기하와 벡터

기출의 파급효과

orbibooks.com

기하와 벡터의 도구와 태도

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 오르비에 출시하는 첫 종이책이네요. 작년에 EBS 선별과 칼럼으로 큰 사랑을 받고 기출의 파급효과 시리즈를 집필하기로 마음먹었습니다. 이까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다. 저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 기하와 벡터 기출을 푸는데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서보다 훨씬 얇습니다. 수능이 얼마 안 남은 이 시점, 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예시 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 기출에 대한 태도와 도구들을 바로 활용할 수 있도록 준킬러 이상급의 기출 문제들을 본문 속 예시로 들었습니다. 20학년도 6월 평가원 문제와 출제경향까지 반영되어 있습니다.

기하와 벡터 기출 중 평가원 29번은 물론 오답률이 높은 문제들을 예시로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 더욱 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예시로 든 들어주는 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예시들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 21번, 29번, 30번을 풀 생각이 없어 과거의 21번, 29번, 30번을 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

최근 교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 19학년도 수능 29번의 경우 14학년도 사관학교 15번과 매우 유사하고 20학년도 6월 평가원 21번, 30번은 18년 10월 교육청 21번, 30번과 매우 유사합니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 현재 수능을 대비하기는 힘듭니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 그리고 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 본문과 함께 있는 예시 문제들은 기하와 벡터 교재의 경우 대략 50문제 정도입니다. 예시에 있는 문제 수만으로 부족함을 느끼실 분들을 위해 예시보다는 다소 쉬운 유제들도 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 충분히 넣었습니다.

기하와 벡터 교재의 경우 유제는 대략 70문제입니다. 본문 속 예시뿐만 아니라 유제들도 단순 단원별로 분리된 것이 아니라 기출에 대한 태도와 도구를 기준으로 분리되었습니다.

4. 칼럼 속 예시해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다. 예시보다 다소 쉬운 유제들도 본문에서 배운 태도와 도구 그리고 key point를 comment로 달아 놓았습니다.

예시 해설은 단계별로 분리되어 있어 가독성이 좋아 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다. 유제 comment들은 문제의 핵심을 간략히 보여줍니다. 본문과 예시들을 잘 학습했다면 무리 없이 풀 수 있는 수준입니다.

하루에 예시를 포함한 Chapter 하나만 완료하고 유제 10문제만 푸세요! 이를 실천하면 기하와 벡터 교재를 모두 끝내는 데에 2주가 걸립니다. 수능까지 이 교재를 최소 2번 이상 볼 수 있습니다.

수학 가형 4등급 초반이 1등급 컷 이상 받는 데 1달에서 2달 사이로 걸립니다.
약 파는 것 아닙니다. 과장된 광고를 극도로 싫어하는 편입니다.

저도 18학년도 6월 평가원 때 3등급 받고 여름방학 때 이 책의 내용대로 기출을 학습하고 18학년도 9월 평가원, 18학년도 수능 1등급을 가볍게 받아냈습니다.

제 과외 학생은 19학년도 6월 평가원 때 4등급에 가까운 3등급이었으나 이 방법대로 1달간 기출을 학습하고 19학년도 수능 96점을 받아내었습니다.

수학 가형 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤은 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께합시다.

기출의 파급효과 시리즈

docs.orbi.kr/docs/6753/
미적분 2

docs.orbi.kr/docs/6724/
확률과 통계

교재 이용법

원활한 교재 이용을 위해 대단원, 중단원, 중소단원, 소단원 구분법을 소개하겠습니다.

대단원 제목입니다.

CHAPTER 01 필수 도형 정리와 이차곡선

대단원에 속한 중단원 제목입니다.

꼭 표시해야 할 도형적 요소

중단원에 속한 중소단원 제목입니다.

6. 이차곡선

중소단원에 속한 소단원 제목입니다.

(1) 정의 관련 보조선

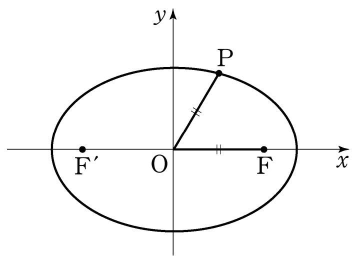
위를 참고하여 학습하신다면 Chapter 내용이 더욱 유기적으로 연결될 것입니다. 헷갈린다면 Chapter를 순서대로 읽어나가셔도 전혀 문제가 없습니다.

원활한 교재 이용을 위해 예시, 예시해설, 유제, 유제 Comments 구분법을 소개하겠습니다.

본문과 함께 소개되는 예시 문항입니다. 본문 중간중간에 예시들이 등장합니다.

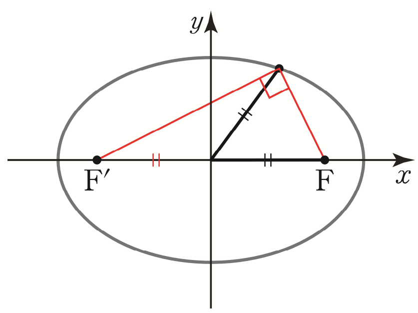
07학년도 9월 평가원 22번

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ 의 두 초점을 F, F'이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OF}}$ 를 만족시킬 때, $\overline{\mathrm{PF}} \cdot \overline{\mathrm{PF'}}$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



예시 문항 해설입니다. 매우 자세하며 본문에서 배운 도구와 태도를 일관적으로 적용합니다.

1. 이후에 더 자세히 설명하겠지만 **이차곡선의 정의와 관련된 보조선은 모두 그어주어야 한다.** 위 문제에 나오는 이차곡선은 타원이므로 타원의 정의와 관련된 초점 두 개와 $\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{PF'}}$ 을 그어 주어야 한다.



문제에서 주어진 그림에서는 타원의 **초점 F와 초점 F′은 표시되어 있으므로 추가적으로** $\overline{\mathrm{PF}}$ **,** $\overline{\mathrm{PF'}}$ **만 그어주면 된다.** $\overline{\mathrm{PF}} \cdot \overline{\mathrm{PF'}}$ 을 알기 위해선 $\triangle \mathrm{PFF'}$ 에 대한 정보를 최대한 표시해야 한다. 따라서 $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF'}}$ 도 표시해 주자.

본문 내용을 체화하기 위한 유제입니다.

CHAPTER

06 문제

01 20학년도 6월 평가원 26번

좌표평면에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=10$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)$에서의 접선을 l, 원점을 지나고 방향벡터가 $(1, 1)$인 직선을 m이라 하고, 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$일 때, 두 수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, $a>b>0$이다.) [4점]

유제 문제에 대한 저자의 Comment입니다.

CHAPTER

05 해설

01 07학년도 수능 6번

답 : ③

평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 이면각을 두 평면의 법선벡터끼리 이루는 각으로 바라보자. 문제에 주어진 그림에서 두 평면의 법선벡터와 평행한 선분을 쉽게 찾을 수 있다.

두 평면의 법선벡터를 그림에서 찾기 어렵다면 좌표를 잡아도 좋다.

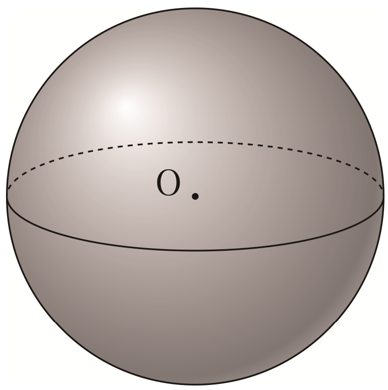
위를 참고하여 학습하신다면 교재 이용이 더욱 편리합니다.

CHAPTER

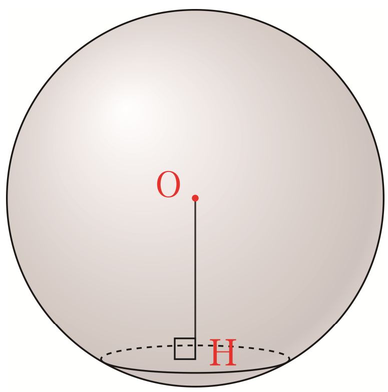
04 예쁜 입체, 효율적인 좌표 잡기

Chapter 4에서 말하는 **예쁜 입체**는 우리가 주로 보는 **구, 정육면체, 직육면체, 정사면체 등등**을 말한다. 이런 입체에서는 **좌표를 효율적으로 잡는 방법이 정형화**되어있다. 다만, 이런 입체가 아니더라도 **직각을 적어도 하나 이상 끼고 있는 입체라면 좌표를 효율적으로 잡을 수 있다.**

1. 구

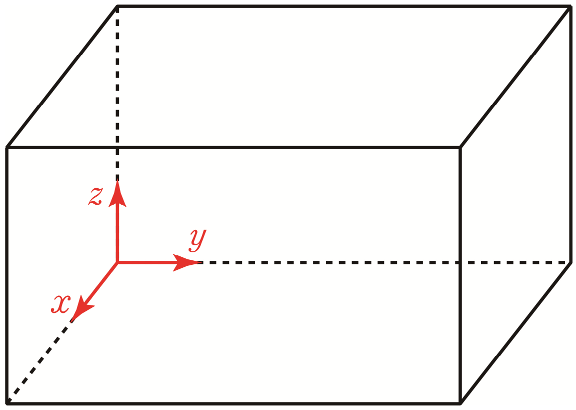


구면 좌표계는 대학 과정이고 딱히 쓸 일도 없다. 문제에서 구가 나올 때 좌표가 필요한 경우는 다음과 같다.



어떤 평면에 의해 구가 잘릴 때 잘린 단면은 원이다. 점 H는 이 원의 중심이자 구의 중심 O 의 수선의 발이다. 점 H 의 좌표는 구의 중심 O 의 수선의 발인 점을 이용해 구한다. 수선의 발 좌표를 효율적으로 구하는 방법은 이후에 소개한다.

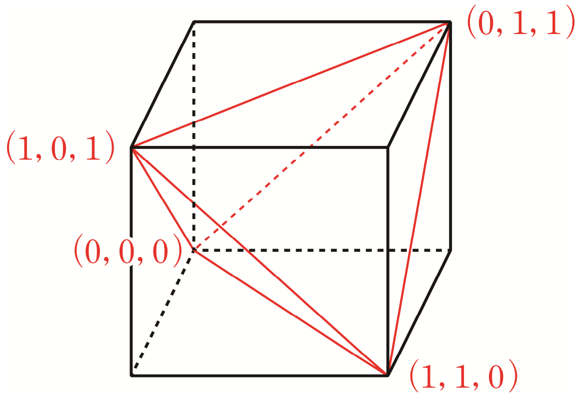
❖ 2. 직육면체



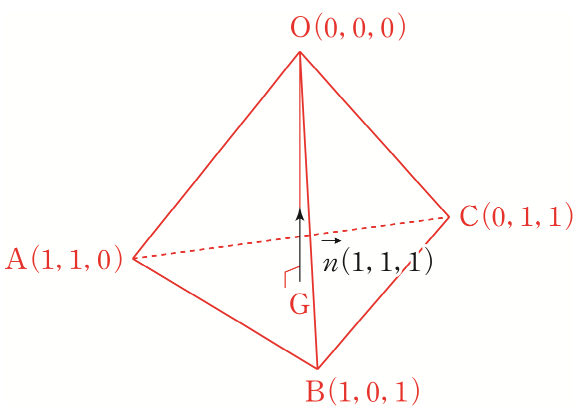
수직, 평행 조건이 많을 때 직육면체를 그려주자. 삼수선 정리를 의식하지 않아도 직관적으로 직각들을 찾을 수 있고 x, y, z 축 설정도 매우 쉽다.

❖ 3. 정사면체

정사면체를 정육면체에 끼워보자.



정사면체만을 분리하여 보자.

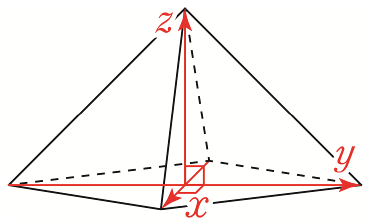


한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사면체의 꼭짓점 좌표는 각각 $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ 로 잡을 수 있다. 규칙성이 쉽게 보여 금방 외운다. **밑면 $\triangle ABC$ 의 법선벡터 $\vec{n}$는 $(1,1,1)$ 이다.**

정사면체 꼭짓점 좌표는 그림 위에 표시하는 것이 좋다. x, y, z 축 설정이 없기에 정사면체 꼭짓점 이외의 정사면체 위의 점의 좌표는 정사면체 꼭짓점들의 내분점, 외분점 관계를 이용해야 하기에 구하기 쉽지 않기 때문이다.

※ Chapter 3에서 좌표는 그림 위가 아닌 다른 빈 공간에 적으라고 했지만 정사면체 꼭짓점 좌표는 예외라고 언급한 적이 있다.

4. 정사각뿔 (피라미드)

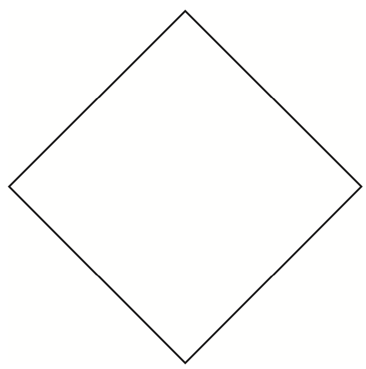


정사각형 밑면의 대각선을 x, y 축으로 두면 수월하다. '직각'을 끼고 있기 때문이다.

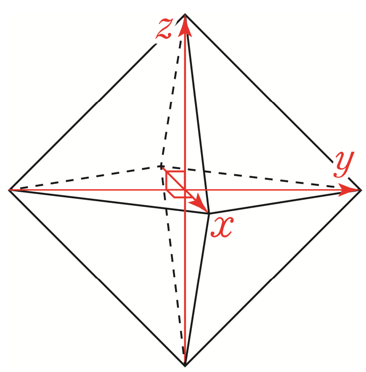
※ 정팔면체 잘 그리는 방법

정팔면체를 예쁘게 그리기가 생각보다 어렵다. 직접 그려보면 느낄 것이다. 하지만 아래와 같은 방법으로 그리면 정팔면체의 특성이 잘 드러나며 예쁘게 그려진다.

먼저 정사각형을 그린다.

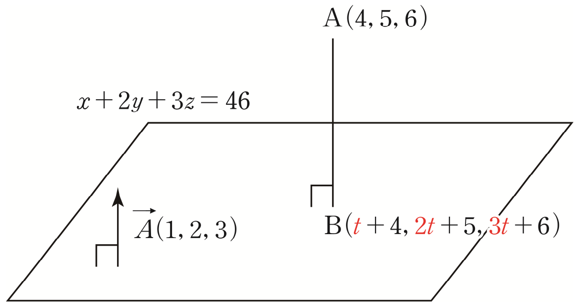


이 정사각형 위에 정팔면체가 그려지도록 선을 추가한다.



정팔면체는 정사각뿔 두 개를 합쳐놓은 형태이다. 좌표축도 정사각뿔과 유사하게 잡으면 된다.

5. 수선의 발 좌표



점 $\mathrm{A}(4, 5, 6)$ 의 평면 $x+2y+3z=46$ 위로의 수선의 발 B 의 좌표를 구해보자.
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ **가 평면** $x+2y+3z=46$ **의 법선벡터인** $\vec{n}$ $(1, 2, 3)$ **과 평행하다.**
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t, 2t, 3t)$ 로 둘 수 있고 점 B 의 좌표는 $(t+4, 2t+5, 3t+6)$ 이 된다.
좀 더 능숙해지면 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t, 2t, 3t)$ 를 두지 않고도 점 B 의 좌표를 잡을 수 있다.

평면의 방정식 $x+2y+3z=46$ 에 점 B 의 좌표 $(t+4, 2t+5, 3t+6)$ 를 대입해 t를 구하면 점 B 를 완전히 구할 수 있다.
$t+4+4t+10+9t+18=14t+32=46$, $t=1$ 이므로 점 B 의 좌표는 $(5, 7, 9)$ 이다.

벡터 관점으로 평면 위로의 수선의 발을 구하면 직선의 방정식을 세우는 과정 생략이 가능하다. 그러니 제발 직선의 방정식을 사용하여 평면 위로의 수선의 발 좌표를 구하지 말자. 직선의 방정식을 세우는 데에 시간도 오래 걸리고 직선의 방향벡터 성분 중 하나가 0이면 직선의 방정식 세우기가 보통 수험생들에겐 매우 헷갈린다.

6. 예쁘지 않은 입체

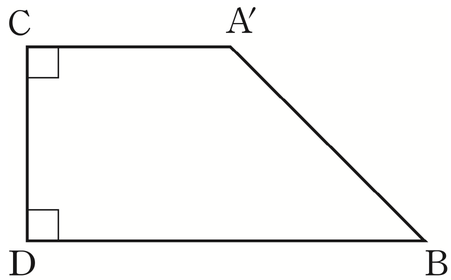
앞에서 소개한 입체들을 제외한 나머지 입체들은 예쁘지 않다. 이런 경우 입체의 밑면을 그린 후 생각해야 한다.
밑면을 먼저 그려주는 이유는 어렸을 때 쌓기나무를 했던 기억을 떠올리면 된다.

어떤 평면 도면을 주어야 친구 A 가 쌓기나무로 내가 원하는 입체를 만들기 제일 쉬울까?

3	5	2		
	4	6	2	3
		4		

쌓기나무로 만든 입체를 위에서 바라본 모습이 그려져 있고 각 영역마다 몇 개의 쌓기나무가 쌓여있는지 적어둔 도면을 준다면 친구 A 도 쉽게 내가 원하는 입체를 만들 수 있을 것이다.
공간도형도 이와 같은 원리로 생각할 수 있다. **17학년도 9월 평가원 29번을 예로 들어보자.**

쌓기나무로 만든 입체를 위에서 바라본 모습은 **공간도형의 밑면**에 해당한다. 따라서 아래와 같이 **17학년도 9월 평가원 29번에 등장하는** 입체 $\mathrm{AA'CDB}$ 의 밑면을 먼저 그리고 난 후에 점 A를 점 $\mathrm{A'}$ 위에 올려준다. 공간도형을 입체적으로 열심히 그리는 것보다 시간도 적게 걸리고 조건 파악도 훨씬 쉬워진다.



직각을 끼고 있는 변 중 일부를 x, y축으로 잡고 평면 $\mathrm{A'CDB}$ 위로 z축까지 잡으면 좌표를 잡을 준비가 완료된다.

예쁘지 않은 입체의 변들이 직각을 아예 안 끼고 있다면 어떡하나요?

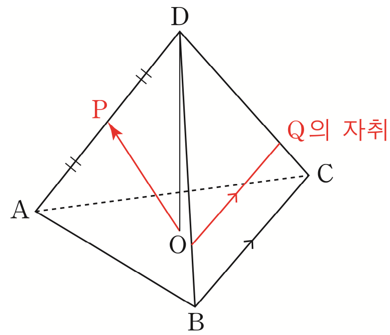
현 교육과정에 제2 코사인 법칙도 없고 **평가원이 뜬금없이 직각을 전혀 찾아볼 수 없는 근본 없는 입체를 문제에 내진 않을 것이다.** 따라서 직각을 적어도 하나는 낄 수밖에 없다. 직각을 낀 변 중 일부를 x, y축을 잡을 수 있게 되면서 좌표도 잡을 수 있게 된다. 꼭 기억해라! 두 변이 직각을 끼고 있다면 좌표 잡기가 발동된다.

지금까지 배운 내용을 잘 숙지하여 좌표를 효율적으로 잡을 수 있게 입체를 그려보자. Chapter 5에서 외적까지 배우게 된다면 공간도형, 공간도형 벡터, 공간도형 방정식에 있어 천하무적의 상태가 될 것이다.

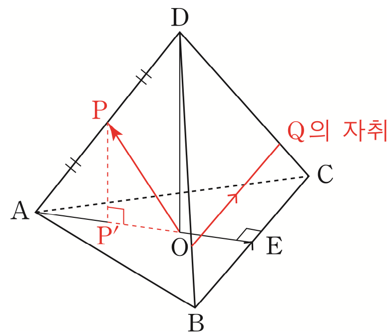
17학년도 수능 29번

한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD 에서 삼각형 ABC 의 무게중심을 O, 선분 AD 의 중점을 P 라 하자. 정사면체 ABCD 의 한 면 BCD 위의 점 Q 에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. 문제에서 주어진 **조건들을 보기 쉽게 $\triangle \mathrm{ABC}$ 를 정사면체의 밑면으로 둔다.**



두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 가 서로 수직이므로 점 Q는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 를 법선벡터로 하고 점 O를 지나는 평면과 $\triangle \mathrm{BCD}$ 의 교선에 존재한다. 이때 이 선분은 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 와 평행하다. 증명은 다음과 같다.



$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ **임을 증명하기 위해서는** $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ **을 보이면 된다.**

Chapter 2에서 배웠듯이 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 를 더 편하게 다루려면 점 P의 평면 ABC 위로의 수선의 발 점 P′를 이용하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP'}} + \overrightarrow{\mathrm{P'P}}$ 로 벡터를 쪼개야 한다.

$\overrightarrow{\mathrm{PP'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 를 $\overrightarrow{\mathrm{OP'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 로 대체할 수 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 가 한 평면 위에 있기에 **공간벡터 문제가 한 차원 낮아져 평면벡터 문제로** 바뀌게 된다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (\overrightarrow{\mathrm{OP'}} + \overrightarrow{\mathrm{P'P}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ **이므로** $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ **이다.**

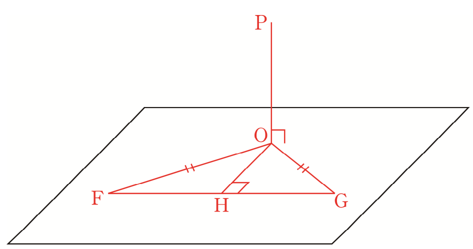
$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 는 평면 BDC 의 법선벡터와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 와 동시에 수직이다.

점 Q 의 자취 역시 평면 BDC 의 법선벡터와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 와 동시에 수직이다.

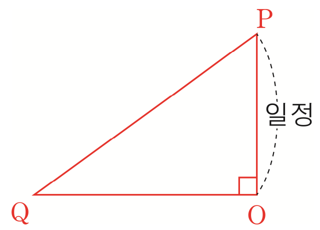
평면 BDC 의 법선벡터와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 와 동시에 수직인 벡터는 **평면 BDC 와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 를 법선벡터로 하고 점 O 를 지나는 평면의 교선의 방향벡터**와 평행하다. **따라서 점 Q 의 자취와 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 가 평행하다.**

여기까지가 공간도형적 요소가 필요한 부분이었다. 이제 좌표를 사용해 마무리해 보자.

2. $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ 가 최대가 되기 위한 점 Q 위치를 찾아야 한다. 이를 위해 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 를 법선벡터로 하고, O를 지나는 평면만을 따로 떼어 관찰하자.



$\overline{FG}$ 는 점 Q 의 자취이다. $\triangle OFG$ 는 이등변삼각형이므로 꼭 수직이등분선, 직각 표시를 해주자.



$|\overrightarrow{PQ}|$ **가 최대가 되기 위해서는** $\overline{OP}$ **길이가 일정하므로** $\overline{OQ}$ **길이가 최대여야 한다.** 따라서 점 Q 의 위치는 점 F 또는 점 G 이다.

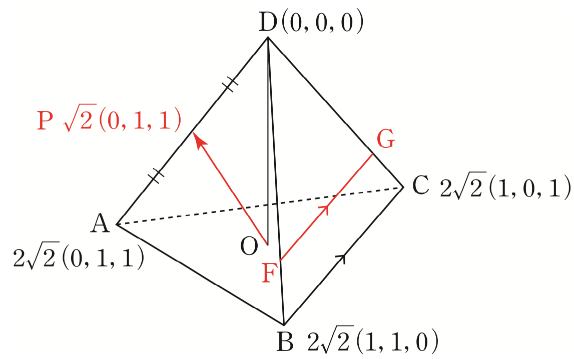
3. 본문에서 배운 대로 정사면체 꼭짓점의 좌표를 잡으면 아래와 같다.

점 Q 의 위치를 점 F 로 잡자.점 F는 $\overline{BD}$ 위의 점이므로 좌표를 $2\sqrt{2}(t, t, 0)$ 로 잡는다.

점 O : $2\sqrt{2}(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$,

점 P : $\sqrt{2}(0, 1, 1)$, $\overrightarrow{OP} = -\frac{\sqrt{2}}{3}(4, 1, 1)$

이다.



$\overrightarrow{OP}$ 를 법선벡터로 하고, 점 O 를 지나는 평면의 방정식은 $4x+y+z=8\sqrt{2}$ **이다.**

평면 $4x+y+z=8\sqrt{2}$ **는 점 F를 지나므로** $8\sqrt{2}t+2\sqrt{2}t=8\sqrt{2}$, $t=\frac{4}{5}$ 이다.

따라서 $|\overrightarrow{PQ}|$ 의 최댓값은 점 P : $\sqrt{2}(0, 1, 1)$, 점 F : $2\sqrt{2}(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ 이므로 $\frac{14}{5}$ 이다.

$p=5, q=14$ 이고 $p+q=19$ 이므로 **답은 19!!**

※ $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OF} = 0$ 를 이용하여 점 F 의 좌표를 구해도 된다.

comment

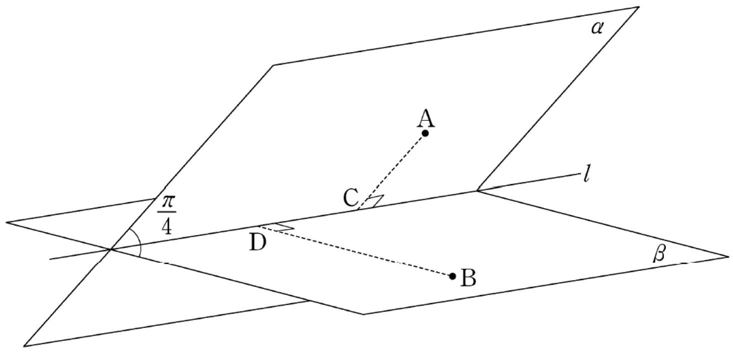
위 문제와 같이 그림이 주어지지 않은 경우 문제의 조건들이 한눈에 들어오기 쉽게 그림을 그려주어야 한다. 또한, 상황에 맞는 그림들을 귀찮아하지 말고 전부 그려야 한다. 그렇지 않으면 기하 실력이 늘 수가 없다. 고기도 먹어본 사람이 잘 먹는다.

점 Q 의 자취가 $\overrightarrow{BC}$ 와 평행임을 삼수선 정리 대신 두 벡터가 수직이면 두 벡터의 내적이 0이 됨을 이용해 쉽게 증명하였다. 좌표, 벡터, 외적으로 공간도형적 요소를 대체하기 위해서는 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ 수직임을 꼭 기억하고 잘 활용해야 한다. **Chapter 5에서 외적을 배우면** 만나는 두 평면의 법선벡터와 동시에 수직인 벡터는 두 평면의 교선과 평행해야 함을 쉽게 알 수 있을 것이다.

보다시피 **킬러급 기하 문제를 완전히 공간도형만으로 또는 완전히 좌표만으로 풀 순 없다. 둘이 적절히 조화를 이루어야 한다.** 하지만 필요한 공간도형 요소는 좌표, 벡터, 외적이 익숙할수록 적어진다.

17학년도 9월 평가원 29번

그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α, β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$ 이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$ 이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



1. 문제에서 **주어진 그림만을 이용해 조건들을 표시하고 필요한 길이와 각을 구하려고 했다면 제발 태도를 바꾸길 권장**한다. 문제 상황 파악이 쉽도록 그림을 새로 그려줘야 한다. 필요한 경우 그림을 여러 개 그릴 각오도 해야 한다.

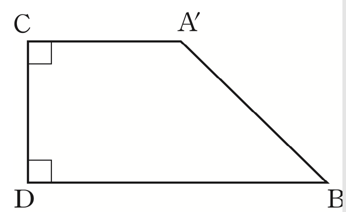
직선 AB 와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$로 주어졌으므로 이를 활용하려면 **점 A 에서 평면 β위로 수선의 발을 내려야 한다.**

점 A 의 평면 β위로의 수선의 발 A$'$을 평면 β에 그려주자.

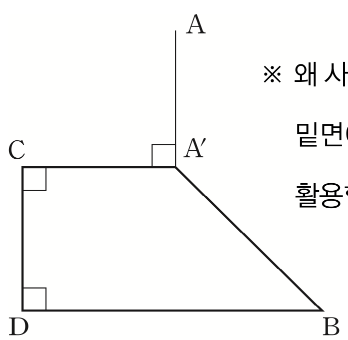
사면체 ABCD 는 아쉽게도 예쁜 입체가 아니다.

입체 AA$'$BCD 도 마찬가지이다.

따라서 입체 AA$'$BDC 의 밑면인 사각형 A$'$BDC 부터 그려준다.



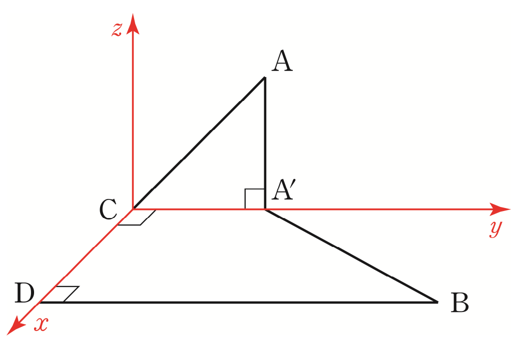
나 같은 경우 입체 AA$'$BCD 그림을 아래와 같이 그려주고 점 A 가 점 A$'$ 위에 떠 있다고 상상한다. **3차원 입체를 그리는 것보다 2차원 평면도형을 그리는 것이 훨씬 쉽기에** 이렇게 그린다. 익숙해지면 조건 파악이 매우 쉽다. 한 번 따라 해보자.



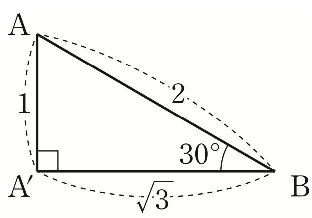
※ 왜 사면체 ABCD 의 밑면이 아닌 입체 AA$'$BCD 을 밑면을 그렸나요?

밑면에 점 A$'$이 있어야 직선 AB 와 평면 β가 이루는 각의 크기 $\frac{\pi}{6}$을 활용할 수 있다.

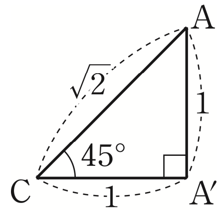
2. 다행히 평가원은 우리의 기대를 저버리지 않았다. **사각형 A$'$BDC 에 직각이 보인다!** 따라서 **좌표축을 잡을 수 있다. 점 C 를 원점으로 잡고 $\overline{\text{CD}}$ 를 x축, $\overline{\text{CA}'}$ 를 y축, $\overline{\text{AA}'}$ 과 평행하게 z축을 잡자.**



이제 사면체 ABCD 의 부피를 구하는데 필요한 길이들을 구해보자.

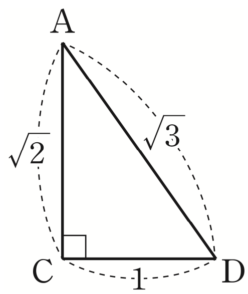


$\triangle AA'B$ 만 떼어와 그려주자. $\overline{AB}=2$ 을 이용해 $\overline{AA'}=1$, $\overline{A'B}=\sqrt{3}$ 를 구할 수 있다.



$\triangle AA'C$ 만 떼어와 그려주자. 두 평면 α, β의 이면각이 $\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\angle ACA'=\frac{\pi}{4}$ 이다.

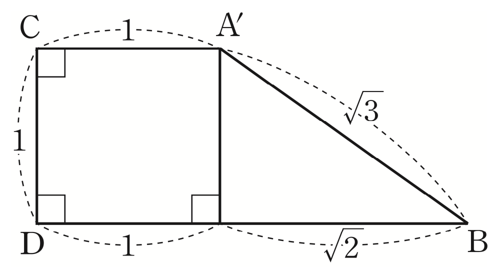
$\overline{AA'}=1$ 을 이용해 $\overline{AC}=\sqrt{2}$, $\overline{A'C}=1$ 을 구할 수 있다.



$\triangle ACD$ 만 떼어와 그려주자. 삼수선 정리에 의해 $\angle ACD=\frac{\pi}{2}$ 이다.

$\overline{AC}=\sqrt{2}$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$ 을 이용해 $\overline{CD}=1$ 을 구할 수 있다.

3. 구한 길이들을 밑면 $A'BDC$ 에 표시하자.



사면체 ABCD 의 부피는 $\frac{1}{3}\times(\triangle BCD$ 의 넓이$)\times(\overline{AA'}$ 길이$)$ 이다.

따라서 사면체 ABCD 의 부피는 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times(\sqrt{2}+1)\right)\times1 = \frac{1}{6}(\sqrt{2}+1)$ 이다.

$a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{6}$ 이므로 $36(a+b)=12$ 이다. **답은 12!!**

※ **사면체 ABCD 이 아닌 입체 $AA'BCD$ 의 부피를 구한 사람도 있을 것이다.**
문제의 답을 구하기 직전에 흥분을 가라앉히고 문제로 돌아가 최종적으로 물어보는 걸 꼭 확인하자!
킬러일수록 흥분을 가라앉히기 힘들어 막판의 실수로 아쉽게 틀리는 경우가 많다. 이런 안타까운 일이 일어나지 않았으면 한다.

comment

어렵지는 않은 문제였으나 **예쁘지 않은 입체에 대한 태도를 확실하게** 할 수 있는 좋은 문제였다. 예쁘지 않은 입체는 반드시 밑면부터 그리자!

보다시피 예쁘지 않은 입체에는 직각이 하나 이상 껴있어서 좌표 잡기 쉬운 형태를 어떻게든 만들어 낼 수 있다. 따라서 두려워할 필요가 전혀 없다.

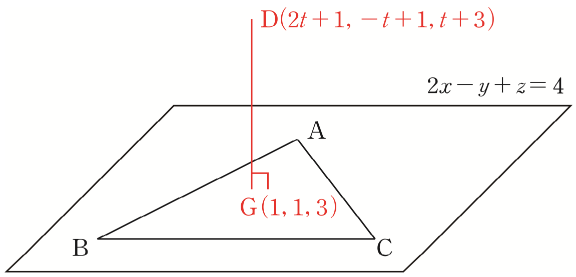
마지막으로, 필요할 때마다 계속해서 그림을 그려주자. 그림 하나만을 이용하면 덜 귀찮긴 하겠지만 실수할 확률이 올라간다. 가슴 아프지만 수능에서 실수는 아무도 인정해주지 않는다.

13학년도 수능 20번

좌표 공간에서 정사면체 ABCD 의 한 면 ABC 는 평면 $2x-y+z=4$ 위에 있고, 꼭짓점 D 는 평면 $x+y+z=3$ 위에 있다. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 G(1, 1, 3) 일 때, 정사면체 ABCD 의 한 모서리의 길이는? [4점]

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

1. 정사면체가 나와서 너무 반가운 마음에 칼럼에서 배운 대로 정사면체 꼭짓점 좌표를 잡았는가?
나쁘지 않은 시도이긴 하지만 그 이후에 문제풀이 진행을 못 한다는 것을 깨달았을 것이다.
따라서 별 꼼수 없이 문제 조건 파악이 쉽도록 그림을 그려주자.



$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ 는 평면 $2x-y+z=4$ 의 법선벡터 $(2, -1, 1)$ 와 평행하므로
점 D **의 좌표는** $(2t+1, -t+1, t+3)$ **으로 잡을 수 있다.**
점 D **는 평면** $x+y+z=3$ **위의 점**이므로 $(2t+1)+(-t+1)+(t+3)=3$, $t=-1$ 이다.
따라서 점 D 의 좌표는 $(-1, 2, 2)$ 이다.

2. 정사면체 높이인 $\overline{\mathrm{DG}}=\sqrt{(-1-1)^2+(2-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{6}$ 이다.
한 변의 길이가 x 인 정사면체의 높이가 $\frac{\sqrt{6}}{3}x$ 이므로 $\frac{\sqrt{6}}{3}x=\sqrt{6}$, $x=3$ 이다.
사면체 ABCD 의 한 모서리의 길이는 3이므로 **답은 ②!!**

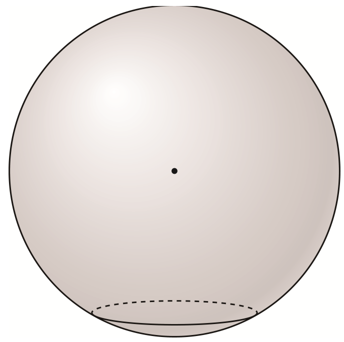
comment

사실 이 문제는 정사면체에 관해 물어본다기보다는 수선의 발의 좌표를 잘 세울 수 있는지를 묻는 문제였다.
정사면체가 나왔다고 해서 꼭 칼럼에 있던 내용대로 정사면체 꼭짓점 좌표를 잡는 것이 아니라 문제 상황에 맞게 융통성 있게 좌표를 잡아야 한다.

18학년도 수능 29번

좌표 공간에 구 $x^2+y^2+z^2=6$ 이 평면 $x+2z-5=0$ 과 만나서 생기는 원 C가 있다. 원 C 위의 점 중 y 좌표가 최소인 점을 P라 하고, 점 P에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 X에 대하여 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\overrightarrow{\mathrm{QX}}\right|^2$ 의 최댓값은 $a+b\sqrt{30}$ 이다.
$10(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.) [4점]

1. 문제의 **첫 문장**을 읽어 보았다. **구와 평면이 만나 원이 생기는 흔한 상황**이다.
Chapter 3에서 배운 대로 구와 구의 중심을 그려준 후에 평면에 의해 잘린 구의 단면을 원의 중심 밑쪽에 그려준다. 하지만 여기서 판단을 잘 해야 한다. 어떠한 판단일까? **좌표축을 그릴까 말까**이다.

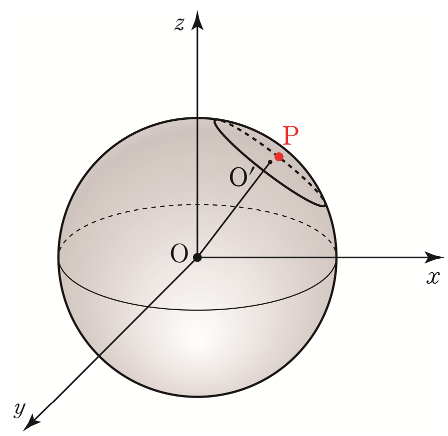


나는 이 당시 수능을 봤으며 처음에는 좌표축을 그리지 않았다.
Chapter 3에서 배웠듯 좌표축을 안 그리는 것이 나의 기본 태도이다.

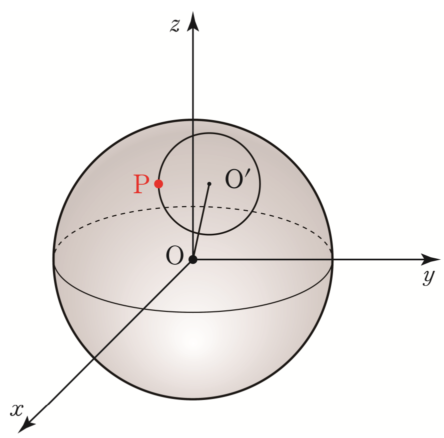
그 이유는 **보통의 경우 좌표축을 그리는 것은 그림을 통해 조건을 파악하는 데에 오히려 방해**된다. 공간 좌표축에 열심히 좌표를 찍으며 문제를 푸려다 그림이 잘 안 그려지거나 다 된 그림에 굳이 좌표축을 그려 그림이 난잡해진 경험들이 많이들 있을 것이다. 같은 이유로 미적분에서 그래프 그릴 때도 원점의 위치를 확실히 알기 전에 y축을 절대 그리지 않는다.
또한, 처음에 평면의 방정식 $x+2z-5=0$ 를 얼핏 보고 좌표축에 정확하게 그리기 어렵겠다는 생각의 영향도 컸다.

2. 문제의 **다음 문장**을 읽어 보았다. 이제 난관에 부딪힌다. y좌표라는 구체적인 말이 나왔기 때문이다. 위와 같이 좌표축을 고려하지 않고 그린 그림은 먹힐 일이 없다. 그래서 **첫 문장**으로 돌아가 평면의 방정식 $x+2z-5=0$ 을 다시 보았다. 다시 생각하니 의외로 **간단한 평면**이었다. **zx 평면 위 직선 $x+2z-5=0$, $y=0$을 확장하면 평면 $x+2z-5=0$ 이기 때문이다.**

따라서 오른쪽과 같이 그림을 그렸다. 하지만 **상식적인 좌표축처럼 그리지 않았다.**



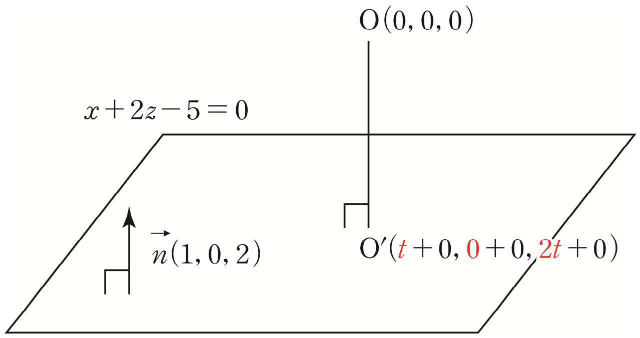
보통 x축이 있어야 할 곳을 y축으로 놓았다. 그 이유는 구를 평면으로 자를 때 옆으로 비스듬히 잘라야 상황 파악이 쉽고 입체의 평면화도 쉬워진다.



※ 왼쪽과 같이 본래 좌표축대로 놓으면 구 앞면이 잘린 형태가 되는데 조건 표시가 힘들고 길이 및 각도 등도 구하기 어렵다.

3. 평면 $x+2z-5=0$, 원 C는 y축과 평행하기에 $\overline{\mathrm{PO}'}$ 역시 y축과 평행하다.

따라서 점 P 와 점 O' 의 x좌표, z좌표가 각각 같고 점 P 의 좌표를 구하기 위해서 점 O' 의 좌표가 필요하다.
이제 구의 중심 O 에서 평면 $x+2z-5=0$ 에 내린 수선의 발 O' 의 좌표를 구하자.



점 $\mathrm{O}'(t,0,2t)$ 이므로 이를 $x+2z-5=0$ 에 대입하면 $t=1$ 이고 점 $\mathrm{O}'(1,0,2)$ 이다.
이렇게 해서 구의 중심 O 의 평면 $x+2z-5=0$ 위로의 수선의 발 O'을 구하였다.

점 P 의 y 좌표를 구하자. 점 P 는 원 C 위의 점들 중 y좌표가 최소인 점이다.
그림을 너무 대충 그리지만 않았으면 **점 P 의 좌표가 점 O'를 y축의 음의 방향으로 원 C의 반지름만큼 평행이동 시킨 점**이라는 것을 발견할 수 있을 것이다.

$\overline{\mathrm{OO}'}$ 의 길이는 $\sqrt{5}$ 이고 구의 반지름은 $\sqrt{6}$ 이므로 **원 C의 반지름은 1**이다.
따라서 **점 $\mathrm{P}(1,-1,2)$ 이고 점 $\mathrm{Q}(1,-1,0)$ 이다.**

※ 왜 점 P 와 점 O' 의 x좌표, z좌표가 각각 같을까?
평면 $x+2z-5=0$ 과 원 C는 y축과 평행하기 때문이다.

4. 이제 문제의 마지막 문장을 읽어보자.

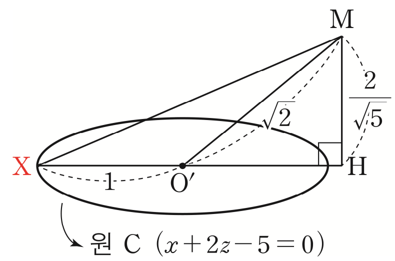
원 C 위를 움직이는 점 X 에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\overrightarrow{\mathrm{QX}}|^2$ 의 최댓값을 구해야 한다.

점 P, 점 Q 는 정점이고 점 X 는 동점이다. $|\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\overrightarrow{\mathrm{QX}}|^2$ 를 간소화시키기 위하여
Chapter 2에서 배운 대로 점 P, 점 Q 의 중점을 이용한다.

점 P, 점 Q 의 중점을 이용하기 위해서 $|\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\overrightarrow{\mathrm{QX}}|^2$ 을 $4\times\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\overrightarrow{\mathrm{QX}}}{2}\right|^2$ 로 바꿔준다.

점 P, 점 Q 의 중점 $\mathrm{M}(1,-1,1)$ 이므로 식을 간편하게 $4\times|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|^2$ 로 바꿀 수 있다.

5. 이제 $|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|$ 의 최댓값을 구해보자. 전에 그렸던 그림을 계속 사용하는 건 바보 같은 짓이다. 그림을 더럽게 만들어 혼동의 여지가 커져 실수하기 쉬워진다. 이제 좌표 알 거 다 알고 점들과 도형 위치 관계까지 알기에 그림을 새로 그리자.



문제 상황을 더욱 파악하기 쉽지 않은가? 점 X 는 원 C 위를 움직인다.

점 H**는 점** M**의** $x+2z-5=0$ **위로의 수선의 발**이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|$ 는 평면 $x+2z-5=0$ 과 점 $\mathrm{M}(1,\,-1,\,1)$ 사이의 거리이므로 $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|$ **가 최대일 때는** $|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|$ **가 일정하므로** $|\overrightarrow{\mathrm{HX}}|$ **가 최대일 때이다.**

$|\overrightarrow{\mathrm{HX}}|$ 가 최대가 되기 위한 점 X 의 위치는 위의 그림에 표시한 위치와 같다.

원 C 의 반지름은 1이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{HX}}|=|\overrightarrow{\mathrm{HO'}}|+1$ 이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{MO'}}|$ 은 점 $\mathrm{M}(1,\,-1,\,1)$ 와 점 $\mathrm{O'}(1,0,2)$ 사이의 거리이므로 $\sqrt{2}$ 이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{HO'}}|$ 는 직각삼각형 $\mathrm{MO'H}$ 에서 피타고라스 정리에 의해 $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ 이다.

결론적으로 $|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|^2$ 의 최댓값은 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(1+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)^2=3+\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$ 이다.

여기서 막 흥분하면 안 된다. 문제의 답을 구하기 직전에 흥분을 가라앉히고 문제로 돌아가 최종적으로 물어보는 걸 꼭 확인하자!

본 목적이 $4\times|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|^2$ 을 구하는 것이었으므로 $12+\dfrac{8\sqrt{30}}{5}$ 이다.

따라서 $a=12,\,b=\dfrac{8}{5}$ 이고 $10(a+b)=136$ 이다. **답은 136!!**

comment

배워갈 것이 참 많은 문제이다. **초반에는 Chapter 3에서 배운 태도를 바탕으로 그림을 그리고, 중반에는 Chapter 4에서 배운 내용을 바탕으로 수선의 발의 좌표를 잡고, 후반부는 Chapter 2에서 배운 벡터 쪼개기로** 마무리를 지었다.

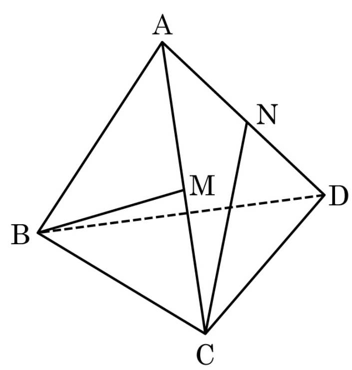
18학년도 수능 29번을 풀 때 한 문장씩 끊어가며 풀어나간 것을 확인할 수 있을 것이다. 킬러 같은 경우 문제를 한꺼번에 다 읽고 풀려고 하지 말고 한 문장씩 끊어가면서 해줄 수 있는 행동을 취해야한다. 말로 된 조건을 수식으로 표현한다든지, 수식으로 된 조건을 말로 풀어 생각해본다든지. 그래프나 그림 그리기 등등을 꼭 해줘야 한다. 미적분 킬러뿐만 아니라 기하와 벡터 킬러도 해당하는 이야기이다.

CHAPTER

04 문제

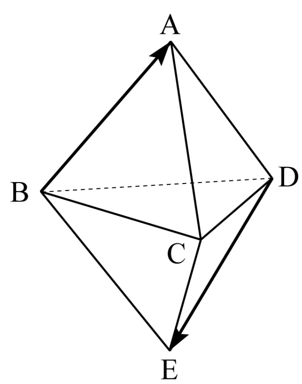
01 11년 10월 교육청 30번

정사면체 ABCD 에서 두 모서리 AC , AD 의 중점을 각각 M , N 이라 하자. 직선 BM 과 직선 CN 이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



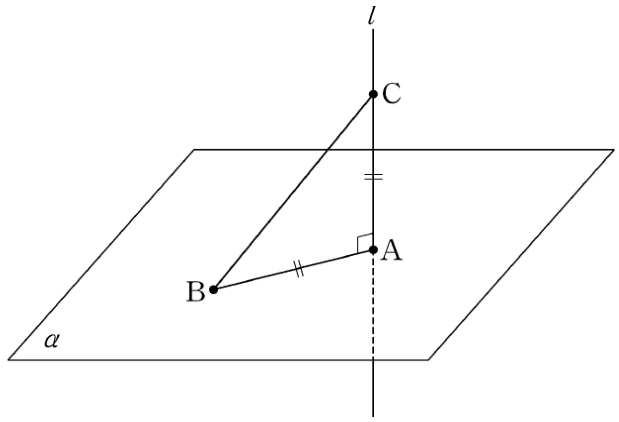
02 10년 10월 교육청 21번

그림은 한 모서리의 길이가 6 인 두 정사면체 ABCD 와 BCDE 에 대하여 면 BCD 를 일치시킨 도형을 나타낸 것이다. 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$ 와 $\overrightarrow{DE}$ 에 대하여 $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}|^2$ 의 값을 구하시오. [3점]



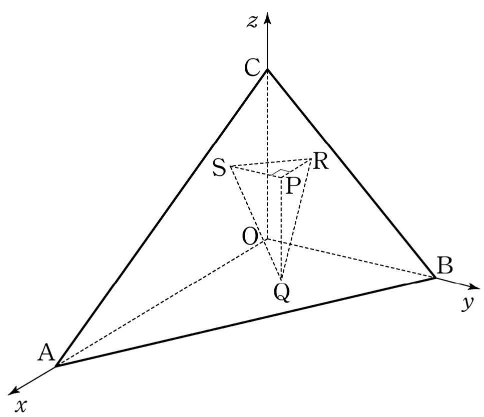
03 14학년도 9월 평가원 28번

좌표공간에서 직선 $l : x-1=\frac{y}{2}=1-z$ 와 평면 α가 점 $\mathrm{A}(1,0,1)$ 에서 수직으로 만난다. 평면 α 위의 점 $\mathrm{B}(-1, a, a)$ 와 직선 l 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC 가 이등변삼각형일 때, 점 C에서 원점까지의 거리는 d이다. d^2의 값을 구하시오. [4점]



04 07학년도 수능 23번

좌표공간에서 평면 $x+2y+2z=54$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(54,0,0)$, $\mathrm{B}(0,27,0)$, $\mathrm{C}(0,0,27)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 내부에 점 $\mathrm{P}(x, y, z)$ 가 있다. 점 P 의 xy 평면 위로의 정사영을 Q, yz 평면 위로의 정사영을 R, zx 평면 위로의 정사영을 S라 하자. $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{QS}}$ 일 때, 사면체 QPRS 의 부피의 최댓값을 구하시오. [4점]



05 10년 10월 교육청 24번

좌표공간에서 평면 $\alpha : 12x+9y-5\sqrt{3}z+3=0$ 위의 두 점 A, B 에서 xy 평면에 내린 수선의 발은 각각 $\mathrm{C}(1,0,0)$, $\mathrm{D}(0,3,0)$ 이다. 평면 α 와 xy 평면의 교선을 l 이라 하고, 두 점 C, D 에서 교선 l 에 내린 수선의 발을 각각 E, F 라 하자. 이때, 사각형 AEFB 의 넓이를 구하시오. [4점]