제 2 교시

2020 기대 모의고사 수학 가형 Vol.2 4회

수학 영역 (가형)

홀수형

성명	

수험번호					–				

○ 자신이 선택한 유형 (‘가’ 형/‘나’ 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

가자 이 새벽이 끝나는 곳으로

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

smart is sexy
Orbi

제 2 교시

수학 영역(가형)

홀수형

5지선다형

1. 벡터 $\vec{a}=(1,\ 2)$에 대하여 벡터 $2\vec{a}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{3x}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

3. 함수 $f(x)=x-\ln x$가 $x=a$에서 극솟값 b를 가질 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

4. 두 함수 $y=\frac{x+1}{x}$, $y=2^x+k$ 가 x축에 평행한 점근선을 공유할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

5. 좌표공간의 두 점 A$(6,\ -2,\ 2)$, B$(0,\ 7,\ -4)$에 대하여 선분 AB를 $1:a$으로 내분하는 점이 $(b,\ c,\ 0)$일 때, $a+b+c$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

6. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(B),\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

7. 부등식

$$\log_2(x-4)+\log_2 x \geq 5$$

을 만족시키는 실수 x의 최솟값은? [3점]

① 14 ② 12 ③ 10 ④ 8 ⑤ 6

8. 곡선 $xe^x - e^y + y = 1$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① 2 ② $\dfrac{2e}{e-1}$ ③ 3 ④ $\dfrac{3e}{e-1}$ ⑤ 4

9. 1, 2를 포함한 5개의 자연수로 9를 분할하는 방법의 수는? [3점]

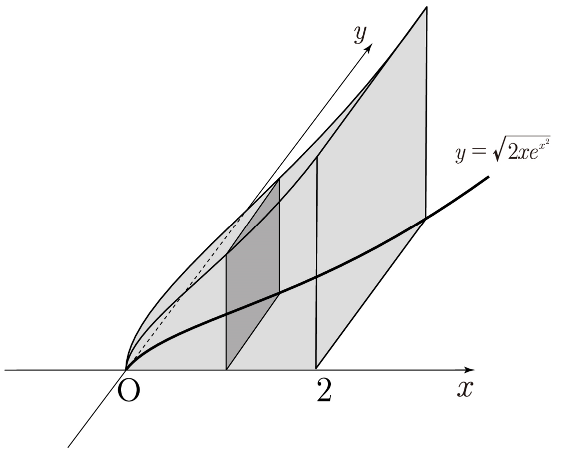
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

10. 좌표평면 위의 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킬 때, 직선 AC의 기울기가 될 수 있는 모든 값들의 합은? [3점]

(가) 직선 AB의 기울기가 2이다.
(나) $\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$

① $-\dfrac{4}{3}$ ② $-\dfrac{5}{3}$ ③ -2 ④ $-\dfrac{7}{3}$ ⑤ $-\dfrac{8}{3}$

11. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{2xe^{x^2}}$ 와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{1}{2}e^4$ ② e^4-1 ③ e^4
④ e^4+1 ⑤ $\frac{3}{2}e^4$

12. 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$인 함수 $f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{6}{7}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

13. 좌표평면 위에 원점 O를 지나는 두 직선 l_1, l_2에 대하여 직선 l_1의 방향벡터는 $(1, 2)$이고 l_2의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다. 원 $x^2+y^2=5$와 두 직선 l_1, l_2 사이의 교점을 각각 A, B라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값은? (단, A, B는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

14. 두 점 F, F′을 초점으로 갖는 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{a^2}=1$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{OH}}>\overline{\mathrm{OF}}$이고, 두 삼각형 PFH, PF′H의 둘레의 길이의 차가 10일 때, 쌍곡선의 점근선과 점 F 사이의 거리는 l이다. l^2의 값은? (단, O는 원점이고 두 점 P, F의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

15. A, B를 포함한 6명의 학생들이 검은색 볼펜 3개, 빨간색 볼펜 2개, 파란색 볼펜 1개를 1개씩 사이좋게 나눠가지려 한다. A, B가 같은 색의 볼펜을 받았을 때, 그 색이 검은색일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

16. 좌표평면에서 x축과 평행한 직선과 곡선 $y=\sin(ax)$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{a}\right)$ 이 만나서 생기는 두 점을 각각 A, B라 하자. x축 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 한 변의 길이가 1인 정삼각형일 때, 곡선 $y=\sin(ax)$과 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, $0 < a \le \pi$) [4점]

① $\frac{3}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{3}{\pi}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{4}{\pi}-\frac{1}{2}$
④ $\frac{4}{\pi}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{6}{\pi}-\frac{1}{2}$

17. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 정규분포 $\mathrm{N}(3, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X와 대하여 함수 $g(x)=\mathrm{P}(2 \le X \le f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\infty} g(x)=0.6915$
>
> (나) $g(x)$는 $x=1$에서 최솟값 0.5328을 갖는다.

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 $g(2)$의 값은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6247 ② 0.7583 ③ 0.7745 ④ 0.8413 ⑤ 0.9332

18. 좌표평면에 있는 두 점 $\mathrm{A}(4, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2)$와 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 P에 대하여 선분 BP의 기울기가 $\frac{1}{2}$일 때, 삼각형 ABP의 둘레의 길이가 될 수 있는 값은 l_1, l_2이다. l_2-l_1의 값은? (단, $l_1 < l_2$) [4점]

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

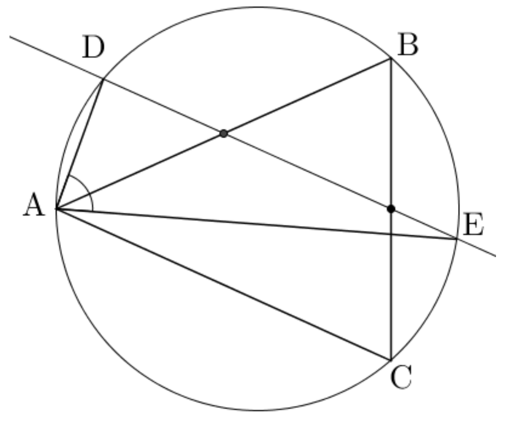
19. 각 공에 1부터 12까지의 자연수가 하나씩 적혀있는 공 12개가 상자에 들어있다.
상자에서 하나의 공을 뽑아 공에 적힌 숫자를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 두 번 할 때, 첫 시행에서 확인한 숫자를 a, 다음 시행에서 확인한 숫자를 b라 하자.
$7 \le n \le 12$인 자연수 n에 대하여 $a+b \le n$일 때 $ab<6$ 일 확률을 p_n이라 하자. 다음은 $\sum_{k=7}^{12} p_k$의 값을 구하는 과정이다.

> $ab<6$을 만족시키는 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값은 $\boxed{(가)}$ 이다.
> 따라서 $7 \le n \le 12$일 때 $ab<6$를 만족시키는 a, b는 $a+b \le n$도 항상 만족시킨다.
>
> $a+b \le n$을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 음이 아닌 정수 c에 대하여 $a+b+c=n$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수와 같고, 이러한 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\boxed{(나)}$ 이다.
>
> 따라서 $p_n = \boxed{(다)}$ (단, $7 \le n \le 12$) 이고
> $\sum_{k=7}^{12} p_k = \frac{5}{3}$이다.

위의 (가)에 알맞은 숫자를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $f(p+2) \times g(p+1)$의 값은? [4점]

① 10 ② $\frac{65}{6}$ ③ $\frac{35}{3}$ ④ $\frac{25}{2}$ ⑤ $\frac{40}{3}$

20. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하고 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\angle BAC=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다.
선분 AB의 중점과 선분 BC의 중점을 지나는 직선이 원과 만나는 교점을 각각 D, E라 할 때, $\cos(\angle DAE)=f(\theta)$라 하자.
<보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. 직선 DE는 직선 AC와 평행하다.
ㄴ. $f(\theta)$는 원의 중심과 직선 DE 사이의 거리와 같다.
ㄷ. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta} = \frac{1}{4}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $y=f(x)$와 실수 x에 대하여 집합 A를

$$A=\left\{x \,\middle|\, \left(\int_2^x f(t)dt-f(4)\right)\left(\int_4^x f(t)dt-f(2)\right)=0\right\}$$

라 하자. 함수 $f(x)$와 집합 A가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)+n(A)$의 값은? [4점]

(가) $\{2,\ 4\}\subset A$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(4-x)+f(4+x)=2f(4)$
(다) $\displaystyle\int_4^5 f(x)dx-\int_2^3 f(x)dx=2$

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

단답형

22. ${}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{P}_3$의 값을 구하시오. [3점]

23. $\displaystyle\int_0^{\ln 10} e^x\sqrt{e^x-1}\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

24. 어떤 대학교 축구팀의 M 선수를 알고 있는 사람의 비율을 조사하기 위해 이 대학교의 학생 n명을 임의추출하여 조사한 결과 20%가 M 선수를 알고 있다 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 대학교 전체 학생 중에서 M 선수를 알고 있는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 90%의 신뢰구간을 구하면 $\frac{1}{5}-\frac{2}{50}\times 1.64 \le p \le \frac{1}{5}+\frac{2}{50}\times 1.64$ 이다. 자연수 n의 값을 구하시오 (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.64)=\frac{9}{20}$이다.) [3점]

25. 좌표공간에서 점 $\mathrm{P}(3,\ 2,\ 2)$와 평면 $x+2y-2z=9$ 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{OM}}$의 최솟값은 d이다. $20d^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [3점]

26. 함수 $f(x)$에 대하여 연속함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x & (x \ge 1) \end{cases}$$

라 하자. $x=0$부터 $x=3$ 까지의 곡선 $y=g(x)$의 길이가 $3+\frac{1}{2}\ln 3$일 때, $\int_0^2 g(x)dx = a+b\ln 2$이다.

$60(a+b)$의 값을 구하시오. [4점]

27. 두 평면 사이의 이면각이 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 평면 α 위의 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 B라 할 때, 직선 l 위의 두 점 C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

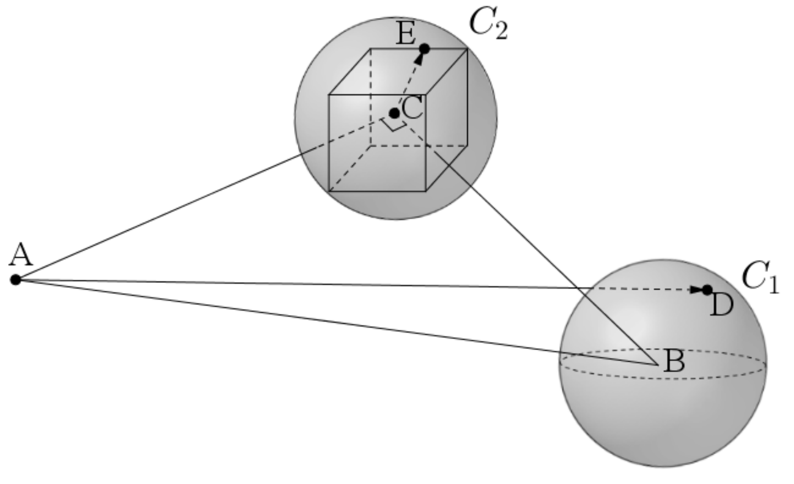
(가) 사면체 ABCD의 부피는 $\frac{40}{3}$이다.
(나) $\overline{\mathrm{CD}} = 5 = \overline{\mathrm{BD}}$

선분 AC의 길이를 구하시오. [4점]

28. 네 자연수 a, b, c, d 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $abcd = 280$
(나) a, b, c, d 중 세 수를 골라 임의로 나열할 때, 어느 경우에도 등비수열을 이루지 않는다.

29. $\overline{AC}=\overline{BC}=4\sqrt{2}$ 인 직각삼각형 ABC와 두 점 B, C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 두 구 C_1, C_2가 있다. 구 C_2에 내접하는 한 정육면체를 평면 ABC로 자른 단면은 정사각형이고, 이 정사각형의 모든 꼭짓점은 직선 AC 또는 직선 BC 위에 있다. 구 C_1 위를 움직이는 점 D와 정육면체의 모서리 위를 움직이는 점 E에 대하여 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



30. 실수 p에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{6\pi x}{x^2+1} & (x \geq p) \\ \dfrac{8\pi}{x^2+1} & (x < p) \end{cases}$$

라 할 때, 함수 $\{\cos f(x)\}^2$ 이 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 p를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ (n은 자연수)라 하자.

$\dfrac{9}{n}\times\sum_{k=1}^{n}(p_k)^2$의 값을 구하시오. [4점]

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

기대 모의고사 (ver.2020) Vol.2 가형 해설지

〈기대모의고사 특징〉

1. 최신 수능의 트렌드가 녹아든 모의고사.

쉬운 27문제와 어려운 3문제 조합으로 나오던 과거추세에서 변화된 추세를 보여주는 현 수능은
고득점을 원하는 학생이라면 무조건 맞춰야하는 25문제와
상위권이 아니라면 시간이 오래 지체될 2문제
어중간한 상위권들도 어려워할 2문제,
모두가 어려워하는 극악의 1문제의 구성으로 출제되고 있습니다.

기대모의고사는 위 트렌드를 적극 반영하는 테두리 안에서
난이도를 소폭 올림으로서 모래주머니 효과를 누릴 수 있게끔
하였습니다.

2. 평가원이 보여주었던 출제방침 및 습관 적극 반영

중단원별로 고른 문제 출제, 소단원별 교과이수과정표 참고,
수능과 똑같은 과목별 출제문항비율 등의 평가원의 굵직한 출제
매뉴얼까지 문제편과 해설편에 담아냈습니다.

3. 대학수학능력시험에서 필요한 사고력과 필수개념 활용을 강조한 문항구성

지나치게 발상적인 문제는 출제하지 않았습니다.
수능에서 요구하는 '교과서적 지식'과 '사고력'만으로 자연스럽게
풀리는 문제들로만 구성된 교재입니다.

4. 등급과 상관없이 만족하며 풀 수 있는 모의고사

본 모의고사는 지나치게 쉽지도, 지나치게 어렵지도 않습니다.
하위권이 풀기에도 어려운 느낌이 들지는 않는데,
100점 받기도 어려운 '중도를 지킨 모의고사'입니다.

하위권 학생들은 본인이 어렵게 느낀 문항들은 해설지로 반드시
챙겨가시고, 상위권 학생들은 눈 앞에 보이는 100점을 꼭
쟁취해보세요!

〈기대모의고사 구성품 및 활용법〉

1. 문제지

반드시 100분을 재고 푸세요.
자기 전에 50분 풀고 다음 날 남은 50분을 푸는 건 정말이지
죄악입니다. 실모는 양치기용이 아닙니다.
실전을 경험하고 준비할 수 있는 최고의 교재포맷임을 잊지
마세요.

2. 해설지

반드시 해설지를 한 번 정독하는 습관을 들이세요.
여러분들은 모든 문제를 정확히 풀어내지 못합니다.
출제자의 의도가 무엇이었고, 왜 그런 풀이를 떠올려야 하는지의
필연성을 반드시 해설지를 통해 배워가세요.

3. OMR 카드

기대모의고사 OMR 카드는 자체편집 해놓았습니다.
다른 OMR 카드에는 없는 시간작성란이 있습니다.
각 구간에서 걸린 시간을 총정리하고 본인 점수와 대조해봤을 때,
비킬러 구간에선 이 정도 시간 내에 끊어내야만 본인의 목표점수를
받을 수 있는지, 이 정도 시간이 남았을 땐 212930 중 몇 개를
포기할지 선택하는 것을 미리 경험해보는 겁니다.

9월 평가원 시험지가 나오면, 그 시험지를 기준으로 각 등급별
시간배분에 관한 칼럼을 오르비에 올리겠습니다. 참고 바랍니다.

〈스 포 주 의〉

다음 장에 학생 수준별 회차 추천순서 다음으로 등급컷이 있습니다.

등급컷을 가리고 수준별 문풀 추천순서 참고하는 것은 좋습니다.

가형 회차풀이 추천)

고정 1등급 목표 : Vol.1부터 Vol.2 순으로
1등급 목표 : 둘을 랜덤하게 섞어 풀어보기
2등급 이하 목표 : Vol.2부터 Vol.1 순으로 (역순)

나형 회차풀이 추천)

고정 1등급 목표 : Vol.1부터 Vol.2 순으로
1등급 목표 : 둘을 랜덤하게 섞어 풀어보기
2등급 이하 목표 : Vol.2부터 Vol.1 순으로 (역순)

검은색의 큰 숫자는 저자 및 검토진 추정 등급컷입니다.

회색의 작은 숫자는 약간의 가능성이 있는 등급컷입니다.

Vol.1 가형	1등급	2등급
1회	85~88	80
2회	84~85	77~78
3회	88	78~79

Vol.2 가형	1등급	2등급
1회	88~89	80
2회	92	84
3회	88	80~81
4회	88	80~81

Vol.1 나형	1등급	2등급
1회	85~88	79
2회	84~85	78~79
3회	84~85	76~77

Vol.2 나형	1등급	2등급
1회	89~92	84
2회	92	81~84
3회	92	84
4회	89~92	81~84

2020 기대모의고사 가형 Vol.2 4회

문제	답	문제	답	문제	답
1	③	11	②	21	⑤
2	③	12	⑤	22	28
3	④	13	③	23	18
4	②	14	⑤	24	100
5	④	15	④	25	80
6	⑤	16	①	26	20
7	④	17	①	27	6
8	②	18	③	28	288
9	①	19	⑤	29	11
10	⑤	20	②	30	26

무단복제/무단배포 신고

기대모의고사의 무단복제 및 무단배포 신고는
kidae6150@naver.com 으로 제보해주세요.
제보사례금 최소 5만원부터 최대 50만원까지 드립니다.

교재 원형을 수업교재로 사용하는 것은 상관없으나,
다음 사례들은 모두 저작권법에 위배됩니다.
1) 스캔파일, PDF파일 영리적 배포
2) 한글로 원본 그대로를 타이핑(2차 저작물) 배포
3) 일부 문항만을 따서 교재에 사용
(2020학년도 기준 어느 누구에게도 사용 허락 X)

본 모의고사의 문제들과 해설들은 저자와 검토진들의 정성과 노력으로 만들어진 자작물입니다.
적극적인 신고, 근본적으로는 저작권을 지키는 여러분들의 양심이 좋은 컨텐츠를 만드는 원동력이 됩니다.

Volume	출판시기	교재 컨셉
Vol.1 가/나형 (ver. 2020) 3회분	19년 8월	* 최근 수능에 제일 어울리는 트렌디한 모의고사 * 너무 어려워서 흡수하기 힘들거나 너무 쉬워서 흡수할게 없는 모의고사를 지양한 수능에 최적화된 모의고사
Vol.2 가/나형 (ver. 2020) 4회분	19년 8월	

Vol.1은 99% 신문항(신규제작 + 비공개 공모문항)으로 구성된 모의고사이며 Vol.2는 과거 기대모의고사 우수문항과 공개된 공모문항으로 재탄생한 모의고사입니다.

출제진 소개

김기대 T

- 고려대학교 수학과 13 / 오르비 Class
- 수학 실전모의고사 '기대모의고사' 저자 5년차
- 수능수학 3회 연속 가형 100점
- 고려대, 서강대, 시립대, 인하대 수리논술 최초합격
- 2020학년도 수리논술 Final 수업 예정

1. $2\vec{a}=(2,4)$이므로 $2+4=6$.

2. $\lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{3x}=\lim_{x\to0}2\times\frac{e^{6x}-1}{6x}=2$.

3. $f'(x)=1-\frac{1}{x}$이므로 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=1$을 가짐을 알 수 있다. 따라서 $a+b=2$

4. $y=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$의 점근선 중 x축과 평행한 점근선은 $y=1$이고 $y=2^x+k$의 점근선은 $y=k$이므로 $k=1$

5. 내분점의 z좌표가 0임을 이용하여 $0=\frac{2\times a+(-4)\times1}{1+a}$ 로부터 $a=2$임을 알 수 있다.
또한 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표를 구하면 x좌표와 y좌표가 각각 $\frac{12}{3}=4$, $\frac{3}{3}=1$임을 알 수 있으므로 $b=4$, $c=1$ 이다. 따라서 $a+b+c=7$이다.

6. $P(A^C)=2P(B)$에서 $1-P(A)=2P(B)$, $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{8}$ ($\because$독립) 이므로 두 식을 $P(A)$로 정리해주면 $\left(P(A)-\frac{1}{2}\right)^2=0$. 따라서 $P(A)=\frac{1}{2}$이다.

7. $\log_2(x-4)$, $\log_2x$가 존재하기 위한 진수의 조건은 $x>4$이고, 로그 성질에 의해 부등식은 $\log_2x(x-4)\geq\log_2 32$가 되므로 $x^2-4x\geq32$임을 알 수 있다.
$x^2-4x-32\geq0\Leftrightarrow(x-8)(x+4)\geq0$과 $x>4$에서 $x\geq8$.
따라서 x의 최솟값은 8이다.

8. 음함수의 미분법에 의하여
$(x+1)e^x+(1-e^y)y'=0$, $y'=\frac{(x+1)e^x}{e^y-1}$ 이다.
따라서 점 $P(1,1)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{2e}{e-1}$ 이다.

9. $9=5+1+1+1+1$
$=4+2+1+1+1$
$=3+3+1+1+1$
$=3+2+2+1+1$
$=2+2+2+2+1$ 중 1, 2를 포함한 분할은 3가지이다.
(참고로, $9-(1+2)=6$을 자연수 3개로 분할하는 문제와 같다.)

10. 직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각도를 θ라 하면, $\tan\theta=2$이다. 이 때 직선 AC의 기울기가 될 수 있는 값은 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$이다. $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$,
$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2+1}{1-2}=-3$이므로 두 수의 합은 $-\frac{8}{3}$이다.

11. $x=t$ $(0<t<2)$에서 한 단면의 넓이는 $S(t)=2te^{t^2}$이다.
이 입체도형의 부피는 $\int_0^2S(t)dt$로 구할 수 있으므로,
$\int_0^2 2te^{t^2}dt=\int_0^4e^xdx=e^4-1$

12. 역함수의 미분법에 의하여 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ 이므로
$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$이다.

먼저 $g\left(\frac{1}{2}\right)$를 구하자. $g\left(\frac{1}{2}\right)=k$라 하면 $f(k)=\frac{1}{2}$이므로
$2k^4-k^2-1=0$, $(2k^2+1)(k^2-1)=0$ 으로부터 $k=1$ 임을 알 수 있다. ($f(x)$의 정의역이 $\{x\,|\,x\geq0\}$이므로 $k\geq0$이다.)

따라서 $\frac{1}{f'(1)}$을 구하면 된다.
$f(x)$를 미분해야하는데, 꼴이 매서우므로 변형 후 미분하자.
$f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$이고, 미분하면
$f'(x)=2x-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$이므로, $f'(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이다.

따라서 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{2}{3}$ 이다.

13. l_2의 기울기가 $\frac{1}{2}$이라는 조건은 l_2의 방향벡터가 $(2,1)$이라는 뜻과 같다. 또한 $(1,2)$와 $(2,1)$이 모두 원 $x^2+y^2=5$위의 점이므로 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 값은 결국 두 직선의 방향벡터의 내적값임을 알 수 있다.
따라서 $(1,2)\cdot(2,1)=4$이다.

출제자의 한마디
평면에서 직선의 방향벡터는 직선의 기울기와 밀접한 관계를 (사실상 의미하는 바가 같은 관계) 갖고 있음을 항상 염두에 두자.

14. 두 삼각형 PFH, PF′H의 둘레의 길이의 차는
$\overline{PF'}+\overline{F'H}+\overline{HP}-(\overline{PF}+\overline{FH}+\overline{HP})=\overline{PF'}-\overline{PF}+\overline{F'H}-\overline{FH}$인데
$\overline{PF'}-\overline{PF}$는 쌍곡선의 정의에 의하여 쌍곡선의 주축의 길이,
$\overline{F'H}-\overline{FH}$는 $\overline{F'F}$와 같다.

따라서 $10=2+2\sqrt{1+a^2}$에서 $a^2=15$임을 알 수 있다.
즉 쌍곡선의 점근선은 $y=\pm\sqrt{15}x$이고, 점 F는 $(4,0)$이므로
점 $(4,0)$과 직선 $y=\pm\sqrt{15}x$ 사이의 거리는 $\sqrt{15}$임을 알 수 있다. 따라서 $l^2=15$.

15. *i)* A, B가 검은색 볼펜을 받았을 때,
4명 중 1명을 골라 나머지 검은색 볼펜을 받게 하고, 나머지 3명 중 1명을 골라 파란색 볼펜을 받게 하면 나머지 2명은 자연스럽게 빨간색 볼펜을 받게 된다.
이 경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_3C_1=12$

ii) A, B가 빨간색 볼펜을 받았을 때,
4명 중 1명을 골라 파란색 볼펜을 받게 하면 나머지 3명은 자연스럽게 검은색 볼펜을 받게 된다. 이 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

따라서 확률은 $\dfrac{12}{12+4}=\dfrac{3}{4}$ 이다.

16. 곡선 $y=\sin ax\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{a}\right)$는 직선 $x=\dfrac{\pi}{2a}$에 대하여 대칭이므로 선분 AB 역시 직선 $x=\dfrac{\pi}{2a}$에 대하여 대칭이어야 한다. 그리고 한 변의 길이가 1이므로 A, B의 x좌표는 각각 $\dfrac{\pi}{2a}-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{2a}+\dfrac{1}{2}$이다.
점 C가 x축 위에 있으므로, 점 A, B의 y좌표는 정삼각형의 높이인 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$와 같아야 한다. 따라서 $\sin a\left(\dfrac{\pi}{2a}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$여야 한다.
(혹은 $\sin a\left(\dfrac{\pi}{2a}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$)
즉, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{a}{2}\right)=\cos\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$로부터 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi\cdots$ 이 가능한데 이 중 $0<a\le\pi$인 a는 $a=\dfrac{\pi}{3}$임을 알 수 있다.

한편, 두 점 A, B의 x좌표가 1, 2 이므로 곡선 $y=\sin(ax)$과 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\displaystyle\int_1^2\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)dx-1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{2}$으로 구할 수 있다.

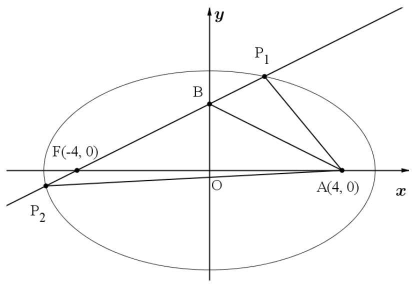
17. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 다항함수이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다. 따라서 (가)조건에 의하여
$0.6915=P(2\le X)$임을 알 수 있다.
표준정규분포표를 이용하여 σ값을 구하면
$0.6915=P(-0.5\le Z)=P\left(-\dfrac{1}{\sigma}\le Z\right)$에서 $\sigma=2$임을 알 수 있다.

이제 (나)를 해석해보자.
평균과 표준편차가 정해져있는 상황에서,
$g(x)$가 최소이기 위해선 $f(x)$의 값과 2라는 값의 차이, 즉 X가 포함되어야 하는 범위가 좁아야 한다.
따라서 $x=1$에서 $f(x)$ 역시 최솟값이 되어야 하므로
$f(x)=(x-1)^2+f(1)$꼴이다.

또한 $g(1)=P(2\le X\le f(1))=0.5328=P(-0.5\le Z\le 1)$
이므로 $f(1)=m+1\times\sigma=5$임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=(x-1)^2+5$이고, 구하려는 $g(2)$의 값은
$g(2)=P(2\le X\le 6)=P(-0.5\le Z\le 1.5)=0.1915+0.4332$
$=0.6247$ 이다.

18. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 초점이 $(4,0)$, $(-4,0)$이다. 초점 중 하나는 A이고, 나머지 하나인 점 F가 $B(0,2)$를 지나고 기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 직선과 x축 사이의 교점임을 알아채는 것이 이 문제의 핵심 포인트이다.
$B(0,2)$를 지나고 기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 직선과 타원 사이에 두 교점이 생길텐데, 이 점들이 점 P가 될 수 있는 점이다.



삼각형 ABP의 둘레의 길이가 작을 때의 점 P를 P_1, 클 때의 점 P를 P_2라 하면
$l_1=\overline{AB}+\overline{P_1B}+\overline{AP_1}=\overline{BF}+\overline{P_1B}+\overline{AP_1}=\overline{P_1F}+\overline{AP_1}$ 인데
타원의 정의에 의하여 $\overline{P_1F}+\overline{AP_1}=10$ (장축의 길이) 이다.
따라서 $l_1=10$.

$l_2=\overline{AB}+\overline{BP_2}+\overline{AP_2}=\overline{AB}+\overline{BF}+\overline{FP_2}+\overline{AP_2}=2\overline{AB}+10$
(*by* 타원의 정의 및 대칭성, $\overline{AB}=\overline{FB}$) 이므로
$l_2-l_1=2\overline{AB}=4\sqrt{5}$이다.

19. 〈 (가) 해석〉

$ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b)은

$(5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1)$

로 총 10개이고, $(5, 1), (1, 5)$일 때 $a+b$는 최댓값 6을 갖는다.

$\therefore p=6$

$a+b$의 최댓값이 6이고, 문제 조건에서 n은 7 이상의 자연수이기 때문에 자연스럽게 $a+b\le n$를 항상 만족시킬 수 밖에 없음을 확인하자.

〈 (나) 해석〉

a, b는 자연수이고, c는 음이 아닌 정수이므로

$a=a'+1,\ b=b'+1$로 두면 $a+b+c=a'+b'+c+2=n$에서

$a'+b'+c=n-2$이다.

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_2$이다.

$\therefore f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

〈 (다) 해석〉

조건부확률에 의하여

$g(n)=\dfrac{10}{\dfrac{n(n-1)}{2}}=\dfrac{20}{n(n-1)}$이다. (10은 $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b)의 개수를 뜻한다.)

따라서 $f(p+2)\times g(p+1)=f(8)\times g(7)=28\times\dfrac{10}{21}=\dfrac{40}{3}$이다.

출제자의 한마디
보통 '확률에서는 중복조합을 쓰면 안된다.' 는 말을 많이 들었을 것이다. 하지만, 각각 근원사건의 확률이 같은 경우, 중복조합으로 구한 경우의 수로도 확률을 구할 수 있다.
근원사건이 기대되는 정도가 같은 경우, 어떤 방법을 쓰든 상관이 없다.

20.

ㄱ.

선분 AB의 중점과 선분 BC의 중점을 지나는 직선이 직선 DE이므로, 중점연결정리에 의하여 직선 AC와 평행하다.

ㄴ.

원의 중심을 O라 하면, $\angle\mathrm{DAE}$는 호 DE에 대한 원주각이므로, 중심각의 $\dfrac{1}{2}$배, 즉 $\angle\mathrm{DAE}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{DOE}$이다.

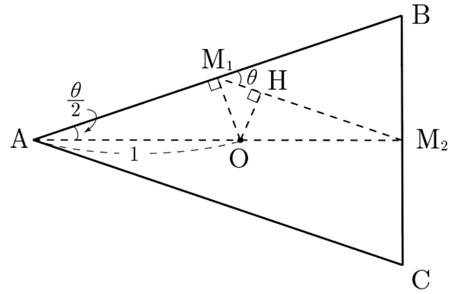
삼각형 DOE는 두 변 OD, OE의 길이가 1인 이등변삼각형이다. 점 O에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 H라 하면, 이등변삼각형의 성질에 의하여 선분 OH는 $\angle\mathrm{DOE}$를 이등분하는 선이 된다.

따라서 $\cos(\angle\mathrm{DAE})=\cos\left(\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{DOE}\right)=\dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OE}}}=\overline{\mathrm{OH}}$ 이다.

따라서 ㄴ.은 옳다.

ㄷ.

이제 선분 OH의 길이를 구해보자.



선분 AB의 중점을 $\mathrm{M_1}$, 선분 BC의 중점을 $\mathrm{M_2}$라 하면,

$\angle\mathrm{M_1AO}=\dfrac{\theta}{2}$, $\angle\mathrm{AM_1O}=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{AO}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{M_1O}}=\sin\dfrac{\theta}{2}$이다.

또한 중점연결정리에 의해 삼각형 $\mathrm{M_1M_2B}$와 삼각형ACB는 닮음이므로 $\angle\mathrm{M_2M_1B}=\angle\mathrm{CAB}=\theta$에서 $\angle\mathrm{OM_1H}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{M_1O}}\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\theta$이므로

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta}{\theta}=\frac{1}{2}$이다.

21. (가)조건에서 방정식 $\left(\displaystyle\int_2^x f(t)dt-f(4)\right)\left(\displaystyle\int_4^x f(t)dt-f(2)\right)=0$ 의 해 중 두 개가 2, 4임을 알 수 있으므로 $x=2, 4$를 대입해보자.

$x=2$를 저 식에 대입하면 $f(4)\left(f(2)-\displaystyle\int_4^2 f(t)dt\right)=0$이다.

따라서 $f(4)=0$ 이거나 $f(2)=\displaystyle\int_4^2 f(t)dt$여야 한다. …①

또한, $x=4$를 저 식에 대입하면 $\left(f(4)-\displaystyle\int_2^4 f(t)dt\right)f(2)=0$이다.

따라서 $f(2)=0$ 이거나 $f(4)=\displaystyle\int_2^4 f(t)dt$여야 한다. …②

결론적으로 ①, ②에서 각각 두 경우 중 최소한 한 경우씩을 만족해야 하므로, 4개의 케이스가 나온다.

$i)$ $f(4)=0$ and $f(2)=0$ 일 때, 실수 전체 집합에서 증가한다는 조건에 모순이 되므로 불가능하다.

$ii)$ $f(4)=0$ and $f(4)=\displaystyle\int_2^4 f(t)dt$일 때,

$f(4)=0=\displaystyle\int_2^4 f(t)dt$인데, $f(x)$는 실수 전체 집합에서 증가하는 함수이고 $f(4)=0$이므로 구간 $(2, 4)$에서 함수 $f(x)$는 음의 함숫값을 갖고, 따라서 $\displaystyle\int_2^4 f(t)dt$의 값은 0이 될 수 없다. (자세히 말하면 $\displaystyle\int_2^4 f(t)dt$는 음수여야 한다.)

$iii)$ $f(2)=0$ and $f(2)=\displaystyle\int_4^2 f(t)dt$ $\left(=-\displaystyle\int_2^4 f(t)dt\right)$일 때,

$ii)$에서와 비슷하게 $f(x)$가 증가함수이고 $f(2)=0$이므로 구간

$(2, 4)$에서 함수 $f(x)$는 양의 함숫값을 갖기 때문에 $\int_2^4 f(t)dt$의 값은 0이 될 수 없다. 따라서 모순.

$i)$ ~ $iii)$이 모두 불가능하므로, 결국
$f(4)=\int_2^4 f(t)dt$ and $f(2)=\int_4^2 f(t)dt$ $\left(=-\int_2^4 f(t)dt\right)$
만 가능함을 알 수 있고, 이 두 식에서 $\underline{f(4)=a\text{라 하면}}$ $\underline{f(2)=-a}$임을 알 수 있다.

(참고로, $f(x)$는 증가하는 함수이므로 $f(4)=a$는 당연히 양수여야 할 것이다.)

이제 (나)조건과 (다)조건을 융합해서 보자. (나)조건은 점대칭, (다)조건은 적분관계식을 주었는데, 익숙한 조건이 아닌가? 바로 18학년도 6평 30번 문제에서 사용된 점대칭함수의 적분이다.
점대칭함수의 적분에 의하여 $\int_3^5 f(x)dx$의 값은 네 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$, $(3, f(4))$, $(5, f(4))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이인 $2f(4)$와 같으므로,
(**<u>해설 마지막의 추가해설(유도과정)을 반드시 읽어보도록 하자.</u>**)
$\int_3^5 f(x)dx=\int_4^5 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx=2f(4)$이다.
$\int_4^5 f(x)dx=2f(4)-\int_3^4 f(x)dx$를 (다)조건에 대입하면
$2f(4)-\int_3^4 f(x)dx-\int_2^3 f(x)dx=2f(4)-\int_2^4 f(x)dx=f(4)$
$=2$ 이므로 $f(4)=2$이다.

출제자의 한마디
해설의 편의를 위해 정적분의 구간을 나눠 두 정적분으로 만드는 '번거로운 짓'을 했지만, 실전풀이는 증가하는 점대칭함수의 그래프를 그려서 해석할 수 있어야 한다.

따라서 $f(6)$의 값을 구하면 되는데,
$f(4)=2$, $f(2)=-2$이고 $f(x)$는 $(4, 2)$에 대한 점대칭함수이므로 $f(6)+f(2)=2f(4)$에서 $f(6)=6$임을 알 수 있다.

이제, A의 원소 중 $2, 4$가 아닌 것들을 파악해 보자.

$f(4)=2$, $f(2)=-2$를 대입해보면
$\left\{x \,\middle|\, \left(\int_2^x f(t)dt-2\right)\left(\int_4^x f(t)dt+2\right)=0\right\}$ 인데,
$\int_2^x f(t)dt-2=\int_2^x f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt=\int_4^x f(t)dt$이므로 결국
$\int_4^x f(t)dt\left(\int_4^x f(t)dt+2\right)=0$의 해를 찾으면 된다.

$\int_4^x f(t)dt$의 값이 0이거나 -2인 x를 모두 찾기 위해 함수 $g(x)=\int_4^x f(t)dt$의 그래프를 그려보자.

$g(2)=-\int_2^4 f(t)dt=-2$, $g(4)=0$이고 $g'(x)=f(x)$이다.

또한 $g'(x)=f(x)=0$을 만족시키는 $x=\alpha$는 구간 $(2, 4)$에 오직 하나 존재할 것이고 ($\because f(2)f(4)=-4<0$이고 $f(x)$는 증가함수이므로 사이값 정리에 의하여)
함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 가질 것이다.

그 극솟값은 $f(2)$의 값인 -2보다 작으므로
($\because$구간 $(2, \alpha)$에서 $f(x)<0 \Leftrightarrow g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 감소함수이다.)
결론적으로 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2, $g(x)=-2$의 서로 다른 실근의 개수도 2가 되어 $n(A)$의 값은 4가 된다.

따라서 $f(6)+n(A)=6+4=10$.

〔'점대칭함수의 적분에 의하여 $\int_3^5 f(x)dx$의 값은 네 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$, $(3, f(4))$, $(5, f(4))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이인 $2f(4)$와 같으므로~' 에 대한 추가해설(유도과정)〕

ⓐ $f(x)=0$인 x는 3보다 작다. (즉, $f(3)>0$)

pf) $f(4)=\int_2^4 f(t)dt$를 보자.
$f(4)$는 $(3, 0)$, $(4, 0)$, $(3, f(4))$, $(4, f(4))$를 꼭짓점으로 갖는 직사각형의 넓이와 같다.
만약 $f(x)=0$인 x가 3 이상이라 가정하면, (귀류법)
$\int_3^4 f(t)dt$의 값은 이 직사각형의 넓이와 같을 수 없다.
(=직사각형의 넓이보다 항상 작은 값을 갖게 된다.)
심지어 $\int_2^3 f(t)dt$의 값은 $f(t)$가 구간 $(2, 3)$에서 음수이므로 정적분 값도 음수이다.
이는 조건에 모순이므로 $f(x)=0$인 x는 3보다 작다.
또한 $f(x)$는 증가함수이므로, $x\geq 3$이면 $f(x)>0$.

ⓑ $\int_3^5 f(t)dt=2f(4)$

pf) 정적분의 값=둘러싸인 넓이가 되려면, 적분구간 내에서 $f(t)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다. (부호가 양수이면 그대로, 부호가 음수이면 정적분의 값에 -1을 곱해줘야 둘러싸인 넓이)

ⓐ에서 $x\geq 3$이면 $f(x)>0$임을 보였으므로 적분구간 $3\sim 5$에서 $f(t)$의 부호는 바뀌지 않는다.
즉, 정적분의 값=둘러싸인 넓이이고, $f(x)$는 $(4, f(4))$에 대해 점대칭이므로
$x=3$, $y=f(4)$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이와
$x=5$, $y=f(4)$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 같다.
$\int_3^5 f(t)dt$에서 $x=5$, $y=f(4)$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분을

$x=3$, $y=f(4)$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분으로 옮겨주면 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$, $(3, f(4))$, $(5, f(4))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이인 $2f(4)$와 같음을 알 수 있다.

($cf.$ 적분구간 내에서 함숫값의 부호가 바뀌지 않아야 기하학적으로 증명이 되지만, 사실 (가)식을 적분구간 $[0, 1]$에서 적분한 후 좌변의 적분에 치환적분을 적당히 적용시켜주면 함숫값의 부호에 상관없이 $\int_3^5 f(t)dt=2f(4)$임을 보일 수 있다.)

22. ${}_4C_3+{}_4P_3=4+4\times3\times2=28$ 이다.

23. $\int_0^{\ln 10} e^x\sqrt{e^x-1}\,dx$ 에서,

$e^x-1=t$로 치환하면,

$$\int_0^9\sqrt{t}\,dt=\int_0^9 t^{\frac{1}{2}}dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^9=\frac{2}{3}\times27=18$$

24. 표본비율이 $\hat{p}=\frac{1}{5}$이므로, 신뢰도 90%의 신뢰구간을

구하면, $\mathrm{P}(-\alpha\le Z\le\alpha)=\frac{90}{100}$에 대하여

$\frac{1}{5}-\frac{2}{5\sqrt{n}}\times\alpha\le p\le\frac{1}{5}+\frac{2}{5\sqrt{n}}\times\alpha$로 둘 수 있다.

신뢰구간이 $\frac{1}{5}-\frac{2}{50}\times1.64\le p\le\frac{1}{5}+\frac{2}{50}\times1.64$로

주어졌으므로, $\frac{\alpha}{\sqrt{n}}=\frac{1.64}{10}$이다.

그런데, $\mathrm{P}(0\le Z\le1.64)=\frac{9}{20}$이므로,

$\mathrm{P}(-1.64\le Z\le1.64)=\frac{9}{10}$ 이다.

따라서 $\alpha=1.64$이고 $\sqrt{n}=10$이므로 $n=100$이다.

25. 평면 위의 점 Q를 (a, b, c)로 두면, $a+2b-2c=9$이고

선분 PQ의 중점 M의 좌표는 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+2}{2}\right)$와 같다.

$x=\frac{a+3}{2}$, $y=\frac{b+2}{2}$, $z=\frac{c+2}{2}$라 둔 후, $a+2b-2c=9$에

대입해주면 $x+2y-2z=6$을 얻는다.

원점 O에서 중점 M의 자취를 나타내는 평면 $x+2y-2z=6$

까지의 최단거리는 $d=\frac{6}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2$이다.

따라서 $20d^2=80$이다.

26. $g(x)$는 연속함수이므로 $x=1$에서의 연속성에 의해

$f(1)=\frac{1}{4}$임을 알 수 있다.

<u>즉, 점 $\left(1, \frac{1}{4}\right)$는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다.</u>

먼저 구체적인 함수가 제시된 $x=1$부터 $x=3$까지의 곡선

$g(x)$의 길이를 구해보자. $g'(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}$이므로 곡선의

길이는 $\int_1^3\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}dx=\int_1^3\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}dx$

$$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\right]_1^3=2+\frac{1}{2}\ln3$$ 이다.

따라서 $x=0$부터 $x=1$까지의 $y=f(x)$의 길이가 1임을 알 수 있다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(0, f(0))$, $\left(1, \frac{1}{4}\right)$에 대하여 두 점을

잇는 곡선의 길이의 최솟값은 <u>두 점을 이은 선분의 길이</u>인

$\sqrt{1^2+\left(f(0)-\frac{1}{4}\right)^2}$ 이다.

그런데 $x=0$부터 $x=1$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이가

1이므로, $f(0)-\frac{1}{4}$의 값은 0이 되어야 한다.

따라서 $f(0)=\frac{1}{4}$이며 $f(x)$는 이 구간에서 직선이 되어야 하므로

$f(x)=\frac{1}{4}$ $(0\le x\le1)$.

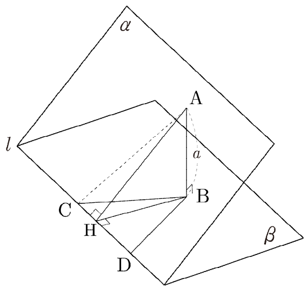
$$\therefore\int_0^2 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}+\left(\frac{13}{12}-\ln2\right)=\frac{4}{3}-\ln2$$ 이다.

따라서 $a+b=\frac{1}{3}$, $60(a+b)=20$ 이다.

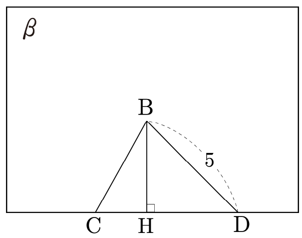
출제자의 한마디
구한 $f(x)$가 $f(x)=\frac{1}{4}$ $(0\le x\le1)$이라서 $x=1$에서 $g(x)$가 **<u>우연히</u>** $x=1$에서 미분가능하게 된다. 하지만 문제에서는 $g(x)$가 $x=1$에서 연속인 것만 알 수 있을 뿐 미분가능성을 알지 못한다. 따라서 곡선의 길이를 한 번에 $\int_0^3\sqrt{1+\{g'(x)\}^2}dx$로 구하는 것은 위험한 발상이다.

27. 먼저 그림의 상황을 나타내면, 다음과 같다.
평면 α 위의 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발이 B이고, 교선 l 위에 점 C,D를 길이에 맞게 적절하게 잡아 그리면 된다.



사면체 ABCD의 부피 조건을 이용하기 위해 삼각형 BCD의 넓이를 구해야 한다. 선분 CD의 길이를 알고 있으므로 점 B에서 교선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면, 선분 BH의 길이를 이용하여 삼각형 BCD의 넓이를 구하자.
이 때, 교선 l과 선분 AH는 삼수선의 정리에 의해 수직임을 알 수 있고, 이면각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로, 선분 AB의 길이를 a로 두면, 선분 BH의 길이도 a임을 알 수 있다.

사면체 ABCD의 부피는 $\frac{5}{6}a^2=\frac{40}{3}$ 이므로, $a=4$이다. 선분 BC의 길이만 구하면 피타고라스의 정리를 이용하여 선분 AC의 길이를 구할 수 있으므로, 평면 β 위의 삼각형 BCD에 집중하여 보도록 하자.



$\overline{BH}=4$, $\overline{BD}=5$ 이므로, $\overline{HD}=3$이고,
$\overline{CD}=5$이므로, $\overline{CH}=2$ 이다.
피타고라스 정리에 의해 $\overline{BC}=2\sqrt{5}$, $\overline{AB}=4$ 이고
선분 AB는 평면 β에 수직이므로, 선분 BC와 선분 AB도 수직이다.

따라서 피타고라스 정리에 의해 선분 AC의 길이는 $\sqrt{20+16}=6$이다.

28. $280=2^3\times5\times7$이므로, $abcd=280$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_3\times({}_4\mathrm{C}_1)^2=320$이다.
(추가설명 : ${}_4\mathrm{H}_3$은 문자 4개 중 중복을 허락하여 3개를 고른 후, 골라진 횟수만큼 소인수 2를 부여하는 과정이며, 뒤의 ${}_4\mathrm{C}_1$은 각각 5, 7을 가질 문자를 4개 중 하나 선택해주는 것이다.)

이 중 등비수열을 이루는 숫자구성이 있는 경우를 빼줘야 한다.

$a,\ b,\ c,\ d$중 임의로 $a,\ b,\ c$가 등비수열을 이룬다고 가정하면 등비중항에 의하여 $b^2=ac$이고, 따라서 $b^3d=280$이다.

즉, 등비중항 b가 가능한 값은 1, 2 뿐이므로, 이 때 케이스를 나눠 구하도록 하자.

i) 등비중항이 1일 때,
나머지 두 항은 무조건 1, 1이어야 하므로
$a,\ b,\ c,\ d$는 1 3개와 280 1개로 구성되어야 한다.
이 경우는 총 4가지.

ii) 등비중항이 2일 때,
나머지 두 항이 2, 2인 경우에는
$a,\ b,\ c,\ d$는 2 3개와 35 1개로 구성되어야 한다.
이 경우는 i)과 마찬가지로 4가지이며

나머지 두 항이 1, 4인 경우에는
$a,\ b,\ c,\ d$는 1, 2, 4, 35로 구성되어야 한다.
이 경우는 4! 가지이다.

따라서 320에서 4+4+4!을 빼주면 288이다.

출제자의 한마디
검토진들이 제일 많이 대답한 오답은 292였다. 혹시... 님도..?

29. 구 위의 점에 대한 벡터 내적, 합의 최대, 최소를 묻는 문제의 경우 스타트는 항상 '구의 중심을 시점으로 하는 벡터로 분해' 하는 것이 좋다.

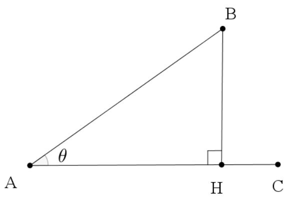
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{CE}$로 벡터분해하면 $\overrightarrow{BD}$는 크기는 $\sqrt{3}$이고 방향은 어느 방향이든 다 가질 수 있는 벡터이기 때문에, $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}$의 값은 벡터 $\overrightarrow{CE}$가 결정이 됐을 때 $\overrightarrow{CE}$와 $\overrightarrow{BD}$를 같은 방향으로 결정해주면 내적값이 최대가 될 것이다.

이제 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}$가 최대일 때의 상황을 구해보자.

(cf. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}$와 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}$가 각각 최대인 상황이 '동시에' 이루어질 수 있기 때문에 가능한 풀이이다. 비슷한 문제풀이 구조를 띄는 문제로는 2016학년도 수능 29번이 있다.)

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{CE}|\times\cos\theta$를 $|\overrightarrow{AB}|\times(|\overrightarrow{CE}|\times\cos\theta)$의 관점으로 보면, 두 점 C, E를 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 $|\overrightarrow{AB}|\times(|\overrightarrow{CE}|\times\cos\theta)=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2}|$와 같다.
(단, θ가 예각일 때)
==============================

(참고)



위 그림에서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AH}| \times |\overrightarrow{AC}|$ (단, θ가 예각)

위 개념은 실전에서 매우 자주 사용되므로 꼭 알아두자.

= =

$\overrightarrow{AB}$는 고정된 벡터이고 점 C 역시 고정된 점이므로, E의 수선의 발 H_2가 점 C의 수선의 발 H_1으로부터 멀리 떨어져 있을 때 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$가 최대가 나온다.

따라서 최대인 경우는 그림에 있는 정육면체의 오른쪽 면 위에 점 E가 있을 때임을 알 수 있다.

(참고 : 만약 점 E가 오른쪽 면이 아닌 왼쪽 면에 있다면 두 벡터의 사잇각이 둔각이 나와 최솟값이 나오게 된다.)

따라서 이 상황에서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$의 값은 $8 \times 1 = 8$이다. ⋯ ①

이제 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE}$의 최댓값을 결정해보자. 점 E의 위치는 정육면체의 특정한 한 면(문제의 그림 기준 오른쪽 면) 위에 있어야 함이 결정된 상태이다.
또한 $\overrightarrow{BD}$는 점 E의 위치에 관계없이 $\overrightarrow{CE}$와 같은 방향을 가질 수 있고 크기가 $\sqrt{3}$으로 고정되어 있으므로, 결국 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE}$의 값은 $|\overrightarrow{CE}|$에 의해 결정된다.

정육면체의 오른쪽 면이 구와 만나는 네 점 중 하나가 E일 때, $|\overrightarrow{CE}|$은 최댓값 $\sqrt{3}$을 가짐을 알 수 있고, 따라서 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE}$의 최댓값은 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ ⋯ ②

①, ②에 의하여 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{CE}$의 최댓값은 11임을 알 수 있다.

출제자의 한마디

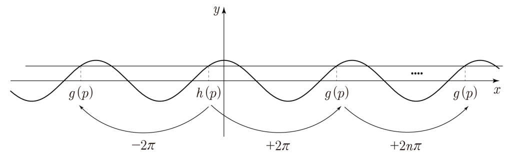
벡터의 구성요소는 방향과 크기이다. 중심이 O인 원 위의 점 P에 대한 벡터가 있을 때 $\overrightarrow{OP}$가 나오게끔 벡터분해를 해주면 $\overrightarrow{OP}$는 방향 무제한, 크기 고정인 벡터이기 때문에 벡터 간 계산 값의 최대, 최소를 결정할 때 자유분방하게 활약할 수 있다.

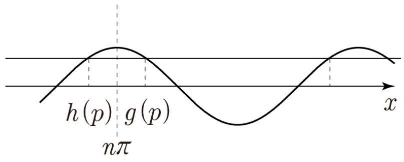
물론, 원 나왔을 때 무조건 이렇게 하면 풀린다! 라고 하는 것은 아니다.
'첫 시도로 해볼 만한 제일 괜찮은 풀이' 정도일 뿐이다.

30. 해설의 편의를 위해 $g(x) = \dfrac{6\pi x}{x^2+1}$, $h(x) = \dfrac{8\pi}{x^2+1}$이라 하자.

이 두 함수가 모두 미분가능한 함수이므로, 함수 $\{\cos f(x)\}^2$의 미분가능성은 $x = p$에서만 따져주면 된다.
함수 $\{\cos f(x)\}^2$이 $x = p$에서 미분가능하기 위해선 $x = p$에서 연속이어야 하고,
$x = p$에서 연속이기 위해선 $\{\cos g(p)\}^2 = \{\cos h(p)\}^2$이어야 한다. 이때 가능한 경우가 두 가지 존재한다.

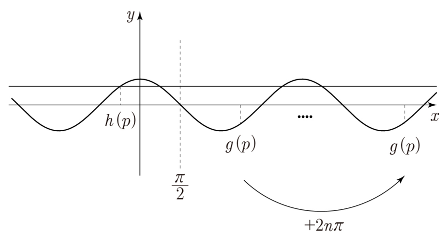
(i) $\cos g(p) = \cos h(p)$인 경우
정수 n에 대하여
$g(p) = 2n\pi + h(p)$ 또는 $g(p) = 2n\pi - h(p)$이어야 한다.





〈참고 그림〉

(ii) $\cos g(p) = -\cos h(p)$인 경우
정수 n에 대하여
$g(p) = 2n\pi + (\pi - h(p))$ 또는 $g(p) = 2n\pi + (\pi + h(p))$이어야 한다.



또, 함수 $\{\cos f(x)\}^2$이 $x = p$에서 미분가능하기 위해선 위의 연속조건을 만족시키면서
$\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{\{\cos f(x)\}^2 - \{\cos f(p)\}^2}{x - p}$의 값이 존재해야 한다.

$$\lim_{x \to p+} \frac{\{\cos f(x)\}^2 - \{\cos f(p)\}^2}{x - p} = \lim_{x \to p+} \frac{\{\cos g(x)\}^2 - \{\cos g(p)\}^2}{x - p}$$
$$= \lim_{x \to p+} \frac{\{\cos g(x) - \cos g(p)\}\{\cos g(x) + \cos g(p)\}}{x - p}$$
$$= \lim_{x \to p+} \left[\frac{g(x) - g(p)}{x - p} \times \frac{\cos g(x) - \cos g(p)}{g(x) - g(p)} \times \{\cos g(x) + \cos g(p)\} \right]$$
$= -2g'(p)\sin g(p)\cos g(p)$이고,

해설 편의상 $2\sin g(p)\cos g(p) = \sin 2g(p)$ 배각공식을 이용하여 $-2g'(p)\sin g(p)\cos g(p) = -g'(p)\sin 2g(p)$라 두고 풀이하자.

<u>(배각공식을 쓰지 않고 본 식 모양 그대로 유지해도 이후 과정이 매우 순탄히 진행되니 교과외문제로 오해하지 말 것!)</u>

동일한 과정을 통해

$\lim_{x\to p-}\dfrac{\{\cos f(x)\}^2-\{\cos f(p)\}^2}{x-p}=-h'(p)\sin 2h(p)$ 이다.

따라서 $g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ 이면

$\lim_{x\to p+}\dfrac{\{\cos f(x)\}^2-\{\cos f(p)\}^2}{x-p}=\lim_{x\to p-}\dfrac{\{\cos f(x)\}^2-\{\cos f(p)\}^2}{x-p}$

이므로 $\lim_{x\to p}\dfrac{\{\cos f(x)\}^2-\{\cos f(p)\}^2}{x-p}$ 의 값이 존재하고,

함수 $\{\cos f(x)\}^2$은 $x=p$ 에서 미분가능하다.

이제 연속조건을 만족시키면서

$g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ 을 만족시키는 p의 값을 찾자.

<u>(i) $g(p)=2n\pi+h(p)$ 또는 $g(p)=2n\pi+(\pi+h(p))$ 인 경우</u>

$\sin 2g(p)=\sin 2h(p)$ 이므로, $g'(p)=h'(p)$ 이면

$g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ (미분가능성 조건)을

만족시킨다.

우선 $g'(p)=h'(p)$ 인 p를 찾자.

$g'(x)=\dfrac{6\pi(x^2+1)-12\pi x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-6\pi x^2+6\pi}{(x^2+1)^2}$ 이고,

$h'(x)=\dfrac{-16\pi x}{(x^2+1)^2}$ 이므로 방정식 $\dfrac{-6\pi x^2+6\pi}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-16\pi x}{(x^2+1)^2}$ 을

풀면

$3x^2-8x-3=(3x+1)(x-3)=0$ 에서

$p=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $p=3$ 일 때, $g'(p)=h'(p)$ 임을 알 수 있다.

이 때, $g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{9\pi}{5}$, $h\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{36\pi}{5}$ 이므로 $p=-\dfrac{1}{3}$ 는

$g(p)=2n\pi+(\pi+h(p))$ 의 경우에 해당되며

$g(3)=\dfrac{9\pi}{5}$, $h(3)=\dfrac{4\pi}{5}$ 이므로 $p=3$ 또한

$g(p)=2n\pi+(\pi+h(p))$ 의 경우에 해당된다.

따라서 이 경우, 조건을 만족시키는 p는 $p=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $p=3$

두 개 존재한다.

<u>(ii) $g(p)=2n\pi-h(p)$ 또는 $g(p)=2n\pi+(\pi-h(p))$ 인 경우</u>

$\sin 2g(p)=-\sin 2h(p)$ 이므로

$g'(p)=-h'(p)$ 이면 $g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ 을 만족시킨다.

우선 $g'(p)=-h'(p)$ 인 p를 찾자.

방정식 $\dfrac{-6\pi x^2+6\pi}{(x^2+1)^2}=\dfrac{16\pi x}{(x^2+1)^2}$ 을 풀면,

$3x^2+8x-3=(3x-1)(x+3)=0$ 이므로 $p=\dfrac{1}{3}$ 또는 $p=-3$ 일

때, $g'(p)=-h'(p)$ 이다.

이때 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{9\pi}{5}$, $h\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{36\pi}{5}$ 이므로 $p=\dfrac{1}{3}$ 는

$g(p)=2n\pi+(\pi-h(p))$ 의 경우에 해당되며

$g(-3)=-\dfrac{9\pi}{5}$, $h(3)=\dfrac{4\pi}{5}$ 이므로 $p=3$ 또한

$g(p)=2n\pi+(\pi-h(p))$ 의 경우에 해당된다.

따라서 이 경우, 조건을 만족시키는 p는 $p=\dfrac{1}{3}$ 또는 $p=-3$

두 개 존재한다.

이제 끝났다고 생각할 수 있지만, i)과 ii) 케이스의 시작을 봐보면 $\sin 2g(p)=\sin 2h(p)$ 또는 $\sin 2g(p)=-\sin 2h(p)$ 라는 이유로 $g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ 에서 아무렇지도 않게 $\sin 2g(p)$, $\sin 2h(p)$ 를 나눴다.

하지만, 어떤 수나 식을 나눌 때에는 항상 '0이 아니다.' 라는 전제조건이 필요하다.

즉, 우리는 이 전제조건을 가정한 채 i), ii)의 케이스를 진행한 것이므로, $\sin 2g(p)$, $\sin 2h(p)$ 중 적어도 하나가 0인 케이스도 따로 고려를 해줘야 한다.

다행히도 연속조건 $g(p)=2n\pi+h(p)$, $g(p)=2n\pi+(\pi+h(p))$, $g(p)=2n\pi-h(p)$, $g(p)=2n\pi+(\pi-h(p))$ 에 의하여, $\sin 2g(p)$, $\sin 2h(p)$ 중 하나가 0이면 다른 하나도 0일 수 밖에 없으므로 동시에 0인 경우만 따지면 된다.

(iii) $\sin 2g(p)=\sin 2h(p)=0$ 인 경우

$g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ 에서

$\sin 2g(p)=\sin 2h(p)=0$ 이면 $g'(p)$ 와 $h'(p)$ 의 값에 관계없이

$g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)=0$ 이므로, 미분가능조건을

만족시킨다.

$\sin 2g(p)=\sin 2h(p)=0$ 을 만족시키기 위해선 <u>두 정수 n, m</u>에

대하여 $g(p)=\dfrac{n}{2}\pi$, $h(p)=\dfrac{m}{2}\pi$ 를 만족시켜야 한다.

조금 더 간단한 함수 $h(x)$를 기준으로 가능한 p를 찾자.

방정식 $h(p)=\dfrac{8\pi}{p^2+1}=\dfrac{m}{2}\pi$ 을 풀면, $p^2+1=\dfrac{16}{m}$ 에서

$p=\pm\sqrt{\dfrac{16}{m}-1}$ (분모조건과 루트 조건에 의해

$0<m\le 16$)이다.

그런데 $\sqrt{\dfrac{16}{m}-1}$ 이 무리수인 경우, $g\left(\sqrt{\dfrac{16}{m}-1}\right)=$

$\dfrac{3m\pi\sqrt{\dfrac{16}{m}-1}}{8}$ 은 어떠한 경우에도 $g(p)=\dfrac{n}{2}\pi$ (n은 정수)

꼴이 나올 수 없다.

따라서 $\sqrt{\frac{16}{m}-1}$ 의 값은 유리수가 되어야 하고,

그러한 m의 값은 $m=8$, $m=16$ 두 가지가 존재한다.
$m=8$일 때, $p=\pm1$이고, $g(-1)=-3\pi$, $g(1)=3\pi$이므로
$\sin 2g(p)=\sin 2h(p)=0$을 항상 만족시킨다.
$m=16$일 때, $p=0$이고, $g(0)=0$이므로
$\sin 2g(p)=\sin 2h(p)=0$을 만족시킨다.

따라서 이 경우, 조건을 만족시키는 p는 $p=-1$ 또는 $p=0$ 또는 $p=1$ 세 가지 존재한다.

(이런 p값들도 연속조건 $g(p)=2n\pi+h(p)$,
$g(p)=2n\pi+(\pi+h(p))$, $g(p)=2n\pi-h(p)$,
$g(p)=2n\pi+(\pi-h(p))$중 하나를 잘 만족시킨다.)

따라서 가능한 p는 -3, -1, $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$, 1, 3으로

총 7개 존재하므로 $n=7$이고, $\sum_{k=1}^{n}(p_k)^2=\frac{182}{9}$이므로

$\frac{9}{n}\sum_{k=1}^{n}(p_k)^2=26$이다.

30번 출제자 Comment
연속조건을 만족시키면서 $g'(p)\sin 2g(p)=h'(p)\sin 2h(p)$ 을 만족시키는 p의 값을 찾을 때, 연속조건을 만족시키는 p의 값이 무수히 많이 나오므로 연속조건을 먼저 분석/분해하여 p에 대한 상세정보를 이용해 푸는 것은 너무 어려운 일이다. 따라서 해설의 방향처럼 연속조건을 만족시키는 케이스를 크게 3~4가지로 나눈 후 미분가능성 조건을 이용하고, 그 조건을 맞는 p들이 연속조건을 만족시키는지 '대입'함으로써 확인하는 방향의 풀이가 옳다.