다른 실근을 3개를 가지는 삼차방정식이 된다.
즉, $x=1, 3, a$일 때 x의 좌, 우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌게 되므로, $f(x)$가 극값을 3개 가지게 된다.
이는 (나)조건에 모순. 따라서 귀류법에 의하여 a는 1이나 3이어야 한다.

$i)$ $k>0$ 일 때,
$a \le 2$를 만족해야하고 a는 1이나 3이어야 하므로 만족하는 a는 1뿐이다. 따라서 $f'(x)=k(x-1)^2(x-3)$.

따라서 $f'\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{9k}{8}=-9$ ($\because k$가 양수이므로 $f'\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{9k}{8}<0$, $\left|f'\left(\frac{5}{2}\right)\right|=9$) 에서 $k=8$ 이고
$f'(x)=8(x-1)^2(x-3)$

$ii)$ $k<0$ 일 때,
$a \ge 2$를 만족해야하고 a는 1이나 3이어야 하므로 만족하는 a는 3뿐이다. 따라서 $f'(x)=k(x-1)(x-3)^2$.
$f'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3k}{8}=-9$ ($\because k$가 음수이므로 $f'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3k}{8}<0$,
$\left|f'\left(\frac{5}{2}\right)\right|=9$) 에서 $k=-24$이고
$f'(x)=-24(x-1)(x-3)^2$

$i), ii)$에 의하여 $f'(0)$의 값으로 가능한 값은 각각 $-24, 24 \times 9$으로 총 2개이고, 최댓값은 216이므로 $M+n=218$이다.

〈29번 참고자료〉
출제자가 출제 당시 전혀 의도하지 않았지만,
검토진들이 일관되게 제시한 '연계문항'입니다.
평가원과 비슷한 생각을 하고 있다고 추론할 수 있습니다 ㅋ.ㅋ

(16학년도 평가원 6월 21번)

21. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$
(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$ $\quad (n=1, 2, 3, 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

(15학년도 평가원 6월 21번)

21. 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

(가) $f(n)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x) \ge 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

30. 사고가 복잡한 문제이기 때문에 해설에 밑줄 쳐진 부분이 이해가 되었다면 알아보기 쉽도록 그 부분에 동그라미를 쳐놓자.

우선 함수 $h(x)$가 연속함수이므로 <u>$f(0)=g(0)$</u>을 만족해야 한다.

(가) 조건에서 $\lim_{t \to -\infty} \frac{h(t)}{t^2}=1$을 통해 $g(x)$의 차수는 이차이며 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

또한 $\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t^3}=1$을 통해 $f(x)$의 차수는 삼차이며 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

이제 (나) 조건을 봐보면, $x\neq0$인 모든 실수 x에서는 $\lim_{t\to0}h'(x-t)=h'(x)$, $\lim_{t\to0}h'(x+t)=h'(x)$이므로
($\because x\neq0$인 모든 실수 x에서 $h'(x)$는 다항함수이므로 연속이기 때문에 극한값=함숫값이 성립!)
$\lim_{t\to0}h'(x-t)h'(x+t)=\{h'(x)\}^2$임을 알 수 있다.
(나) 조건의 집합의 원소가 $-1, 1$ 뿐이므로
$h'(-1)=h'(1)=0$임을 알 수 있다.
(즉, 다른 x에서는 $h'(x)\neq0$이다.)

이제 $x=0$일 때를 고려해줘야 하는데, $x=0$일 때
$\lim_{t\to0}h'(x-t)h'(x+t)=\lim_{t\to0}h'(-t)h'(t)$는 t에 $-t$를 대입해도 같은 식이기 때문에 $t\to0+$일 때만 따져주면 된다.
$(\lim_{t\to0}h'(-t)h'(t)=\lim_{t\to0+}h'(-t)h'(t))$
$\lim_{t\to0+}h'(-t)=g'(0)$, $\lim_{t\to0+}h'(+t)=f'(0)$이므로
$f'(0)g'(0)>0$임을 알 수 있다. ($\because$ 0은 (나) 조건의 집합의 원소가 아니므로)

$x<0$일 때 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$이고
$h'(-1)=g'(-1)=0$이므로 $g(x)=(x+1)^2+a$ 꼴이다.
또한 $g'(0)=2$이므로 $g'(0)>0$이다. 따라서 $f'(0)>0$
($\because f'(0)g'(0)>0$)

$x\geq0$일 때 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$이고
$f'(0)>0$, $f'(1)=0$이다.

만약 $f(x)$가 $x=1$에서 극대 혹은 극소를 갖는다고 가정해보자.

$f(x)$가 $x=1$에서 극대를 갖는다면, $x_2>1$인 어떤 x_2에서 극소를 가질 것이고, $f'(x_2)=0$을 만족시킨다.
($\because$ 최고차항의 계수가 양수인 모든 삼차함수에 대하여 극대, 극소인 점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 항상 $x_1<x_2$이다.)
(삼차함수 개형을 떠올려보세요.)

이는 $-1, 1$을 제외한 다른 x에서는 $h'(x)\neq0$이다. 라는 (나)조건에 모순이다.

또한 $f(x)$가 $x=1$에서 극소를 갖는다면 $f'(0)>0$이란 조건에 모순이다. (위에처럼 (나)조건에 의해 모순이 생긴다.)
따라서 $f'(1)=0$이지만 $x=1$에서 $f(x)$는 극대도 극소도 아닌 점이다. 즉 $f'(x)$의 그래프는 $x=1$에서 x축과 만나지만 부호변화는 없는 함수여야하고, 따라서 $f'(x)=3(x-1)^2$임을 알 수 있다.

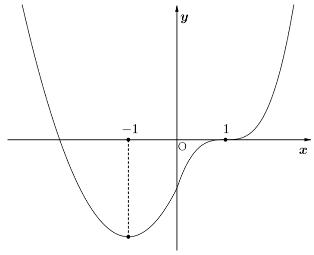
따라서 $f(x)=(x-1)^3+b$임을 알 수 있다.

위에서 구한 사실들과 문제에서 사용하지 않은 조건을 종합하면 다음과 같다.

1. $f(0)=g(0)$
2. $f(x)=(x-1)^3+b$
3. $g(x)=(x+1)^2+a$
4. $h(0)<0$, $y=|h(x)|$가 두 점에서 미분가능하지 않다.

우선 $f(0)=g(0)$이므로 $1+a=-1+b$에서 $a=b-2$ 이다.
또한 $f'(0)=3$, $g'(0)=2$이므로 $f'(0)\neq g'(0)$이라서
$x=0$에서 함수 $y=|h(x)|$는 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

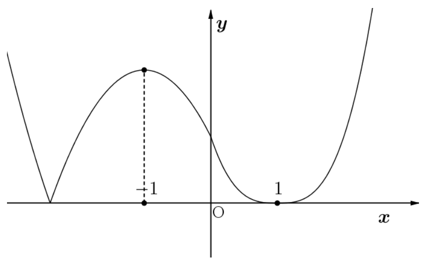
1.~4.의 조건을 만족시키도록 $y=h(x)$그래프를 그리면 다음과 같다.



$h(1)$이 0이 아닌 다른 값이라면, $y=|h(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 3이다.
($y=|h(x)|$와 x축 사이의 두 교점과 $x=0$인 점으로 총 3개)
($h(0)<0$을 만족시키도록 x축을 그림과 다른 위치에 그려보면서 확인해보도록 하자.)

$h(1)=f(1)=0$이므로 이차함수 $g(x)$와 x축이 만나는 점에서 $y=|h(x)|$가 미분가능하지 않지만
$x=1$에서 삼차함수 $f(x)$가 x축에 접해져있기 때문에
$y=|h(x)|$가 미분가능하게 된다.

〈참고 그림 : $y=|h(x)|$〉



따라서 $f(1)=0$으로부터 $b=0$이므로 $a=b-2=-2$이다.

종합하면 $f(x)=(x-1)^3$, $g(x)=(x+1)^2-2$이므로
$h(3)h(-3)=f(3)g(-3)=8\times2=16$이다.