

제 2 교시

수 학 영 역 (나 형)

5지 선 다 형

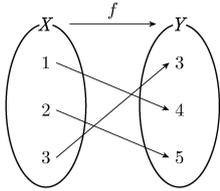
1. $81^{\frac{1}{4}}$ 의 값은? [2점]
 ① 3 ② 9 ③ 12 ④ 18 ⑤ 27

2. 두 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 5, 7, 8\}$ 에 대하여 집합 $A-B$ 의 모든 원소의 합은? [2점]
 ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \times 4^n + 3^n}{3 \times 4^n - 3}$ 의 값은? [2점]
 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이고, $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ 일 때, $P(B)$ 의 값은? [3점]
 ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{11}{20}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{20}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

5. 그림은 함수 $f: X \rightarrow Y$ 를 나타낸 것이다.



$(f \circ f)(3) + f^{-1}(5)$ 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

6. 한 개의 주사위를 45번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하자. $V(X)$ 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

7. 실수 전체의 집합에서 세 조건

$$p: -2 < x < 6 \text{ 또는 } x > 8$$

$$q: x > a$$

$$r: x > b$$

에 대하여 q 는 p 이기 위한 필요조건이고, r 은 p 이기 위한 충분조건이다. 이때, $b-a$ 의 최솟값은?

(단, a, b 는 실수이다.) [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

8. $\int_2^3 (3x^2 - 2x)dx$ 의 값은? [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

9. 자연수 9의 분할 중 짝수인 자연수가 오직 하나만 포함된 분할의 수는? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 9 ⑤ 11

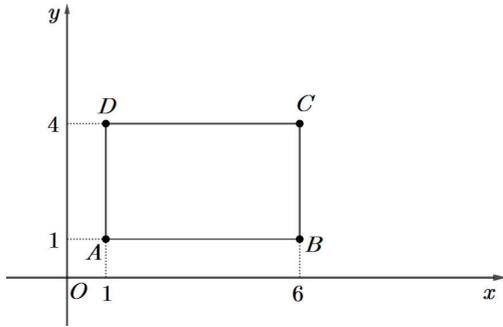
10. 어느 모집단의 확률변수 X 의 확률분포가 다음 표와 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	b	1

$E(X^2) = \frac{3}{2}$ 일 때, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 40인 표본의 표본평균 \bar{X} 에 대하여 $V(\bar{X})$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{80}$ ② $\frac{1}{60}$ ③ $\frac{1}{30}$ ④ $\frac{1}{20}$ ⑤ $\frac{1}{15}$

11. 좌표평면에 네 점 $A(1, 1)$, $B(6, 1)$, $C(6, 4)$, $D(1, 4)$ 을 꼭짓점으로 하는 직사각형 $ABCD$ 가 있다. 함수 $y = \sqrt{10-x} + a$ 의 그래프가 직사각형 $ABCD$ 와 만나도록 하는 정수 a 의 개수는? [3점]
- ① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5



12. 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 위치 x 가 $x = \frac{1}{4}t^4 + at^3$ (a 는 상수)이다. $t=3$ 에서 점 P 의 속도가 0일 때, $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P 가 움직인 거리는? [3점]

- ① $\frac{23}{4}$ ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{27}{4}$ ④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{31}{4}$

13. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n a_{n+1} = 3n - 1$$

이고 $a_3 = 1$ 일 때, $a_1 \times a_5$ 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{11}{20}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{17}{20}$

14. 자연수 n 에 대하여 이차함수 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ 의 그래프 위의

점 $A_n(n, f(n))$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n 인 원을

C_n 이라 하자. 원 C_n 이 x 축 및 y 축과 만나는 서로 다른 점의

개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [4점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

15. $x \neq -1$ 인 모든 실수에서 정의된 함수

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{n+1} + x + 3}{x^n + 1}$$

이 있다. 방정식 $f(x) - mx - 1 = 0$ 의 해가 존재하지 않도록 하는 모든 정수 m 의 개수는?

[4점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

16. 당첨 제비를 포함한 10개의 제비가 들어 있는 상자에서 사랑이와 화랑이가 이 순서대로 임의로 하나씩 제비를 뽑을 때, 두 사람이 뽑은 제비가 모두 당첨 제비일 확률이 $\frac{2}{9}$ 이었다. 이 상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수는? (단, 꺼낸 제비는 상자 안에 다시 넣지 않는다.)

[4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

17. 두 함수 f, g 가

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x < 0) \\ -\frac{1}{2}x+2 & (x \geq 0) \end{cases}, \quad g(x) = ax^2 + ax + 5$$

일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) \leq 0$ 이 되도록 하는 정수 a 의 개수는? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

18. 무게가 1인 추 8개, 무게가 2인 추 4개와 비어 있는 주머니 1개가 있다. 주사위 한 개를 사용하여 다음의 시행을 한다. (단, 무게의 단위는 g 이다.)

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 무게가 1인 추 1개를 주머니에 넣고, 눈의 수가 6의 약수가 아니면 무게가 2인 추 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 반복하여 주머니에 들어 있는 추의 총무게가 처음으로 8보다 크거나 같을 때, 주머니에 들어 있는 추의 개수를 확률 변수 X 라 하자. 다음은 X 의 확률질량함수 $P(X=x)$ ($x=4, 5, 6, 7, 8$)을 구하는 과정이다.

(i) $X=4$ 인 사건은 주머니에 무게가 2인 추 4개가 들어 있는 경우이므로 $P(X=4) = \boxed{\text{(가)}}$

(ii) $X=5$ 인 사건은 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 6이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 7인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$$P(X=5) = \boxed{\text{(나)}} + {}_4C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

(iii) $X=6$ 인 사건은 다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 6이고 여섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 7인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$$P(X=6) = {}_5C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \frac{1}{3} + \boxed{\text{(다)}}$$

(iv) $X=7$ 인 사건은 여섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 6이고 일곱 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 여섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 7인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$$P(X=7) = {}_6C_6 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \frac{1}{3} + \boxed{\text{(라)}}$$

(v) $X=8$ 인 사건은 일곱 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 7인 경우이므로

$$P(X=8) = \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

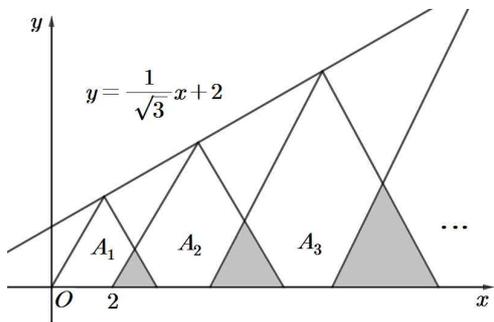
위의 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 수를 각각 a, b, c, d 라 할 때, $\frac{c-d}{b-a}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{6}{7}$ ② $\frac{7}{21}$ ③ $\frac{16}{21}$ ④ $\frac{19}{21}$ ⑤ $\frac{10}{7}$

19. 자연수 n 에 대하여 그림과 같이 한 변이 x 축 위에 있는 정삼각형 A_n 을 다음 조건을 만족시키도록 그린다.

- (가) 점 $(0, 0)$ 은 A_1 의 한 꼭짓점이고, 점 $(2, 0)$ 은 A_2 의 한 꼭짓점이다.
- (나) 정삼각형 A_n 의 x 축 위에 있지 않는 꼭짓점은 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$ 위에 있다.
- (다) 정삼각형 A_n 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 1보다 큰 등비수열이다.

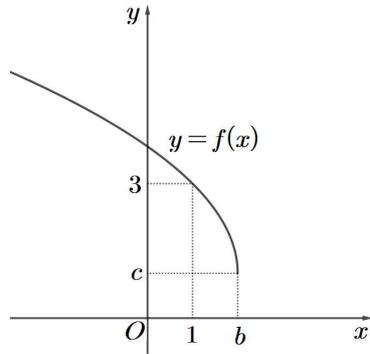
두 정삼각형 A_n, A_{n+1} 의 내부의 공통부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{30-17\sqrt{3}}{33}$
- ② $\frac{30+17\sqrt{3}}{33}$
- ③ $\frac{20-15\sqrt{3}}{33}$
- ④ $\frac{20+15\sqrt{3}}{33}$
- ⑤ $\frac{35+19\sqrt{3}}{33}$

20. 함수 $f(x) = a\sqrt{-x+b}+c$ 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같이 두 점 $(b, c), (1, 3)$ 을 지나고,

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + b (x \geq 1)$ 이다. 함수 $g(x) = \frac{bx-c}{x-a}$ 에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c 는 상수, $a \neq 0, b > 1$) [4점]



- 보기 —
- ㄱ. 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축으로 a 만큼 y 축으로 b 만큼 평행이동 한 그래프와 일치한다.
 - ㄴ. 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.
 - ㄷ. 점 $(2, 2)$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 한 점에서 만나는 직선을 그을 수 없다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 양의 실수 전체에서 증가하고 미분 가능한 함수 $f(x)$ 와 점 $P(t, f(t))$ 에 대하여 점 P 를 지나고 점 P 에서의 함수 $f(x)$ 의 접선에 수직인 직선 l 은 다음 조건을 만족한다.

- (가) $f'(1) = \frac{1}{4}, f'(2) = 2$
 (나) 원점 O 와 점 P 를 y 축으로 a 만큼 평행이동한 점 Q 에서 직선 l 까지의 거리는 같다.

$\int_1^2 f'(x)dx$ 의 값은? (단, $a > 0, t > 0, f(t) > 0$ 이다.) [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

단답형

22. 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수를 구하시오.

[3점]

23. 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$ 에 대하여 $f'(-1)$ 의 값을 구하시오.

[3점]

24. 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르는 확률변수 X 에 대하여

$V(4X-1)=45$ 일 때, n 의 값을 구하시오.

[3점]

25. 양수 a 에 대하여 $a^{\frac{1}{4}}=3$ 일 때, $\log_3 a$ 의 값을 구하시오.

[3점]

26. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+ax$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{x} & (x < 0) \\ 2x+b & (x \geq 0) \end{cases}$$

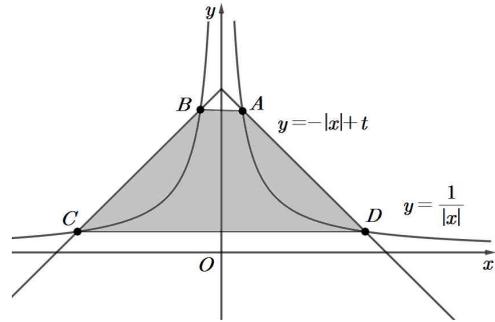
로 정의하자. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 에 대하여 a^2+b^2 의 값을 구하시오. [4점]

27. 1부터 20까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 20개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수에 따라 A와 B가 다음과 같은 규칙으로 점수를 얻는 게임을 한다.

- (가) 5의 배수가 적힌 공이 나오면 A는 4점을 얻고 B는 0점을 얻는다.
 (나) 5의 배수가 적힌 공이 나오지 않으면 A는 0점을 얻고 B는 1점을 얻는다.

한 번 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않고 주머니에서 공을 임의로 하나씩 꺼낼 때, 16점을 먼저 얻는 사람이 이기는 게임을 한다. B가 이 게임에서 이길 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 2보다 큰 실수 t 에 대하여 그림과 같이 곡선 $y = \frac{1}{|x|}$ 와 이차함수 $y = -|x| + t$ 의 네 교점을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD의 넓이를 $f(t)$ 라 하고 선분 AD의 길이를 $g(t)$ 라 하자. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)g(t)}{t^3} = k$ 일 때, k^4 의 값을 구하시오. [4점]



29. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 30 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 A 에 대하여 집합 B 는

$$B = \{b | b \text{는 } a^2 + 1 \text{를 } 3 \text{으로 나눈 나머지, } a \in A\}$$

이다.

$n(B) = 1$ 이 되도록 하는 집합 A 중에서 원소의 개수가 가장 큰 집합을 X 라 할 때, X 의 모든 원소의 합을 구하시오. [4점]

30. 함수

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

에 대하여 열린구간 $(0, 2)$ 에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x |f(x) - f(t)| dt$$

의 극댓값을 M , 극솟값을 m 이라 하자. $27(M+m)$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.