

제 2 교시

수 학 영 역 (가 형)

5지 선 다 형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(2,1), \vec{b}=(-3,2)$ 에 대하여 벡터 $\vec{a}-2\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]
 ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(\sin x + 1)}$ 의 값은? [2점]
 ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

3. 좌표공간의 두 점 $A(-1, 4, 0), B(4, 3, -1)$ 에 대하여 선분 AB를 2:1로 외분하는 점의 좌표가 $(a, 2, -2)$ 일 때, a 의 값은? [2점]
 ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

4. 두 사건 A, B 에 대하여 $P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cap B^c) = \frac{1}{6}$ 일 때, $P(A^c \cup B^c)$ 의 값은? (단, A^c 은 A 의 여사건이다.) [3점]
 ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

5. 초점이 F 인 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $P(a, b)$ 에 대하여 $\overline{PF} = 5$ 일 때, $a \times b$ 의 값은? (단, $b > 0$) [3점]

- ① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

6. $x \geq -1$ 에서 정의된 함수 $f(x) = xe^x$ 의 그래프가 점 $(1, e)$ 를 지난다. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e-h)}{h}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ $\frac{1}{2e}$ ④ e ⑤ $2e$

7. 함수 $f(x) = -\log_2(8-x) + k$ 의 그래프가 제4사분면을 지나지 않도록 하는 k 의 최솟값은? [3점]

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

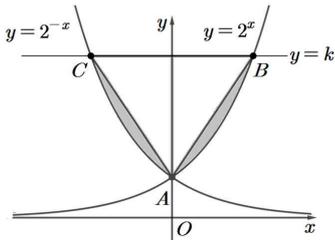
8. 다항식 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^{10}$ 의 전개식에서 x^k 의 계수가 x^{k+1} 의 계수보다 크게 되는 자연수 k 의 최솟값은? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

10. 직선 $y = mx$ 가 두 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{100} = -1$ 중 어느 것과도 만나지 않도록 하는 정수 m 의 개수는? [3점]

- ① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

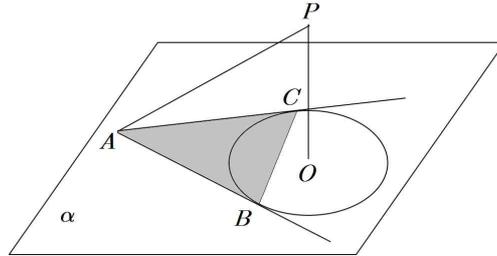
9. 그림과 같이 두 곡선 $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ 가 만나는 점을 A 라 하고, 직선 $y = k$ ($k > 1$)이 두 곡선과 만나는 점을 각각 B , C 라 하자. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 $(0, 3)$ 일 때, 선분 AB 와 $y = 2^x$ 으로 둘러싸인 부분과 선분 AC 와 $y = 2^{-x}$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합은? [3점]



- ① $5 - \frac{3}{\ln 2}$ ② $10 - \frac{6}{\ln 2}$ ③ $5 - \frac{4}{\ln 2}$
 ④ $10 - \frac{8}{\ln 2}$ ⑤ $5 - \frac{6}{\ln 2}$

11. 곡선 $e^{y-1}\ln(x+1)=2y-1$ 위의 점 $(e-1, 1)$ 에서의 접선의 방정식을 $y=ax+b$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]
- ① $\frac{3}{16e}$ ② $\frac{1}{2e}$ ③ $\frac{1}{e}$ ④ $\frac{2}{e}$ ⑤ 1

12. 그림과 같이 평면 α 위에 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발이 원의 중심 O이고 평면 α 위에 있는 점 A에서 원에 그은 두 접선의 접점을 점 B, 점 C라 하자. $\overline{PB}=5, \overline{PA}=\sqrt{41}$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]



- ① $\frac{96}{25}$ ② $\frac{126}{25}$ ③ $\frac{172}{25}$
 ④ $\frac{186}{25}$ ⑤ $\frac{192}{25}$

13. 어느 모집단의 확률변수 X 의 확률분포가 다음 표와 같다.

| | | | | |
|----------|---------------|-----|-----|----|
| X | 0 | 1 | 2 | 합계 |
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | a | b | 1 |

$E(X^2) = \frac{3}{2}$ 일 때, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 40인 표본의 표본평균 \bar{X} 에 대하여 $V(\bar{X})$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{80}$ ② $\frac{1}{60}$ ③ $\frac{1}{30}$ ④ $\frac{1}{20}$ ⑤ $\frac{1}{15}$

14. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = x^2 \cos x + f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{g'(x)} = 1$
 (나) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^3} = 3$

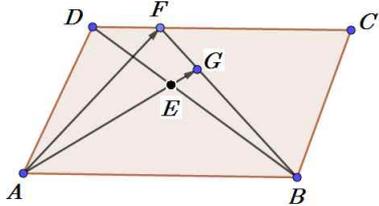
$f(1) = 0$ 일 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

15. 그림과 같이 평행사변형 $ABCD$ 에서 $\overrightarrow{5BE} = \overrightarrow{3BD}$ 인 점을 E , $\overrightarrow{5CF} = \overrightarrow{4CD}$ 인 점을 F 라 하자. 직선 AE 와 선분 BF 가 만나는 점을 G 라 할 때, $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AF} + (1-t)\overrightarrow{AB}$ 이다.

상수 t 의 값은?

[4점]



- ① $\frac{4}{5}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ $\frac{11}{15}$
- ④ $\frac{15}{22}$
- ⑤ $\frac{17}{27}$

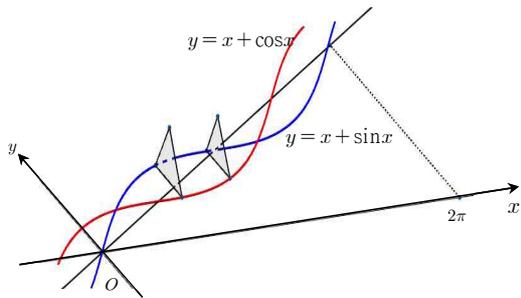
16. 서로 다른 4개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 하자.

$M \times m \geq 16$ 일 확률은?

[4점]

- ① $\frac{173}{6^4}$
- ② $\frac{181}{6^4}$
- ③ $\frac{191}{6^4}$
- ④ $\frac{211}{6^4}$
- ⑤ $\frac{241}{6^4}$

17. 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의되는 두 곡선 $y = x + \sin x$ 와 $y = x + \cos x$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형 S 가 있다. 입체도형 S 는 x 축에 수직으로 자른 단면은 모두 빗변이 xy 평면 위에 있는 직각이등변 삼각형이다. S 의 부피를 구하면? [4점]



- ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{6}+1$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{3}+1$

18. 함수 $f(x) = e^{-x} \int_0^x \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right) dt$ 에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

— 보기 —

ㄱ. $f(\sqrt{\pi}) > 0$
 ㄴ. $f'(a) > 0$ 을 만족시키는 a 가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.
 ㄷ. $f'(b) = 0$ 을 만족시키는 b 가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 주머니에 파란 구슬 2개와 빨간 구슬 18개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 구슬을 한 개씩 꺼내는 시행을 할 때, $n(n=2, 3, \dots, 20)$ 번째 꺼낸 구슬이 두 번째로 나온 파란 구슬이면 이 시행을 멈추고 n 의 값을 확률변수 X 라 하자. 다음은 $E(-X+30)$ 의 값을 구하는 과정이다.
(단, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.)

$(n-1)$ 번째까지 파란 구슬 1개와 빨간 구슬 $(n-2)$ 개가 나올 확률은 $\boxed{\text{(가)}}$ 이고, n 번째에 파란 구슬이 나올 확률은 $\boxed{\phantom{\text{(가)}}}$ 이므로
 $P(X=n) = \boxed{\text{(가)}} \times \boxed{\phantom{\text{(가)}}}$ 이다.
 $E(X) = \sum_{n=2}^{20} \{n \times P(X=n)\} = \boxed{\text{(나)}}$ 이므로
 $E(-2X+30) = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 하고 (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b 라 할 때, $19f(11)+a+b$ 의 값은? [4점]

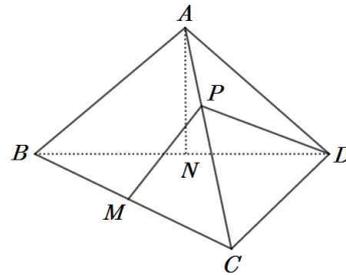
- ① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

20. 그림과 같이 삼각뿔 $A-BCD$ 는 다음 조건을 만족한다.

(가) $\overline{BC}=8, \overline{CD}=6, \overline{BD}=10$
 (나) $\overline{AN}=\overline{CN}=5, \overline{AB}=\overline{AD}$
 (다) $\angle ANC = \frac{\pi}{2}$

모서리 BC 의 중점을 M 이라 하고, 모서리 AC 위의 점 P 에 대하여 두 선분 PM, PD 의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이를 각각 a, b 라 하자, $a+b$ 의 값이 최소일 때, 두 선분 PM 과 PD 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자. $\tan\theta$ 의 값은?

(단, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$)



- ① $-12\sqrt{13}$ ② $-15\sqrt{13}$ ③ $-\frac{31}{2}\sqrt{13}$
 ④ $-\frac{46}{3}\sqrt{13}$ ⑤ $-16\sqrt{13}$

21. 함수 $f(x)$ 는 $f(x) = |x+2| + |x-2| - 4$ 이고 좌표평면 위에 한 변의 길이가 2인 정사각형이 있다. 정사각형의 네 꼭짓점의 좌표는 $A(-1, 3)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 3)$ 이고 점 $P(x, f(x))$ 와 정사각형 $ABCD$ 의 변 위의 임의의 점 Q 에 대하여 \overline{PQ}^2 의 최댓값을 $g(x)$ 라 하자.

실수 t 에 대하여 함수 $|g(x) - t|$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수를 $h(t)$ 라 할 때, 방정식 $h(t) - 2^{t-14} - k = 0$ 의 실근이 존재하지 않는 k 의 최댓값은? (단, $k < 5$ 인 상수이다.)

[4점]

- ① 3 ② -1 ③ -5 ④ -9 ⑤ -13

단답형

22. ${}_3H_2 + {}_3H_2$ 의 값을 구하시오.

[3점]

23. 방정식

$$3\log_8(6x-1) = 1$$

의 실근을 α 라 할 때, $\log_2 \frac{1}{\alpha}$ 의 값을 구하시오.

[3점]

24. 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르는 확률변수 X 에 대하여 $V(4X-1)=45$ 일 때, n 의 값을 구하시오.

[3점]

25. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx$ 의 값이 k 일 때, $(e^k - 1)^2$ 의 값을 구하시오.

[3점]

26. 좌표평면에서 서로 수직인 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 와 곡선 C 위의 점 $P(x, y)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$
 (나) $|x\vec{a}+y\vec{b}|=2$

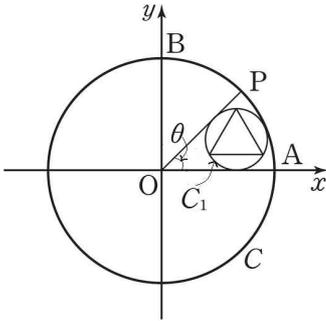
점 $A(1, 2)$ 와 곡선 C 위의 점 $P(x, y)$ 에 대하여 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M^2 + m^2$ 의 값을 구하시오.

[4점]

27. 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1인 원 C 가 x 축, y 축의 양의 방향과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 호 AB 위의 점 P 에 대하여 선분 OP 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하자. 두 선분 OA, OP 와 호 AP 로 이루어진 부채꼴에 내접하는 원을 C_1 , 원 C_1 에 내접하는 정삼각형의 무게 중심의 x 좌표를 $x(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta}{1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)x(\theta)}$ 의 값을

구하시오.

[4점]



28. 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 A, B, C, D 네 사람이 차례로 임의로 한 개씩 공을 꺼낸다. A, B, C 중 적어도 한 명이 흰 공을 꺼내지 못했을 때, A, B, C, D 네 사람이 검은 공을 3개 꺼낼 확률이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않고 p, q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

29. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 점 P 와 점 $A(0, 0, 4)$ 에 대하여 점 Q 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $|\overrightarrow{AQ}|=1$
- (나) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AQ}=2\sqrt{3}$

y 축 위의 점 $B(0, a, 0)$ 에 대하여 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BP}$ 의 최댓값이 12일 때, 양수 a 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [4점]

30. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=0, a_{n+1}=a_n+2^n$ 이다. $x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 모든 자연수 n 에 대하여

$$f(x) = \frac{1}{2^{n-2}} \sin\left(\frac{\pi(x-a_n)}{2^{n-1}}\right) \quad (a_n \leq x \leq a_{n+1})$$

양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 연속함수 $g(x)$ 가 있다.

- (가) 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점 $(t, g(t))$ 와 x 축 사이의 거리는 $|f(t)|$ 이다.
- (나) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} < 0$

함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x)=(x-k) \int_k^x g(t)dt \quad (x > 0)$

라 하자.

$x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) \geq 0$ 가 되도록 하는 양의 상수 k 의 최솟값을 m 이라 할 때, m^2 의 값을 구하시오.

[4점]

- ※ 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.