2015개정

실전수학(Ver.1)
수학(상) 250제

최원준 (지음)

실전수학 기본 구성과 특징

[실전수학 개념 정리]

기존 단순 나열식의 개념정리가 아니라 그 단원에서 요구하는 개념과의 연계성을 바탕으로 개념정리를 했으며, 2015개정 교과에서 추구하는 방향성에 도움이 될 수 있도록 개발되었습니다. 특히 왜 이러한 개념이 필요한지 필연성을 부여하여 설명하였습니다.

[실전수학 개념 $+\alpha$]

개념학습에서 예제를 통해 학습한 내용을 다양한 관점에서 개념을 보다 심도 있게 확인할 수 있습니다.

[실전수학 기본문제]

개념을 확인하기 위해서 필수적인 문제를 실었습니다. 반복학습하면 기본실력을 기르는데 도움이 될 것입니다.

[실전수학 연습문제]

기본문제를 푼 다음 2가지 이상의 개념의 연계를 확인 할 수 있도록 구성하였습니다.

[실전수학 도전문제]

연습문제 이상의 수준으로 구성하였으며, 기본, 연습을 학습한 뒤에 생각의 난이도를 측정하기 위해 도움이 되는 문항으로 구성하였습니다.

목차

Ⅰ. 다항식

Ⅱ. 방정식과 부등식

Ⅲ. 도형의 방정식

Ⅰ. 다항식

1. 다항식의 연산

[실전수학 개념 정리]

(1) 다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식의 연산을 위한 기본 과정

(다항식) -(다항식의 문자에 대한 내림차순과 오름차순)-(다항식에 대한 교환법칙, 결합법칙)

① 다항식

■ 다항식의 계수, 차수

다항식 ⇨ 1 개의 항 또는 2 개 이상의 항의 합으로 이루어진 식

(예시) $2x^2+3x+1$ 에서 항은? $2x^2$, $3x$, 1 이렇게 세 개이다.

계수 ⇨ 문자와 수의 곱에서 곱하여진 수

차수 ⇨ 어떤 문자에 대한 항에서 문자의 곱해진 개수

다항식의 차수 ⇨ 차수가 가장 큰 항의 차수

(예시) 다항식 $3x^2-5x+4$ 에 대하여 x^2 의 계수는 3, x 의 계수는 -5,
x 에 대한 $3x^2$ 의 차수는 2, 이 다항식의 차수는 2 이다.

■ 다항식의 문자에 대한 내림차순과 오름차순

내림차순 ⇨ 다항식을 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타낸다.

오름차순 ⇨ 다항식을 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 나타낸다.

다항식 $x-3x^3+2-5x^2$ 을

x 에 대한 내림차순 ⇨ $-3x^3-5x^2+x+2$ ⇨ x 문자 기준으로 차수가 큰 것부터 나열

x 에 대한 오름차순 ⇨ $2+x-5x^2-3x^3$ ⇨ x 문자 기준으로 차수가 낮은 것부터 나열

다항식 $xy+y^3+2x^2-4y^2+2$ 을

y 에 대한 내림차순 ⇨ $y^3-4y^2+xy+2x^2+2$ ⇨ y 문자 기준으로 차수가 큰 것부터 나열

y 에 대한 오름차순 ⇨ $2x^2+2+xy-4y^2+y^3$ ⇨ y 문자 기준으로 차수가 낮은 것부터 나열

위와 같이 x 와 y 가 섞여있는 경우 물어보는 문자를 기준으로 한다.

② 다항식의 덧셈과 뺄셈

■ 이차식의 덧셈과 뺄셈은 <u>동류항</u>끼리 모아서 계산한다.

동류항: 다항식에서 같은 문자에 대하여 차수가 같은 항을 그 문자에 대한 동류항이라 한다.

$A=x^2+5x-1,\quad B=2x^2-3x-6$

$A+B=(x^2+5x-1)+(2x^2-3x-6)=(1+2)x^2+(5-3)x-(1+6)=3x^2+2x-7$

$A-B=(x^2+5x-1)-(2x^2-3x-6)=(1-2)x^2+(5+3)x-(1-6)=-x^2+8x+5$

■ 세 다항식 A, B, C 에 대하여

교환법칙 $A+B=B+A$

결합법칙 $(A+B)+C=A+(B+C)$

$A=x^2-3x+5$, $B=2x^2+x-1$, $C=4x^2+2$

$A+B=(x^2-3x+5)+(2x^2+x-1)=(1+2)x^2-(3-1)x+(5-1)=3x^2-2x+4$

$B+A=(2x^2+x-1)+(x^2-3x+5)=(2+1)x^2+(1-3)x-(1-5)=3x^2-2x+4$

즉, $A+B=B+A$ 가 성립한다.

$(A+B)+C=3x^2-2x+4+4x^2+2=(3+4)x^2-2x+6=7x^2-2x+6$

$$\begin{aligned}A+(B+C)&=x^2-3x+5+(2x^2+x-1+4x^2+2)=x^2-3x+5+(2+4)x^2+x-(1-2)\\&=x^2-3x+5+6x^2+x+1\\&=(1+6)x^2-(3-1)x+(5+1)\\&=7x^2-2x+6\end{aligned}$$

즉, $(A+B)+C=A+(B+C)$ 가 성립한다.

③ 다항식의 곱셈

분배법칙을 이용하여 전개한 다음 동류항끼리 모아 정리한다.

■ 세 다항식 A, B, C 에 대하여

교환법칙 $AB=BA$

결합법칙 $(AB)C=A(BC)$

분배법칙 $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

$A=3x+2$, $B=2x^2-x+1$ 에 대하여

$$\begin{aligned}AB=(3x+2)(2x^2-x+1)&=3(2x^2-x+1)+2(2x^2-x+1)\\&=6x^2-3x+3+4x^2-2x+2\\&=(6+4)x^2-(3+2)x+(3+2)\\&=10x^2-x+5\end{aligned}$$

교환법칙에 의해 $AB=BA$ 가 성립한다.

$A=3x+2$, $B=2x^2-x+1$, $C=x^2+3x$ 에 대하여

$$\begin{aligned}(AB)C=(10x^2-x+5)(x^2+3x)&=10x^2(x^2+3x)-x(x^2+3x)+5(x^2+3x)\\&=10x^4+30x^3-x^3-3x^2+5x^2+15x\\&=10x^4+(30-1)x^3-(3-5)x^2+15x\\&=10x^4+29x^3+2x^2+15x\end{aligned}$$

결합법칙에 의해 $(AB)C=A(BC)$ 가 성립한다.

$$\begin{aligned}A(B+C)=(3x+2)(3x^2+2x+1)&=3(3x^2+2x+1)+2(3x^2+2x+1)\\&=9x^2+6x+3+6x^2+4x+2\\&=(9+6)x^2+(6+4)x+(3+2)\\&=15x^2+10x+5\end{aligned}$$

분배법칙에 의해 $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$ 가 성립한다.

■ 곱셈 공식 (중학교 과정)

(1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

(3) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

(4) $(x+a)(x+b) \quad = x^2+(a+b)x+ab$

(5) $(ax+b)(cx+d) \quad = acx^2+(ad+bc)x+bd$

■ 곱셈공식

(1) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

(2) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a^3+3ab(a+b)+b^3$

(3) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = a^3-3ab(a-b)-b^3$

(4) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

(5) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

▣ 실전 곱셈공식의 변형 ⇨여러 가지 식의 값을 간단히 구하는데 이용된다.

(1) $a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab = (a-b)^2+2ab$

(2) $a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$,

$a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

(3) $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3-2(ab+bc+ca)$

(1번 예시) $x+y=3,\ xy=2$ 일 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.

$x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy = 3^2-2\times 2 = 9-4 = 5$

(1번 관련 예시) $x-y=3,\ xy=2$ 일 때, x^2-y^2 의 값을 구하시오.

$x^2-y^2 = (x-y)^2+2xy = (3)^2+2\times 2 = 9+4 = 13$

(2번 예시) $x+y=2,\ xy=-3$ 일 때, x^3+y^3 의 값을 구하시오.

$x^3+y^3 = (x+y)^3-3xy(x+y) = 2^3-3\times(-3)\times 2 = 8+18 = 26$

(2번 관련예시) $x-y=2,\ xy=-3$ 일 때, x^3-y^3 의 값을 구하시오.

$x^3-y^3 = (x-y)^3+3xy(x-y) = 2^3+3\times(-3)\times 2 = 8-18 = -10$

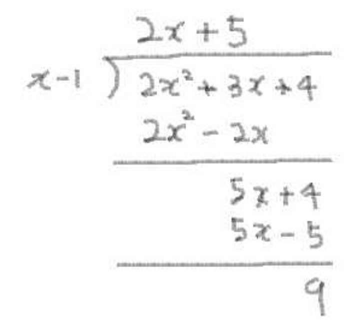
(3번 예시) $x+y+z=2,\ xy+yz+zx=-3$ 일 때, $x^3+y^3+z^3$ 의 값을 구하시오.

$x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)^3-2(xy+yz+zx) = 2^3-2\times(-3) = 8+6 = 14$

(2) 다항식의 나눗셈

다항식의 나눗셈을 각 다항식을 내림차순으로 정리한 다음 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

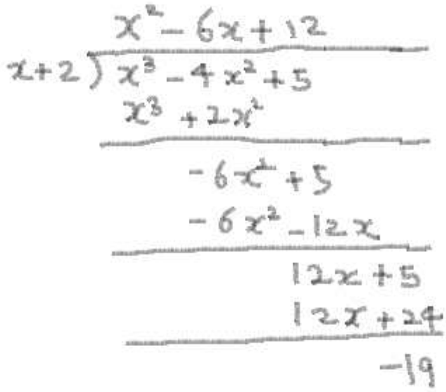
(1) $(2x^2+3x+4)\div(x-1)$



몫 : $2x+5$

나머지 : 9

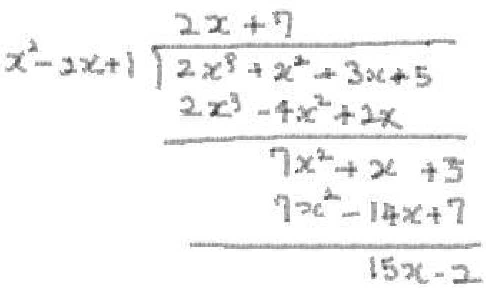
(2) $(x^3-4x^2+5)\div(x+2)$



몫 : $x^2-6x+12$

나머지 : -19

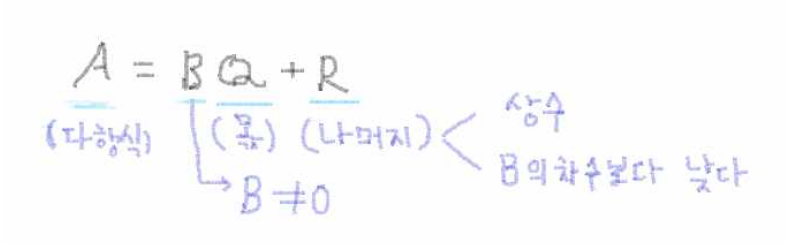
(3) $(2x^3+x^2+3x+5)\div(x^2-2x+1)$



몫 : $2x+7$

나머지 : $15x-2$

일반적으로 다항식 A 를 다항식 $B(B \neq 0)$ 로 나누었을 때,
몫을 Q , 나머지를 R 이라 하면



$\boldsymbol{A = BQ + R}$

가 성립한다. 이때 R 은 상수이거나 B 의 차수보다 낮다.
특히 $R=0$ 이면 A 는 B 로 나누어떨어진다고 한다.

$A = BQ + R$ 의 의미는

(예시) $x^2+2x+1=(x+1)^2=(x+1)(x+1)$ 에서 B 와 Q 는 각각 $(x+1)$,
나머지는 없으므로 나누어떨어진다.

또한 $B \neq 0$ 이므로 $x \neq -1$, 이고 $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2}{x+1}=x+1$ 과 같은 의미이다.

(1) $2x^2+3x+4=(x-1)(2x+5)+9$

⇨ $A=2x^2+3x+4$, $B=x-1$, $Q=2x+5$, $R=9$

(2) $x^3-4x^2+5=(x+2)(x^2-6x+12)-19$

⇨ $A=x^3-4x^2+5$, $B=x+2$, $Q=x^2-6x+12$, $R=-19$

(3) $2x^3+x^2+3x+5=(x^2-2x+1)(2x+7)+15x-2$

⇨ $A=2x^3+x^2+3x+5$, $B=x^2-2x+1$, $Q=2x+7$, $R=15x-2$

2. 나머지정리와 인수분해

[실전수학 개념 정리]

(1) 항등식

어떤 x 라는 자연수가 있다. x 에 3 을 곱한 뒤에 9 를 더하면 $3x+9$ 로 나타낼 수 있다.

$3x+9$ 를 x 에 3 을 더한 수로 나누면 $3x+9=(x+3)\times 3$ 이 된다.

즉, $3x+9=3(x+3)$ 이므로 x 라는 문자에 어떤 값을 대입해 보면

$x=1$ 이면 $3\times 1+9=3(1+3)$, $3+9=3\times 4$, $12=12$

$x=2$ 이면 $3\times 2+9=3(2+3)$, $6+9=3\times 5$, $15=15$

$\vdots$

즉, x 라는 자연수에 어떤 값을 대입해도 계산 결과가 모두 같음을 알 수 있다.

중학교에서 주어진 식의 문자에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 등식이 그 문자에 대한 항등식임을 배웠다.

$x^3=2x$ 에서 $x=1$ 을 대입하면

$1\neq 2\times 1$ 임을 알 수 있다. 이는 항등식이 아니다.

$(x-1)^2=x^2-2x+1$ 에서

$x=1$ 을 대입하면

$(1-1)^2=1^2-2\times 1+1$, $0=1-2+1=0$, $0=0$

$x=0$ 을 대입하면

$(0-1)^2=0-2\times 0+1$, $(-1)^2=1$, $1=1$

$x=-1$ 을 대입하면

$(-1-1)^2=(-1)^2-2\times(-1)+1$, $(-2)^2=1+2+1$, $4=4$

$\vdots$

즉. $(x-1)^2=x^2-2x+1$ 에 대한 식은 x 에 어떤 값을 대입해도 등식이 항상 성립하므로 x 에 대한 항등식임을 알 수 있다.

① 항등식의 성질

$ax^2+bx+c=0$ 이 x 에 대한 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$ 이다.

⇨ x 에 -1, 0, 1 을 대입해 본다.

$x=-1$ 을 대입해보면 $a(-1)^2+b(-1)+c=0$, $a-b+c=0$

$x=0$ 을 대입해보면 $a\times 0+b\times 0+c=0$, $c=0$

$x=1$ 을 대입해보면 $a\times(1)^2+b\times(1)+c=0$, $a+b+c=0$

위의 식에서 $c=0$ 이므로

$a-b=0$ 과 $a+b=0$ 을 연립하면

$a=0$ 이고 $a=0$ 이므로

$b=0$ 임을 알 수 있다.

즉, $ax^2+bx+c=0$ 이 x 에 대한 항등식이면 $a=0,\ b=0,\ c=0$ 이다.
$a=0,\ b=0,\ c=0$ 일 때에도 $ax^2+bx+c=0$ 이 성립된다.

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ 이 x 에 대한 항등식이면
$a=a',\ b=b',\ c=c'$ 이다.
또한 $a=a',\ b=b',\ c=c'$ 이면 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ 이 성립된다.
⇨ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ 에서
$ax^2-a'x^2+bx-b'x+c-c'=0$,
$(a-a')x^2+(b-b')x+(c-c')=0$
$(a-a')x^2+(b-b')x+(c-c')=0$ 은 x 에 대한 항등식이므로
$a=a',\ b=b',\ c=c'$ 이 성립한다.

(예시) 다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되게 하는 상수 $a,\ b,\ c$ 의 값을 구하시오.
(1) $(a-1)x^2+(b-3)x+c-2=0$
⇨ $a=1,\ b=3,\ c=2$
(2) $x^2+ax+3=bx^2-x+c$
⇨ $x^2-bx^2+ax+x+3-c=0$,
$(1-b)x^2+(a+1)x+(3-c)=0$,
$b=1,\ a=-1,\ c=3$

③ 미정계수법
항등식의 성질을 이용하여 주어진 등식에서 미지의 계수를 정하는 방법

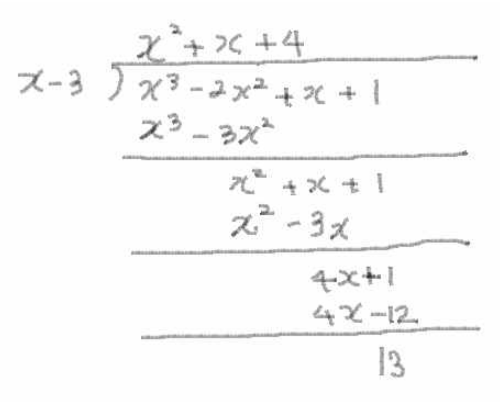
(예시) 다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 $a,\ b$ 의 값을 구하시오.

⇨ $a(x-1)^2+b(x-1)-1=x^2+3x-5$
(i) x 에 적당한 수 대입하기:
양변에 $x=0$ 을 대입, $a-b-1=-5,\ a-b=-4$,
양변에 $x=2$ 를 대입, $a+b-1=5,\ a+b=6$
위의 두 식을 연립하면 $a=1,\ b=5$

(ii) 양변의 동류항의 계수를 비교하기:
$a(x^2-2x+1)+bx-b-1=x^2+3x-5$,
$ax^2-2ax+a+bx-b-1=x^2+3x-5$,
$ax^2-(2a-b)x+a-b-1=x^2+3x-5$
즉, $a=1,\ -2a+b=3,\ a-b-1=-5$, $b=3+2=5,\ b=5$

(2) 나머지정리

다항식 $P(x)=x^3-2x^2+x+1$ 을 일차식 $x-3$ 으로 나누면



나머지는 13 이다. 이때 $P(3)$ 의 값을 구해보면

$P(3)=3^3-2\times3^2+3+1=27-18+4=9+4=13$

즉, 다항식 $P(x)$ 를 3 으로 나눈 나머지와 같음을 알 수 있다.

$P(x)=(x-3)(x^2+x+4)+13$ 에서

$P(3)=(3-3)(3^2+3+4)+13=13$ 이다.

① 인수정리

다항식 $P(x)$ 에 대하여

$P(\alpha)=0$ 이면 $P(x)$ 는 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어떨어진다.

$P(x)$ 가 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$ 이다.

즉, $x-\alpha$ 는 $P(x)$ 의 인수이다.

$x-\alpha$ 가 $P(x)$ 의 인수이면, $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 이 성립된다.

이를 인수정리라 한다.

(예시) 다항식 $P(x)=x^3+2x-3$ 의 인수는

$P(x)=0$ 이 되는 $x=1$ 이다.

$P(1)=1^3+2\times1-3=1+2-3=0$

즉, $x-1$ 이 $P(x)$ 의 인수이다.

② 인수정리를 이용한 계수 구하기

(예시) 다항식 $P(x)=x^2-ax-4$ 가 $x+1$ 로 나누어떨어지게 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

⇨ $P(x)$ 가 $x+1$ 로 나누어떨어지면 인수정리에 의하여 $P(-1)=0$

$P(-1)=(-1)^2-a\times(-1)-4=1+a-4=a-3$.

$P(-1)=a-3=0$, $a=3$

(3) 인수분해
하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 인수분해라 한다.

■ 인수분해 공식

① $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

② $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

③ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

④ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

⑤ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

■ 공통부분이 있는 다항식의 인수분해
다항식의 공통부분이 있는 경우는 그 공통부분을 하나의 문자로 바꾸어 인수분해 한다.
(예시) 다음 식을 인수분해 하시오.

x^4+2x^2-24

⇨ $x^2=X$ 로 놓으면

$x^4+2x^2-24=X^2+2x-24=(X-4)(X+6)$

(예시) 다음 식을 인수분해 하시오.

$(x^2-5x)(x^2-5x+8)+12$

⇨ $x^2-5x=X$ 로 놓으면

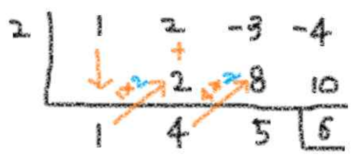
$(x^2-5x)(x^2-5x+8)+12=X(X+8)+12=X^2+8X+12=(X+6)(X+2)$,

$X=-6$ 또는 $X=-2$,

$x^2-5x=-6,\ x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ 또는 $x^2-5x+2=0$ 은 인수분해 안 됨.

■ 인수정리를 이용한 인수분해 ⇨ 조립제법
조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

$(x^3+2x^2-3x-4)\div(x-2)$



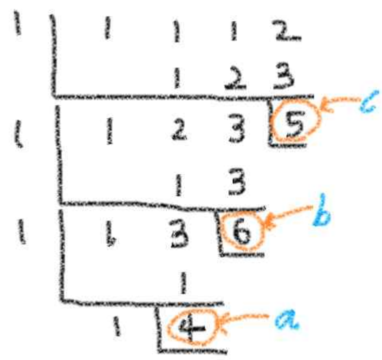
• 몫 : x^2+4x+5

• 나머지 : 6

(실전수학 $+\alpha$)

등식 $x^3+x^2+x+2=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 가 x 에 대한 항등식이 되는 상수 a , b , c 의 값을 조립제법을 반복적으로 이용하여 구하여 보자.

$f(x)=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 로 놓으면



$f(x)=(x-1)\{(x-1)^2+a(x-1)+b\}+c$

이므로 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫은 $P(x)=(x-1)^2+a(x-1)+b$ 이고, 나머지가 c 이다.

이때 오른쪽 조립제법에서 $c=5$ 임을 알 수 있다.

또 다항식 $P(x)=(x-1)^2+a(x-1)+b$ 를 $x-1$ 로 나누면

$P(x)=(x-1)\{(x-1)+a\}+b$

에서 몫이 $Q(x)=(x-1)+a$ 이고, 나머지가 b 이므로 $b=6$ 이다.

같은 방법으로 $Q(x)=(x-1)+a$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 a 이므로 $a=4$ 이다.

따라서 $a=4$, $b=6$, $c=5$ 이다.

여기서 조립제법을 반복적으로 이용하여 나오는 결과에서 나머지에 해당하는 부분이 차례대로 c , b , a 의 값이 된다는 것을 알 수 있다.

2. [(실전수학 $+\alpha$)/ 여러 가지 방법으로 인수분해하기

1. $a^2+b^2-2ab+2a-2b+1$

먼저 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리할 거야.

⇨ 주어진 식을 a 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2-(2b-2)a+b^2-2b+1$
$=a^2-2a(b-1)+(b-1)^2$
$=\{a-(b-1)\}^2=(a-b+1)^2$

나는 인수분해 공식을 이용해야지.

$a^2+b^2-2ab+2a-2b+1$
$=a^2+(-b)^2+1^2+2a(-b)+2(-b)\times 1+2\times 1\times a$
$=\{a+(-b)+1\}^2$
$=(a-b+1)^2$

2. $x^3-6x^2+12x-8$

인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해할 수 있어.

$f(x)=x^3-6x^2+12x-8$ 로 놓으면
$f(2)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-2$ 를 인수로 가진다.

2	1	-6	12	-8
		2	-8	8
	1	-4	4	0

$\therefore\ x^3-6x^2+12x-8$
$=(x-2)(x^2-4x+4)$
$=(x-2)(x-2)^2=(x-2)^3$

이번에도 인수분해 공식을 이용할 수 있겠군.

$x^3-6x^2+12x-8$
$=x^3-3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2-2^3$

3. x^3+2x^2-x-2

인수정리와 조립제법을 이용하면 돼.

$f(x)=x^3+2x^2-x-2$ 로 놓으면
$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 가진다.

1	1	2	-1	-2
		1	3	2
	1	3	2	0

$\therefore\ x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x^2+3x+2$
$=(x-1)(x+1)(x+2$

이 식은 공통인수로 묶기만 해도 인수분해할 수 있을거야.

x^3+2x^2-x-2
$=x^2(x+2)-(x+2)$
$=(x^2-1)(x+2)$
$=(x-1)(x+1)(x+2)$

[실전수학 기본문제]

1. 다항식 $x^3 - xy^2 + 3x^2y - 2$
(1) x 에 대한 내림차순으로 정리하시오.
(2) y 에 대한 오름차순으로 정리하시오.

2. 두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A+B$ 와 $A-B$ 를 계산하시오.
(1) $A = 4x^3 + 2x - 1,\ B = 3x^3 - x^2 - x + 1$
(2) $A = x^2 - x + 2x - 3,\ B = x^3 + 2x^2 - x + 5$

3. 두 다항식 $A,\ B$ 가 $A = x^2 - xy + 2y^2,\ B = 2x^2 + 2xy - y^2$ 일 때, 다음 등식을 만족시키는 X 를 구하시오.

4. 다음 식을 전개하시오.
(1) $(x+2)(x^2+x-1)$
(2) $(2x^2+xy+y^2)(x-2y)$

5. 다음 식을 전개하시오.

(1) $(3x+y)^3$

(2) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

6. 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x-y+3z)^2$

(2) $(x-2y)^3$

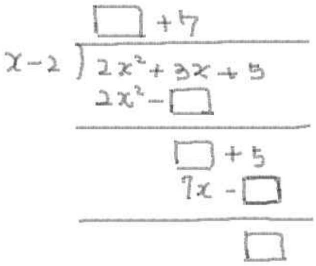
(3) $(x+2)(x^2-2x+1)$

(4) $(x-3y)(x^2+2xy+4y^2)$

7. $x-y=3,\ xy=-2$ 일 때, x^3-y^3 의 값을 구하시오.

8. $x+y=1,\ x^2+y^2=5$ 일 때, x^3+y^3 의 값을 구하시오.

9. 다음 나눗셈의 ( )안에 알맞은 것을 써넣고, 몫과 나머지를 구하시오.



10. 다음 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때의 몫 Q 와 나머지 R 를 구하고,
$A = BQ + R$ 의 꼴로 나타내시오.

(1) $A = x^3 + 2x - 1$, $B = x - 3$

(2) $A = 5x^3 - 2x^2 + x - 1$, $B = x^2 - 2x + 3$

11. 다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b 의 값을 다음 물음에 대하여 각각 구하시오.

$a(x-1)^2 + b(x-1) - 1 = x^2 - 5x + 4$

(1) 양변의 문자에 적당한 수를 대입하는 방법

(2) 양변의 계수를 비교하여 구하시오.

12. 다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되게 하는 상수 a, b, c 의 값을 구하시오.

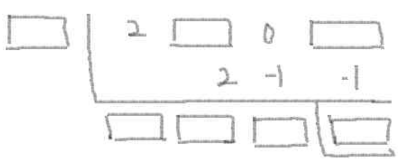
(1) $x^3-3x+3=(x-1)^3+a(x-1)+b$

(2) $x^3+ax+2=(x+1)(x^2+bx+c)$

(3) $ax(x+1)+b(x+1)(x-3)+cx(x-3)=x^2-x-6$

13. 다항식 $P(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 3 이도, $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 1 이다. $P(x)$ 를 $(x-1)(x+1)$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

14. 조립제법을 이용하여 $2x^3-3x^2+5$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 구하시오.



몫: 나머지:

15. 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(3x^2+4x^2+5x-10)\div(3x-2)$

(2) $(2x^3-5x^2+x+1)\div(2x+1)$

16. 다음 다항식을 인수분해 하시오.

(1) $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$ (2) $x^3+6x^2+12x+8$

(3) $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^2$ (4) x^3+64y^3

17. 다항식 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$ 를 인수분해 하시오.

18. 다음 식을 인수분해 하시오.

(1) x^4+2x^3-3　　　　(2) x^4+x^2+1

19. 다음 다항식을 인수분해 하시오.

(1) x^3-x^2+2x-8　　　　(2) $x^4-5x^2-10x-6$

20. 다음 다항식을 인수분해 하시오.

(1) x^3+2x^2-7x+4　　　　(2) $x^4+3x^3-3x^2-11x-6$

[실전수학 연습문제]

21. x 의 값에 관계없이 등식

$$(x-2)^3 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$$

가 항상 성립할 때, 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 에 대하여 $a+b-c-d$ 의 값을 구하시오.

22. $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$ 이 $x^2 - x - 6$ 으,로 나누어떨어지도록 상수 $a,\ b$ 의 값을 정하시오.

23. 다항식 $P(x)=x^3+ax^2+2x-5$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지가 1 일 때, $P(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. (단, a 는 상수이다.)

24. 다음 식을 인수분해 하시오.

(1) $(x^2+2x-5)(x^2+2x-13)-20$

(2) $4x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)^2$

25. 삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c 일 때, $a^3+ab^2+b^2c+a^2c-c^3-ac^2=0$ 을 만족시킬 때, 이 삼각형은 어느 삼각형인가?

26. 곱셈 공식을 이용하여 다음 계산을 하시오.

(1) 98^2+102^2

(2) 9^3+11^3

27. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $ab+bc+ca$

(2) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

(3) $a^4+b^4+c^4$

28. $(x^3+2x^2+3x+4)(2x^4+3x^3-5x^2-7x+8)$을 전개한 식에서 x^3의 계수를 구하시오.

29. $a^2=2$일 때, 자연수 n에 대하여
$\{(3+2a)^n-(3-2a)^n\}-\{(3+2a)^n+(3-2a)^n\}$의 값을 구하시오.

30. 다항식 $3x^3+3x+2$를 다항식 A로 나누면 몫이 $3x-6$이고 나머지는 $6x+20$이다. 이때 다항식 A를 구하시오.

31. x^3을 x^2-x+1로 나눌 때의 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R라고 할 때, $Q(2)+R$의 값을 구하시오.

32. $16^2-15^2+14^2-13^2+\ \cdots\ +2^2-1^2$의 값을 구하시오.

33. 등식 $x^3+x^2-8x+7=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$가 x의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 a, b, c에 대하여 다항식 ax^2-bx-c를 $x-2$로 나눈 나머지를 구하시오.

[실전수학 도전문제]

34. 다항식 $(1+2x+3x^2+\ \cdots\ +10x^9)^2$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

35. 다항식 $(x+1)^n$ (단, n 은 자연수)을 x 로 나누면 나머지가 1 이 된다. 이것을 이용하여 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(1) 8^{10} 을 7 로 나눈 나머지

(2) 2^{100} 을 31 로 나눈 나머지

36. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 다항식 $f(x)+g(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 9 , 다항식 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 21 이다. 다항식 $f(x)g(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 풀이 과정과 답을 쓰시오.

37. 100 개의 다항식 x^2+2x-1, x^2+2x-2, x^2+2x-3, $\cdots$, $x^2+2x-100$ 이 있다. 이 중에서 자연수 m, n 에 대하여 $(x+m)(x-n)$ 의 꼴로 인수분해되는 다항식의 개수를 구하시오.

38. 3이상의 자연수 n에 대하여 n^3+7이 $n-2$의 배수가 되게 하는 자연수 n의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 서술하시오.

39. $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=5$일 때, $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 서술 하시오 (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

40. 1 이 아닌 두 자연수 a, b 에 대하여 $3587=15^3+15^2-15+2=a\times b$로 나타낼 때, $\frac{1}{2}(a+b)$ 의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 서술하시오.

41. 등식 $(k+3)x-(3k+4)y+5k=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $x+y$의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오.

42. 두 다항식 $A = x^3 + x + 4$, $B = x + 4$ 에 대하여 $A^3 - B^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수를 구하고, 그 과정을 서술하시오.

43. $(x^3 + x^2 - 5x + 3)\pi$ 인 직원기둥이 있다. 이 직원기둥의 높이와 밑면의 반지름의 길이가 각각 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 일차식으로 나타내어 질 때, 이 직원기둥의 겉넓이를 구하고, 그 풀이과정을 서술하시오. (단, $x > 1$)

Ⅱ. 방정식과 부등식

5. 복소수와 이차방정식

[실전수학 개념 정리]

(1) 복소수와 그 연산

① 허수단위 i

실수의 범위에서 이차방정식 $x^2 = -1$ 의 해가 존재하는지 알아보자.

이차방정식 $x^2 = 3$ 의 해는 $x = \sqrt{3}$ 와 $x = -\sqrt{3}$ 이다.

그렇다면 $x^2 = -1$ 의 해는 실수의 범위에서는 존재하지 않는다.

즉, $x^2 = -1$ 의 해가 존재하도록 **수의 범위를 확장**해야 된다.

제곱하여 -1 이 되는 수는 실수의 범위에서는 존재하지 않는 수이다.

그래서 새로운 수를 생각하고 이를 기호 i 로 나타낸다.

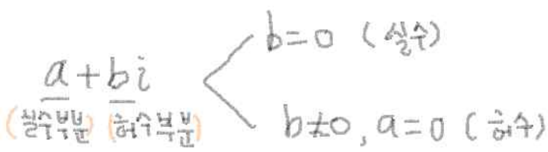
새로운 수를 i 라 하면 $i^2 = -1$

$\boldsymbol{i}$: 허수단위

$\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$ 과 같이 나타낸다.

② 복소수 $a+bi$

임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $a+bi$ 꼴로 나타내어지는 수를 복소수라 한다.



$0i = 0$ 이라 한다면

$a+bi = a+0i = a$

실수부분 a 만 남는다. 즉, <u>실수 a 도 복소수임을 알 수 있다.</u>

$a = 0$ 이라 한다면

$a+bi = 0+bi = bi$

허수부분 bi 만 남는다. 즉, $b \neq 0$ 이면 허수임을 알 수 있다.

(예시) $1+\sqrt{2}i$: 실수부분 1 , 허수부분 $\sqrt{2}$ ⇨ 실수도 복소수이다.

$3i$: 실수부분 0 , 허수부분 3

$\sqrt{3}$: 실수부분 $\sqrt{3}$, 허수부분 0

③ 서로 같은 복소수

$a+bi$ 와 $c+di$ (a, b, c, d 는 실수)

$a+bi$ 의 실수부분 a , 허수부분 b 이고 $c+di$ 의 실수부분 c , 허수부분 d 이다.

이때, (실수부분) $a=c$ 이고 (허수부분) $b=d$ 이면

$a+bi = c+di$ 이므로

서로 같은 복소수라고 한다.

이는 $a+bi = c+di$,

$(a-c)+(b-d)i = 0$ 이 성립하려면 $a=c$, $b=d$ 을 통해 확인 할 수 있다.

(예시) 다음 등식을 만족시키는 실수 $a,\ b$ 의 값을 구하시오.
$a+bi=-1+3i$ ⇨ $a=-1,\ b=3$
$a+bi=-1+3i$ 에서
$(a+1)+(b-3)i=0$ 로 나타낼 수 있으므로
$a=-1$, $b=3$ 이 성립됨을 알 수 있다.

(예시) 등식 $(2x-1)+3i=5+(3x+y)i$ 를 만족시키는 두 실수 $x,\ y$ 의 값을 각각 구하시오.
실수부분: $2x-1=5$, $x=3$
허수부분: $3=3\times3+y$, $y=-6$
⇨ 서로 같음을 이용하는 것은 서로 다른 실수에 대한 미지수를 바로 구할 수 있거나 연립하여 계산을 구하면 된다.

■ 켤레복소수
허수부분의 부호를 바꾼 복소수를 켤레복소수라 한다.
복소수 $a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수) ⇨ $a-bi$ 는 복소수 $a+bi$ 의 켤레복소수
복소수 $a-bi$ ($a,\ b$ 는 실수) ⇨ $a+bi$ 는 복소수 $a-bi$ 의 켤레복소수
기호로 $a+bi$ 의 켤레복소수 $\overline{a+bi}=a-bi$
기호로 $a-bi$ 의 켤레복소수 $\overline{a-bi}=a+bi$

(예시) $1+2i$ 의 켤레복소수는 $1-2i$, 기호로 $\overline{1+2i}$,
$1-2i$ 의 켤레복소수 $1+2i$, 기호로 $\overline{1-2i}$,
$3i$ 의 켤레복소수는 $-3i$, 기호로 $\overline{3i}$
5 의 켤레복소수는 5 (실수인 자기 자신뿐)

④ 복소수의 사칙연산
복소수의 사칙연산에서 허수 i 를 문자처럼 생각하고 식을 전개한다.

■ 복소수의 덧셈과 뺄셈
복소수의 덧셈: $(1+2i)+(3+4i)=(1+3)+(2+4)i=4+6i$
$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ ($a, b,\ c,\ d$ 는 실수이다.)

복소수의 뺄셈: $(1+2i)-(3+4i)=1+2i-3-4i=(1-3)+(2-4)i=-2-2i$
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$ ($a, b,\ c,\ d$ 는 실수이다.)

■ 복소수의 곱셈과 나눗셈

① 복소수의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 전개한 후 $i^2 = -1$ 로 바꾸어 계산한다.

② 복소수의 나눗셈은 분모의 켤레복소수를 분모와 분자에 곱하여 계산한다.

①에 대한 (예시) 다음을 계산하여 $a+bi$ 꼴로 나타내면 (a, b 는 실수이다.)

$$
\begin{aligned}
(2+3i)(-1-4i) &= \underbrace{2\times(-1)}_{①} + \underbrace{2\times(-4i)}_{②} + \underbrace{3i\times(-1)}_{③} + \underbrace{3i\times(-4i)}_{④} \\
&= -2-8i-3i-12i^2 \\
&= -2-11i-12\times(-1) \\
&= -2-11i+12 \\
&= (12-2)-11i \\
&= 10-11i
\end{aligned}
$$

②에 대한 (예시) 다음을 계산하여 $a+bi$ 꼴로 나타내면 (a, b 는 실수이다.)

* 분모 ⇒ $1+i$ 의 켤레복소수

$$
\begin{aligned}
\frac{2+i}{1+i} &= \frac{(2+i)\boxed{(1-i)}}{(1+i)\boxed{(1-i)}} = \frac{2-2i+i-i^2}{1-i+i-i^2} \\
&= \frac{2-(-1)-i}{1-(-1)} \\
&= \frac{3-i}{2} \\
&= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

■ 서로 켤레복소수인 관계

$a+bi$ 의 켤레복소수는 $a-bi$ 이고 $a-bi$ 의 켤레복소수는 $a+bi$ 사이의 곱은 실수이다.

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(a-bi) &= a^2-abi+abi-b^2i^2 \\
&= a^2-b^2\times(-1) \\
&= \underbrace{a^2+b^2}_{(\text{실수})}
\end{aligned}
$$

(서로 켤레복소수인 곱)

■ 음수의 제곱근

-5 의 제곱근을 구해보면

두 수 $\sqrt{5}\,i$ 와 $-\sqrt{5}\,i$ 에 대하여

$(\sqrt{5}\,i)^2 = 5i^2 = -5$,

$(-\sqrt{5}\,i)^2 = 5i^2 = -5$

즉, -5 의 제곱근은 $\sqrt{5}\,i$ 와 $-\sqrt{5}\,i$ 이다.

▣ $a > 0$ 일 때

① $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$ ⇨ $\sqrt{a \times i^2} = \sqrt{-a}$

② $-a$ 의 제곱근은 $\sqrt{a}\,i$ 와 $-\sqrt{a}\,i$

⇨ $\sqrt{a}\,i$ 와 $-\sqrt{a}\,i$ 의 제곱은 $(\sqrt{a}\,i)^2 = ai^2 = -a$, $(-\sqrt{a}\,i)^2 = ai^2 = -a$

(예시) 다음을 계산하여 $a+bi$ 꼴로 나타내시오. (a, b 는 실수이다.)

(1) $\sqrt{-27} + \sqrt{-3}$

⇨ $\sqrt{27}\,i + \sqrt{3}\,i = 3\sqrt{3}\,i + \sqrt{3}\,i = (3+1)\sqrt{3}\,i = 4\sqrt{3}\,i$

(2) $\sqrt{-25} - \sqrt{-9}$

⇨ $\sqrt{25}\,i - \sqrt{9}\,i = 5i - 3i = (5-3)i = 2i$

(3) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-6}$

⇨ $\sqrt{3}\,i \times \sqrt{6}\,i = \sqrt{3 \times 6}\,i^2 = \sqrt{3 \times 3 \times 2}\,i^2 = -3\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

⇨ $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i} = \dfrac{3}{i} = \dfrac{3 \times (-i)}{i \times (-i)} = \dfrac{-3i}{-i^2} = \dfrac{-3i}{-1 \times (-1)} = -3i$

⇨ $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i} = \dfrac{3}{i} = \dfrac{3 \times i}{i \times i} = \dfrac{3i}{-1} = -3i$

▣ 주의해야 되는 음수의 제곱근의 곱

$\sqrt{-3}\,\sqrt{-6} = \sqrt{(-3) \times (-6)} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2}$

⇨

$\sqrt{-3}\,\sqrt{-6} = \sqrt{(-3) \times (-6)} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2}$

* 잘못계산

$\sqrt{-3} \Rightarrow \sqrt{3}\,i$

$\sqrt{-6} \Rightarrow \sqrt{6}\,i$

; $\sqrt{-1}$ 안에 있는 i 를 내보낸 후에 계산

(2) 이차방정식의 근과 판별식

이차방정식의 근을 실수의 범위에서 복소수의 범위까지 확장

① 이차방정식의 근

계수가 실수인 이치방정식의 $ax^2+bx+c=0$ 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

■ $b^2-4ac\geq 0$ ⇨ $\sqrt{b^2-4ac}$ 는 실수 ⇨ 실수인 근을 갖는다.

■ $b^2-4ac<0$ ⇨ $\sqrt{b^2-4ac}$ 는 허수 ⇨ 허수인 근을 갖는다.

(예시) $x^2-3x+1=0$

근의 공식에서 $a=1,\ b=-3,\ c=1$ 이므로

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$ (실근)

(예시) $x^2+x+1=0$

근의 공식에서 $a=1,\ b=1,\ c=1$ 이므로

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$ (허근)

② 이차방정식의 근의 판별

근호안의 식 b^2-4ac 이 값의 부호에 따라서 판별

■ $D=b^2-4ac$ 를 이차방정식의 **판별식**이라 한다.

$D=b^2-4ac>0$ ⇨ 서로 다른 두 실근

$D=b^2-4ac=0$ ⇨ 서로 같은 두 실근(중근)

$D=b^2-4ac<0$ ⇨ 서로 다른 두 허근

위에서 $D\geq 0$ 이면 실근을 갖는 것을 확인 할 수 있다.

▣ 일차항의 계수가 **짝수**인 이차방정식의 근의 판별

$ax^2+2b'x+c=0$ 의 판별식 $D=(2b')^2-4ac=4b'^2-4ac=4(b'^2-ac)$,

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

$\frac{D}{4}=b'^2-ac>0$ ⇨ 서로 다른 두 실근

$\frac{D}{4}=b'^2-ac=0$ ⇨ 서로 같은 두 실근(중근)

$\frac{D}{4}=b'^2-ac<0$ ⇨ 서로 다른 두 허근

위에서 $\frac{D}{4}\geq 0$ 이면 실근을 갖는 것을 확인 할 수 있다.

(실전수학 $+\alpha$) / 이차방정식의 허근과 켤레복소수

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 한 근이 $\boldsymbol{p+qi}$ (p, q 는 실수, $q \neq 0$) 이면 그 켤레복소수 $\boldsymbol{p-qi}$ 도 근이 된다고 하는데 그 이유를 확인해 봅시다.

(실전수학1) 그럼 $p+qi$ 가 근이니까 $x=p+qi$ 를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대입해 볼까요.

$a(p+qi)^2+b(p+qi)+c=0$,

$a(p^2+2pqi+q^2i^2)+bp+bqi+c=0$,

$a(p^2+2pqi-q^2)+bp+bqi+c=0$,

$ap^2+2apqi-aq^2+bp+bqi+c=0$

위의 식에서 실수부분과 허수부분으로 식을 나타내면

$(ap^2-aq^2+bp+c)+(2apq+bq)i=0$

그 다음으로 실수부분과 허수부분이 각각 0 임을 이용하면 됩니다.

$(ap^2-aq^2+bp+c)+(2apq+bq)i=0$

실수부분 $ap^2-aq^2+bp=0$

허수부분 $2apq+bq=0$

(실전수학2) 켤레복소수 $x=p-qi$ 를 이차식 ax^2+bx+c 에 대입해 봅니다.
이차방정식이아니라 이차식에 대입하여 (이차방정식) $=0$ 임을 보이면 $p-qi$ 가 이차방정식의 근이 됨을 보입니다.

$$a(p-qi)^2+b(p-qi)+c=ap^2-2apqi+aq^2+bp-bqi+c$$
$$=(ap^2-aq^2+bp)-(2apq+bq)i$$

(실전수학1)에서의 실수부분과 허수부분이 0 이므로

위의 식에서 $(ap^2-aq^2+bp)-(2apq+bq)i=0-0=0$

즉, $p-qi$ 도 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 한 근이다.

(3) 이차방정식의 근과 계수의 관계

① 이차방정식의 근과 계수의 관계

■ 이차방정식의 두 근의 합

이차방정식 $3x^2-x-2=0$ 의 두 근을 구하면

$(3x+2)(x-1)=0$, $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$, (두 근의 합) $=1+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$

위의 방정식의 이차항의 계수 3 , 일차항의 계수 -1

$-\frac{(\text{일차항의 계수})}{(\text{이차항의 계수})}=-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

⇨ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α,β 라 하면

두 근의 합: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

■ 이차방정식의 두 근의 곱

이차방정식 $3x^2-x-2=0$ 의 두 근을 구하면

$(3x+2)(x-1)=0$, $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$, (두 근의 곱) $=1\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

위의 방정식의 이차항의 계수 3 , 일차항의 계수 -1

$\frac{(\text{상수항})}{(\text{이차항의 계수})}=-\frac{2}{3}$

⇨ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α,β 라 하면

두 근의 곱: $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

② 두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β 를 근으로 하고 x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$\Leftrightarrow$ $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

(예시) 두 수 2, 5 를 근으로 하는 x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은

$x^2-(2+5)x+2\times5=x^2-7x+10=0$

■ 두 수 $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$ 을 근으로 하는 x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은

⇨ $\alpha=1+\sqrt{3}$, $\beta=1-\sqrt{3}$ 라면

$\alpha+\beta=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2$,

$\alpha\beta=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=1-3=-2$,

$x^2-2x-2=0$

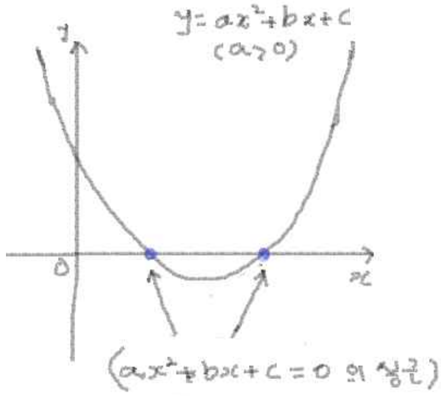
6. 이차방정식과 이차함수

[실전수학 개념 정리]

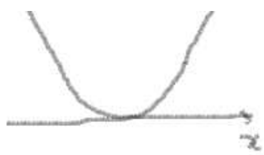
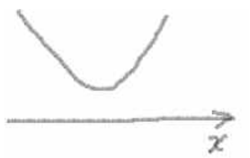
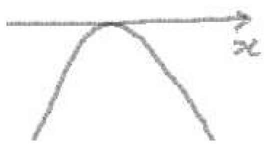
(1) 이차방정식과 이차함수의 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 x 축과 만날 때, $ax^2+bx+c=0$ 의 실근과 같다.

⇨(이차함수의 교점의 개수) = (이차방정식의 실근의 개수)



■ 이차방정식과 이차함수의 그래프 관계

$ax^2+bx+c=0$ **의 판별식** D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ 의 해	서로 다른 두 실근.	한 점에서 만나다.	만나지 않는다.
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 위치관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만나다. (접한다.)	만나지 않는다.
$a>0$ 일 때의 그래프			
$a<0$ 일 때의 그래프			

(예시) 이차함수 $y=x^2-x-4$ 의 그래프와 x 축의 위치 관계

[1단계] 이차방정식으로 나타낸다. $y=0$ 을 대입

$$x^2-x-4=0$$

[2단계] 판별식의 값을 구한다.

$$D=(-1)^2-4\times1\times(-4)=1+16=17\ ,\quad D=17$$

[3단계] 위치 관계 알아본다.

$D>0$, 서로 다른 두 점에서 만난다.

(예시) 이차함수 $y=-x^2+4x-4$ 의 그래프와 x 축의 위치 관계

⇨ 방정식 $-x^2+4x-4=0$ 에서

판별식 $\frac{D}{4}=2^2-(-1)\times(-4)=4-4=0$, $D=0$

x 축에 접한다.

(예시) 이차함수 $y=2x^2-x+3$ 의 그래프와 x 축의 위치 관계

⇨ 방정식 $2x^2-x+3=0$ 에서

판별식 $D=(-1)^2-4\times2\times3=1-24=-23$, $D<0$

x 축과 만나지 않는다.

(2) 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계

■ 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계

$ax^2+bx+c=mx+n$ **의 판별식** D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ ($a>0$)의 그래프와 직선 $y=mx+n$ ($m>0$)의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다. 	한 점에서 만나다. (접한다.) 	만나지 않는다. 

(예시) $D>0$

이차함수 $y=x^2+2x-3$ 의 그래프와 직선 $y=-x+2$ 의 위치 관계

[1단계] $y=x^2+2x-3$ 에 $y=-x+2$ 대입한다.

[2단계] $-x+2=x^2+2x-3$, $x^2+3x-5=0$

[3단계] 판별식 $D=3^2-1\times(-5)=9+5=14$, $D>0$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(예시) $D=0$

이차함수 $y=x^2-4x+5$ 의 그래프와 직선 $y=2x-4$ 의 위치 관계

[1단계] $y=x^2-4x+5$ 에 $y=2x-4$ 대입한다.

[2단계] $2x-4=x^2-4x+5$, $x^2-6x+9=0$

[3단계] 판별식 $\frac{D}{4} = 3^2 - 1 \times 9 = 9 - 9 = 0$, $D = 0$ 한 점에서 만난다. (접한다)

(예시) $D < 0$

이차함수 $y = 3x^2 + x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = 2x - 2$ 의 위치 관계

[1단계] $y = 3x^2 + x + 1$ 에 $y = 2x - 2$ 대입한다.

[2단계] $2x - 2 = 3x^2 + x + 1$, $3x^2 - x + 2 = 0$

[3단계] 판별식 $D = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23$, $D < 0$ 만나지 않는다.

▣ k 가 결정하는 위치 관계

이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 와 직선 $y = -3x + k$ 의 위치 관계

⇨ $-3x + k = x^2 - 2x + 2$,

$x^2 + x + (2 - k) = 0$,

판별식 $D = 1^2 - 4 \times (2 - k) = 1 - 8 + 4k = 4k - 7$,

$D = 4k - 7$

(매칭물음1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

⇨ 판별식 $D > 0$ 이므로

$D = 4k - 7 > 0$, $4k - 7 > 0$, $4k > 7$,

$k > \frac{7}{4}$

(물음2) 한 점에서 만난다.

⇨ 판별식 $D = 0$ 이므로

$D = 4k - 7 = 0$, $4k = 7$,

$k = \frac{7}{4}$

(물음3) 만나지 않는다.

⇨ 판별식 $D < 0$ 이므로

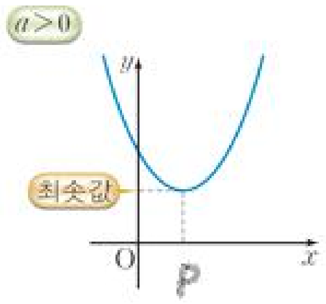
$D = 4k - 7 < 0$, $4k < 7$,

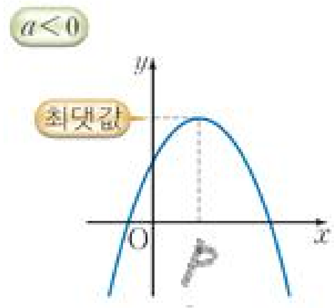
$k < \frac{7}{4}$

(3) 이차함수의 최대, 최소

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)의 최댓값과 최솟값

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ ⇨ $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 고쳤을 때





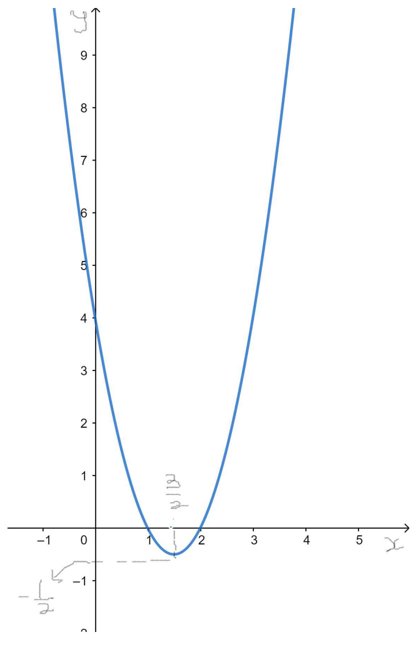
(예시) $a>0$

$y=2x^2-6x+4$

⇨

$$y=2\left(x^2-3x\right)+4=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+4=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+4=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

$$y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$



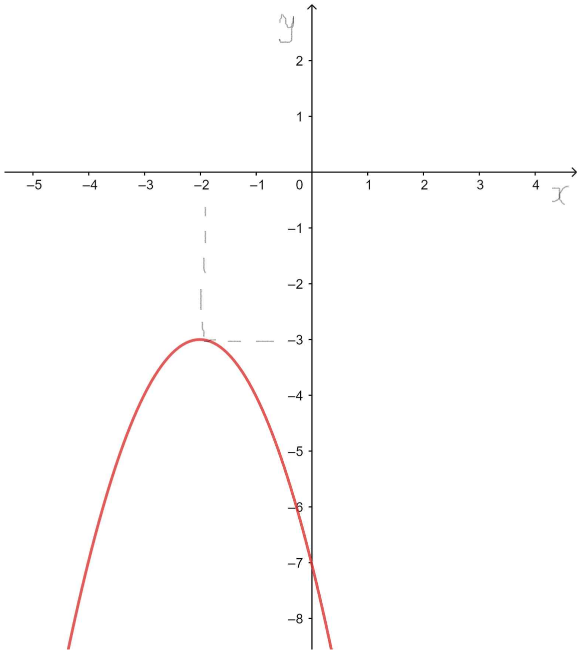
$x=\frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{2}$, 최댓값은 없다.

(예시) $a<0$

$y=-x^2-4x+1$

⇨ $y=-\left(x^2+4x\right)+1=-(x+2)^2-2^2+1=-(x+2)^2-3$

$y=-(x+2)^2-3$



$x = -2$ 에서 최댓값 -3 , 최솟값은 없다.

① **제한된 범위**에서 이차함수의 최댓값과 최솟값

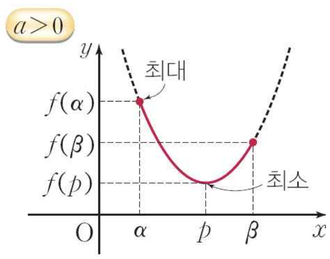
⇨ 꼭짓점의 x 좌표가 주어진 범위에 포함되는지 확인

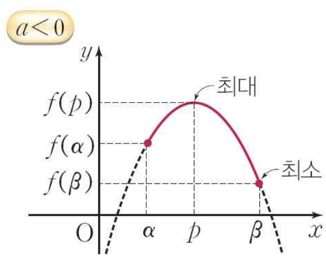
x 값의 범위가 제한되어 있을 때

x 값의 범위가 $\boldsymbol{\alpha \le x \le \beta}$ 일 때, 이차함수 $f(x) = a(x-p)^2 + q$ ($a \ne 0$)에서

■ **꼭짓점의** x **좌표** $x = p$ 가 <u>x 값의 범위에 포함될 경우</u>

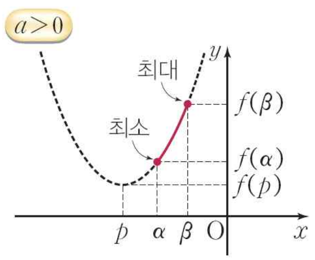
$f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(p)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

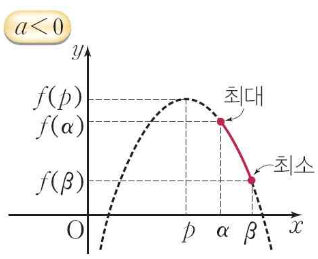




■ **꼭짓점의** x **좌표** $x = p$ 가 <u>x 값의 범위에 포함되지 않을 경우</u>

$f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값이고, 작은 값이 최솟값이다.





(예시) $-1 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y=x^2-2x-1$ 의 최댓값과 최솟값

⇨ $y=x^2-2x-1=(x-1)^2-1^2-1=(x-1)^2-2$, $y=(x-1)^2-2$

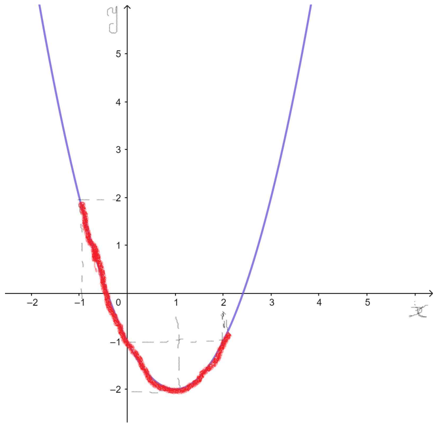
꼭짓점의 x 좌표는 $x=1$ 이고, x 값의 범위는 $-1 \le x \le 2$ 이므로

$x=-1$ 일 때 $y=(-1-1)^2-2=4-2=2$, $y=2$

$x=1$ 일 때 $y=(1-1)^2-2=-2$ $y=-2$

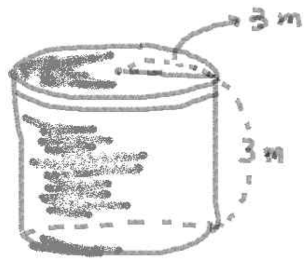
$x=2$ 일 때 $y=(2-1)^2-2=1-2=-1$, $y=-1$

최댓값은 2 , 최솟값은 -2



② 이차함수의 최대, 최소의 활용

다음 그림과 밑면의 반지름의 길이가 3 m , 높이가 3 m 인 원기둥이 있다. 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 일정하게 늘이고 높이를 같은 길이만큼 줄여서 새로운 원기둥 모양을 만들었더니 원래의 원기둥의 부피와 같았다. 이때 늘어난 반지름의 길이를 구하시오. (단, 원기둥의 두께는 고려하지 않는다.)



[1단계] 구하고자 하는 것을 미지수 x 로 놓는다. 늘어난 반지름의 길이를 x m 로 놓는다.

[2단계] 원래의 원기둥의 부피는 ⇨ $\pi \times 3 \times 3 \times 3 = 27\pi$ (m^3)

새로운 원기둥의 부피는

⇨

$$\pi \times (3+x)^2 \times (3-x) = \pi(9+6x+x^2)(3-x) = \pi(27-9x+18x-6x^2+3x^2-x^3)$$
$$=\pi(27+9x-3x^2-x^3)$$

[3단계] $\pi(27-9x+18x-6x^2-x^3)=27\pi$, $27-9x+18x-6x^2-x^3=27$,

$x^3+3x^2-9x=0$, $x(x^2+3x-9)=0$, $x=0$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{2}$

[4단계] 문제의 조건에서 $0<x<3$ 이어야 하므로

$x = \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}$, 늘어난 반지름의 길이는 $\left(\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}\right)\mathrm{m}$

7. 여러 가지 방정식

[실전수학 개념 정리]

(1) 삼차방정식과 사차방정식

다항식 $P(x)$ 가 x 에 대한 삼차식, 사차식일 때, $P(x)=0$ 을 각각 x 에 대한 삼차방정식, 사 차방정식이라고 한다.

① 인수분해 공식을 이용

■ $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

(예시) 방정식 $x^3+27=0$ 의 근은

⇨ $x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)=0$

⇨ $x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

■ $a^4-b^4=\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)$

(예시) 방정식 $x^4-1=0$ 의 근은

⇨ $x^4-1=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=(x+1)(x-1)\left(x^2+1\right)=0$

⇨ $x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x^2=-1$

⇨ $x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\pm i$

② 공통부분을 하나의 문자로 바꾸기

(예시) 방정식 $x^4-x^2-2=0$ 의 근은

⇨ $x^2=X$ 로 놓는다.

⇨ $X^2-X-2=0$, $(X-2)(X+1)=0$

⇨ $X=-1$ 또는 $X=2$

⇨ $x^2=-1$ 또는 $x^2=2$

⇨ $x=\pm i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

③ 인수정리와 조립제법 이용

(예시) 방정식 $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$ 의 근은

⇨ $P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6=0$, $P(1)=0$ 이므로 $P(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

⇨ 조립제법

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\
 & & 1 & 0 & -7 & -6 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & -7 & -6 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 1 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

⇨ $(x-1)(x+1)\left(x^2-x-6\right)=0$, $(x-1)(x+1)(x-3)(x+2)=0$

⇨ $x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-2$

■ 삼차방정식과 허근

$x^3-1=0$ 의 한 허근을 ω 라 하면

⇨ $\omega^3=1$

⇨ $\omega^3=1,\ \omega^3-1=0,\ (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

⇨ $\omega=1$ 또는 $\omega^2+\omega+1=0$

⇨ $\omega=1$ 과 $\omega^2+\omega=-1$ 의 꼴을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

(2) 연립이차방정식

$\begin{cases}(\text{일차방정식})=0\\(\text{이차방정식})=0\end{cases}$, $\begin{cases}(\text{이차방정식})=0\\(\text{이차방정식})=0\end{cases}$

① $\begin{cases}(\text{일차방정식})=0\\(\text{이차방정식})=0\end{cases}$ ⇨ 일차식을 이차식에 대입 ⇨ (이차식)$=0$ 인 꼴로 정리한다.

(예시) 연립이차방정식 $\begin{cases}x+y=2\\x^2+3xy-4y^2=0\end{cases}$

[1단계] $x+y=2$ ⇨ $*\ y=-x+2$

[2단계] $x^2+3x(-x+2)-4(-x+2)^2=0$, $-6x^2+16x-10=0$ ⇨ $3x^2-8x+5=0$,

$(3x-5)(x-1)=0$, $x=1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

[3단계] $x=1$ 이면 $*\ y=-1+2=1$, $y=1$

$x=\frac{5}{3}$ 이면 $*\ y=-\frac{5}{3}+2=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{3}$

$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\frac{5}{3}\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$

② $\begin{cases}(\text{이차방정식})=0\\(\text{이차방정식})=0\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}(\text{일차방정식})^*(\text{일차방정식})^@=0\\(\text{이차방정식})=0\end{cases}$

$\begin{cases}(\text{일차방정식})^*=0\\(\text{이차방정식})=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}(\text{일차방정식})^@=0\\(\text{이차방정식})=0\end{cases}$

(예시) 연립이차방정식 $\begin{cases}x^2+xy-2y^2=0\\x^2+y^2=50\end{cases}$

[1단계] $x^2+xy-2y^2=0,\ (x+2y)(x-y)=0$ ⇨ $x=y$ 또는 $x=-2y$

[2단계] $\begin{cases}x-y=0\\x^2+y^2=50\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x+2y=0\\x^2+y^2=50\end{cases}$

[3단계] $\begin{cases}x-y=0\\x^2+y^2=50\end{cases}$, $x=y$ 이므로 $x^2+y^2=50$ 에 대입하여 정리하면

$2x^2=50,\ x^2=25,\ x=\pm 5$

$\begin{cases}x+2y=0\\x^2+y^2=50\end{cases}$, $x=-2y$ 이므로 $x^2+y^2=50$ 에 대입하여 정리하면

$4y^2+y^2=50,\ 5y^2=50,\ y=\pm\sqrt{10}$

즉, $\begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$

8. 여러 가지 부등식

[실전수학 개념 정리]

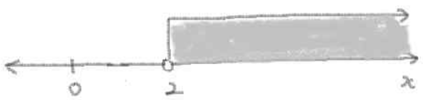
(1) 연립일차부등식

두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어서 나타내는 것

① 연립부등식

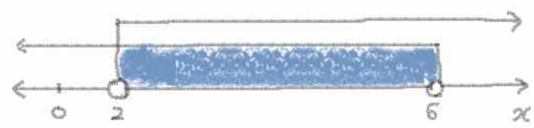
(예시) 연립일차부등식 $\begin{cases} x-2>0 \\ x-1<5 \end{cases}$

[1단계] $x-2>0$, $x>2$



[2단계] $x-1<5$, $x<6$

[3단계] $x>2$ 와 $x<6$ 을 하나의 수직선 위에 나타내면



② 해가 없거나 한 개인 연립부등식

연립부등식에서 두 부등식의 공통인 해가 없으면 ⇨ 해가 없다.

공통인 해가 한 개인 경우 ⇨ 등호를 사용하여 나타낸다.

(예시) $\begin{cases} 3x-1 \le 5 \\ 2x-6>2 \end{cases}$

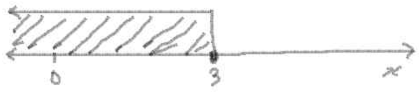
⇨ $3x-1 \le 5$, $3x \le 6$, $x \le 2$

⇨ $2x-6>2$, $x>4$

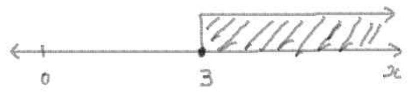
⇨  해가 없다.

(예시) $\begin{cases} 3x-5 \le -x+7 \\ 2x-5 \ge 1 \end{cases}$

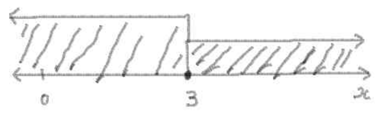
⇨ $3x-5 \le -x+7,\ 4x \le 12,\ x \le 3$



⇨ $2x-5 \ge 1,\ 2x \ge 6,\ x \ge 3$



⇨



⇨ 두 등식을 동시에 만족하는 것은 $x=3$ 이다.

③ $A<B<C$ 꼴의 연립부등식

⇨ $A<B,\ B<C$

⇨ $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 의 꼴로 고쳐서 푼다.

(예시) 연립일차부등식 $2x-7<x+3 \le 4x+9$

[1단계] $2x-7<x+3$, $x+3 \le 4x+9$

[2단계] $\begin{cases} 2x-7<x+3 \\ x+3 \le 4x+9 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} x<10 \\ -3x \le 6 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} x<10 \\ x \ge -2 \end{cases}$

[3단계]

④ 절댓값을 포함한 일차부등식

일반적으로 절댓값 $|x|$ ⇨ 수직선 위에서 원점과 x 를 나타내는 점 사이의 거리이다.

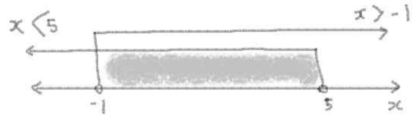
■ $|x|<a$ 의 해는 ⇨ $-a<x<a$

(예시) 부등식 $|x-2|<3$ 의 해는

[1단계] $-3<x-2<3$

[2단계] $-3 < x-2,\ -1 < x$ 과 $x-2 < 3,\ x < 5$

[3단계] $x > -1$ 과 $x < 5$



■ $|x| > a$ 의 해는 ⇨ $x < -a$ 또는 $x > a$

(예시) $|3x+1| > 4$

[1단계] $3x+1 < -4$ 또는 $3x+1 > 4$

[2단계] $3x+1 < -4,\ 3x < -5$, $x < -\frac{5}{3}$ 또는 $3x+1 > 4,\ 3x > 3$, $x > 1$

[3단계] $x < -\frac{5}{3}$ 또는 $x > 1$

■절댓값을 두 개 포함한 일차부등식

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & (x \geq a) \\ -(x-a) & (x < a) \end{cases}$$

⇨ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0 이 되는 미지수의 값을 기준으로 범위를 나누어 절댓값 기호를 없애고 푼다.

(예시) 부등식 $|x+1| + |x-3| \leq 5$

[1단계] $x = -1$ 과 $x = 3$ 을 경계로 절댓값 안의 식의 부호가 변한다.

⇨ 경계를 기준으로 세 가지로 나타 낼 수 있다.

[2단계] (i) $x < -1$ 일 때, $|x+1| = -(x+1) = -x-1$, $|x-3| = -(x-3) = -x+3$

⇨ $-x-1-x+3 \leq 5$, $-2x+2 \leq 5$, $-2x \leq 3$, $x \leq -\frac{3}{2}$

⇨ $-\frac{3}{2} \leq x < -1$

(ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때, $|x+1| = x+1$, $|x-3| = -(x-3) = -x+3$

⇨ $x+1-x+3 = 4 \leq 5$ 이므로 항상 성립

⇨ $-1 \leq x < 3$

(iii) $x \geq 3$ 일 때, $|x+1| = x+1$, $|x-3| = x-3$

⇨ $x+1+x-3 \leq 5,\ 2x-2 \leq 5,\ 2x \leq 7$, $x \leq \frac{7}{2}$

⇨ $3 \leq x \leq \frac{7}{2}$

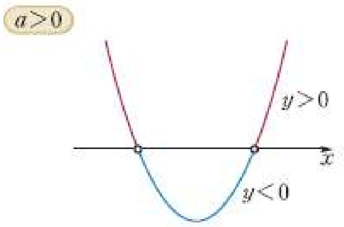
[3단계] $-\frac{3}{2} \leq x < -1$, $-1 \leq x < 3$, $3 \leq x \leq \frac{7}{2}$

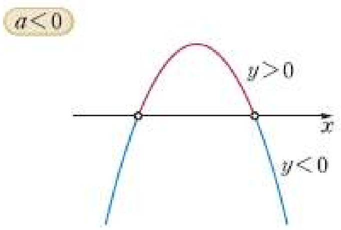
(2) 이차부등식

일반적으로 이차부등식의 해와 이차함수의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

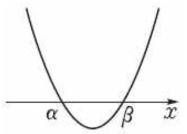
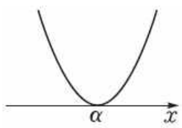
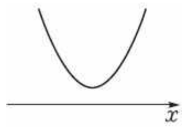
■ $ax^2+bx+c>0$ 의 해는 $y=ax^2+bx+c$ 에서 $\mathbf{y>0}$ 인 x 의 값의 범위,
즉 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이다.

■ $ax^2+bx+c<0$ 의 해는 $y=ax^2+bx+c$ 에서 $\mathbf{y<0}$ 인 x 의 값의 범위,
즉 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 x 축보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이다.





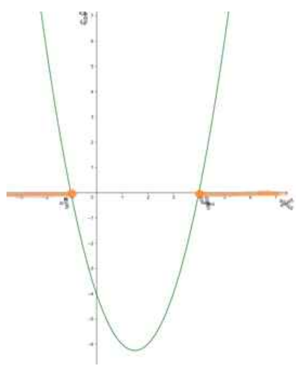
$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 의 판별식을 $D=b^2-4ac$ 라 하면
이차부등식의 해와 이차함수의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$ax^2+bx+c=0$ 의 판별식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프			
$y>0$ 의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$ 인 모든 실수	모든 실수
$y<0$ 의 해	$\alpha<x<\beta$	해는 없다.	해는 없다.
$y\geq 0$ 의 해	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$y\leq 0$ 의 해	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	해는 없다.

① $D>0$ 일 때의 이차부등식

(예시) $x^2-3x-4\geq 0$

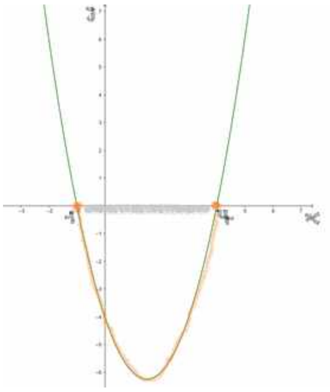
⇨ 이차함수 $y=x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$ 의 그래프



⇨ $y\geq 0$ 인 범위이므로 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 4$

만약 $x^2-3x-4 \le 0$ 인 경우

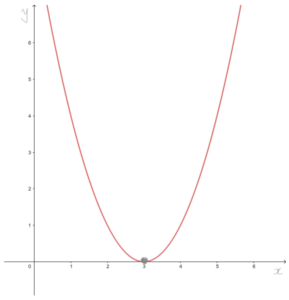
⇨ $y \le 0$ 인 범위이므로 $-1 \le x \le 4$



② $D=0$ 일 때의 이차부등식

(예시) $x^2-6x+9 \le 0$

⇨이차함수 $y=x^2-6x+9=(x-3)^2$ 의 그래프



⇨ $y \le 0$ 이므로 $x=3$

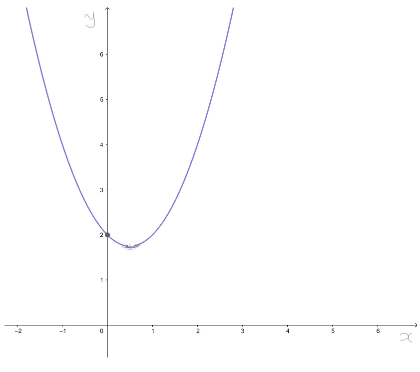
만약 $y \ge 0$ 이면 모든 실수

③ $D<0$ 일 때의 이차부등식

(예시) $x^2-x+2>0$

⇨ 이차함수 $y=x^2-x+2$ 의 이차방정식 $x^2-x+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times2=1-8=-7<0$



⇨ $y>0$ 이므로 모든 실수

만약 $y \le 0$ 이면 해는 없다.

(3) 연립이차부등식

연립이차부등식을 풀 때는 연립부등식을 이루고 있는 각 부등식의 해를 구한 후에 이들의 공통부분을 구한다.

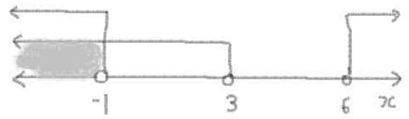
① 일차부등식을 포함한 연립이차부등식

(예시) $\begin{cases} 3x-1 < x+5 \\ x^2-5x > 6 \end{cases}$

⇨ $3x-1 < x+5$, $2x < 6$, $x < 3$

$x^2-5x-6 > 0$, $(x-6)(x+1) > 0$, $x < -1$ 또는 $x > 6$

⇨ $x < 3$ 과 $x < -1$ 또는 $x > 6$ 의 공통부분은 $x < -1$



② 이차부등식만으로 이루어진 연립이차부등식

(예시) $\begin{cases} x^2-2x-1 \le 2 \\ x^2-5x+1 > -3 \end{cases}$

⇨ $x^2-2x-1 \le 2$, $x^2-2x-3 \le 0$, $(x-3)(x+1) \le 0$, $-1 \le x \le 3$

$x^2-5x+1 < -3$, $x^2-5x+4 < 0$, $(x-4)(x-1) < 0$, $1 < x < 4$

⇨

■ 연립이차부등식의 활용

(예시) 개당 100 만원 가격에 전자제품을 판매하면 매월 100 개를 판매할 수 있다고 하면, $2x$ 원 올려서 판매하면, x 원 판매량이 줄어든다고 한다. 월 판매량이 80 개 이상이면 한 달 총 판매금액이 10800 만 원 이상이 되도록 하는 전자제품의 범위는

[1단계] 총 판매금액은 $(100+2x)(100-x)$

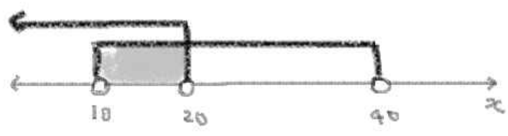
[2단계] $(100+2x)(100-x) \ge 10800$

월 판매량이 80 개 이상이므로 $100-x \ge 80$ ⇨ $x \le 20$

[3단계] $(100+2x)(100-x) \ge 10800$ ⇨ $10000+100x-2x^2 \ge 10800$, $2x^2-100x+800 \le 0$,

$x^2-50x+400 \le 0$, $(x-40)(x-10) \le 0$ ⇨ $10 \le x \le 40$

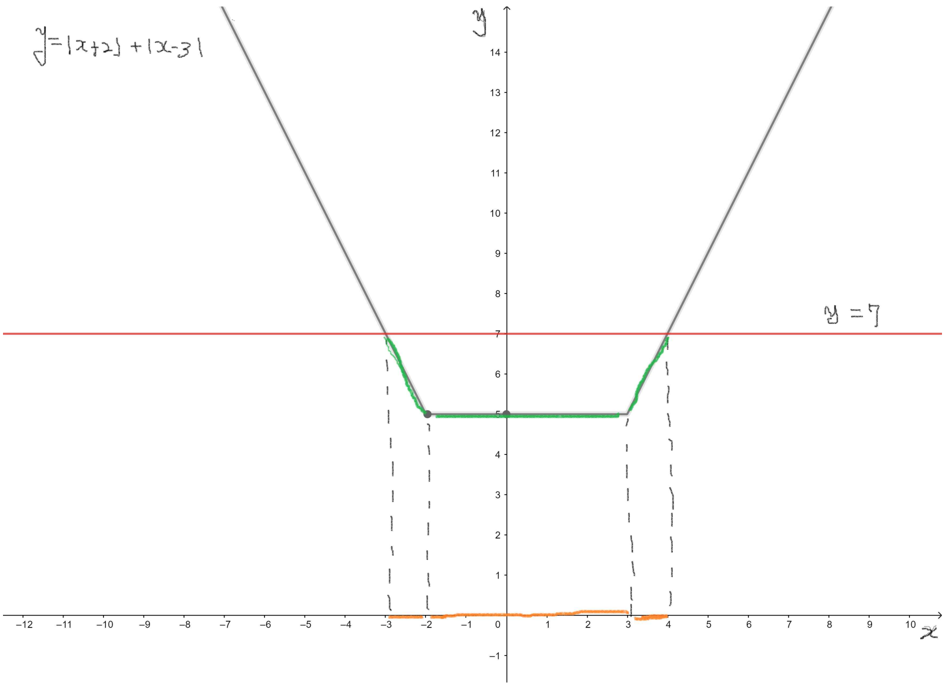
[4단계] $10 \le x \le 40$ 과 $x \le 20$ 의 공통부분은



(실전수학 $+\alpha$) /절댓값을 포함하는 이차부등식의 해

절댓값을 포함하는 이차부등식의 해를 좌표표면에서 구해봅시다.
$|x+2|+|x-3|<7$

(실전수학1)



그래프 $y=|x+2|+|x-3|$ 와 $y=7$ 에서 두 그래프가 만나는 두 점을 찾고, 아래쪽에 있는 그래프의 x 의 값의 범위를 구하면
⇨ $-3<x<4$ 이다.

(실전수학2)

절댓값 기호 안에서 $x=-2$ 와 $x=3$ 일 때 0 이 되므로 이를 기준으로 하면
(i) $x<-2$ 일 때, $-x-2-x+3=2x+1<7$, $x>-3$
⇨ $-3<x<-2$
(ii) $-2\le x<3$ 일 때, $x+2-x+3<7$, $5<7$ 이므로 성립
⇨ $-2\le x<3$
(iii) $x\ge 3$ 일 때, $x+2+x-3<7$, $2x<8$, $x<4$
⇨ $3\le x<4$
(i), (ii), (iii)에 의해서

[실전수학 기본문제]

44. 실수 a에 대하여 $z=(2-a)+(4-a^2)i$가 $z^2>0$을 만족시키도록 하는 a의 값을 구하시오.

45. 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{a}{1-i}+\frac{b}{1+i}=1+2i$가 성립할 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$의 값을 구하시오.

46. 복소수 z의 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $(1-i)z+(2-i)\overline{z}=3-i$가 성립할 때, $z-\overline{z}$의 값을 구하시오.

47. $x=1+i$, $y=1-i$일 때, $x^2-4xy+y^2$의 값을 구하시오.

48. 두 복소수 $\alpha=1+i$, $\beta=-1-2i$일 때, $\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$의 값을 구하시오.

49. 실수 a에 대하여 복소수 $z=a^2-(i+2)a-3-i$를 제곱하면 음의 실수가 된다고 한다. 이때 a의 값을 구하시오.

50. 복소수 z에 대하여 $z+\overline{z}=2$, $z=\overline{z}$일 때, z의 값을 구하시오. (단, $\overline{z}$는 켤레복소수)

51. 복소수 $z=(1-i)x^2-(3-4i)x+2-3i$에 대하여 $z+\overline{z}=0$, $z\neq\overline{z}$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.(단, $\overline{z}$는 켤레복소수)

52. 복소수 z의 켤레복소수가 $\overline{z}$일 때, 등식 $(1+i)z+2i\overline{z}=-1+i$를 만족시키는 z의 값을 구하시오.

53. 다음 식을 간단히 나타내시오.

(1) $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}+\sqrt{-16}+\sqrt{-25}$ (2) $2\sqrt{-49}-3\sqrt{-9}+5\sqrt{-36}$

(3) $\sqrt{27}\,i-\sqrt{12}\,i$ (4) $(5+4i)-(-3+i)$

54. 다음을 계산하여 $a+bi(a,\ b$는 실수)의 꼴로 나타내시오.

(1) $\dfrac{1}{1+i}$ (2) $\dfrac{2-5i}{1+2i}$ (3) $(3+2i)\div(1-i)$ (4) $(1+\sqrt{2}\,i)\div(1-\sqrt{2}\,i)$

55. 다음을 계산하시오.

(1) $\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-3}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}$ (3) $\sqrt{-2}\,\sqrt{-5}$ (4) $\sqrt{2}\,\sqrt{-3}$

56. 다음 이차방정식의 근을 판별하시오.

(1) $x^2+3x+2=0$

(2) $x^2-6x+9=0$

(3) $2x^2-2x+1=0$

(4) $2x^2-5x-2=0$

57. 다음 조건에 알맞은 실수 k값의 범위를 구하여라.

(1) $x^2-3x+k+5=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $2x^2+x+k=0$이 실근을 갖는다.

58. 다음 이차방정식이 허근을 가질 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

(1) $x^2+5x+5k=0$

(2) $4x^2+kx+1=0$

59. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+p+3=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값 구하시오.

60. a가 실수일 때, 이차방정식 $x^2+ax+a-1=0$은 실근을 가짐을 보이시오.

61. x에 대한 이차방정식 $x^2+2x+3-m=0$이 다음과 같은 근을 갖도록 실수 m의 값의 범위를 구하시오.
(1) 실근
(2) 서로 다른 두 실근
(3) 중근
(4) 서로 다른 두 허근

62. 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$의 값을 구하시오.

63. 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 두 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

64. x에 대한 이차방정식

$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$, $c\neq 0$, a, b, c는 실수)에서 근의 공식을 $x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$

로 잘못 알고 풀었더니 두 근이 -1, 2이었다. 이 방정식의 옳은 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

65. 이차방정식 $(1-i)x^2+(1+3i)x-2(1+i)=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

66. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-2)x+a-3=0$의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 다를 때, 실수 a의 값을 구하시오.

67. 다음 두 수를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 만들어라.

(1) 2, -5

(2) $1+i$, $1-i$

68. 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

69. 다음 두 수를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

(1) $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

70. 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $(\alpha-\beta)^2$

(4) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

71. 이차방정식 $x^2-(m-1)x+m=0$의 두 근 사이에 다음과 같은 관계가 성립할 때, 실수 m의 값을 구하여라.

(1) 두 근의 비가 $2:3$이다.

(2) 두 근의 차가 1이다.

72. 다음 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=x^2-3x+1$ (2) $y=x^2-2x+1$ (3) $y=x^2-x+1$

(4) $y=2x^2-x+2$ (5) $y=-x^2+4x-4$ (6) $y=-2x^2+3x+2$

73. 이차함수 $y=x^2-4x+k$가 다음 조건을 만족시키도록 상수 k의 값의 범위를 정하시오.

(1) x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) x축에 접한다.

(3) x축과 만나지 않는다.

74. 이차함수 $y=-2x^2-6x+3$의 그래프와 x축과의 교점의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$이라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

75. 이차함수 $y=x^2-2kx+k+2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) x축과 만나지 않는다.

76. 이차방정식 $ax^2-bx+c=0$의 두 근이 -1, 2일 때, 이차함수 $y=-ax^2+bx-c$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 α, β라고 한다. 이때 $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

77. 이차함수 $y=x^2+2(a-1)x+a+5$의 그래프가 x축에 접할 때, 양수 a의 값을 구하고, 그 접점의 좌표를 구하시오.

78. 이차함수 $y=x^2+6x$의 그래프와 직선 $y=3x+2$의 교점의 개수를 구하시오.

79. 이차함수 $y=x^2-4x+2$의 그래프와 다음 직선과의 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=2x-1$ (2) $y=2x-7$ (3) $y=2x-9$

80. 이차함수 $y=x^2-4x-3$의 그래프와 직선 $y=-x+1$과의 교점을 P, Q라고 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

81. 이차함수 $y=x^2-ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x-4$가 두 점에서 만나고 그 중 한 교점의 x좌표가 -1일 때, 다른 교점의 좌표를 구하시오.

82. 이차함수 $y=x^2-2x+a$의 그래프와 직선 $y=2x-3$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 실수 a의 값의 범위를 정하시오.

83. 이차함수 $y=x^2+kx+3$의 그래프와 직선 $y=3x+2$가 서로 만나지 않도록 상수 k의 값의 범위를 정하시오.

84. 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하고, 그때의 x의 값을 구하시오.

(1) $y=-x^2+2x+3$ (2) $y=x^2-4x+3$

85. 이차함수 $y=ax^2-2x+a-1$은 $x=1$일 때, 최솟값 b를 가진다. 이때 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

86. 이차함수 $y=x^2-4ax+2b$는 $x=4$일 때, 최솟값 10을 갖는다. 이때 상수 a, b의 값을 구하시오.

87. 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$는 $x=2$일 때, 최댓값 5를 가지고 $f(1)=3$일 때, $f(-1)$의 값을 구하시오.

88. $-1 \leq x \leq 2$에서 $f(x)=-x^2+2x$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

89. $-1 \leq x \leq 4$에서 $y=x^2-4x+2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, Mm의 값을 구하시오.

90. $1 \leq x \leq 2$에서 이차함수 $y=-2x^2+3x+a$의 최댓값이 2일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

91. $0 \leq x \leq 3$에서 이차함수
$y=ax^2-2ax+b(a>0)$의 최댓값이 3, 최솟값이 -5일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

92. $0 \le x \le 2$일 때,
$y=(x^2-2x+3)^2-2(x^2-2x+3)+2$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

93. 다음 방정식을 푸시오.
(1) $x^3-27=0$ (2) $x^3+27=0$ (3) $x^3+8=0$ (4) $x^3-8=0$

94. 다음 방정식을 푸시오.
(1) $x^3-4x^2+8=0$ (2) $x^3-5x+2=0$ (3) $x^3-7x^2+6=0$

95. 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^4-4x+3=0$

(2) $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$

(3) $x^3-5x^2+3x+9=0$

(4) $x^3-2x-4=0$

(5) $x^3-2x^2-4x+8=0$

(6) $x^4-2x^3-x+2=0$

96. 다음 방정식을 푸시오.

(1) $(x^2-2x)^2-5(x^2-2x)-24=0$

(2) $x^4+3x^2+4=0$

97. 삼차방정식 $x^3-px+q=0$의 두 근이 1, 2일 때, p, q의 값과 나머지 한 근을 구하시오.

98. 삼차방정식 $x^3+kx^2+8x-6=0$의 한 근이 3일 때, k의 값을 구하여라. 또 나머지 두 근을 구하시오.

99. 다음 연립이차방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-y+2=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-y=0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+2y-5=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+y^2-10=0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

100. 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-2x-y-2=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-x+y=0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

101. 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=0 \\ x^2+xy+2y^2=28 \end{cases}$

102. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2-5xy+2y^2=0 \\ x^2-2xy+2y^2=10 \end{cases}$ 의 해의 순서쌍 $(x,\ y)$는 몇 개인지 구하시오.

103. 다음 연립일차부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-1>0 \\ 2x-8<0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x<6 \\ 5x \geq -10 \end{cases}$

104. 다음 연립일차부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} -3x+11 \le 2 \\ 4x+3 > 3x+5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2(x+2) \ge 3x \\ -2x+5 \le x-1 \end{cases}$

105. 다음 연립일차부등식을 푸시오.

연립일차부등식 $\begin{cases} 3x-5 > x+1 \\ 2x+6 < x+5a \end{cases}$ 가 정수인 해를 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

106. 연립일차부등식 $3-x \le 2x+1 \le 5x-4$을 푸시오.

107. 다음 연립일차부등식을 푸시오.

(1) $-4 \le x-5 \le -x+1$

(2) $4x-6 \le 3x+2 < 5x-4$

108. 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x-1|<3$

(2) $|x+2| \ge 5$

109. 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|2x-1| \le 3$

(2) $|3x-5|>10$

110. 다음 부등식을 푸시오.

(1) $2|x+3| \leq x$

(2) $x+|x-2|>4$

(3) $|x|+|x+1|>3$

(4) $|x-3| \geq 2|x|$

111. 다음 부등식의 해를 구하시오.

(1) $1<|x-1|<3$

(2) $2|x-1|+3|x+1|<6$

112. 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2-x-6 \geq 0$

(2) $-2x^2+3x+2>0$

(3) $x^2-2x-2 \leq 0$

113. 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2-4x+3<0$

(2) $x^2-4x-12\geq 0$

(3) $2x^2-5x-3>0$

(4) $-2x^2+5x+7\leq 0$

114. 이차부등식 $x^2+ax+2a-3>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

115. $a<0$일 때, 이차부등식 $ax^2+2x+a>0$이 해를 가지도록 하는 실수 a값의 범위가 $m<a<n$일 때, $m+n$의 값을 구하시오.

116. 이차부등식 $x^2-2ax+2a+3 \le 0$의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a값의 범위를 구하시오.

117. 알루미늄 창틀을 사용하여 둘레의 길이가 $200\,\mathrm{cm}$인 직사각형 모양의 환기창을 만들려고 한다. 환기창의 넓이가 $1600\,\mathrm{cm}^2$ 이상이 되도록 하고 한 변의 길이를 가능한 길게 만들 때, 긴 변의 길이를 구하시오. (단, 창틀의 폭은 생각하지 않는다.)

118. 다음 연립이차부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2-3x-4<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+x-6 \ge 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-5x+4 \ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3x-10<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

119. 다음 연립이차부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2 - x - 6 \le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

(2) $x < x(x+3) \le 2(x+3)$

120. 다음 연립이차방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 \le 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ 2x^2 + x - 3 > 2x \end{cases}$

121. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \ge 0 \\ (x+2)(x-a) < 0 \end{cases}$의 해가 $-2 < x \le -1$일 때, 실수 a의 범위를 구하시오

122. 세 실수 a, b, c $(a<b<c)$에 대하여 x에 대한

연립부등식 $\begin{cases} (x-a)(x-b)>0 \\ (x-b)(x-c)>0 \end{cases}$의 해가 $x<-4$ 또는 $x>3$일 때, 이차부등식

$x^2+ax+c<0$의 해를 구하시오.

[실전수학 연습문제]

123. 등식 $2z-\overline{z}=4-3i$를 만족시키는 복소수 z에 대하여 $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{a-bi}{c}$일 때, $a-b+c$의 값을 구하시오.

124. 두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha+\beta=2-i$일 때, $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$의 값을 구하시오.

125. $1-i+i^2-i^3+i^4-\ \cdots\ +i^{100}$의 값을 구하시오.

126. $-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}+\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-2}}+\sqrt{-1}\sqrt{-2}+\sqrt{-2}\sqrt{3}=a+bi$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오

127. x에 대한 이차식 $x^2-(2t+4)x+3t^2-t+1$이 완전제곱식이 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합을 구하시오.

128. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 영석이는 b를 잘못 보고 풀었더니 두 근이 1과 -2가 되었고, 형명이는 c를 잘못 보고 풀었더니 두 근이 3과 -4가 되었다. 처음 이차방정식의 근을 구하시오.

129. x에 대한 이차방정식 $x^2-4mx+m^2-m+2=0$이 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 범위가 $a<m<b$일 때, $a+3b$의 값을 구하시오.

130. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-3)+3k^2+1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

131. 두 실수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+2ax-b+5=0$의 한 근이 $2-i$일 때, $3(a+b)$의 값을 구하시오.

132. 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프가 x축과 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$에서 만날 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

133. 이차함수 $y=x^2+4ax+3a^2-6a+16$의 그래프가 x축과 만나지 않을 때, 정수 a의 값의 개수를 구하시오.

134. 이차함수 $y=ax^2+x$의 그래프와 직선 $y=-x+b$의 두 교점의 x좌표가 각각 -1, 3일 때 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

135. 두 실수 a, b에 대하여 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 직선 $y=2x-1$은 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 중 한 점의 x좌표가 $2-3i$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

136. 0이 아닌 실수 k에 대하여 이차함수 $y=x^2-kx+3k-1$의 그래프와 직선 $y=3kx-1$이 접하도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

137. 이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프와 직선 $y=3x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k값의 범위를 구하시오.

138. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(2,\ 0)$, $(6,\ 0)$을 지날 때, x에 대한 이차 방정식 $f\left(\frac{x-1}{3}\right)=0$의 두 실근의 합을 구하시오.

139. $0 \le x \le 3$일 때, 함수 $f(x)=(x^2-2x+2)^2-2(x^2-2x+2)+2$는 $x=a$에서 최댓값 M을, $x=b$에서 최솟값 m을 가진다. 이때 $M+m+a+b$의 값을 구하시오.

140. $k \le x \le 6$에서 이차함수 $f(x)=x^2-4x+1$의 최댓값은 13, 최솟값은 -2일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

141. $-2 \le x \le 3$에서 함수 $y=x^2-4|x|+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

142. 삼차방정식 $x^3-(a-3)x^2+4x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=-4$이다. 정수 a의 값을 구하시오.

143. 방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 w라 할 때, $\frac{w^8+w^4}{1+w+w^2+\cdots+w^{10}}$의 값을 구하시오.

144. 사차방정식 $x^4-23x^2+132=0$
의 네 근을 α, β, γ, δ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$의 값을 구하시오.

145. 사차방정식 $(x^2-5x)(x^2-5x+13)+42=0$의 모든 실근의 곱을 구하시오.

146. 실수 x, y에 대하여 $x \star y = \begin{cases} x & (x \geq y) \\ -y & (x < y) \end{cases}$라 정의하면
연립방정식 $\begin{cases} 2x-4y^2 = x \star y \\ x-y+5 = x \star y \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

147. 다음 연립방정식의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2=5 \\ 4x^2-11xy+7y^2=10 \end{cases}$$

148. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2x^2+3xy=2y^2 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $x=\beta$라고 할 때, $\alpha-\beta$의 최댓값을 구하시오.

149. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-a \le x+3 \\ 4x-9 \ge 3x-b \end{cases}$ 의 해가 $1 \le x \le 4$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

150. 연립부등식 $\begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{1}{2} > 2 \\ -2x+3 \geq 2a \end{cases}$ 가 해를 갖지 않도록 하는 상수 a의 범위를 구하시오.

151. 부등식 $2 \leq |2x-1| \leq 4$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

152. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2 - 2(a+1)x + 4a > 0$이 성립하도록 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

153. 두 부등식 $x^2-2x-3<0$,
$(x-a+1)(x-a-3)<0$을 동시에 만족시키는 x가 존재하도록 하는 실수 a의 값의 범위가 $\alpha<a<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값을 구하시오.

154. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ (x-3)(x^2+a^2-a)<0 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

155. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x>0 \\ x^2-6x-4 \le 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x의 값의 합을 구하시오.
(단, $\sqrt{13}=3.6$)

[실전수학 도전문제]

156. 등식 $\sqrt{\frac{2}{x-3}+1}=-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$을 만족시키는 모든 실수 x에 대하여 등식 $|x-1|+|x|+|x+1|=ax+b$이 성립할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

157. x에 대한 이차식 $6x^2+6(m-1)x+m^2-2m+3$이 $6(x-n)^2$으로 인수분해 될 때, $|mn|$의 최댓값을 구하시오.

158. 이차함수 $y=x^2+4ax+3a^2-6a+16$의 그래프가 x축과 접할 때, 자연수 a의 값을 구하시오.

159. 이차방정식 $x^2+5x+2=0$의 두 근을 α, β라 하자. x^2의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(\alpha)=\frac{1}{\beta}$, $f(\beta)=\frac{1}{\alpha}$를 만족시킬 때, 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합을 구하시오.

160. 방정식 $x^4+x^3+x+1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $\dfrac{w^{11}+2w^{10}+1}{w}$의 값을 구하시오.

161. 부등식 $\sqrt{(x-2)^2}-2|x|<0$의 해를 구하시오.

162. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $f(x)=ax^2-2ax+a^2+4a$ 의 최댓값이 18 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하시오.

163. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\dfrac{ax^2-(2a-4)x+1}{x^2+4x+5}<2$가 항상 성립할 때, 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오.

164. 두 실수 x, y가 $4x^2+10y^2+4xy-12y+3=0$을 만족시킬 때, $2x+2y$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

165. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-4|x|+3 \geq 0 \\ x^2-5|x|+4 \leq 0 \end{cases}$ 을 만족시키는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

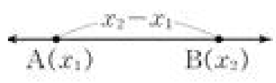
Ⅲ. 도형의 방정식

5. 평면좌표

[실전수학 개념 정리]

(1) 두 점 사이의 거리

■수직선 위의 두 점 사이의 거리



$x_1 < x_2$ ⇨ $\overline{\mathrm{AB}} = x_2 - x_1$ $x_1 > x_2$ ⇨ $\overline{\mathrm{AB}} = x_1 - x_2$

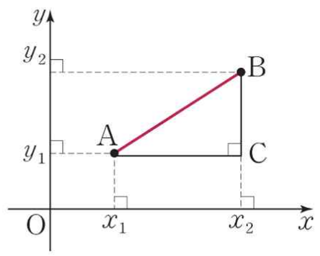
■ 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

$\overline{\mathrm{AC}} = |x_2 - x_1|$, $\overline{\mathrm{BC}} = |y_2 - y_1|$ 으로 나타낸다.

⇨ 삼각형 ABC 는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

⇨ 두 점 A , B 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



(예시) 두 점 A(1, 3), B(−2, −4) 사이의 거리

⇨ $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

① 두 점 사이의 거리를 이용한 삼각형

(예제) 세 점 A(3, 0) , B(0, 1) , C(1, 4) 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC

⇨ 세 변의 길이를 각각 구해본다.

⇨ $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(0-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

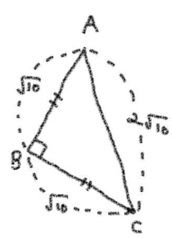
$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(1-0)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{CA}} = \sqrt{(1-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

⇨ $\overline{\mathrm{AB}}^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$, $\overline{\mathrm{BC}}^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$, $\overline{\mathrm{CA}}^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$,

$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{CA}}^2$, $10 + 10 = 20$

⇨ 각 $\mathrm{B} = 90^\circ$ 인 직각이등변 삼각형



② 두 점 사이의 거리를 이용한 $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 가 같음을 이용하여 x 축 또는 y 축 위에 있는 또 다른 점의 좌표의 좌표를 구할 수 있다.

(예시) 두 점 $A=(-1,\ 3)$, $B(3,\ 5)$ 에서 같은 거리에 있고, x 축 위에 있는 점 P 의 좌표

⇨ 점 P 의 좌표를 $(x,\ 0)$ 으로 놓으면

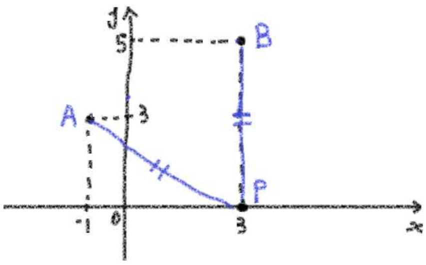
⇨ $\overline{AP}=\sqrt{(x+1)^2+(0-3)^2}$, $\overline{BP}=\sqrt{(x-3)^2+(0-5)^2}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$

⇨ $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$, $(x+1)^2+(0-3)^2=(x-3)^2+(0-5)^2$,

$x^2+2x+1+9=x^2-6x+9+25$, $8x=24,\ x=3$

⇨ 점 P 의 좌표는 $P(3,\ 0)$



③ 두 점 사이의 거리를 이용한 도형의 성질

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

[1단계] x 축, 변 BC 의 수직이등분선이 y 축이 되도록 좌표축을 놓으면

이때, 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점의 좌표를 $A(a,\ b)$, $B(-c,\ 0)$, $C(c,\ 0)$

[2단계] $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$, $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2$

⇨ $\overline{AB}^2=\{a-(-c)\}^2+(b-0)^2=(a+c)^2+b^2$,

$\overline{AC}^2=(a-c)^2+(b-0)^2=(a-c)^2+b^2$

⇨ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2$

$=a^2+2ac+c^2+b^2+a^2-2ac+c^2=2(a^2+b^2+c^2)$

⇨ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(a^2+b^2+c^2)$ ⋯⋯ ㉠

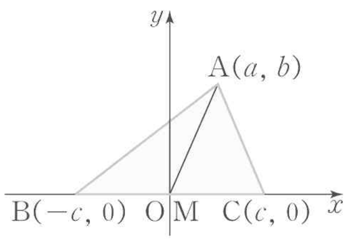
[3단계] $\overline{AM}^2=(a-0)^2+(b-0)^2=a^2+b^2$,

$\overline{BM}^2=\{0-(-c)\}^2+(0-0)^2=c^2$

⇨ $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+c^2$ ⋯⋯ ㉡

[4단계] ㉠, ㉡에 의해 $2(a^2+b^2+c^2)=2\times(a^2+b^2+c^2)$,

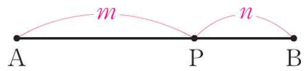
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$



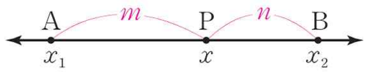
(2) 선분의 내분점과 외분점

① 수직선 위의 선분의 내분점

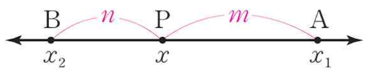
$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$ $(m>0,\ n>0)$ ⇨ 점 P를 선분 AB를 $m:n$으로 내분한다고 한다.

⇨ 

■ $A(x_1)$, $B(x_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0)$으로 내분 점 P의 좌표를 x라 하면

⇨ 

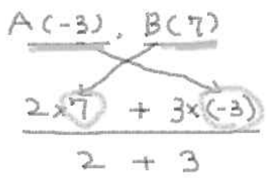
$x_1<x_2$일 때, $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

⇨ 

$x_1>x_2$일 때, $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

즉, AB를 $m:n(m>0,\ n>0)$으로 내분 점 P의 좌표는 $\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

(예시) 수직선 위의 두 점 $A(-3)$, $B(7)$을 $2:3$으로 내분하는 점

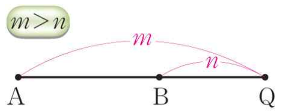


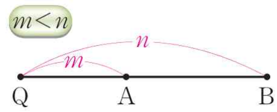
⇨ $\dfrac{2\times(7)+3\times(-3)}{2+3}=\dfrac{14-9}{5}=\dfrac{5}{5}=1$, 내분하는 점은 1

② 수직선 위의 선분의 외분점

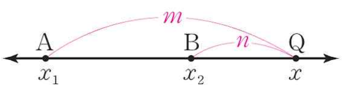
선분 AB의 연장선 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

⇨ 점 Q는 선분 AB를 외분한다고 한다.

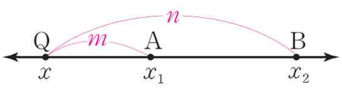




■ $A(x_1)$, $B(x_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표를 x라 하면

⇨ 

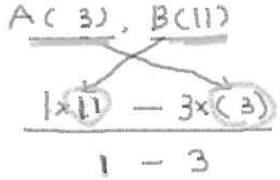
$x_1<x_2$일 때, $x=\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

⇨ 

$x_1>x_2$일 때, $x=\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

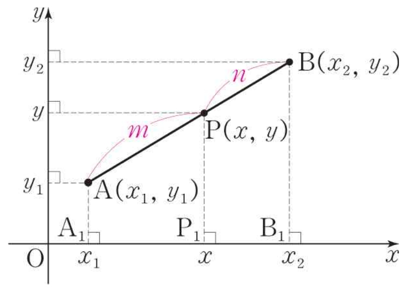
즉, AB를 $m:n(m>0,\ n>0)$으로 내분 점 Q의 좌표는 $\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

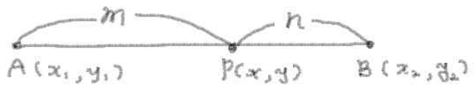
(예시) 수직선 위의 두 점 A(3), B(11)에 대하여 1:3으로 외분하는 점



$\Rightarrow \dfrac{1\times 11-3\times 3}{1-3}=\dfrac{11-9}{-2}=\dfrac{3}{2}$

③ 좌표평면 위의 선분의 내분점



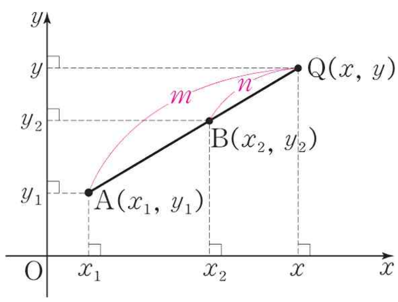
⇨ 

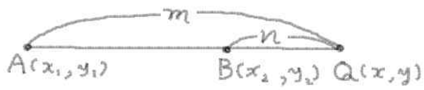
$\Rightarrow \left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

(예시) 두 점 A(1, −6), B(5, 8)을 3:2로 내분하는 점 P

$\Rightarrow \left(\dfrac{3\times5+2\times1}{3+2},\ \dfrac{3\times8+2\times(-6)}{3+2}\right)=\left(\dfrac{15+2}{5},\ \dfrac{24-12}{5}\right)=\left(\dfrac{17}{5},\ \dfrac{12}{5}\right) \Rightarrow \mathrm{P}\left(\dfrac{17}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$

④ 좌표평면 위의 선분의 외분점



⇨ 

$\Rightarrow \left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$

(예시) 두 점 A(1, −6), B(5, 8)을 3:2로 외분하는 점 Q

$\Rightarrow \left(\dfrac{3\times5-2\times1}{3-2},\ \dfrac{3\times8-2\times(-6)}{3-2}\right)=\left(\dfrac{15-2}{1},\ \dfrac{24+12}{1}\right)=(13,\ 36) \Rightarrow \mathrm{Q}(13,\ 36)$

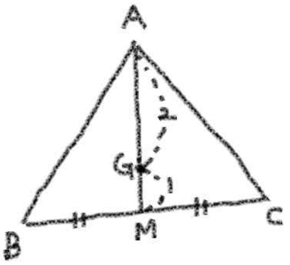
만약 선분 AB의 중점의 좌표를 구하면

(예시) 두 점 A(1, −6), B(5, 8)을 1:1로 내분하는 점 M

$\Rightarrow \left(\dfrac{1\times5+1\times1}{1+1},\ \dfrac{1\times8+1\times(-6)}{1+1}\right)=\left(\dfrac{5+1}{2},\ \dfrac{8-6}{2}\right)=\left(\dfrac{6}{2},\ \dfrac{2}{2}\right)=(3,\ 1) \Rightarrow \mathrm{M}(3,\ 1)$

■ 내분점을 이용한 삼각형의 무게중심

세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는



[1단계] 변 BC의 중점 M이라 하면

$$\Rightarrow\ M\left(\frac{1\times x_3+1\times x_2}{1+1},\ \frac{1\times y_3+1\times y_2}{1+1}\right)=M\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

[2단계] 점 A와 중점 M을 2:1로 내분하는 점이 무게중심 G이므로

$$\Rightarrow\ 점\ A(x_1,\ y_1),\ M\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ G\left(\frac{2\times\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}-\frac{2\times\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}\right)=G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

무게중심 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

6. 직선의 방정식

[실전수학 개념 정리]

(1) 직선의 방정식

① 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

■ 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 m이 주어진 경우

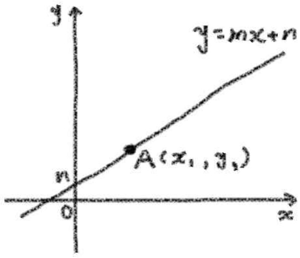
⇨ $y=mx+n$인 직선은 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나므로

⇨ $y_1=mx_1+n$, $n=y_1-mx_1$

⇨ $y=mx+n$에 $n=y_1-mx_1$을 대입하면

⇨ $y=mx+y_1-mx_1$

⇨ $y-y_1=m(x-x_1)$



한 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식 $y-y_1=m(x-x_1)$

$y-y_1=m(x-x_1)$ ⇨ $y=mx-mx_1+y_1$

(예시) 점 $(-2, 3)$을 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식

[1단계] 기울기 $m=-3$이고 한 점 $(-2, 3)$을 지난다.

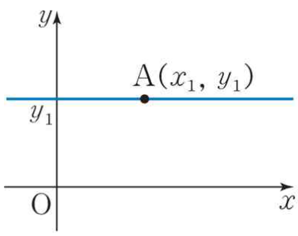
[2단계] $y-3=-3(x+2)$, $y=-3x-6+3=-3x-3$

즉, $y=-3x-3$인 직선의 방정식

■ 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식

⇨ 기울기가 0이므로 $y-y_1=0\times(x-x_1)$

⇨ $y=y_1$



만약 y축에 평행이면 $x=x_1$인 직선의 방정식

(예시) 점 $(2, -3)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식

[1단계] 기울기가 0, 한 점 $(2, -3)$을 지난다.

[2단계] $y-(-3)=0\times(x-2)$, $y+3=0\times(x-2)$, $y=-3$

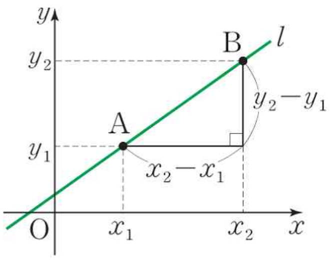
즉, $y=-3$인 직선의 방정식

② 두 점을 지나는 직선의 방정식

■좌표평면 위의 서로 다른 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$을 지나는 직선의 방정식

⇨ 직선 l의 기울기 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, 점 $A(x_1,\ y_1)$을 지나므로

⇨ $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$



(예시) 두 점 $(3,\ -4)$, $(5,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식

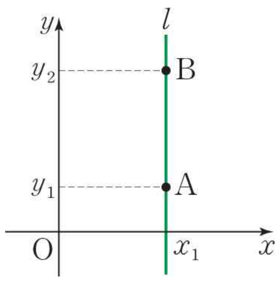
[1단계] 기울기 $m=\dfrac{6-(-4)}{5-3}=\dfrac{10}{2}=5$, $m=5$

[2단계] $y-(-4)=5(x-3)$, $y=5x-15-4$, $y=5x-19$

즉, $y=5x-19$인 직선의 방정식

■ 점 $A(x_1,\ y_1)$과 y축에 평행한 직선의 방정식

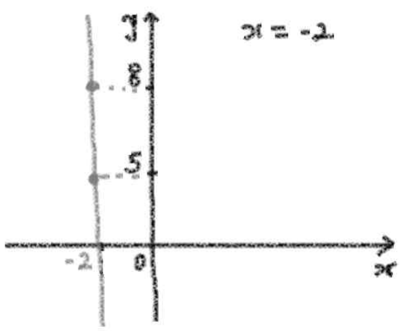
⇨ y축에 항상 평행하므로 $x=x_1$인 직선의 방정식



만약 x축에 평행하면 $y=y_1$인 직선의 방정식

(예시) 두 점 $(-2,\ 5)$, $(-2,\ 8)$을 지나는 직선의 방정식

⇨ 기울기가 0, y축에 평행



③ 일차방정식과 직선

일차방정식 $\boldsymbol{ax+by+c=0}$ ($a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$)이 나타내는 그래프 모양

■ $a \neq 0$, $b \neq 0$일 때

⇨ $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ⇨ 기울기가 $-\frac{a}{b}$인 직선

■ $a = 0$, $b \neq 0$일 때

⇨ $y = -\frac{c}{b}$ ⇨ x축에 평행한 직선

■ $a \neq 0$, $b = 0$일 때

⇨ $x = -\frac{c}{a}$ ⇨ y축에 평행한 직선

(예시) 일차방정식 $2x + y - 3 = 0$

⇨ $2x + y - 3 = 0$ ⇨ $y = -2x + 3$

즉, 기울기가 -2인 직선의 방정식

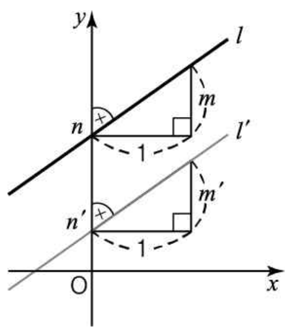
(2) 두 직선의 평행과 수직

■ 직선 l: $y = mx + n$과 직선 l': $y = m'x + n'$

두 직선이 평행인 조건

⇨ y절편은 다르다.

⇨ 기울기는 같다 $m = m'$



① 두 직선의 평행조건을 활용한 직선의 방정식

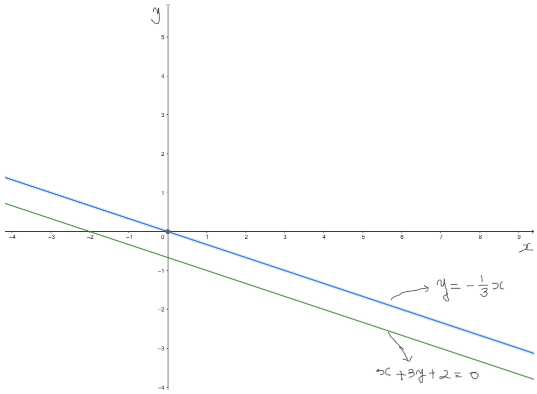
(예시) 점 $(3, -1)$을 지나고 직선 $x + 3y + 2 = 0$에 평행한 직선의 방정식

[1단계] 직선 $x + 3y + 2 = 0$ ⇨ $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

[2단계] 직선의 기울기 $-\frac{1}{3}$이고 한 점 $(3, -1)$을 지나므로

[3단계] $y = -\frac{1}{3}(x-3) - 1$, $y = -\frac{1}{3}x$

즉, $y = -\frac{1}{3}x$

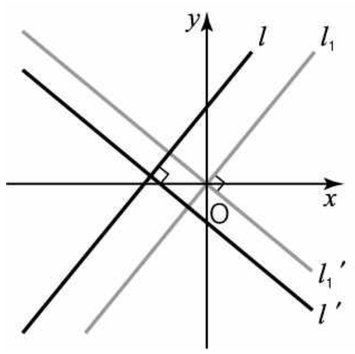


② 두 직선의 수직 조건을 이용한 직선의 방정식

■ 두 직선의 수직 조건

l: $y = mx + n$, l': $y = m'x + n'$와 l_1: $y = mx$, $y = m'x$

⇨ $mm' = -1$



(예제) 두 직선의 수직관계

두 직선 $2x - 3y + 9 = 0$과 $3x + 2y - 5 = 0$

[1단계] $2x - 3y + 9 = 0$ ⇨ $y = \frac{2}{3}x + 3$

$3x + 2y - 5 = 0$ ⇨ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

[2단계] $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$

즉, 두 직선은 서로 수직이다.

(예제) 한 점을 지나고 직선에 수직인 직선의 방정식

점 $(2, -1)$을 지나고 직선 $y = 2x + 9$에 수직인 직선의 방정식

[1단계] $y = 2x + 9$의 기울기 $m = 2$이므로 $2 \times m' = -1$ ⇨ $-\frac{1}{2}$

[2단계] $y = -\frac{1}{2}(x-2) + 1$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

■ 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ 의 평행, 수직인 경우
(단, $abc \neq 0$, $a'b'c' \neq 0$)

(i) 평행 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

[1단계] $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ ⇨ $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$과 $y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$

[2단계] 평행이므로 $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$ ⇨ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$이고 $-\frac{c}{b}\neq-\frac{c'}{b'}$ ⇨ $\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

즉, $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$과 $\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ 이므로 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ 평행 성립

(ii) 수직 $aa'+bb'=0$

[1단계] $-\frac{a}{b}\times\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1$ ⇨ $aa'=-bb'$

[2단계] $aa'=-bb'$ ⇨ $aa'+bb'=0$

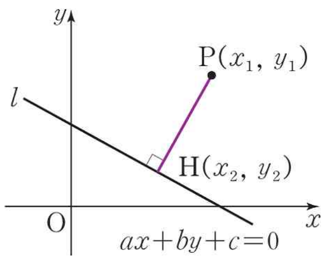
즉, $aa'+bb'=0$이므로 수직 성립

(3) 점과 직선 사이의 거리

■점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$사이의 거리 d

⇨ $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



만약 원점 $(0, 0)$과 직선 $ax+by+c=0$사이의 거리는

$d=\frac{|a\times0+b\times0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(예제) 점 $(1, -2)$과 직선 $3x-y+1=0$ 사이의 거리

⇨ $d=\frac{|3\times1-1\times(-2)+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3+2+1|}{\sqrt{9+1}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{6\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

■ 점과 직선 사이의 거리를 이용한 방정식

(예제) 직선 $x+y-1$에 평행하고 원점에서의 거리가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식

[1단계] $x+y-1=0$ ⇨ $y=-x+1$이므로 기울기 -1이므로 평행한 직선의 방정식은

$y=-x+c$ ⇨ $x+y-c=0$으로 바꾼다,

[2단계] $x+y-c=0$과 원점에서의 거리가 $\sqrt{3}$ ⇨ $\sqrt{3}=\dfrac{|c|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|c|}{\sqrt{2}}$

[3단계] $|c|=\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$이므로 $c=\sqrt{6}$ 또는 $c=-\sqrt{6}$

⇨ $x+y+\sqrt{6}=0$ 또는 $x+y-\sqrt{6}=0$

즉, 직선의 방정식은 $x+y+\sqrt{6}=0$ 또는 $x+y-\sqrt{6}=0$

7. 원의 방정식

[실전수학 개념 정리]

(1) 원의 방정식

① 원의 방정식

좌표평면에서 중심이 $\mathrm{C}(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원을 나타내는 방정식

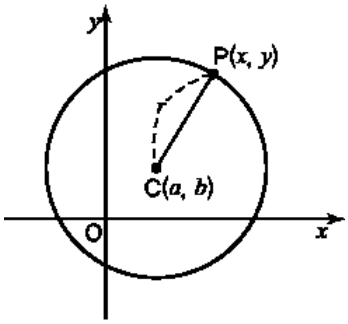
⇨ 원 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$놓으면

⇨ 중심이 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식

⇨ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$

⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

만약 원점 $(0,\ 0)$을 중심으로 하는 원의 방정식 ⇨ $x^2+y^2=r^2$



(예제) 중심이 $(-1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 9인 원의 방정식

⇨ $(x+1)^2+(y-3)^2=9^2$, $(x+1)^2+(y-3)^2=81$

② 방정식 $\boldsymbol{x^2+y^2+Ax+By+c=0}$ 이 나타내는 도형

$x^2+y^2+Ax+by+c=0$ ⇨ $\left(x+\dfrac{A}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{B}{2}\right)^2=\dfrac{A^2+B^2-4C}{4}$

⇨ 중심 $\left(-\dfrac{A}{2},\ -\dfrac{B}{2}\right)$이고 반지름이 $r=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$인 원을 나타낸다.

(예시) $x^2+y^2+x+y-1=0$

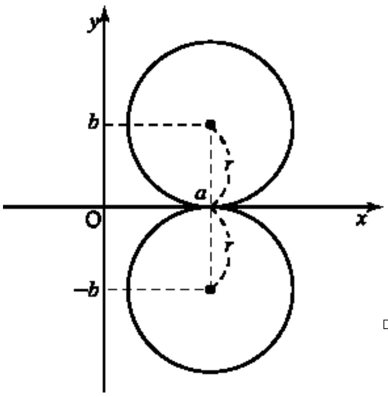
[1단계] $x^2+y^2+x+y-1=0$ ⇨ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-1=0$

[2단계] $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$ ⇨ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\sqrt{\frac{3}{2}}$

즉, 중심이 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이고 반지름이 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 인 원을 나타낸다.

■ x 축에 접하는 원의 방정식

⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$



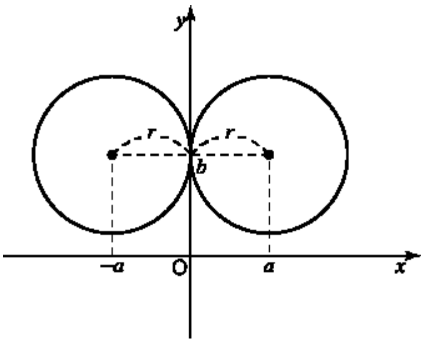
⇨ 중심이 $(a,\ b)$, x축에 접하는 원, 반지름의 길이 $|b|$

(예제) 중심이 $(-1,\ 5)$이고 x축에 접하는 원의 방정식

⇨ $(x+1)^2+(y-5)^2=5^2$ ⇨ $(x+1)^2+(y-5)^2=25$

■ y 축에 접하는 원의 방정식

⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$



⇨ 중심이 $(a,\ b)$, y축에 접하는 원, 반지름의 길이 $|a|$

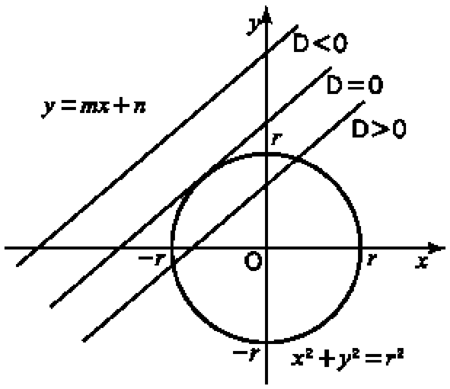
(예제) 중심이 $(1,\ 3)$이고 y축에 접하는 원의 방정식

⇨ $(x-1)^2+(y-3)^2=1^2$ ⇨ $(x-1)^2+(y-3)^2=1$

(2) 원과 직선의 위치 관계

① 원과 직선의 위치관계 판별

판별식의 값의 부호	원과 직선의 위치 관계
$D>0$	서로 다른 두 점에서 만난다.
$D=0$	한 점에서 만난다. (접한다.)
$D<0$	만나지 않는다.



⇨ 판별식 D와 직선의 위치 관계

(예제) 원 $x^2+y^2=3$와 직선 $y=-x+2$의 위치 관계

[1단계] $x^2+(-x+2)^2=3$, $x^2+x^2-4x+4=3$ ⇨ $2x^2-4x+1=0$

[2단계] $2x^2-4x+1=0$의 판별식 $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-2\times1=4-2=2>0$

[3단계] 판별식 $D>0$이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

② 원과 직선의 위치관계를 이용한 문제해결

(예제) 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=-2x+k$를 서로 다른 두 점에서 만나게 하는 실수 k값의 범위를 구하면

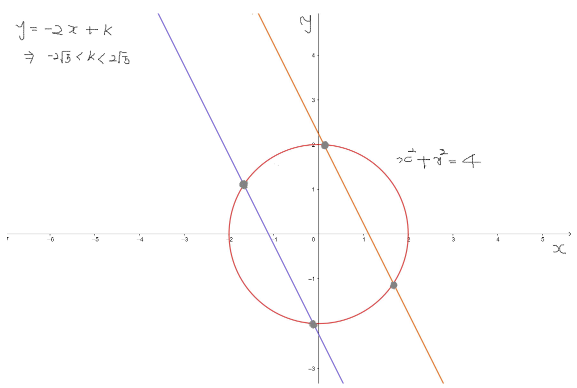
[1단계] $x^2+(-2x+k)^2=4$, $x^2+4x^2-4kx+k^2-4=0$ ⇨ $5x^2-4kx+k^2-4=0$

[2단계] 판별식 $\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-5\times(k^2-4)=4k^2-5k^2+20=-k^2+20$

[3단계] 서로 다른 두 점에서 만나므로 ⇨ $-k^2+20>0$, $k^2<20$

[4단계] $k^2<20$ ⇨ $-\sqrt{20}<k<\sqrt{20}$

즉, $-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$인 실수 k의 값의 범위에서 서로 다른 두 점에서 만난다.



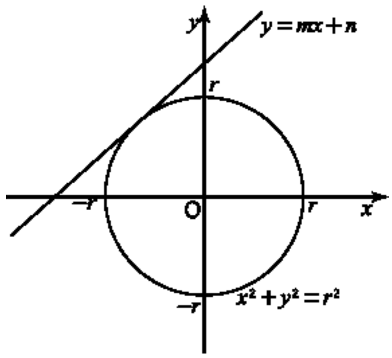
③ 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원에 접하고 기울기가 m인 원의 접선의 방정식은 $y=mx+n$을 원 $x^2+y^2=r^2$에 대입하면

⇨ 판별식 $D=(m^2+1)r^2-n^2=0$, $n^2=(m^2+1)r^2$, $n=\pm r\sqrt{m^2+1}$

⇨ $n=\pm r\sqrt{m^2+1}$ 을 $y=mx+n$에 대입하면 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

즉, 원에 접하고 기울기가 m인 원의 접선의 방정식은 $\boldsymbol{y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}}$

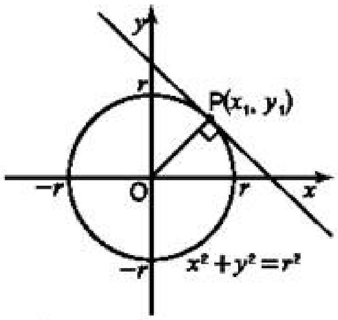


(예제) 원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 5인 접선의 방정식

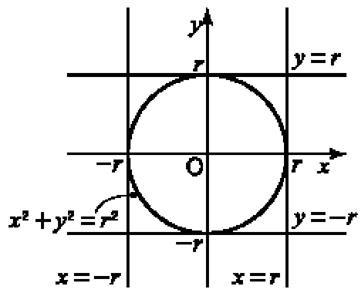
⇨ 반지름 $r=2$, 기울기 $m=5$

⇨ $y=5x\pm 2\sqrt{5^2+1}=5x\pm 2\sqrt{26}$

④ 원 위의 점에서의 접선의 방정식



점 $P(x_1, y_1)$의 접선의 방정식 $xx_1+yy_1=r^2$

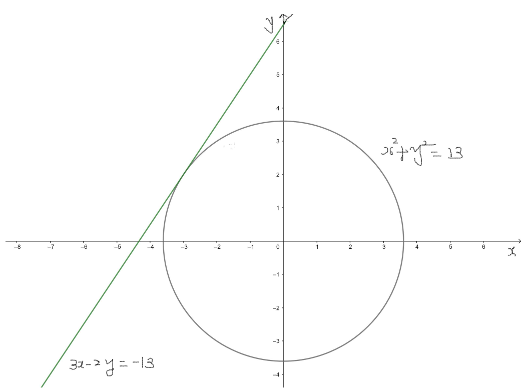


$(0, \pm r)$과 $(\pm r, 0)$이므로 접선의 방정식은 $y=\pm r$ 또는 $x=\pm r$

(예제) 원 $x^2+y^2=13$위의 점 $(-3, 2)$에서의 접선의 방정식

⇨ $x_1=-3$, $y_1=2$이고 $r^2=13$

⇨ $x\times(-3)+y\times(2)=13$, $3x-2y=-13$



■ 원 밖의 점에서의 접선의 방정식

(예제) 점 (0, 3)에서 원 $x^2+y^2=6$에 그은 접선의 방정식

[1단계] 접점을 $P(x_1,\ y_1)$이라 하면 접점 P를 지나는 접선의 방정식은

⇨ $xx_1+yy_1=6$

[2단계] 점 (0, 3)을 접선의 방정식에 대입하면 ⇨ $0\times x_1+3y_1=6$, $3y_1=6$

⇨ $y_1=2$

[3단계] 접점 $P(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=6$위에 있으므로

⇨ $x_1^2+y_1^2=6$

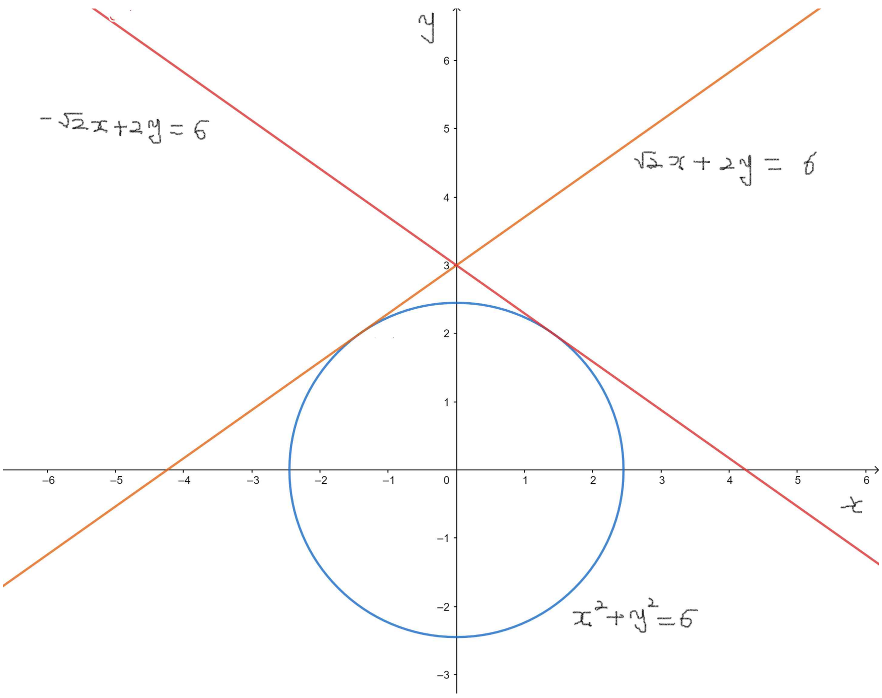
$y_1=2$을 $x_1^2+y_1^2=6$에 대입하면

⇨ $x_1^2+4=6$, $x_1^2=2$, $x_1=\pm\sqrt{2}$

[4단계] $y_1=2$이면 $x_1=\sqrt{2}$ 또는 $x_1=-\sqrt{2}$

즉, 점 (0, 3)에서 원 $x^2+y^2=6$에 그은 접선의 방정식은

$\sqrt{2}x+2y=6$과 $-\sqrt{2}x+2y=6$



8. 도형의 이동

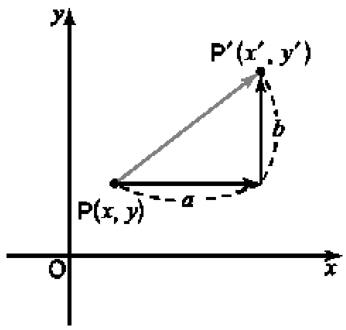
[실전수학 개념 정리]

(1) 평행이동

① 점의 평행이동

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동한 점 $\mathrm{P}'(x', y')$이면

⇨ $x' = x+a,\ y' = y+b$



⇨ $\mathrm{P}'(x', y')$, $\mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$

(예시) 점 (2, 3)을 x축 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 6만큼 평행이동

⇨ 점 (2, 3)의 평행이동 $(2-1,\ 3+6)=(1,\ 9)$

즉, 평행이동한 점은 (1, 9)

② 도형의 평행이동

방정식 $f(x,\ y)=0$은 일반적으로 좌표평면 위의 도형을 나타낸다.

⇨ 도형 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$이 x축으로 a만큼, y축으로 b만큼 평행이동 하면

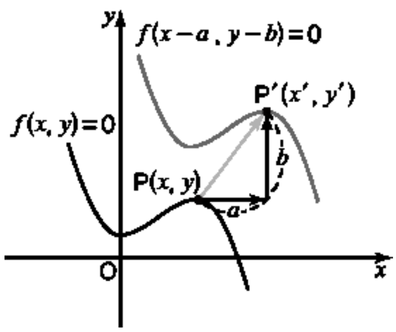
$x' = x+a,\ y' = y+b$

⇨ $x = x'-a$이고 $y = y'-b$

⇨ $x = x'-a$이고 $y = y'-b$을 도형 $f(x,\ y)=0$에 대입하면

$f(x'-a,\ y'-b)=0$

즉 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 방정식 $f(x-a,\ y-b)=0$이 나타내는 도형 위의 점이다.



⇨ 평행이동한 도형의 방정식 $f(x-a,\ y-b)=0$

(예시) 방정식 $x-y=1$이 나타내는 도형을 x축 방향으로 2만큼, y축 방향으로 -3만큼 평행이동한 도형의 방정식

[1단계] x대신에 $x-2$, y대신에 $y+3$을 대입

[2단계] $(x-2)-(y+3)=0$, $x-2-y-3=0$ ⇨ $x-y-5=0$, $x-y=5$

즉, 평행이동한 도형의 방정식은 $x-y=5$

(2) 대칭이동

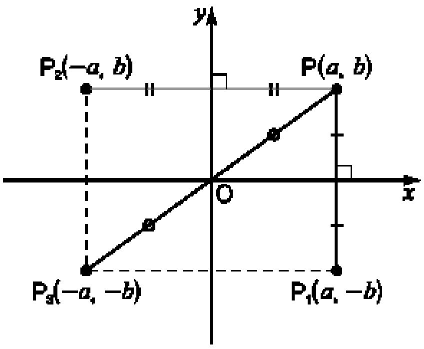
① 좌표축과 원점에 대한 대칭이동

점 $P(a,\ b)$에 대하여

x축에 대하여 대칭인 점 : $P_1(a,\ -b)$

y축에 대하여 대칭인 점 : $P_2(-a,\ b)$

원점에 대하여 대칭인 점 : $P_3(-a,\ -b)$

⇨ 

(예제) 점 $(3,\ -1)$

x축 대칭 ⇨ $(3,\ 1)$, y축 대칭 ⇨ $(-3,\ -1)$, 원점 대칭 ⇨ $(-3,\ 1)$

② 직선 $y=x$ 에 대한 대칭이동

직선 PP'은 직선 $y=x$에 수직

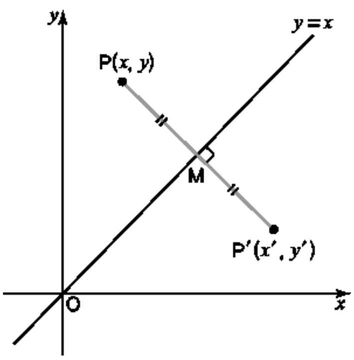
⇨ 직선 PP'의 기울기 $\dfrac{y'-y}{x'-x}$와 $y=x$의 기울기 1이므로

⇨ $\left(\dfrac{y'-y}{x'-x}\right)\times 1 = -1$ ⇨ $x'+y'=x+y$

⇨ 중점 $M\left(\dfrac{x+x'}{2},\ \dfrac{y+y'}{2}\right)$ ⇨ $y=x$ 위에 있으므로 $x'-y'=-x+y$

⇨ $x'+y'=x+y$과 $x'-y'=-x+y$을 정리하면 $x'=y,\ y'=x$

즉, 점 $P'(x',\ y')$의 좌표는 $P(y,\ x)$이므로 직선 $y=x$에 대한 대칭이동



⇨ 점 $P(x,\ y)$의 $y=x$ 대칭이동 $P(y,\ x)=P'(x',\ y')$

(예시) 점 $(2,\ -5)$이 $y=x$에 대한 대칭이동

⇨ $(-5,\ 2)$

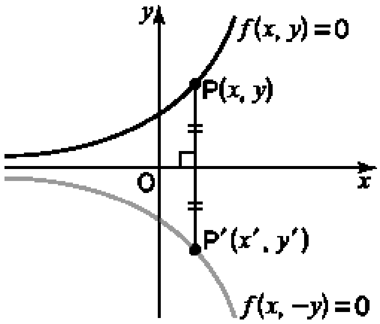
③ 도형의 대칭이동

좌표평면 위의 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭 이동한 도형 $f(x,\ -y)=0$의 방정식은

⇨ 도형 $f(x,\ y)=0$에 $x=x',\ y=y'$을 대입하면

⇨ $f(x',\ -y')=0$

⇨ 점 $\mathrm{P}'(x',y')$은 방정식 $f(x,\ -y)=0$이 나타내는 도형 위의 점
   도형 $f(x,\ -y)=0$의 방정식



⇨ 도형 $f(x,\ y)=0$의 x축 대칭한 도형 $f(x,\ -y)=0$

■ $f(x,\ y)=0$

x축 대칭 ⇨ $f(x,\ -y)=0$

y축 대칭 ⇨ $f(-x,\ y)=0$

원점 대칭 ⇨ $f(-x,\ -y)=0$

직선 $y=x$ 대칭 ⇨ $f(y,\ x)=0$

(예시) 직선 $3x+y-7=0$

x축 대칭 ⇨ $3x-y-7=0$

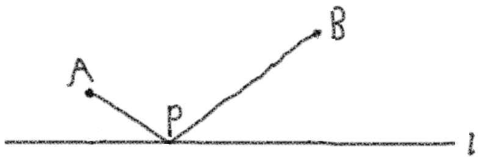
y축 대칭 ⇨ $-3x+y-7=0$

원점 대칭 ⇨ $-3x-y-7=0$

직선 $y=x$ 대칭 ⇨ $3y+x-7=0$

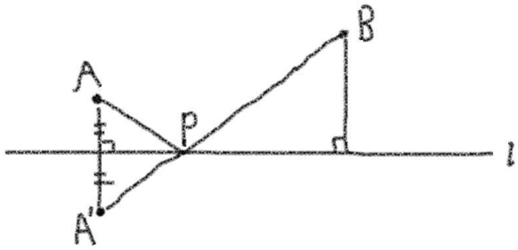
(실전수학 $+\alpha$) / 대칭이동을 이용한 최단거리

직선 l에 대하여 같은 방향에 두 점 A, B가 있을 때, 점 A에서 직선 l 위의 한 점을 거쳐 점 B까지 가는 최단 거리는 대칭이동을 이용하여 구할 수 있습니다.

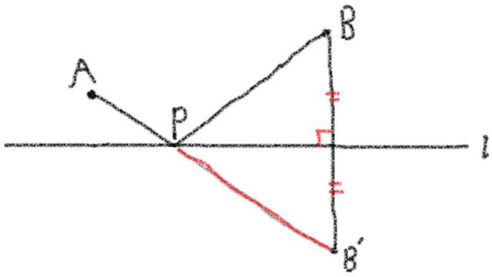


(실전수학) $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하면 점 A에서 직선 l을 거쳐 B까지 가는 최단 거리를 구할 수 있습니다.

⇨ (i) $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AA'}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$



⇨ (ii) $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{BB'}+\overline{AP}\geq\overline{AB'}$



즉, 점 A에서 직선 l위의 한 점 P를 거쳐 점 B까지 가는 최단 거리는
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AA'}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$ 또는 $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{BB'}+\overline{AP}\geq\overline{AB'}$ 가능함을 알 수 있다.

좌표 평면에서 거리의 최단 거리 문제의 경우 위와 같이 점의 축에 대한 대칭을 이용하여 접근하면 됩니다. 특히 좌표평면에서는 점의 좌표가 주어져 있고, 실생활 적용 문제의 경우 거리가 주어져 있으니 이와 같은 경우 대칭이동을 이용해서 거리 또는 거리의 합에 값을 구할 수 있습니다.

[실전수학 기본문제]

166. 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $A(-3)$, $B(5)$

(2) $C(1+\sqrt{2})$, $D(1-\sqrt{2})$

167. 좌표평면 위의 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $O(0,\ 0)$, $A(-4,\ 3)$

(2) $A(-3,\ -1)$, $B(3,\ 5)$

(3) $A(-5,\ 4)$, $B(7,\ -2)$

(4) $A(2,\ -1)$, $B(-3,\ 2)$

168. 세 점 $A(-1,\ 3)$, $B(4,\ -2)$, $C(3,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 구하시오.

169. 세 점 $A(1,\ 2)$, $B(-2,\ -2)$, $C(5,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 구하시오.

170. 직사각형 ABCD와 임의의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$임을 보이시오.

171. 수직선 위의 두 점 $A(2)$, $B(5)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) $\overline{AB}$를 $3:2$로 내분하는 점 P

(2) $\overline{AB}$를 $3:1$로 외분하는 점 Q

(3) $\overline{AB}$의 중점의 좌표인 점 M

172. 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(3,\ 6)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $\overline{AB}$를 $3:2$로 내분하는 점 P의 좌표를 구하시오.

(2) $\overline{AB}$를 $2:3$으로 외분하는 점 Q의 좌표를 구하시오.

173. 두 점 $A(2,\ 1)$, $B(6,\ 7)$을 이은 선분 AB의 연장선 위에 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$가 되도록 하는 점 C의 좌표를 구하시오.

174. 세 점 $A(-3,\ 1)$, $B(5,\ 0)$, $C(4,\ -4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하시오.

175. 삼각형 ABC의 두 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{A}(4,\ -5)$, $\mathrm{B}(5,\ 2)$이고, 무게중심의 좌표가 $(-3,\ 0)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하시오.

176. 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 기울기가 2이고 y절편이 -3인 직선의 방정식

(2) 기울기가 -3이고 x절편이 5인 직선의 방정식

(3) 기울기가 -2이고 점 $(4,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식

(4) 기울기가 3이고 점 $(6,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식

177. 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $(-2,\ 3)$, $(1,\ 2)$

(2) $(3,\ 1)$, $(0,\ 3)$

(3) $(4,\ -1)$, $(4,\ 3)$

(4) $(1,\ 3)$, $(-2,\ 3)$

178. x절편이 2이고, y절편이 3인 직선의 방정식을 구하시오.

179. $ac > 0$, $bc > 0$일 때, 직선 $ax + by + c = 0$이 지나지 않는 사분면을 보이시오.

180. 두 직선 $2x - y - 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$의 교점과 점 $(0,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

181. 점 $(2,\ 3)$을 지나고 다음 직선에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=\dfrac{1}{2}x-3$

(2) $3x+y-5=0$

182. 다음 물음에 답하시오.

(1) 직선 $y=2x+1$에 수직이고 점 $(4,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(2) 직선 $2x+3y-6=0$에 수직이고 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(3) 점 $(1,\ -2)$을 지나고 $y=1$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

(4) 점 $(2,\ -1)$을 지나고 $x=2$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

183. 두 직선 $kx-y+3=0$, $(k-2)x+3y-1=0$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 상수 k의 값을 구하시오.

(1) 평행하다.

(2) 수직이다.

184. 다음 점과 직선 사이의 거리를 구하시오.

(1) $(5,\ 4)$, $3x+4y-12=0$　　(2) $(3,\ -2)$, $4x-y+7=0$

185. 원점 O에서 직선 $3x-4y+5=0$에 이르는 거리를 구하시오.

186. 서로 평행한 두 직선 $3x+2y-4=0$, $3x+2y+5=0$ 사이의 거리를 구하시오.

187. 다음 원의 방정식을 구하시오.

(1) 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원

(2) 중심이 점 $(1,\ -2)$이고 점 $(3,\ 0)$을 지나는 원

188. 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

189. 다음 방정식이 나타내는 원의중심과 반지름의 길이를 구하시오.

(1) $x^2+y^2+2x-4y+3=0$

(2) $x^2+y^2-x+y=0$

190. 이차방정식 $x^2+y^2+2kx-4ky+3k+2=0$이 나타내는 도형이 원이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

191. 원점 O와 점 A$(3,\ 0)$에서의 거리의 비가 $1:2$인 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

192. 두 점 A$(2,\ 3)$, B$(5,\ 6)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:1$을 만족시키는 점 P$(x,\ y)$의 자취는 원이다. 이 원의 반지름의 길이를 구하시오.

193. 다음 원과 직선의 위치 관계를 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=6$과 직선 $y=-x+4$

(2) 원 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$과 직선 $3x-4y=27$

194. 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y-\sqrt{3}x-k=0$이 만나도록 하는 상수 k값의 범위를 구하시오.

195. 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k의 값의 범위를 구하시오.

196. 원 $x^2+y^2-6x+2y+9=0$와 직선 $4x-3y=0$의 위치 관계를 구하시오.

197. 다음 물음에 답하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=5$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식을 구하여라.

(2) 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$과 수직이고 원 $x^2+y^2=4$에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

198. 다음 물음에 답하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(-1,\ -3)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 점 $(0,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

199. 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동한 점 P'의 좌표는 $\mathrm{P}'(\square,\ \square)$

(2) 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(\square,\ \square)=0$

200. 다음 점을 x축으로 -3만 큼, y축 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) $(-2,\ 1)$　　(2) $(3,\ 7)$　　(3) $(-3,\ -2)$

201. 다음 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $2x-y+3=0$　　(2) $y=x^2$

(3) $x^2+y^2=1$　　(4) $(x-3)^2+y^2=9$

202. 원 $x^2+y^2=16$이 평행이동 $f: (x, y) \to (x+a, y+b)$에 의하여 원 $x^2+y^2-8x+2y+c=0$으로 옮겨졌다. 이때 $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수)

203. 직선 $2x+3y+5=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a+1$만큼 평행이동하였더니 직선 $2x+3x-8=0$과 겹쳐졌다. 이때 상수 a의 값을 구하시오.

204. 원 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$을 x축으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원의 중심이 원점으로 옮겨졌다. 상수 a, b의 값의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

205. 점 $(-3,\ 2)$를 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) x축 (2) y축 (3) 원점 (4) 직선 $y=x$

206. 다음 방정식이 나타내는 도형을 x축, y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 각각 구하시오.

(1) $y=-3x+1$

(2) $2x-y+6=0$

(3) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

207. 다음 방정식이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 각각 구하시오.

(1) $y=5x+1$

(2) $4x+y-7=0$

(3) $(x+4)^2+(y-2)^2=5$

208. 원 $x^2+y^2=8$을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 직선 $x-y+k=0$과 한 점에서 만난다고 할 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, $k>0$)

209. 두 원 $x^2+y^2-4x-8y+16=0$, $x^2+y^2+8x-12y+48=0$이 점 P에 대하여 대칭일 때, 점 P의 좌표를 구하시오.

[실전수학 연습문제]

210. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} \leq 3$을 만족하는 모든 정수 a의 값을 구하시오.

211. 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b-1)$, $\mathrm{Q}(a-4,\ b+2)$ 사이의 거리를 구하시오.

212. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(2,\ -3)$과 y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오.

213. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(6,\ -7)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 이은 선분의 중점의 좌표를 구하시오.

214. 세 점 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 1)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 점 $\mathrm{G}(1,\ 2)$일 때, 선분 OC의 길이를 구하시오. (단, O는 원점)

215. $3\overline{\mathrm{PA}}=2\overline{\mathrm{PB}}$가 되도록 하는 선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$이고, $\mathrm{P}(1,\ 0)$일 때, 점 B의 x좌표와 y좌표의 합을 구하시오.

216. 두 직선 $ax+by-6=0$, $(b-1)x+ay+3=0$이 일치할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

217. 두 직선 $x+2y-2=0$, $mx-y+2m-1=0$이 제1사분면에서 만날 때, 상수 m의 값의 범위를 구하시오.

218. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ -3)$, $\mathrm{B}(2,\ 4)$, $\mathrm{C}(4,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 점 A를 지나고, 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.

219. 두 직선 $mx-4y-2=0$, $(m+3)x+y+1=0$에 대한 설명으로 옳은 것만을 모두 고르시오. (단, m은 상수이다.)

㉠ $m=1$일 때, 두 직선은 수직이다.

㉡ $m=-\frac{12}{5}$일 때, 두 직선은 평행하다.

㉢ $m=-2$일 때, 두 직선은 일치한다.

㉣ $m=4$일 때, 두 직선은 한 점에서 만난다.

220. 두 직선 $x-y+10=0$, $x+3y-2=0$의 교점을 지나는 직선 중 $2x+4y+1=0$과 만나지 않는 직선의 방정식을 구하시오.

221. 두 점 $(2,\ a)$, $(a+2,\ 4)$를 지나는 직선이 점 $(1,\ 3)$을 지날 때, 상수 a가 될 수 있는 모든 값의 합을 구하시오.

222. 점 $(8,\ -3)$을 지나고, x축, y축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1인 직선의 방정식을 구하시오.

223. 점 $(-1,\ 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 모두 구하시오.

224. 좌표평면에서 중심의 좌표가 $(1,\ 4)$이고 직선 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$에 접하는 원의 반지름의 길이를 구하시오.

225. 원 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최솟값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

226. 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$을 지나고 x축에 접하는 원의 방정식을 구하시오.

227. 중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 $(-6,\ 0)$, $(0,\ 6)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

228. 원 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$의 넓이가 직선 $y=2x+k$에 의하여 이등분될 때, 상수 k의 값을 구하시오.

229. 원 $x^2+y^2-6y-7=0$ 위의 점 P와 직선 $3x+4y+18=0$ 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

230. 원 밖의 한 점 $(5,\ k)$에서 원 $(x-1)^2+y^2=10$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

231. 좌표평면 두 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, $(x-3)^2+(y-4)^2=1$이 직선 $ax+by+5=0$에 대하여 대칭일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수)

232. 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 있다. 점 P를 지나는 접선이 점 $(6,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

233. 점 $(x,\ y)$를 점 $(x+a,\ y-2a)$로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $y=2x+3$을 평행이동 하였더니 직선 $y=2x-5$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

234. 원 $x^2+4x+y^2-5=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동 하였더니 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$가 되었다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

235. 직선 $2x+ay-3=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 도형이 자기 자신이 될 때, 상수 a의 값을 구하시오.

236. 이차함수 $y=x^2+4x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시켜 직선 $y=2x$와 서로 다른 두 점 P, Q에서 만나도록 할 때, 두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이 되었다. 이때 상수 a의 값을 구하여라.

237. 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하였더니 점 $(3-2a,\ -b-1)$이 되었다. 이때 점 P의 좌표를 구하시오.

238. 직선 $3x+5y+2=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 $ax+by-2=0$이라 할 때, 상수 $a,\ b$에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

239. 직선 $4x-3y+a=0$을 x축에 대하여 대칭이동 하였더니
원 $(x+2)^2+(y-5)^2=4$와 접하였다. 상수 a의 값을 모두 구하시오.

240. 원 $\mathrm{C}_1 : x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$과 원점을 중심으로 하는 원 C_2가 직선 $y = ax + b$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b에 대하여 $2ab$의 값을 구하시오.

[실전수학 도전문제]

241. 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ -3)$과 직선 $2x-y-1=0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오.

242. 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ -2)$, $\mathrm{B}(1,\ 10)$과 y축 위의 점 $\mathrm{C}(0,\ k)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이가 34일 때, k의 값을 구하시오. (단, $k<0$)

243. 좌표평면에서 원점과 직선 $x+y-3+k(x-y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라 할 때, $f(k)$의 최댓값을 구하시오.

244. 세 직선 $y=-x$, $y=mx+3$, $y=2x-3$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 실수 m의 값의 합을 구하시오.

245. 두 직선 $x+2y=5$, $y=2x-2$에 이르는 거리가 같은 y축 위의 점은 두 개가 있다. 이 두 점을 각각 $(0,\ a)$, $(0,\ b)$라 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

246. 두 원 $x^2+y^2+2x-4y-6=0$, $x^2+y^2-18x-8y+6=0$의 교점과 원점을 지나는 원의 중심의 좌표를 구하시오.

247. 좌표평면 위의 점 $(3,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 구하시오.

248. 점 $(2,\ a)$에서 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=16$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 모든 a의 값들의 합을 구하시오.

249. 점 P를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 Q, x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점을 R라 하자. 두 점 Q, R가 일치할 때, 점 P의 좌표를 구하시오.

250. 점 $(-2,\ 3)$을 지나는 직선 l을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(7,\ 3)$을 지났다. 이때, 직선 l의 방정식을 구하시오.

[정답 및 풀이]

Ⅰ. 다항식

[실전수학 기본문제]

1. 다항식 $x^3 - xy^2 + 3x^2y - 2$
(1) x에 대한 내림차순으로 정리하시오.
(2) y에 대한 오름차순으로 정리하시오.

1. (1) 문자 x에 대한 차수가 큰 순서부터: $x^3 + 3x^2y - xy - 2$
   (2) 문자 y에 대해 차수가 작은 순서부터: $-2 + x^3 + 3x^2y - xy^2$

2. 두 다항식 A, B에 대하여 $A+B$와 $A-B$를 계산하시오.
(1) $A = 4x^3 + 2x - 1$, $B = 3x^3 - x^2 - x + 1$
(2) $A = x^3 - x^2 + 2x - 3$, $B = x^3 + 2x^2 - x + 5$

2. (1) $A+B = 4x^3 + 2x - 1 + 3x^3 - x^2 - x + 1 = 7x^3 - x^2 + x$
   $A-B = 4x^3 + 2x - 1 - 3x^3 + x^2 + x - 1 = x^3 + x^2 + 3x - 2$
   (2) $A+B = x^3 - x^2 + 2x - 3 + x^3 + 2x^2 - x + 5 = 2x^3 + x^2 + x + 2$
   $A-B = x^3 - x^2 + 2x - 3 - x^3 - 2x^2 + x - 5 = -3x^2 + 3x - 8$

3. 두 다항식 A, B가 $A = x^2 - xy + 2y^2$, $B = 2x^2 + 2xy - y^2$일 때, 다음 등식을 만족시키는 $X = 2(A-B) + 3B$의 값을 구하시오.

3. $A - B = x^2 - xy + 2y^2 - 2x^2 - 2xy + y^2 = -x^2 - 3xy + 3y^2$
   $2(A-B) = -2x^2 - 6xy + 6y^2$
   $3B = 6x^2 + 6xy - 6y^2$
   $X = 2(A-B) + 3B = -2x^2 - 6xy + 6y^2 + 6x^2 + 6xy - 6y^2 = 4x^2$
   $X = 4x^2$

4. 다음 식을 전개하시오.
(1) $(x+2)(x^2+x-1)$
(2) $(2x^2+xy+y^2)(x-2y)$

4. (1) $(x+2)(x^2+x-1)= x^3+x^2-x+2x^2+2x-2 = x^3+3x^2+x-2$
(2) $(2x^2+xy+y^2)(x-2y)= 2x^3-4x^2y+x^2y-2xy^2+xy^2-2y^3 = 2x^3-3x^2y-xy^2-2y^3$

5. 다음 식을 전개하시오.
(1) $(3x+y)^3$
(2) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

5. (1) $(3x+y)^3 = 27x^3+27x^2y+9y^2+y^3$
(2) $(x-y)(x^2+xy+y^2)= x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3 = x^3-y^3$

6. 다음 식을 전개하시오.
(1) $(x-y+3z)^2$
(2) $(x-2y)^3$
(3) $(x+2)(x^2-2x+1)$
(4) $(x-3y)(x^2+2xy+4y^2)$

6. (1) $(x-y+3z)^2 = x^2+y^2+9z^2-2xy-6yz+6xz$
(2) $(x-2y)^3 = x^3+6x^2y+12xy^2-8y^3$
(3) $(x+2)(x^2-2x+1)= x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2 = x^3-3x+2$
(4) $(x-3y)(x^2+2xy+4y^2)= x^3+2x^2y+4xy^2-3x^2y-6xy^2-12y^{3^3}$
$= x^3-x^2y-2xy^2-12y^3$

7. $x-y=3$, $xy=-2$일 때, x^3-y^3의 값을 구하시오.

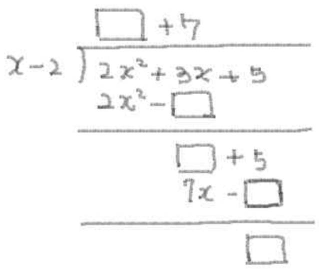
7. $x^3-y^3 = (x-y)^3+3xy(x-y)= 27-18 = 9$

8. $x+y=1$, $x^2+y^2=5$일 때, x^3+y^3의 값을 구하시오.

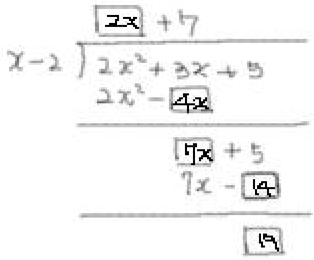
8. $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서 $5=1-2xy$, $xy=-2$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1+2\times 1=1+2=3$

9. 다음 나눗셈의 ( )안에 알맞은 것을 써넣고, 몫과 나머지를 구하시오.



9.

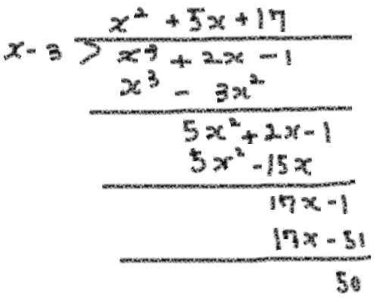


10. 다음 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫 Q와 나머지 R를 구하고, $A=BQ+R$의 꼴로 나타내시오.

(1) $A=x^3+2x-1$, $B=x-3$

(2) $A=5x^3-2x^2+x-1$, $B=x^2-2x+3$

10. (1) 몫 $Q: x^2+5x+17$ 나머지 R; 50



(2) 몫 Q: $5x+8$ 나머지 R: $2x-25$

$$5x + 8$$
$$x^2 - 2x + 3 \,\big)\, 5x^3 - 2x^2 + x - 1$$
$$5x^3 - 10x^2 + 15x$$
$$8x^2 - 14x - 1$$
$$8x^2 - 16x + 24$$
$$2x - 25$$

11. 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 다음 물음에 대하여 각각 구하시오.

$a(x-1)^2 + b(x-1) - 1 = x^2 - 3x + 1$

(1) 양변의 문자에 적당한 수를 대입하는 방법

(2) 양변의 계수를 비교하여 구하시오.

11. (1) $x = 0$대입, $a(0-1)^2 + b(0-1) - 1 = 0^2 - 3 \times 0 + 1$,

$a - b - 1 = 1$, $a - b = 2$

$x = 2$대입, $a(2-1)^2 + b(2-1) - 1 = 2^2 - 3 \times 2 + 1$,

$a + b - 1 = -1$, $a + b = 0$

즉, $a - b = 2$과 $a + b = 0$을 연립하여 정리하면

따라서 $a = 1$, $b = -1$

(2) $a(x^2 - 2x + 1) + bx - b - 1 = x^2 - 3x + 1$,

$ax^2 - 2ax + a + bx - b - 1 = x^2 - 3x + 1$,

$ax^2 - (2a - b)x + a - b - 1 = x^2 - 3x + 1$,

양변의 계수를 비교하면

$a = 1$, $a - b = 2$

따라서 $a = 1$, $b = -1$

12. 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되게 하는 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $x^3 - 3x^2 + 3 = (x-1)^3 + a(x-1) + b$

(2) $x^3 + ax + 2 = (x+1)(x^2 + bx + c)$

(1) $x^3-3x^2+3=(x-1)^3+a(x-1)+b=x^3-3x^2+3x-1+ax-a+b$

$$=x^3-3x^2+(3+a)x-a+b-1$$

$3+a=0$, $a=-3$

$-a+b-1=3$, $3+b-1=3$, $b=1$

따라서 $a=6$, $b=8$

(2) $x^3+ax+2=x^3+bx^2+cx+x^2+bx+c=x^3+(b+1)x^2+(b+c)x+c$

$b+1=0$, $b=-1$

$c=2$

$b+c=a$, $-1+2=a$, $a=1$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=2$

13. 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 3이고, $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 1이다. $P(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

13. $P(x)=(x+1)Q(x)+3$, $P(-1)=3$

$P(x)=(x-1)S(x)+1$, $P(1)=1$

$P(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$라 하면

$P(1)=a+b=1$,

$P(-1)=-a+b=3$

$a+b=1$과 $-a+b=3$을 연립하여 정리하면

$b=2$, $a=-1$

14. 조립제법을 이용하여 $2x^3-3x^2+5$를 $x-1$로 나눈 몫과 나머지를 구하시오.

$$\begin{array}{c|cccc} \square & 2 & \square & 0 & \square \\ & & 2 & -1 & -1 \\ \hline & \square & \square & \square & \boxed{\square} \end{array}$$

몫:　　　　　　　　　　　　　　나머지:

14.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -3 & 0 & 5 \\ & & 2 & -1 & -1 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & \boxed{4} \end{array}$$

몫: $2x^2-x-1$　　　나머지: 4

15. 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(3x^2+4x^2+5x-10)\div(3x-2)$

(2) $(2x^3-5x^2+x+1)\div(2x+1)$

(1)

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{2}{3} & 3 & 4 & 5 & -10 \\ & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 3 & 6 & 9 & \boxed{4} \end{array}$$

$$3x^2+4x^2+5x-10=\left(x-\frac{2}{3}\right)(3x^2-6x+9)+4=(3x-2)(2x^2-4x+6)+4$$

몫: $2x^2+4x+6$　　나머지: 4

(2)

$-\frac{1}{2}$	2	−5	1	1
		−1	3	−2
1	2	−6	4	$\boxed{-1}$
		2	4	
2	2	−4	$\boxed{0}$	
		4		
	2	$\boxed{0}$		

$$2x^3-5x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-6x+4)-1$$
$$=(2x+1)(x^2-3x+2)-1$$
$$=(2x+1)(x-1)(x-2)2$$

몫: $2(x-1)(x-2)(2x+1)$ 　　나머지: 0

16. 다음 다항식을 인수분해 하시오.

(1) $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$ 　　(2) $x^3+6x^2+12x+8$

(3) $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$ 　　(4) x^3+64y^3

16, (1) $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca=a^2+b^2+(-c)^2+2ab+2x(-c)+2(-c)a$
$$=(a+b-c)^2$$

(2) $x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3$

(3) $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3=(x-3y)^3$

(4) $x^3+64y^3=(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)$

17. 다항식 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$를 인수분해 하시오.

17. $x^2+5x=X$로 놓으면

$(X+4)(X+6)-24=X^2+10X=X(X+10)$

$X(X+10)=(x^2+5x)(x^2+5x+10)=x(x+5)(x^2+5x+10)$

18. 다음 식을 인수분해 하시오.

(1) x^4+2x^3-3 (2) x^4+x^2+1

18. (1) $x^4+2x^3-3=(x-1)(x^2+3x+3)$

(2) $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2$

$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

19. 다음 다항식을 인수분해 하시오.

(1) x^3-x^2+2x-8 (2) $x^4-5x^2-10x-6$

(1) $x^3-x^2+2x-8=x^3-2^3-x(x-2)=(x-2)(x^2+2x+4)-x(x-2)$

$=(x-2)(x^2+x+4)$

(2)

-1	1	0	-5	-10	-6
		-1	1	4	6
3	1	-1	-4	-6	0
		3	6	6	
	1	2	2	0	

$x^4-5x^2-10x-6=(x+1)(x-3)(x^2+2x+2)$

20. 다음 다항식을 인수분해 하시오.

(1) x^3+2x^2-7x+4 (2) $x^4+3x^3-3x^2-11x-6$

(1)

1	1	2	-7	4
		1	3	-4
	1	3	-4	0

$x^3+2x^2-7x+4=(x-1)(x^2+3x-4)=(x-1)^2(x+4)$

(2)

-1	1	3	-3	-11	-6
		-1	-2	5	6
2	1	2	-5	-6	0
		2	8	6	
	1	4	3	0	

$x^4+3x^3-3x^2-11x-6=(x+1)^2(x-2)(x-3)$

[실전수학 연습문제]

21. x의 값에 관계없이 등식
$(x-2)^3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$
가 항상 성립할 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a-b-c+d$의 값을 구하시오.

21. $x=-1$일 때, $d=-27$
$x^3-6x^2+12x-8=a(x^3+3x^2+3x+1)+b(x^2+2x+1)+cx+c-27$,
$x^3-6x^2+12x-8=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c-27$,
$3a+b=-6$ ……①
$3a+2b+c=12$ ……②
$a+b+c-27=-8$, $a+b+c=19$ ……③
②와 ③을 연립하여 정리하면
$2a+b=-7$
$2a+b=-7$을 ①과 연립하여 정리하면
$a=1$
$a=1$이면 $b=-9$, $c=27$
즉, $a=1$, $b=-9$, $c=27$, $d=-27$
$a-b-c+d=1-(-9)-27+27=10$

22. $P(x)=2x^3+ax^2+bx-6$이 x^2-x-6으,로 나누어떨어지도록 상수 a, b의 값을 정하시오.

22. $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$이므로
$P(3)=2\times3^3+3^2a+3b-6=54+9a+3b-6=9a+3b+48=0$,
$9a+3b=-48$, $3a+b=-16$
$P(-2)=2\times(-2)^3+a\times(-2)^2-2b-6=-16+4a-2b-6=4a-2b-22=0$,
$2a-b=11$
즉, $3a+b=-16$와 $2a-b=11$을 연립하여 정리하면
$a=-1$, $b=-13$

23. 다항식 $P(x)=x^3+ax^2+2x-5$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 1일 때, $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. (단, a는 상수이다.)

23. $P(-1)=(-1)^3+a\times(-1)^2+2\times(-1)-5=-1+a-2-5=1$,

$a=9$

$P(x)=x^3+9x^2+2x-5$이므로

$P(1)=1+9+2-5=7$

24. 다음 식을 인수분해 하시오.

(1) $(x^2+2x-5)(x^2+2x-13)-20$

(2) $4x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)^2$

(1) $x^2+2x=X$로 놓으면

$(X-5)(x-13)-20$, $X^2-18X+65-20=X^2-18X+45=(X-15)(X-3)$,

$x^2+2x=15$와 $x^2+2x=3$,

$x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$

$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$이므로

$(x^2+2x-5)(x^2+2x-13)-20=(x+3)(x-1)(x-5)(x-3)$

(2) $$\begin{aligned}(2xy)^2-(x^2+y^2-z^2)^2 &= (2xy+x^2+y^2-z^2)(2xy-x^2-y^2+z^2)\\ &= \{(x+y)^2-z^2\}\{z^2-(x-y)^2\}\\ &= (x+y+z)(x+y-z)(z+x-y)(z-x+y)\end{aligned}$$

25. 삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때, $a^3+ab^2+b^2c+a^2c-c^3-ac^2=0$을 만족시킬 때, 이 삼각형은 어느 삼각형인가?

25. $a^3+ab^2+b^2c+a^2c-c^3-ac^2=0$

$a^2(a+c)+b^2(a+c)-c^2(a+c)=0$,

$(a+c)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a+c=0$ 또는 $a^2+b^2-c^2=0$

$a \neq c$이므로 $a^2+b^2=c^2$

비변의 길이가 c인 직각삼각형

26. 곱셈 공식을 이용하여 다음 계산을 하시오.

(1) 98^2+102^2

(2) 9^3+11^3

26. (1) 20008 (2) 2060

(1) $(100-2)^2+(100+2)^2$
$=(100^2-4\times100+4)+(100^2+4\times100+4)$
$=2\times100^2+2\times4=20008$

(2) $(10-1)^3+(10+1)^3$
$=(10^3-3\times10^2+3\times10-1)$
$+(10^3+3\times10^2+3\times10+1)$
$=2\times10^3+6\times10=2060$

27. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $ab+bc+ca$

(2) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

(3) $a^4+b^4+c^4$

27. (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$

(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$이므로

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(0-1)=-\frac{1}{2}$$

(2) $a+b+c=0$이므로

$$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$
$$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

$(ab+bc+ca)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

(3) $(a^2+b^2+c^2)^2$
$\quad = a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

이므로

$a^4+b^4+c^4$
$=(a^2+b^2+c^2)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$
$=1-2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

28. $(x^3+2x^2+3x+4)(2x^4+3x^3-5x^2-7x+8)$을 전개한 식에서 x^3의 계수를 구하시오.

28. $-9x^3$

x^3은 (상수)$\times x^3$, $x\times x^2$, $x^2\times x$, $x^3\times$(상수)의 경우에 만들어지므로

$x^3\times 8+2x^2\times(-7x)+3x\times(-5x^2)+4\times 3x^2$
$=8x^3-14x^3-15x^3+12x^3$
$=(8-14-15+12)x^3$
$=-9x^3$

29. $a^2=2$일 때, 자연수 n에 대하여 $\{(3+2a)^n-(3-2a)^n\}-\{(3+2a)^n+(3-2a)^n\}$의 값을 구하시오.

29. -4

$(3+2a)^n=A$, $(3+2a)^n=B$로 놓으면

$\{(3+2a)^n-(3-2a)^n\}-\{(3+2a)^n+(3-2a)^n\}$
$=(A-B)^2-(A+B)^2=-4AB$
$=-4(3+2a)^n(3-2a)^n=-4(9-8)^m=-4$

30. 다항식 $3x^3+3x+2$를 다항식 A로 나누면 몫이 $3x-6$이고 나머지는 $6x+20$이다. 이때 다항식 A를 구하시오.

30. $A=x^2+2x+3$

$3x^3+3x+2=A(3x-6)+6x+20$에서

$3x^3-3x-18=A(3x-6)$

$A=(3x^3-3x-18)\div(3x-6)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+3 \\
\hline
3x-6 & 3x^3-3x-18 \\
 & 3x^3-6x^2 \\
\hline
 & 6x^2-3x \\
 & 6x^2-12x \\
\hline
 & 9x-18 \\
 & 9x-18 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

따라서 $A=x^2+2x+3$

31. x^3을 x^2-x+1로 나눌 때의 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R라고 할 때, $Q(2)+R$의 값을 구하시오.

31. x^3을 $x^3=(x^2-x+1)(x+1)-1$이므로
$Q(x)=x+1$, $R=-1$
$Q(2)+R=3+(-1)=2$

32. $16^2-15^2+14^2-13^2+\ \cdots\ +2^2-1^2$의 값을 구하시오.

32. $16^2-15^2+14^2-13^2+\ \cdots\ +2^2-1^2$
$=(16-15)(16+15)+(14-13)(14+13)+\ \cdots\ +(2-1)(2+1)$
$=16+15+14+\ \cdots\ +2+1=136$

33. 등식 $x^3+x^2-8x+7=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$가 x의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 a, b, c에 대하여 다항식 ax^2-bx-c를 $x-2$로 나눈 나머지를 구하시오.

33. $x^3+x^2-8x+7=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$는 x에 대한 항등식이다.
주어진 식의 양변에 $x=0$, 1, 2를 대입하면
$x=0$일 때, $7=-1+a-b+c$
$x=1$일 때, $1=c$
$x=2$일 때, $3=1+a+b+c$
위의 식을 연립하여 정리하면
$a=4$, $b=-3$, $c=1$
$ax^2-bx-c=4x^2+3x-1$
$P(x)=4x^2+3x-1$,
$P(2)=4\times 2^2+3\times 2-1=21$,
$P(2)=21$

[실전수학 도전문제]

34. 다항식 $(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)^2$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

34. $(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)^2$

$=(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)\times(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)$

이므로 $1\times 4x^3+2x\times 3x^2+3x^2\times 2x+4x^3\times 1=(4+6+6+4)x^3=20x^3$

x^3의 계수는 20

35. 다항식 $(x+1)^n$ (단, n은 자연수)을 x로 나누면 나머지가 1이 된다. 이것을 이용하여 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(1) 8^{10}을 7로 나눈 나머지

(2) 2^{100}을 31로 나눈 나머지

35. $n=1$일 때, $(x+1)^1=x+1$이므로 x로 나누면 나머지는 1이다.

$n=2$일 때, $(x+1)^2=x^2+2x+1$이므로 x로 나누면 나머지는 1이다.

$\vdots$

위에서 $(x+1)^n$에서 x로 나눈 나머지는 항상 1임을 알 수 있다.

(1) $x=7$일 때, $(7+1)^n=8^n$, 8^{10}을 7로 나눈 나머지는 1이다.

(2) $x=31$일 때, $(31+1)^n=32^n=2^{5n}$, $n=20$에서 $2^{5n}=2^{100}$ 이므로 나머지는 1이다.

36. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다항식 $f(x)+g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 9, 다항식 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 21이다. 다항식 $f(x)g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 풀이 과정과 답을 쓰시오.

36. $f(x)+g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때 나머지가 9이므로

$f(3)+g(3)=9$

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가21이므로

$\{f(3)\}^2+\{g(3)\}^2=21$

$\{f(3)\}^2+\{g(3)\}^2=\{f(3)+g(3)\}^2-2f(3)g(3)$,

$21=9^2-2f(3)g(3)$,

$21-81=-2f(3)g(3)$,

$f(3)g(3)=30$

다항식 $f(x)g(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는 30이다.

37. 100개의 다항식 x^2+3x-1, x^2+3x-2, x^2+3x-3, $\cdots$, $x^2+3x-100$이 있다. 이 중에서 자연수 m, n에 대하여 $(x+m)(x-n)$의 꼴로 인수분해 되는 다항식의 개수를 구하고, 그 풀이 과정을 서술하시오.

37. $(x+m)(x-n)=x^2+(m-n)x-mn$이므로

$m-n=3$이고 $mn=1, 2, 3, \cdots, 100$ 을 만족시키는

자연수 순서쌍 (m, n)의 개수이므로

$m=4$, $n=1$이고 $mn=4$

$m=5$, $n=2$이고 $mn=10$

$m=6$, $n=3$ 이고 $mn=18$

$\vdots \qquad \vdots$

$m=11$, $n=8$ 이고 $mn=88$

$m=12$, $n=9$ 이고 $mn=108$

이므로 조건을 만족하는 것은

$m=11$, $n=8$ 이고 $mn=88$까지 이므로

인수분해 되는 다항식의 개수는 8개다.

38. 3이상의 자연수 n에 대하여 n^3+7이 $n-2$의 배수가 되게 하는 자연수 n의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 서술하시오.

38. $n=3,\ 5,\ 7,\ 17$

$n^3+7=(n-2)(n^2+2n+4)+15$,

n^3-7이 $n-2$의 배수가 되려면 나머지 15가 $n-2$의 배수가 되면 된다.

자연수 $n=3$부터 대입해 보면

$n=3$일 때, $n-2=3-2=1$이므로 성립

$n=4$일 때, $n-2=4-2=2$이므로 성립 안 됨.

$n=5$일 때, $n-2=5-2=3$이므로 성립.

$n=6$일 때, $n-2=6-2=4$이므로 성립 안 됨.

$n=7$일 때, $n-2=7-2=5$이므로 성립.

$n=8$일 때, $n-2=8-2=6$이므로 성립 안 됨.

위에서 주어진 조건을 보면

$n=9$부터 $n=16$까지는 15가 $n-2$의 배수가 성립 안 됨.

$n=17$에서 $n-2=17-2=15$가 되어 성립

즉, $n=3,\ 5,\ 7,\ 17$일 때만 성립한다.

39. $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=5$일 때,

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 서술 하시오

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

39. 29

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ ……㉠

$x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=5$ 이므로

㉠에 각 식의 값을 대입하면 $0^2=5+2(xy+yz+zx)$

즉, $xy+yz+zx=-\dfrac{5}{2}$ ……㉡

㉡의 양변을 각각 제곱하면 $(xy+yz+zx)^2=\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2$

그런데 $(xy+yz+zx)^2=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$

$=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2xyz(y+z+x)$

즉, $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)=\dfrac{25}{4}$

따라서 $p=4$, $q=25$ 이므로 $p+q=29$

40. 1 이 아닌 두 자연수 a, b 에 대하여 $3587 = 15^3 + 15^2 - 15 + 2 = a \times b$로 나타낼 때, $\frac{1}{2}(a+b)$ 의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 서술하시오.

40. $A = 15$라 하면

$3587 = 15^3 + 15^2 - 15 + 2 = A^3 + A^2 - A + 2 = (A+2)(A^2 - A + 1)$,

$(A+2)(A^2 - A + 1) = (15+2)(15^2 - 15 + 1) = 17 \times 211$,

$a + b = 17 + 211 = 228$, $\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2} \times 228 = 114$

$\frac{1}{2}(a+b) = 114$

41. 등식 $(k+3)x - (3k+4)y + 5k = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $x + y$ 의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오.

41. $(k+3)x - (3k+4)y + 5k = 0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$(x - 3y + 5)k + (3x - 4y) = 0$

$x - 3y + 5 = 0$ 또는 $3x - 4y = 0$

위의 식을 연립하여 정리하면

$y = 3$

$y = 3$을 $3x - 4y = 0$에 대입하여 정리하면

$3x - 4 \times 3 = 0$, $3x = 12$, $x = 4$

$x = 4$

즉, $x = 4$, $y = 3$ 이므로 $x + y = 4 + 3 = 7$

따라서 $x + y = 7$

42. 두 다항식 $A = x^3 + x + 4$, $B = x + 4$ 에 대하여 $A^3 - B^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수를 구하고, 그 과정을 서술하시오.

42. $A = x^3 + B$ 이므로

$A^3 - B^3 = (x^3 + B)^3 - B^3 = x^9 + 3x^6 B + 3x^3 B^2 + B^3 - B^3 = x^9 + 3x^6 B + 3x^3 B^2$

여기서, x^3 의 항은 $3x^3 B^2$에만 존재한다.

$3x^3 B^2 = 3x^3 (x+4)^2 = 3x^3 (x^2 + 8x + 16)$ 이므로

즉, $3x^3 B^2$의 x^3 의 계수는 $3 \times 16 = 48$ 이다.

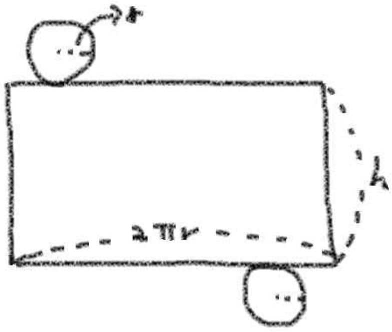
따라서 구하는 x^3 의 계수는 48

43. $(x^3+x^2-5x+3)\pi$ 인 직원기둥이 있다. 이 직원기둥의 높이와 밑면의 반지름의 길이가 각각 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 일차식으로 나타내어 질 때, 이 직원기둥의 겉넓이를 구하고, 그 풀이과정을 서술하시오. (단, $x>1$)

43. 원기둥의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면

(부피) $=\pi r^2 h=\left(x^3+x^2-5x+3\right)\pi=(x-1)^2(x+3)\pi$ 이므로

$r=x-1,\ h=x+3$



즉, (겉넓이) $=2\pi r^2+2\pi rh=2r(r+h)\pi=2(x-1)(2x+2)\pi=4(x^2-1)\pi$

따라서 $4\left(x^2-1\right)\pi$

[실전수학 기본문제]

44. 실수 a에 대하여 $z=(2-a)+(4-a^2)i$가 $z^2>0$을 만족시키도록 하는 a의 값을 구하시오.

44. 실수 a에 대하여 $z=(2-a)+(4-a^2)i$가 $z^2>0$을 만족시키기 위해서는 z의 (실수부분) $\neq 0$이고 (허수부분)$=0$

즉, $2-a\neq 0$에서 $a\neq 2$

$4-a^2=0$에서 $a=2$ 또는 $a=-2$

따라서 $a=-2$

45. 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=1+2i$가 성립할 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$의 값을 구하시오.

45. $\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=\dfrac{a(1+i)+b(1-i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{2}i=1+2i$

에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\dfrac{a+b}{2}=1$에서 $a+b=2$, $\dfrac{a-b}{2}$에서 $a-b=4$

두 식을 연립하여 정리하면 $a=3$, $b=-1$

따라서 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{i}=-\sqrt{3}i$

46. 복소수 z의 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $(1-i)z+(2-i)\overline{z}=3-i$가 성립할 때, $z-\overline{z}$의 값을 구하시오.

46. 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면

$\overline{z}=a-bi$

주어진 식은 $(1-i)(a+bi)+(2-i)(a-bi)=3a+(-2a-b)i=3-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a=3$, $-2a-b=-1$이므로 $a=1$, $b=-1$

따라서 $z-\overline{z}=(1-i)-(1+i)=-2i$

47. $x=1+i$, $y=1-i$일 때, $x^2-4xy+y^2$의 값을 구하시오.

47. $x+y=(1+i)+(1-i)=2$, $xy=(1+i)(1-i)=2$

$x^2-4xy+y^2=(x+y)^2-6xy=2^2-6\times 2=-8$

48. 두 복소수 $\alpha=1+i$, $\beta=-1-2i$일 때, $\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$의 값을 구하시오.

48. $\alpha=1+i$, $\overline{\alpha}=1-i$, $\beta=-1-2i$, $\overline{\beta}=-1+2i$ 이므로

$\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha-\beta)-\overline{\beta}(\alpha-\beta)=(\overline{\alpha}-\overline{\beta})(\alpha-\beta)=(2-3i)(2+3i)$,

$(2-3i)(2+3i)=4-3^2i^2=4+9=13$

49. 실수 a에 대하여 복소수 $z=a^2-(i+2)a-3-i$를 제곱하면 음의 실수가 된다고 한다. 이때 a의 값을 구하시오.

49. $z=a^2-(i+2)a-3-i=(a^2-2a-3)+(-a-1)i$

복소수 z를 제곱하여 음의 실수가 되기 위해서는 z가 순허수이어야 한다.

즉, $a^2-2a-3=0$이고 $-a-1\neq 0$이어야 한다.

$a^2-2a-3=(a+1)(a-3)=0$에서

$a=-1$ 또는 $a=3$

이때 $a\neq -1$이므로 $a=3$

50. 복소수 z에 대하여 $z+\overline{z}=2$, $z=\overline{z}$일 때, z의 값을 구하시오. (단, $\overline{z}$는 켤레복소수)

50. $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=2$에서 $a=1$

$z=\overline{z}$에서 $a+bi=a-bi$이므로 $b=0$

따라서 $z=a+bi=1$

51. 복소수 $z=(1-i)x^2-(3-4i)x+2-3i$에 대하여 $z+\overline{z}=0$, $z\neq\overline{z}$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.(단, $\overline{z}$는 켤레복소수)

51. 복소수 z가 $z+\overline{z}=0$을 만족시키면 z는 순허수 또는 0이다.

그런데 $z\neq\overline{z}$이므로 z는 순허수이다.

$z=(1-i)x^2-(3-4i)x+2-3i=(x^2-3x+2)+(-x^2+4x-3)i$

순허수이기 위해서는 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=2$,

$-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3)\neq 0$에서

$x\neq 1$이고 $x\neq 3$

따라서 $x=2$

52. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, 등식 $(1+i)z+2i\bar{z}=-1+i$를 만족시키는 z의 값을 구하시오.

52. $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$$(1+i)z+2i\bar{z}=(1+i)(a+bi)+2i(a-bi)=a+bi+ai-b+2ai+2b$$
$$=(a+b)+(3a+b)i=-1+i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=-1$, $3a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$이므로

$z=1-2i$

53. 다음 식을 간단히 나타내시오.

(1) $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}+\sqrt{-16}+\sqrt{-25}$ (2) $2\sqrt{-49}-3\sqrt{-9}+5\sqrt{-36}$

(3) $\sqrt{27}i-\sqrt{12}i$ (4) $(5+4i)-(-3+i)$

53. (1) $14i$ (2) $35i$ (3) $\sqrt{3}i$ (4) $8+3i$

(1) $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}+\sqrt{-16}+\sqrt{-25}=\sqrt{4}i+\sqrt{9}i+\sqrt{16}i+\sqrt{25}i$,

$\sqrt{4}i+\sqrt{9}i+\sqrt{16}i+\sqrt{25}i=2i+3i+4i+5i=14i$

(2) $2\sqrt{-49}-3\sqrt{-9}+5\sqrt{-36}=2\sqrt{49}i-3\sqrt{9}i+5\sqrt{36}i$,

$2\sqrt{49}i-3\sqrt{9}i+5\sqrt{36}i=2\times 7i-3\times 3i+5\times 6i=14i-9i+30i=35i$

(3) $\sqrt{27}i-\sqrt{12}i=3\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i=\sqrt{3}i$

(4) $(5+4i)-(-3+i)=(5+3)+(4-1)i=8+3i$

54. 다음을 계산하여 $a+bi$(a, b는 실수)의 꼴로 나타내시오.

(1) $\dfrac{1}{1+i}$ (2) $\dfrac{2-5i}{1+2i}$ (3) $(3+2i)\div(1-i)$ (4) $(1+\sqrt{2}i)\div(1-\sqrt{2}i)$

54. (1) $\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

(2) $\dfrac{2-5i}{1+2i}=\dfrac{(2-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{2-4i-5i-10}{5}=\dfrac{-8-9i}{5}=-\dfrac{8}{5}-\dfrac{9}{5}i$

(3) $(3+2i)\div(1-i)=\dfrac{3+2i}{1-i}=\dfrac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{3+3i+2i-2}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i$

(4) $(1+\sqrt{2}i)\div(1-\sqrt{2}i)=\dfrac{1+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}=\dfrac{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}{(1-\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}=\dfrac{3}{1-2\sqrt{2}i-2}$,

$=\dfrac{3}{-1-2\sqrt{2}i}=\dfrac{3(-1+2\sqrt{2}i)}{(-1-2\sqrt{2}i)(-1+2\sqrt{2}i)}=\dfrac{-3+6\sqrt{2}i}{9}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$

55. 다음을 계산하시오.

(1) $\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-3}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}$ (3) $\sqrt{-2}\sqrt{-5}$ (4) $\sqrt{2}\sqrt{-3}$

55. (1) $\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{5}i}{\sqrt{3}i}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}\,i}=-\dfrac{\sqrt{12}\sqrt{3}\,i}{3}=-\dfrac{\sqrt{36}\,i}{3}=-2i$

(3) $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{5}\,i=-\sqrt{10}$

(4) $\sqrt{2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\,i=\sqrt{6}\,i$

56. 다음 이차방정식의 근을 판별하시오.

(1) $x^2+3x+2=0$

(2) $x^2-6x+9=0$

(3) $2x^2-2x+1=0$

(4) $2x^2-5x-2=0$

56. (1) 서로 다른 두 실근

(2) 중근

(3)서로 다른 두 허근

(1) 이차방정식 $x^2+3x+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=3^2-4\times1\times2=1>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 이차방정식 $x^2-6x+9=0$의 판별식을 D라고 하면 $\dfrac{D}{4}=(-3)^2-9\times1=9-9=0$

이므로 중근을 갖는다.

(3) 이차방정식 $2x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-2\times1=1-2=-1<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(4) 이차방정식 $2x^2-5x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\times1\times(-2)=25+8=33>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

57. 다음 조건에 알맞은 실수 k값의 범위를 구하여라.

(1) $x^2-3x+k+5=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $2x^2+x+k=0$이 실근을 갖는다.

57. (1) 판별식 $D=3^2-4\times(k+5)=9-4k-20=-4k-11>0$,

$-4k>11$, $k<-\dfrac{11}{4}$

(2) 판별식 $D=1^2-4\times2\times k=1-8k\geq0$, $k\leq\dfrac{1}{8}$

58. 다음 이차방정식이 허근을 가질 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

(1) $x^2+5x+5k=0$

(2) $4x^2+kx+1=0$

58. (1) 판별식 $D=5^2-4\times1\times5k=25-20k<0$, $k>\dfrac{4}{5}$

(2) 판별식 $D=k^2-4\times4\times1=k^2-16<0$, $-4<k<4$

59. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+p+3=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값 구하시오.

59. 판별식 $D=p^2-4(p+3)=p^2-4p-12=(p-6)(p+2)=0$,
$p=6$ 또는 $p=-2$

60. a가 실수일 때, 이차방정식 $x^2+ax+a-1=0$은 실근을 가짐을 보이시오.

60. 판별식 $D=a^2-4(a-1)=a^2-4a+4=(a-2)^2 \geq 0$
즉, 주어진 이차방정식은 실근을 갖는다.

61. x에 대한 이차방정식 $x^2+2x+3-m=0$이 다음과 같은 근을 갖도록 실수 m의 값의 범위를 구하시오.
(1) 실근
(2) 서로 다른 두 실근
(3) 중근
(4) 서로 다른 두 허근

61. 이차방정식 판별식 $\frac{D}{4}=1^2-(3-m)=1-3+m=m-2$

(1) 판별식 $\frac{D}{4}=1^2-(3-m)=m-2 \geq 0$, $m \geq 2$

(2) $\frac{D}{4}=1^2-(3-m)=m-2>0$, $m>2$

(3) $\frac{D}{4}=1^2-(3-m)=m-2>0$, $m=2$

(4) $\frac{D}{4}=1^2-(3-m)=m-2<0$, $m<2$

62. 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$의 값을 구하시오.

62. $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=2$이므로

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\frac{1^2-2\times 2}{2^2}=-\frac{3}{4}$$

63. 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 두 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

63. $1+i$가 이차방정식의 한 근이므로 켤레복소수인 $1-i$도 근이다.
$a=(1+i)+(1-i)=2$, $b=(1+i)(1-i)=2$이므로
$a-b=0$

64. x에 대한 이차방정식

$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$, $c\neq0$, a, b, c는 실수)에서 근의 공식을 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$

로 잘못 알고 풀었더니 두 근이 -1, 2이었다. 이 방정식의 옳은 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

64. $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$를 이용하여 구한 근이 -1, 2이므로

두 근의 합 $\dfrac{b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\dfrac{b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\dfrac{2b}{2a}=\dfrac{b}{a}$

$-1+2=1$에서 $\dfrac{b}{a}=1$, $b=a$ …… ㉠

두 근의 곱 $\dfrac{b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\times\dfrac{b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\dfrac{b^2-(b^2-ac)}{4a^2}=\dfrac{c}{4a}$

$-1\times2=-2$에서 $\dfrac{c}{4a}=-2$, $c=-8a$ ……㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면 $a\neq0$이므로

$ax^2+ax-8a=0$, $x^2+x-8=0$

즉, 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-8$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times(-8)=17$

65. 이차방정식 $(1-i)x^2+(1+3i)x-2(1+i)=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

65. 주어진 방정식의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(1+3i)x-2(1+i)^2=0$,

$2x^2+(4i-2)x-2\times2i=0$,

$x^2+(2i-1)x-2i=0$, $(x+2i)(x-1)=0$, $x=-2i$ 또는 $x=1$

$\alpha^2+\beta^2=(-2i)^2+1^2=-4+1=-3$

66. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-2)x+a-3=0$의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 다를 때, 실수 a의 값을 구하시오.

66. 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 반대이므로

(두 근의 합)$=0$, (두 근의 곱)<0

이차방정식 $x^2+(a-2)x+a-3=0$에서

(두 근의 합)$=-(a-2)=0$, $a=2$ …… ㉠

(두 근의 곱)$=a-3<0$, $a<3$ ……㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a의 값은 $a=2$

67. 다음 두 수를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 만들어라.

(1) $2,\ -5$

(2) $1+i,\ 1-i$

67. (1) 두 근의 합 $2+(-5)=-3$, 두 근의 곱 -10,

$x^2+3x-10=0$

(2) 두 근의 합 $1+i+1-i=2$, 두 근의 곱 $(1+i)(1-i)=1-i^2=1-(-1)=2$,

$x^2-2x+2=0$

68. 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

68. $x^2-3x+5=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=-(-3)=3,\ \alpha\beta=5$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times5=9-10=-1$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{3}{5}$

69. 다음 두 수를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

(1) $1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

69. (1) 두 근의 합 $1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1-2=-1$,

두 근의 곱 $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1-2=-1$

$x^2+x-1=0$

(2) 두 근의 합 $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$,

두 근의 곱 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\times\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+3}{4}=\dfrac{4}{4}=1$

$x^2+x+1=0$

70. 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $(\alpha-\beta)^2$

(4) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

70. $x^2+x+1=0$의 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times1=1-2=-1$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-1)^3-3\times1\times(-1)=-1+3=2$

(3) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-1)^2-4\times1=1-4=-3$

(4) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=1\times(-1)=-1$

71. 이차방정식 $x^2-(m-1)x+m=0$의 두 근 사이에 다음과 같은 관계가 성립할 때, 실수 m의 값을 구하여라.

(1) 두 근의 비가 $2:3$이다.

(2) 두 근의 차가 1이다.

71. (1) 두 근을 2α, 3α로 놓으면 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합 $2\alpha+3\alpha=5\alpha=m-1$ ……㉠

두 근의 곱 $2\alpha\times3\alpha=6\alpha^2=m$ ……㉡

㉠에서 $m=5\alpha+1$

이것을 ㉡에 대입하여 정리하면 $6\alpha^2-5\alpha-1=0$,

$(\alpha-1)(6\alpha+1)=0$, $\alpha=1$ 또는 $\alpha=-\dfrac{1}{6}$

(i) $\alpha=1$일 때, $m=6$

(ii) $\alpha=-\dfrac{1}{6}$일 때, $m=\dfrac{1}{6}$

(2) 두 근을 α, $\alpha+1$로 놓으면 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합 $\alpha+(\alpha+1)=2\alpha+1=m-1$ ……㉠

두 근의 곱 $\alpha(\alpha+1)=m$ ……㉡

㉠에서 $m=2\alpha+2$

이것을 ㉡에 대입하여 정리하면 $\alpha^2-\alpha-2=0$,

$(\alpha-2)(\alpha+1)=0$, $\alpha=2$ 또는 $\alpha=-1$

(i) $\alpha=2$일 때, $m=6$

(ii) $\alpha=-1$일 때, $m=0$

72. 다음 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=x^2-3x+1$ (2) $y=x^2-2x+1$ (3) $y=x^2-x+1$

(4) $y=2x^2-x+2$ (5) $y=-x^2+4x-4$ (6) $y=-2x^2+3x+2$

72. (1) 판별식 $D=(-3)^2-4=9-4=5>0$, 서로 다른 두 실근, 2개

(2) 판별식 $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1=1-1=0$, 중근, 1개

(3) 판별식 $D=(-1)^2-1=1-1=0$, $x=1$ 중근 , 1개

(4) 판별식 $D=(-1)^2-16=1-16=-15<0$, 서로 다른 두 허근 , 없다.

(5) 판별식 $\frac{D}{4} = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$, 중근 , 1개

(6) 판별식 $D = 3^2 + 16 = 9 + 16 = 25 > 0$, 서로 다른 두 실근 , 2개

73. 이차함수 $y = x^2 - 4x + k$가 다음 조건을 만족시키도록 상수 k의 값의 범위를 정하시오.

(1) x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) x축에 접한다.

(3) x축과 만나지 않는다.

73. (1) 판별식 $\frac{D}{4} = (-2)^2 - k = 4 - k > 0$, $k < 4$

(2) 판별식 $\frac{D}{4} = (-2)^2 - k = 4 - k = 0$, $k = 4$

(3) 판별식 $\frac{D}{4} = (-2)^2 - k = 4 - k < 0$, $k > 4$

74. 이차함수 $y = -2x^2 - 6x + 3$의 그래프와 x축과의 교점의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$이라고 할 때, $a + b$의 값을 구하시오.

74. 근과 계수와의 관계를 이용하면 두 근은 a와 b이므로

$a + b = -\left(\frac{6}{2}\right) = -3$

75. 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k + 2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) x축과 만나지 않는다.

75. 판별식 $\frac{D}{4} = (-k)^2 - (k+2) = k^2 - k - 2$

(1) $k^2 - k - 2 > 0$, $(k-2)(k+1) > 0$, $k < -1$ 또는 $k > 2$

(2) $k^2 - k - 2 > 0$, $(k-2)(k+1) < 0$, $-1 < k < 2$

76. 이차방정식 $ax^2 - bx + c = 0$의 두 근이 -1, 2일 때, 이차함수 $y = -ax^2 + bx - c$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 α, β라고 한다. 이때 $\alpha + \beta$의 값을 구하시오.

76. $y = -ax^2 + bx - c$의 그래프가 x축$(y=0)$과 만나는 두 점의 x좌표를 구한다.

$-ax^2 + bx - c = 0$, 즉 $ax^2 - bx + c = 0$

$\alpha = -1$, $\beta = 2$ 또는 $\alpha = 2$, $\beta = -1$

$\alpha + \beta = 1$

77. 이차함수 $y=x^2+2(a-1)x+a+5$의 그래프가 x축에 접할 때, 양수 a의 값을 구하고, 그 접점의 좌표를 구하시오.

77. $x^2+2(a-1)x+a+5=0$에서 판별식 $\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-(a+5)=0$,

$(a+1)(a-4)=0$, $a=4$ 또는 $a=-1$

문제의 조건을 만족하는 a의 값은 $a=4$

$a=4$를 $x^2+2(a-1)x+a+5=0$ 대입하면 $x^2+6x+9=0$, $(x+3)^2=0$,

$x=-3$이므로 접점의 좌표 $(-3,\ 0)$

78. 이차함수 $y=x^2+6x$의 그래프와 직선 $y=3x+2$의 교점의 개수를 구하시오.

78. $x^2+6x=3x+2$, $x^2+3x-2=0$에서 판별식 $D=3^2-4\times1\times(-2)=9+8=17>0$

즉, 서로 다른 두 점에서 만나므로 교점의 개수는 2개다.

79. 이차함수 $y=x^2-4x+2$의 그래프와 다음 직선과의 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=2x-1$ (2) $y=2x-7$ (3) $y=2x-9$

79. (1) $x^2-4x+2=2x-1$, $x^2-6x+3=0$

판별식 $\dfrac{D}{4}=(-3)^2-1\times3=6>0$

즉, 서로 다른 두 점에서 만나므로 교점의 개수는 2개다.

(2) $x^2-4x+2=2x-7$, $x^2-6x+9=0$

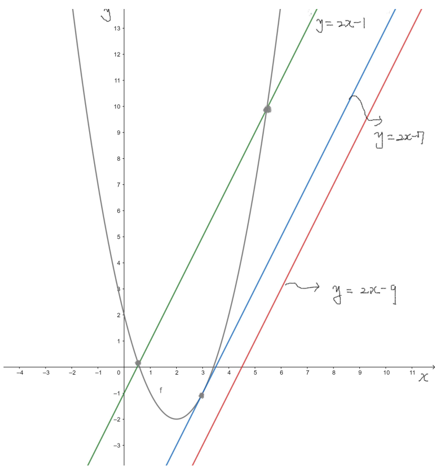
판별식 $\dfrac{D}{4}=(-3)^2-1\times9=0$

즉, 접하므로 교점의 개수는 1개다.

(3) $x^2-4x+2=2x-9$, $x^2-6x+11=0$

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-1\times11=-2<0$

만나지 않으므로 교점의 개수는 0개다.



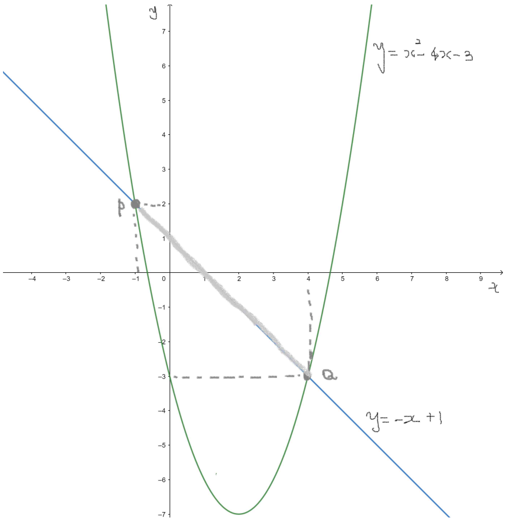
80. 이차함수 $y=x^2-4x-3$의 그래프와 직선 $y=-x+1$과의 교점을 P, Q라고 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

80. $x^2-4x-3=-x+1$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$, $x=-1$ 또는 $x=4$

$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$

즉, 두 교점 P, Q의 좌표는 $(-1, 2)$, $(4, -3)$이므로



$\overline{PQ}=\sqrt{(4+1)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

81. 이차함수 $y=x^2-ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x-4$가 두 점에서 만나고 그 중 한 교점의 x좌표가 -1일 때, 다른 교점의 좌표를 구하시오.

81. $x^2-ax+3=2x-4$, $x^2-(a+2)x+7=0$

한 근이 -1이므로

$1+a+2+7=0$, $a=-10$

$a=-10$을 $x^2-(a+2)x+7=0$에 대입하면

$x^2+8x+7=0$, $(x+1)(x+7)=0$, $x=-7$ 또는 $x=-1$

$x=-7$일 때, $y=2\times(-7)-4=-14-4=-18$

따라서 다른 교점의 좌표는 $(-7, -18)$

82. 이차함수 $y=x^2-2x+a$의 그래프와 직선 $y=2x-3$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 실수 a의 값의 범위를 정하시오.

82. $x^2-2x+a=2x-3$, $x^2-4x+a+3=0$

$x^2-4x+a+3=0$의 판별식 $\dfrac{D}{4}=4-a-3>0$이어야 하므로

$4-a-3>0$에서 $a<1$

83. 이차함수 $y=x^2+kx+3$의 그래프와 직선 $y=3x+2$가 서로 만나지 않도록 상수 k의 값의 범위를 정하시오.

83. $x^2+kx+3=3x+2$, $x^2+(k-3)x+1=0$

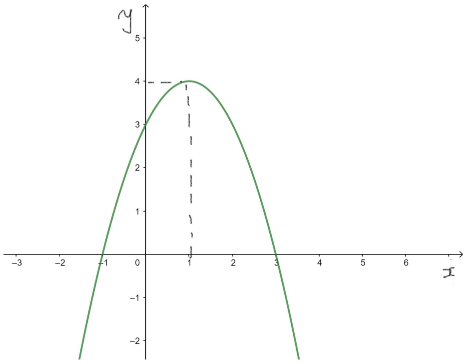
$x^2+(k-3)x+1=0$의 판별식을$D=(k-3)^2-4<0$,

$k^2-6k+5<0$, $(k-1)(k-5)<0$, $1<k<5$

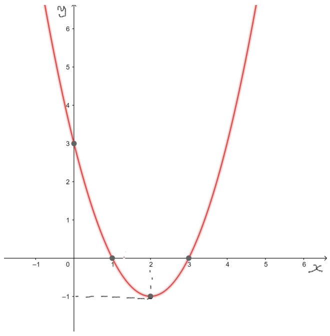
84. 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하고, 그때의 x의 값을 구하시오.

(1) $y=-x^2+2x+3$ (2) $y=x^2-4x+3$

84. (1) $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$, $x=1$일 때, 최댓값 4



(2) $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$, $x=2$일 때, 최솟값 -1



85. 이차함수 $y=ax^2-2x+a-1$은 $x=1$일 때, 최솟값 b를 가진다. 이때 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

85. $y=f(x)=ax^2-2x+a-1=a\left(x^2-\dfrac{2}{a}x+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)+a-1=a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)^2-\dfrac{1}{a}+a-1$

$f(x)$가 $x=1$에서 최솟값을 가지므로 $a>0$, $\dfrac{1}{a}=1$

$a=1$

즉, $f(x)$의 최솟값 b는 $b=-\dfrac{1}{a}+a-1=-1+1-1=-1$

따라서 $ab=1\times(-1)=-1$

86. 이차함수 $y=x^2-4ax+2b$는 $x=4$일 때, 최솟값 10을 갖는다. 이때 상수 a, b의 값을 구하시오.

86. $y=x^2-4ax+2b$가 $x=4$일 때, 최솟값 10을 가지므로

$y=(x-4)^2+10=x^2-8x+26$

즉, $y=x^2-4ax+2b$와 계수를 비교하면

$-4a=-8$, $2b=26$,

$a=2$, $b=13$

87. 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$는 $x=2$일 때, 최댓값 5를 가지고 $f(1)=3$일 때, $f(-1)$의 값을 구하시오.

87. $f(x)=a(x-2)^2+5$, $f(1)=3$에서 $a=-2$

$f(-1)=-13$

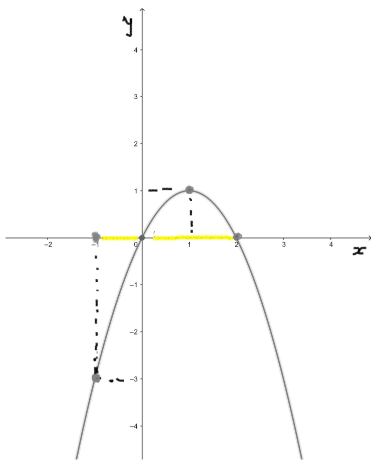
88. $-1 \le x \le 2$에서 $f(x)=-x^2+2x$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

88. $f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$에서 꼭짓점 $x=1$이 $-1 \le x \le 2$에 포함 되므로

$f(-1)=-(-1-1)^2+1=-4+1=-3$,

$f(1)=-(1-1)^2+1=1$,

$f(2)=-(2-1)^2+1=-1+1=0$



따라서 $x=1$일 때 최댓값 1, $x=-1$일 때 최솟값 -3

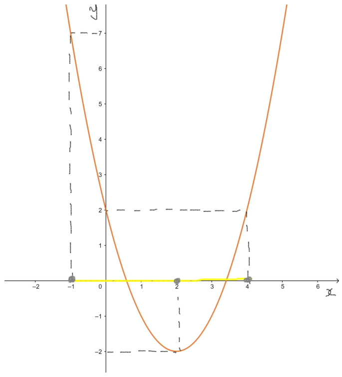
89. $-1 \le x \le 4$에서 $y=x^2-4x+2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, Mm의 값을 구하시오.

89. $y=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$에서 꼭짓점의 x좌표 2가 $-1 \le x \le 4$에 포함 되므로

$x=-1$일 때, $y=(-1-2)^2-2=9-2=7$,

$x=2$일 때, $y=(2-2)^2-2=-2$,

$x=4$일 때, $y=(4-2)^2-2=4-2=2$



즉, 최댓값 7, 최솟값 -2이다.

$Mm = 7 \times (-2) = -14$

90. $1 \le x \le 2$에서 이차함수 $y = -2x^2 + 3x + a$의 최댓값이 2일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

90. $y = -2x^2 + 3x + a = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + a + \frac{9}{8}$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{4},\ a + \frac{9}{8}\right)$

이때 꼭짓점의 x좌표가 정의역에 포함되지 않으므로 $x = 1$에서 최댓값을 갖는다.

$y = -2 \times 1 + 3 \times 1 + a = 2$, $y = -2 + 3 + a = 2$, $a = 2 - 1 = 1$,

$a = 1$

91. $0 \le x \le 3$에서 이차함수

$y = ax^2 - 2ax + b(a > 0)$의 최댓값이 3, 최솟값이 -5일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

91. $y = ax^2 - 2ax + b = a(x^2 - 2x + 1 - 1) + b = a(x-1)^2 - a + b$

꼭짓점이 x좌표 1이 $0 \le x \le 3$에 포함되므로

$x = 1$일 때 최솟값, $x = 3$일 때 최댓값을 갖는다.

$x = 1$일 때, $y = a(1-1)^2 - a + b = -a + b = -5$,

$x = 3$일 때, $y = a(3-1)^2 - a + b = 4a - a + b = 3a + b = 3$

$-a + b = 5$와 $3a + b = 3$을 연립하여 정리하면

$a = 2$, $b = -3$

92. $0 \le x \le 2$일 때,

$y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 2$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

92. $x^2 - 2x + 3 = t$로 놓으면

$t = (x-1)^2 + 2$

$0 \le x \le 2$에서 t는 $x=1$일 때

최솟값 2, $x=0$ 또는 $x=2$일 때 최댓값 3을 가지므로

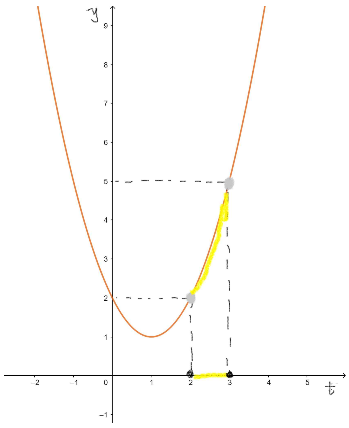
$2 \le t \le 3$

이때 주어진 식은 $y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$이므로

$t=2$일 때, $y=(2-1)^2+1=1+1=2$,

$t=3$일 때, $y=(3-1)^2+1=4+1=5$

따라서 최댓값 5, 최솟값 2



93. 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3-27=0$ (2) $x^3+27=0$ (3) $x^3+8=0$ (4) $x^3-8=0$

93. (1) $x^3-27=0$, $(x-3)(x^2+3x+9)=0$, $x=3$ 또는 $x^2+3x+9=0$

$x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x^3+27=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$, $x=-3$ 또는 $x^2-3x+9=0$

$x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$, $x=2$ 또는 $x^2-2x+4=0$

$x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

(4) $x^3-8=0$, $(x-2)(x^2+2x+4)=0$, $x=-2$ 또는 $x^2+2x+4=0$

$x=-2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

94. 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^3-4x^2+8=0$ (2) $x^3-5x+2=0$ (3) $x^3-7x^2+6=0$

94. (1) $x^3-4x^2+8=0$, $P(x)=x^3-4x^2+8$로 놓으면
$P(2)=0$이므로 $P(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.
조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 0 & 8 \\ & & 2 & -4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-2)(x^2-2x-4)$

$(x-2)(x^2-2x-4)=0$, $x-2=0$ 또는 $x^2-2x-4=0$

$x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{5}$

(2) $x^3-5x+2=0$, $P(x)=x^3-5x+2$로 놓으면 $P(2)=0$
조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -5 & 2 \\ & & 2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-2)(x^2+2x-1)=0$

$x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}$

(3) $P(x)=x^3-7x^2+6$으로 놓으면 $P(1)=0$
조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -7 & 0 & 6 \\ & & 1 & -6 & -6 \\ \hline & 1 & -6 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-6x-6)$

$x=1$ 또는 $x=3\pm\sqrt{15}$

95. 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x^4-4x+3=0$

(2) $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$

(3) $x^3-5x^2+3x+9=0$

(4) $x^3-2x-4=0$

(5) $x^3-2x^2-4x+8=0$

(6) $x^4-2x^3-x+2=0$

95. (1) $P(x)=x^4-4x+3$으로 놓으면 $P(1)=0$

1	1	0	0	-4	3
		1	1	1	-3
1	1	1	1	-3	0
		1	2	3	
	1	2	3	0	

$P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+3)=0$

$x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

(2) $P(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$, $P(1)=0$, $P(-1)=0$

1	1	1	-7	-1	6
		1	2	-5	-6
-1	1	2	-5	-6	0
		-1	-1	6	
	1	1	-6	0	

$P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+x-6)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)=0$

$x=\pm1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$

(3) $x^3-5x^2+3x+9=0$에서

-1	1	-5	3	9
		-1	6	-9
	1	-6	9	0

$(x+1)(x^2-6x+9)=0$, $(x+1)(x-3)^2=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

(4) $x^3-2x-4=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-2)(x^2+2x+2)=0$

$x=2$ 또는 $x=-1\pm i$

(5) $x^3-2x^2-4x+8=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & -4 & 8 \\ & & 2 & 0 & -8 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-2)(x^2-4)=0,\ (x-2)^2(x+2)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-2$

(6) $x^4-2x^3-x+2=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ & & 1 & -1 & -1 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & 2 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x-1)(x-2)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

96. 다음 방정식을 푸시오.

(1) $(x^2-2x)^2-5(x^2-2x)-24=0$ (2) $x^4+3x^2+4=0$

96. (1) $x^2-2x=t$로 치환하면 $t^2-5t-24=0$

$(t-8)(t+3)=0,\ t=8$ 또는 $t=-3$

(i) $x^2-2x=8$에서 $x^2-2x-8=0,\ (x-4)(x+2)=0$

$x=4$ 또는 $x=-2$

(ii) $x^2-2x=-3$에서 $x^2-2x+3=0$

$x=1\pm\sqrt{2}\,i$

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는

$x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}\,i$

(2) $x^4+3x^2+4=0$에서 $x^4+4x^2+4-x^2=0$

$(x^2+2)^2-x^2=0$, $(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

97. 삼차방정식 $x^3-px+q=0$의 두 근이 1, 2일 때, p, q의 값과 나머지 한 근을 구하시오.

97. x^3-px+q는 $(x-1)(x-2)$를 인수로 가지므로 나머지 한 근을 r라고 하면

$x^3-px+q=(x-1)(x-2)(x-r)=(x^2-3x+2)(x-r)$,

$(x^2-3x+2)(x-r)=x^3-(3+r)x^2+(2+3r)x-2r=0$

$x^3-(3+r)x^2+(2+3r)x-2r=x^3-px+q$

$3+r=0$, $2+3r=-p$, $-2r=q$

$r=-3$, $p=7$, $q=6$

따라서 $p=7$, $q=6$이고, 나머지 한 근은 -3이다.

98. 삼차방정식 $x^3+kx^2+8x-6=0$의 한 근이 3일 때, k의 값을 구하여라. 또 나머지 두 근을 구하시오.

98. $x=3$을 주어진 방정식에 대입하면

$27+9k+24-6=0$, $k=-5$

즉, 주어진 방정식은 $x^3-5x^2+8x-6=0$이므로

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -5 & 8 & -6 \\ & & 3 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-3)(x^2-2x+2)=0$, $x=3$ 또는 $x=1\pm i$

따라서 나머지 두 근은 $1\pm i$이다.

99. 다음 연립이차방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-y+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2y-5=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2-10=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

99. (1) ㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2=x+2$, $x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $x=-1$일 때 $y=1$,

$x=2$일 때 $y=4$

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

(2) ㉠을 x에 관하여 풀면 $x=5-2y$

㉠을 ㉡에 대입하면

$(5-2y)^2+y^2=10$, $(y-1)(y-3)=0$, $y=1$ 또는 $y=3$

$y=1$일 때 $x=3$, $y=3$일 때 $x=-1$

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

100. 다음 연립방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-2x-y-2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x+y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

100. (1) ㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+2y)(x-y)=0$

$x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$(-2y)^2+y^2=20$, $5y^2=20$, $y^2=4$, $y=\pm 2$

$y=2$일 때 $x=-4$, $y=-2$일 때 $x=4$

$\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2=20$, $2y^2=20$, $y^2=10$ $\therefore y=\pm\sqrt{10}$

$y=\sqrt{10}$일 때 $x=\sqrt{10}$, $y=-\sqrt{10}$일 때 $x=-\sqrt{10}$

$\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는

$\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$

(2) ㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2-2x-2=-x^2+x$, $2x^2-3x-2=0$, $(x-2)(2x+1)=0$

$x=2$ 또는 $x=-\dfrac{1}{2}$

$x=2$를 ㉡에 대입하면 $y=-2$

$x=-\dfrac{1}{2}$를 ㉡에 대입하면 $y=-\dfrac{3}{4}$

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

101. 다음 연립이차방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=0 \\ x^2+xy+2y^2=28 \end{cases}$

101. (1) $x-y=1$에서 $y=x-1$을 $x^2-xy+y^2=7$에 대입하면

$x^2-x(x-1)+(x-1)^2=7$, $x^2-x^2+x+x^2-2x+1=7$,

$x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$, $x=3$ 또는 $x=-2$

$x=3$일 때, $y=2$이고 $x=-2$일 때, $y=-3$

$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$

(2) $2x^2-xy-y^2=0$, $(2x+y)(x-y)=0$, $y=-2x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-2x$일 때, $x^2-2x^2+8x^2=28$, $7x^2=28$, $x=\pm 2$

$\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$

(ii) $y=x$ 일 때, $x^2+x^2+2x^2=28$, $4x^2=28$, $x=\pm\sqrt{7}$

$\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$

102. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2-5xy+2y^2=0 \\ x^2-2xy+2y^2=10 \end{cases}$ 의 해의 순서쌍 (x, y)는 몇 개인지 구하시오.

102. $\begin{cases} 3x^2-5xy+2y^2=0 \\ x^2-2xy+2y^2=10 \end{cases}$ 에서 $3x^2-5xy+2y^2=0$, $(3x-2y)(x-y)=0$,

$y=\frac{3}{2}x$ 또는 $y=x$

(i) $y=\frac{3}{2}x$일 때, $x^2-2x\times\frac{3}{2}x+2\times\left(\frac{3}{2}x\right)^2=10$, $x^2=4$, $x=\pm 2$

$x=2$, $y=3$ 또는 $x=-2$, $y=-3$

(ii) $y=x$일 때, $x^2-2x\times x+2\times x^2=10$, $x^2=10$, $x=\pm\sqrt{10}$

$x=\sqrt{10}$, $y=\sqrt{10}$ 또는 $x=-\sqrt{10}$, $y=-\sqrt{10}$

즉, $(2, 3)$, $(-2, -3)$, $(\sqrt{10}, \sqrt{10})$, $(-\sqrt{10}, -\sqrt{10})$이므로 4개다.

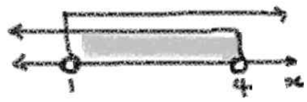
103. 다음 연립일차부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x-1>0 \\ 2x-8<0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x<6 \\ 5x\ge -10 \end{cases}$

103. (1) $x-1>0$에서 $x>1$ ……㉠

$2x-8<0$에서 $x<4$ ……㉡

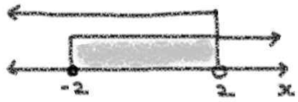
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1<x<4$



(2) $3x<6$에서 $x<2$ ……㉠

$5x\ge -10$에서 $x\ge -2$……㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2\le x<2$

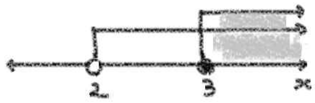


104. 다음 연립일차부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} -3x+11 \le 2 \\ 4x+3 > 3x+5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2(x+2) \ge 3x \\ -2x+5 \le x-1 \end{cases}$

104. (1) $-3x+9 \le 0$, $x \ge 3$이고 $4x+3-3x-5>0$, $x>2$에서

공통부분을 구하면 $x \ge 3$



(2) $2(x+2) \ge 3x$, $2x+4-3x \ge 0$, $x \le 1$

$-2x+5-x+1 \le 0$, $x \ge 2$

공통부분의 해는 없다.

105. 다음 연립일차부등식을 푸시오.

연립일차부등식 $\begin{cases} 3x-5 > x+1 \\ 2x+6 < x+5a \end{cases}$ 가 정수인 해를 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

105. $3x-5-x-1>0$, $x>3$이고 $2x+6<x+5a$, $x<5a-6$에서

정수인 해를 갖기 위해서는 $5a-6>4$, $5a>10$이므로

$a>2$이어야 한다.

106. 연립일차부등식 $3-x \le 2x+1 \le 5x-4$을 푸시오.

106. $3-x \le 2x+1$과 $2x+1 \le 5x-4$에서

$\begin{cases} 3-x \le 2x+1 \\ 2x+2 \le 5x-4 \end{cases}$

$3-x \le 2x+1$, $x \ge \dfrac{2}{3}$

$2x+2 \le 5x-4$, $x \ge 2$

위의 연립일차부등식의 공통부분의 해를 구하면 $x \ge 2$

107. 다음 연립일차부등식을 푸시오.

(1) $-4 \le x-5 \le -x+1$ (2) $4x-6 \le 3x+2 < 5x-4$

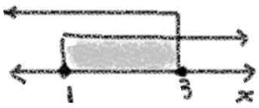
107 (1) $-4 \le x-5$과 $x-5 \le -x+1$

$$\begin{cases} -4 \le x-5 \\ x-5 \le -x+1 \end{cases}$$

$-4 \le x-5$에서 $x \ge 1$

$x-5 \le -x+1$에서 $x \le 3$

위의 연립일차부등식의 공통부분의 해를 구하면 $1 \le x \le 3$



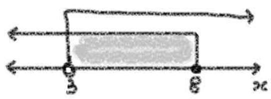
(2) $4x-6 \le 3x+2$과 $3x+2 < 5x-4$

$$\begin{cases} 4x-6 \le 3x+2 \\ 3x+2 < 5x-4 \end{cases}$$

$4x-6 \le 3x+2$에서 $x \le 8$

$3x+2 < 5x-4$에서 $x > 3$

위의 연립일차부등식의 공통부분의 해를 구하면 $3 < x \le 8$



108. 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|x-1| < 3$ (2) $|x+2| \ge 5$

108. (1) $|x-1| < 3$에서 $-3 < x-1 < 3$이므로 $x > -2$, $x < 4$

$-2 < x < 4$

(2) $|x+2| \ge 5$에서 $x+2 \le -5$ 또는 $x+2 \ge 5$, $x \le -7$ 또는 $x \ge 3$

109. 다음 부등식을 푸시오.

(1) $|2x-1| \le 3$ (2) $|3x-5| > 10$

109. (1) $|2x-1| \le 3$에서 $-3 \le 2x-1 \le 3$

$-1 \le x \le 2$

(2) $|3x-5| > 10$에서 $3x-5 < -10$ 또는 $3x-5 > 10$

$x < -\frac{5}{3}$ 또는 $x > 5$

110. 다음 부등식을 푸시오.

(1) $2|x+3| \le x$ (2) $x+|x-2|>4$

(3) $|x|+|x+1|>3$ (4) $|x-3| \ge 2|x|$

110. (1) $2|x+3| \le x$에서

(i) $x \ge -3$일 때, $2(x+3) \le x$, $x \le -6$ ⇨ 조건을 만족하지 못함.

(ii) $x < -3$일 때, $-2(x+3) \le x$, $x \ge -2$ ⇨ 조건을 만족하지 못함.

(i), (ii)에 의하여 해는 없다.

(2) $x+|x-2|>4$에서

(i) $x \ge 2$일 때, $x+(x-2)>4$, $x>3$ ⇨ 조건을 만족함.

(ii) $x<2$일 때, $x-(x-2)>4$, $0 \times x > 2$ ⇨ 해는 없다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는 $x>3$

(3) $|x|+|x+1|>3$에서

(i) $x<-1$일 때, $-x-(x+1)>3$, $x< -2$ ⇨ 조건을 만족함.

(ii) $-1 \le x < 0$일 때, $-x+(x+1)>3$, $0 \times x > 2$ ⇨ 해는 없다.

(iii) $x \ge 0$일 때, $x+(x+1)>3$, $x>1$ ⇨ 조건을 만족함.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 해는

$x<-2$ 또는 $x>1$

(4) $|x-3| \ge 2|x|$에서

(i) $x<0$일 때, $-(x-3) \ge 2(-x)$, $x \ge -3$이므로 $-3 \le x < 0$

(ii) $0 \le x < 3$일 때, $-(x-3) \ge 2x$, $x \le 1$이므로 $0 \le x \le 1$

(iii) $x \ge 3$일 때, $x-3 \ge 2x$, $x \le -3$, $x \ge 3$이고

$x \le -3$인 x는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 해는

$-3 \le x \le 1$

111. 다음 부등식의 해를 구하시오.

(1) $1<|x-1|<3$ (2) $2|x-1|+3|x+1|<6$

111. (1) (i) $x-1 \ge 0$, $x \ge 1$일 때, $1<x-1<3$, $1+1<x<3+1$이므로

$2<x<4$

(ii) $x-1<0$, $x<1$일 때, $1<-(x-1)<3$, $1< -x+1<3$,

$0< -x<2$이므로

$-2<x<0$

(i), (ii)에서 $-2<x<0$ 또는 $2<x<4$

(2) x의 값의 범위를 $x<-1$, $-1 \le x < 1$, $x \ge 1$인 경우로 나누면

(i) $x<-1$일 때, $-2(x-1)-3(x+1)<6$

$x > -\frac{7}{5}$ 그런데 $x < -1$이므로 $-\frac{7}{5} < x < -1$

(ii) $-1 \le x < 1$일 때, $-2(x-1)+3(x+1) < 6$

$x < 1$ 그런데 $-1 \le x < 1$이므로 $-1 \le x < 1$

(iii) $x \ge 1$일 때, $2(x-1)+3(x+1) < 6$

$x < 1$ 그런데 $x \ge 1$이므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{7}{5} < x < 1$

112. 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 푸시오.

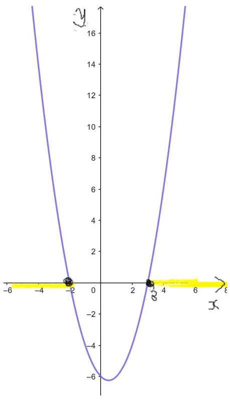
(1) $x^2 - x - 6 \ge 0$

(2) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$

(3) $x^2 - 2x - 2 \le 0$

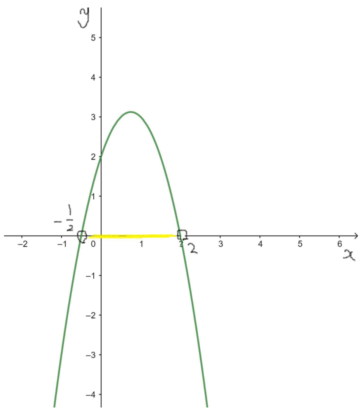
112. (1) $y = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, $y \ge 0$에서

$(x-3)(x+2) \ge 0$, $x \le -2$ 또는 $x \ge 3$



(2) $y = -2x^2 + 3x + 2 = -(2x^2 - 3x - 2) = -(2x+1)(x-2)$, $y > 0$에서

$-(2x+1)(x-2) > 0$, $(2x+1)(x-2) < 0$, $-\frac{1}{2} < x < 2$



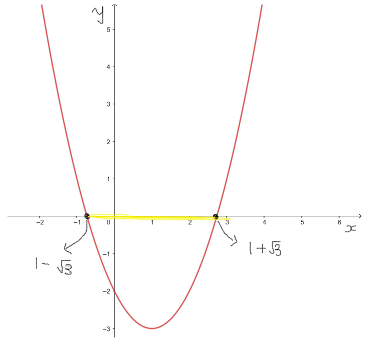
(3) $y = x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$, $y = (x-1)^2 - 3 \le 0$에서

$(x-1)^2 = 3$에서 $x - 1 = \sqrt{3}$ 또는 $x - 1 = -\sqrt{3}$,

$x = 1+\sqrt{3}$ 또는 $x = 1-\sqrt{3}$ 이므로

$y \le 0$을 만족시키는 해의 범위는

$1-\sqrt{3} \le x \le 1+\sqrt{3}$



113. 다음 이차부등식을 푸시오.

(1) $x^2-4x+3<0$

(2) $x^2-4x-12 \ge 0$

(3) $2x^2-5x-3>0$

(4) $-2x^2+5x+7 \le 0$

113. (1) $x^2-4x+3<0$, $y=x^2-4x+3$에서 $x^2-4x+3=0$의 판별식을 구하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-3=4-3=1>0$, $y<0$이므로

$y<0$에서 부등식의 해의 범위는

$(x-3)(x-1)<0$, $1<x<3$

(2) $x^2-4x-12 \ge 0$, $y=x^2-4x-12 \ge 0$에서 $x^2-4x-12=0$의 판별식을 구하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2+12=16>0$이므로

$y \ge 0$에서 부등식의 해의 범위는

$(x-6)(x+2) \ge 0$, $x \le -2$ 또는 $x \ge 6$

(3) $2x^2-5x-3>0$, $y=2x^2-5x-3$ 에서 $2x^2-5x-3=0$의 판별식을 구하면

$D=5^2+24=25+24=49>0$이므로

$y>0$에서 부등식의 해의 범위는

$(2x+1)(x-3)>0$, $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$

(4) $-2x^2+5x+7 \le 0$에서 $2x^2-5x-7 \ge 0$으로 바꾼 뒤에

$y=2x^2-5x-7=0$의 판별식을 구하면

$D=(-5)^2+56=81>0$이므로

$y \ge 0$에서 부등식의 해의 범위는 $(2x-7)(x+1)>0$,

$x<-1$ 또는 $x>\frac{7}{2}$

114. 이차부등식 $x^2+ax+2a-3>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

114. 이차부등식 $x^2+ax+2a-3>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

판별식 $D=a^2-4\times1\times(2a-3)=a^2-4(2a-3)<0$,

$a^2-8a+12<0$, $(a-2)(a-6)<0$,

$2<a<6$

115. $a<0$일 때, 이차부등식 $ax^2+2x+a>0$이 해를 가지도록 하는 실수 a값의 범위가 $m<a<n$일 때, $m+n$의 값을 구하시오.

115. $a<0$이므로 이차함수 $y=ax^2+2x+a$의 그래프는 위로 볼록하다.

이때 주어진 이차부등식이 해를 가지려면 $y=ax^2+2x+a$가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

즉, 이차방정식 $ax^2+2x+a=0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=1-a^2>0$이므로

$-1<a<1$

그런데 $a<0$이므로 $-1<a<0$이 성립한다.

$m<a<n$에서 $m=-1$, $n=0$,

$m+n=-1$

116. 이차부등식 $x^2-2ax+2a+3\le0$의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a값의 범위를 구하시오.

116. 부등식 $x^2-2ax+2a+3\le0$의 해가 존재하지 않으므로

이차방정식 $x^2-2ax+2a+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-2a-3=(a-3)(a+1)<0$,

$-1<a<3$

117. 알루미늄 창틀을 사용하여 둘레의 길이가 $200\,\text{cm}$인 직사각형 모양의 환기창을 만들려고 한다. 환기창의 넓이가 $1600\,\text{cm}^2$ 이상이 되도록 하고 한 변의 길이를 가능한 길게 만들 때, 긴 변의 길이를 구하시오. (단, 창틀의 폭은 생각하지 않는다.)

117. 가로의 길이를 $x\,\text{cm}$, 세로의 길이를 $y\,\text{cm}$라고 하면

$x+y=100$, $xy\ge1600$이므로

$xy=x(100-x)\ge1600$, $x^2-100x+1600\le0$,

$(x-20)(x-80)\le0$, $20\le x\le80$

따라서 긴 변의 길이는 $80\,\text{cm}$이다.

118. 다음 연립이차부등식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2-3x-4<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+x-6\ge0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

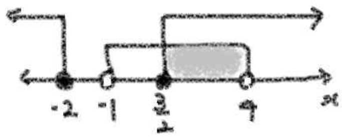
(2) $\begin{cases} x^2-5x+4\ge0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3x-10<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

118. (1) ㉠에서 $(x+1)(x-4)<0$, $-1<x<4$

㉡에서 $(x+2)(2x-3)\geq 0$, $x<-2$ 또는 $x>\dfrac{3}{2}$

㉠, ㉡의 공통인 부분은

$\dfrac{3}{2}\leq x<4$



(2) ㉠에서 $(x-1)(x-4)\geq 0$, $x\leq 1$ 또는 $x\geq 4$

㉡에서 $(x+2)(x-5)<0$, $-2<x<5$

㉠, ㉡의 공통인 부분은

$-2<x\leq 1$ 또는 $4\leq x<5$

119. 다음 연립이차부등식을 푸시오.

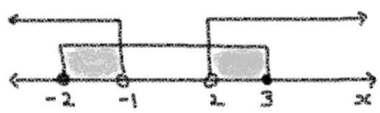
(1) $\begin{cases} x^2-x-2>0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x-6\leq 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$　　(2) $x<x(x+3)\leq 2(x+3)$

119. (1) ㉠에서 $(x-2)(x+1)>0$, $x<-1$ 또는 $x>2$

㉡에서 $(x-3)(x+2)\leq 0$, $-2\leq x\leq 3$

㉠, ㉡의 공통인 부분은

$-2\leq x<-1$ 또는 $2<x\leq 3$



(2) (i) $x<x(x+3)$, $x<x^2+3x$, $x^2+2x>0$, $x(x+2)>0$이므로

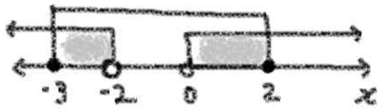
$x<-2$ 또는 $x>0$

(ii) $x(x+3)\leq 2(x+3)$, $x^2+3x\leq 2x+6$, $x^2+x-6\leq 0$이므로

$(x+3)(x-2)\leq 0$, $-3\leq x\leq 2$

(i), (ii)의 공통인 부분은

$-3\leq x<-2$ 또는 $0<x\leq 2$



120. 다음 연립이차방정식을 푸시오.

(1) $\begin{cases} x^2-2x-8>0 \\ x^2-6x+5 \le 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+2x-3<0 \\ 2x^2+x-3>2x \end{cases}$

120. (1) (i) $x^2-2x-8>0$, $(x-4)(x+2)>0$이므로

$x<-2$ 또는 $x>4$

(ii) $x^2-6x+5 \le 0$, $(x-5)(x-1) \le 0$이므로

$1 \le x \le 5$

(i), (ii)의 공통인 부분은

$4<x \le 5$

(2) (i) $x^2+2x-3<0$, $(x+3)(x-1)<0$이므로

$x<-3$ 또는 $x>1$

(ii) $2x^2+x-3>2x$, $2x^2-x-3>0$, $(2x-3)(x+1)>0$이므로

$x<-1$ 또는 $x>\dfrac{3}{2}$

(i), (ii)의 공통인 부분은

$x<-3$ 또는 $x>\dfrac{3}{2}$

121. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2-2x-3 \ge 0 \\ (x+2)(x-a)<0 \end{cases}$의 해가 $-2<x \le -1$일 때, 실수 a의 범위를 구하시오

121. (i) $x^2-2x-3 \ge 0$, $(x-3)(x+1) \ge 0$이므로

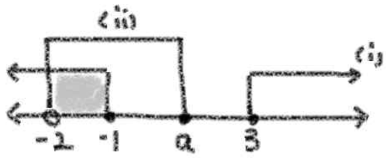
$x \le -1$ 또는 $x \ge 3$

(ii) $-2<x<a$ 또는 $a<x<-2$

(i), (ii)의 공통부분인 해가 $-2<x \le -1$이므로

이를 만족시키려면 다음 그림과 같은 범위에 실수 a가 위치해 있어야 한다.

즉, $-2<a \le 3$이어야 한다.



122. 세 실수 a, b, c $(a<b<c)$에 대하여 x에 대한

연립부등식 $\begin{cases}(x-a)(x-b)>0\\(x-b)(x-c)>0\end{cases}$의 해가 $x<-4$ 또는 $x>3$일 때, 이차부등식

$x^2+ax+c<0$의 해를 구하시오.

122. $a<b<c$이므로

$(x-a)(x-b)>0$에서 $x<a$ 또는 $x>b$

$(x-b)(x-c)>0$에서 $x<b$ 또는 $x>c$

즉, 연립부등식 $\begin{cases}(x-a)(x-b)>0\\(x-b)(x-c)>0\end{cases}$의 해는 $x<a$ 또는 $x>c$이므로

$a=-4$, $c=3$

$a=-4$, $c=3$을 $x^2+ax+c<0$에 대입하면

$x^2-4x+3<0$, $(x-1)(x-3)<0$,

따라서 $1<x<3$

[실전수학 연습문제]

123. 등식 $2z-\overline{z}=4-3i$를 만족시키는 복소수 z에 대하여 $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{a-bi}{c}$일 때, $a-b+c$의 값을 구하시오.

123. $z=a+bi$라 하면 $2z-\overline{z}=2a+2bi-a+bi=a+3bi$

$a+3bi=4-3i$이므로 $a=4,\ b=-1 \quad \therefore z=4-i$

$$z+\frac{1}{z}=4-i+\frac{1}{4-i}=4-i+\frac{(4+i)}{(4-i)(4+i)},$$

$$4-i+\frac{(4+i)}{(4-i)(4+i)}=4-i+\frac{4+i}{16+1}=\frac{68-17i+4+i}{17}$$

$$=\frac{72-16i}{17}$$

$a=72,\ b=16,\ c=17$

$a-b+c=72-16+17=73$

$a+b+c=73$

124. 두 복소수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $\alpha+\beta=2-i$일 때, $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$의 값을 구하시오.

124. $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$에서 $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=2+i$이므로

$\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=\alpha(2+i)+\beta(2+i)$,

$\alpha(2+i)+\beta(2+i)=(2+i)(\alpha+\beta)=(2+i)(2-i)=4+1=5$

$\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=5$

125. $1-i+i^2-i^3+i^4-\cdots+i^{100}$의 값을 구하시오.

125. $i^2=-1,\ i^3=-i$이므로 $1-i+i^2-i^3=1-i+(-1)-(-i)=0$이고

$i^4=1,\ i^5=i,\ i^6=-1,\ i^7=-i\ ,\ \cdots\ ,$

$i^{96}=1,\ i^{97}=i,\ i^{98}=-1,\ i^{99}=-i\ ,$

$i^{100}=1$이므로

$1-i+i^2-i^3+i^4-\cdots+i^{100}$
$=(1-i+i^2-i^3)+(i^4-i^5+i^6-i^7)+\cdots+(i^{96}-i^{97}+i^{98}-i^{99})+i^{100}=1$

따라서 $1-i+i^2-i^3+i^4-\cdots+i^{100}=1$

126. $-\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}+\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-2}}+\sqrt{-1}\sqrt{-2}+\sqrt{-2}\sqrt{3}=a+bi$를 만족시키는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 ab의 값을 구하시오

126. $-\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}+\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-2}}+\sqrt{-1}\sqrt{-2}+\sqrt{-2}\sqrt{3}=a+bi$

$=-\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}\,i}+\dfrac{\sqrt{12}\,i}{\sqrt{2}\,i}+i(\sqrt{2}\,i)+(\sqrt{2}\,i)\sqrt{3}$

$=\sqrt{2}\,i+\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i$

$=(\sqrt{6}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})i$

따라서 $a=\sqrt{6}-\sqrt{2},\ b=\sqrt{6}+\sqrt{2}$이므로

$ab=(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})=6-2=4$

127. x에 대한 이차식 $x^2-(2t+4)x+3t^2-t+1$이 완전제곱식이 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합을 구하시오.

127. 이차식 $x^2-(2t+4)x+3t^2-t+1$이 완전제곱식이 되기 위해서는 x에 대한 이차방정식 $x^2-(2t+4)x+3t^2-t+1=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-t-2)^2-1\times(3t^2-t+1)=0$,

$t^2+4t+4-3t^2+t-1=0$, $-2t^2+5t+3=0$

근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 t의 합은 $-\frac{3}{2}$이다.

128. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 영석이는 b를 잘못 보고 풀었더니 두 근이 1과 -2가 되었고, 형명이는 c를 잘못 보고 풀었더니 두 근이 3과 -4가 되었다. 처음 이차방정식의 근을 구하시오.

128. $ax^2+bx+c=0$에서 영석이는 a와 c를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{c}{a}=1\times(-2)=-2$, $c=-2a$ …… ①

또, $ax^2+bx+c=0$에서 형명이는 a와 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{b}{a}=3+(-4)=-1$, $b=a$ …… ②

①, ②를 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2+ax-2a=0$

이때 $a\neq 0$이므로 양변을 a로 나눠주면

$x^2+x-2=0$, $(x-1)(x+2)=0$

따라서 처음 이차방정식의 근은 $x=1$ 또는 $x=-2$

129. x에 대한 이차방정식 $x^2-4mx+m^2-m+2=0$이 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 범위가 $a<m<b$일 때, $a+3b$의 값을 구하시오.

129. 이차방정식 $x^2-4mx+m^2-m+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-1\times(m^2-m+2)$

$=4m^2-m^2+m-2$

$=3m^2+m-2$에서 서로 다른 두 허근을 가지려면

$3m^2+m-2<0$, $(3m-2)(m+1)<0$

$\therefore -1<m<\frac{2}{3}$, $a=-1$, $b=\frac{2}{3}$이다.

따라서 $a+3b=-1+3\times\frac{2}{3}=-1+2=1$

130. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-3)+3k^2+1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

130. 이차방정식 $x^2-2(k-3)+3k^2+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k+3)^2-1\times(3k^2+1)>0$,

$k^2-6k+9-3k^2-1>0$,

$-2k^2-6k+8>0$, $k^2+3k-4<0$, $(k+4)(k-1)<0$,

$-4<k<1$

따라서 주어진 이차방정식 $x^2-2(k-3)+3k^2+1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는 -3, -2, -1, 0의 4개다.

131. 두 실수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+2ax-b+5=0$의 한 근이 $2-i$일 때, $3(a+b)$의 값을 구하시오.

131. a, b가 실수이므로 $2a$, $-b+5$도 실수이다.

즉, 이차방정식 $x^2+2ax-b+5=0$의 한 근이 $2-i$이면 다른 한 근은 $2+i$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$2a=(2-i)+(2+i)=4$, $a=2$

$-b+5=(2-i)(2+i)=4+1=5$, $b=0$

$3(a+b)=3(2+0)=6$

132. 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프가 x축과 두 점 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(4, 0)$에서 만날 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

132. 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 2, 4이므로

2, 4는 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$a=2+4=6$, $b=2\times4=8$

$ab=6\times8=48$

133. 이차함수 $y=x^2+4ax+3a^2-6a+16$의 그래프가 x축과 만나지 않을 때, 정수 a의 값의 개수를 구하시오.

133. 이차함수 $y=x^2+4ax+3a^2-6a+16$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로

이차방정식 $x^2+4ax+3a^2-6a+16=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-1\times(3a^2-6a+16)<0$,

$4a^2-3a^2+6a-16<0$

$a^2+6a-16<0$, $(a+8)(a-2)<0$, $-8<a<2$

따라서 정수 a의 개수는 -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1의 9개다.

134. 이차함수 $y=ax^2+x$의 그래프와 직선 $y=-x+b$의 두 교점의 x좌표가 각각 -1, 3일 때 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

134. 이차함수 $y=ax^2+x$의 그래프와 직선 $y=-x+b$의 두 교점의 x좌표가 각각 -1, 3이므로

-1, 3은 이차방정식 $ax^2+x=-x+b$의 두 근이다.

$ax^2+x=-x+b$에서 $ax^2+2x-b=0$

근과 계수의 관계에 의하여

$(-1)+3=-\dfrac{2}{a}$, $(-1)\times 3=-\dfrac{b}{a}$

$a=-1$, $b=3$이므로

$a^2+b^2=(-1)^2+3^2=10$

135. 두 실수 a, b에 대하여 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 직선 $y=2x-1$은 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 중 한 점의 x좌표가 $2-3i$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

135. 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 두 교점의 x좌표를 각각 $2-3i$, α라 하면 $2-3i$, α는 이차방정식 $x^2-ax+b=2x-1$의 두 근이다.

$x^2-ax+b=2x-1$에서 $x^2-(a+2)x+b+1=0$

이때 이 이차방정식의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $2-3i$이므로 $\alpha=2+3i$

$x^2-(a+2)x+b+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$a+2=(2-3i)+(2+3i)=4$, $a=2$

$b+1=(2-3i)(2+3i)=4+9=13$, $b=12$

136. 0이 아닌 실수 k에 대하여 이차함수 $y=x^2-kx+3k-1$의 그래프와 직선 $y=3kx-1$이 접하도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

136. 이차함수 $y=x^2-kx+3k-1$의 그래프와 직선 $y=3kx-1$가 접하므로

이차방정식 $x^2-kx+3k-1=3kx-1$,

즉 $x^2-4kx+3k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-3k=0$에서 $4k^2-3k=0$, $k(4k-3)=0$

$k\neq 0$, $k=\dfrac{3}{4}$

137. 이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프와 직선 $y=3x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k값의 범위를 구하시오.

137. 이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프와 직선 $y=3x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $-x^2+4x=3x+k$,

즉 $x^2-x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times 1\times k>0$, $1-4k>0$

$k<\dfrac{1}{4}$

138. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(2,\ 0)$, $(6,\ 0)$을 지날 때, x에 대한 이차 방정식 $f\left(\frac{x-1}{3}\right)=0$의 두 실근의 합을 구하시오.

139. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(2,\ 0)$, $(6,\ 0)$을 지나므로

$f(x)=a(x-2)(x-6)$ $(a \neq 0)$라 하자.

$f\left(\frac{x-1}{3}\right)=a\left(\frac{x-1}{3}-2\right)\left(\frac{x-1}{3}-6\right)=a\left(\frac{x-7}{3}\right)\left(\frac{x-19}{3}\right)=\frac{a}{9}(x-7)(x-19)$

이차방정식 $f\left(\frac{x-1}{3}\right)=0$의 두 실근은 $x=7$ 또는 $x=19$

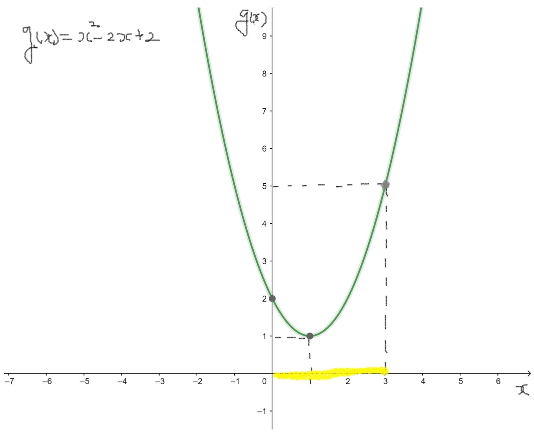
따라서 이차방정식 $f\left(\frac{x-1}{3}\right)=0$의 두 실근의 합은 26이다.

139. $0 \le x \le 3$일 때, 함수 $f(x)=(x^2-2x+2)^2-2(x^2-2x+2)+2$는 $x=a$에서 최댓값 M을, $x=b$에서 최솟값 m을 가진다. 이때 $M+m+a+b$의 값을 구하시오.

140. $g(x)=x^2-2x+2$라고 하면

$g(x)=(x-1)^2+1 \ge 1$, $f(x)=\{g(x)\}^2-2g(x)+2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =\{g(x)-1\}^2+1$

$y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$0 \le x \le 3$에서 $1 \le g(x) \le 5$이다.

즉, $f(x)$는 $g(x)=5$에서 최댓값 17을 갖고, 이때 $x=3$이다.

$M=17$, $a=3$

또 $f(x)$는 $g(x)=1$에서 최솟값 1을 갖고, 이때 $x=1$이다.

$m=1$, $b=1$, $M+m+a+b=17+1+3+1=22$

140. $k \le x \le 6$에서 이차함수 $f(x)=x^2-4x+1$의 최댓값은 13, 최솟값은 -2일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

141. $f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$에서

$f(2)=-3<-2$이므로 $k>2$

$f(6)=13$이므로 $f(x)$는 $x=6$에서 최댓값을 갖고, $x=k$에서 최솟값을 갖는다.

즉, $f(k)=-2$이므로

$k^2-4k+1=-2$, $(k-1)(k-3)=0$, $k>2$이므로

따라서 $k=3$

141. $-2 \le x \le 3$에서 함수 $y=x^2-4|x|+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

142. $f(x)=x^2-4|x|+3$이라 하면

(i) $-2 \le x < 0$일 때, $f(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$에서 최댓값은 없고,
최솟값은 $x=-2$일 때 $f(-2)=-1$이다.

(ii) $0 \le x \le 3$일 때, $f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$에서 최댓값은
$x=0$일 때 $f(0)=3$, 최솟값은 $x=2$일 때 $f(2)=-1$이다.

따라서 함수 $y=x^2-4|x|+3$의 최댓값은 $M=3$, 최솟값은 $m=-1$이므로
$M+m=3+(-1)=2$

142. 삼차방정식 $x^3-(a-3)x^2+4x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때,
$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=-4$이다. 정수 a의 값을 구하시오.

143. 방정식 $x^3-(a-3)x^2+4x-1=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=a-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=1$이다.

$$\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{1}{\gamma}}=\gamma,\ \frac{1}{\beta\gamma}=\frac{1}{\frac{1}{\alpha}},\ \frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{\beta}}=\beta$$

즉, $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\alpha+\beta+\gamma=-4$

$a-3=-4$, $a=-4+3=-1$, $a=-1$

143. 방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 w라 할 때, $\frac{w^8+w^4}{1+w+w^2+\cdots+w^{10}}$의 값을 구하시오.

144. w는 방정식 $x^3=-1$의 한 허근이므로
$w^3+1=0$, $(w+1)(w^2-w+1)=0$에서
$w^2-w+1=0$이다.

$$\frac{w^8+w^4}{1+w+w^2+\cdots+w^{10}}=\frac{w^4(w^4+1)}{w^9+w^{10}}=\frac{-w\times(-w+1)}{-w+w^2}=\frac{w^2-w}{w^2-w}=1$$

144. 사차방정식 $x^4-23x^2+132=0$
의 네 근을 α, β, γ, δ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$의 값을 구하시오.

145. $x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은
$t^2-23t+132=0$, $(t-11)(t-12)=0$
$t=11$ 또는 $t=12$
즉, $x^2=11$ 또는 $x^2=12$이므로
$x=\pm\sqrt{11}$ 또는 $x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(-\sqrt{11})^2+\sqrt{11^2}+(-2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2=46$
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=46$

145. 사차방정식 $(x^2-5x)(x^2-5x+13)+42=0$의 모든 실근의 곱을 구하시오.

146. $(x^2-5x)(x^2-5x+13)+42=0$

$x^2-5x=t$라 하면

$t(t+13)+42=0$, $t^2+13t+42=0$, $(t+6)(t+7)=0$

$t=x^2-5x$이므로

$(x^2-5x+6)(x^2-5x+7)=0$, $(x-3)(x-2)(x^2-5x+7)=0$

$x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x^2-5x+7=0$

$x^2-5x+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=25-28=-3<0$이므로

$x^2-5x+7=0$은 허근을 갖는다.

따라서 모든 실근의 곱은 $2\times3=6$

146. 실수 x, y에 대하여 $x\star y=\begin{cases} x & (x\geq y) \\ -y & (x<y)\end{cases}$라 정의하면

연립방정식 $\begin{cases}2x-4y^2=x\star y \\ x-y+5=x\star y\end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

147. $x\geq y$, $x<y$인 두 경우로 나누면

(i) $x\geq y$일 때, $x\star y=x$이므로 $\begin{cases}2x-4y^2=x \\ x-y+5=x\end{cases}$

$y=5$, $x=4y^2=4\times5^2=100$

(ii) $x<y$일 때, $x\star y=-y$이므로 $\begin{cases}2x-4y^2=-y \\ x-y+5=-y\end{cases}$

$x=-5$, $-10-4y^2=-y$

그런데 y에 대한 이차방정식 $4y^2-y+10=0$은

판별식 $D=(-1)^2-4\times4\times10<0$이 되어 허근을 갖는다.

(i), (ii)로부터 $\alpha=100$, $\beta=5$, $\alpha+\beta=105$

147. 다음 연립방정식의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.

$$\begin{cases}x^2-2xy+2y^2=5 \\ 4x^2-11xy+7y^2=10\end{cases}$$

148. $\begin{cases}x^2-2xy+2y^2=5 \\ 4x^2-11xy+7y^2=10\end{cases}$

위의 두 식을 연립하여 정리하면

$(4x^2-11xy+7y^2)-(2x^2-4xy+4y^2)=10-10=0$,

$2x^2-7xy+3y^2=0$, $(2x-y)(x-3y)=0$

$y=2x$ 또는 $x=3y$

위에서 구한 조건을 다시 문제에 주어진 방정식에 대입해서

x, y의 값을 구하면

(i) $y=2x$를 $x^2-2xy+2y^2=0$에 대입하여 정리하면

$5x^2=5$, $x=1$ 또는 $x=-1$

$y=2x$이므로 $y=\pm 2$

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

(ii) $x=3y$를 $x^2-2xy+2y^2=0$에 대입하여 정리하면

$5y^2=5$, $y=1$ 또는 $y=-1$

$x=3y$이므로 $x=\pm 3$

$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

$\alpha\beta$의 값 (i), (ii)에서 $\alpha\beta=2$ 또는 $\alpha\beta=3$

148. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2x^2+3xy=2y^2 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $x=\beta$라고 할 때, $\alpha-\beta$의 최댓값을 구하시오.

149. $2x^2+3xy=2y^2$, $2x^2+3xy-2y^2=0$, $(2x-y)(x+2y)=0$,

$y=2x$ 또는 $x=-2y$

(i) $y=2x$일 때, $x^2+y^2=5$, $x^2+4x^2=5$, $5x^2=5$, $x=\pm 1$

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

(ii) $x=-2y$일 때, $x^2+y^2=5$, $4y^2+y^2=5$, $5y^2=5$, $y=\pm 1$

$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

(i), (ii)에서

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

$x=2$, $y=-1$일 때, $\alpha-\beta=2-(-1)=2+1=3$

따라서 $\alpha-\beta$의 최댓값은 3

149. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-a \le x+3 \\ 4x-9 \ge 3x-b \end{cases}$ 의 해가 $1 \le x \le 4$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

150. $2x-a \le x+3$에서 $x \le 3+a$

$4x-9 \ge 3x-b$에서 $x \ge 9-b$

주어진 연립부등식의 해가 $1 \le x \le 4$이므로

$3+a=4$, $9-b=1$

즉, $a=1$, $b=8$, $a+b=1+8=9$

$a+b=9$

150. 연립부등식 $\begin{cases} \frac{4}{3}x-\frac{1}{2}>2 \\ -2x+3 \ge 2a \end{cases}$ 가 해를 갖지 않도록 하는 상수 a의 범위를 구하시오.

151. $\frac{4}{3}x-\frac{1}{2}>2$에서 $8x-4>12$, $8x>16$ $\therefore x>2 \cdots\cdots$ ①

$-2x+3 \geq 2a$에서 $2x \leq 3-2a$ $\therefore x \leq \dfrac{3-2a}{2}$ $\cdots\cdots$ ②

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 ①, ②의 공통부분이 존재하지 않아야 한다.

즉, $\dfrac{3-2a}{2} \leq 2$, $-1 \leq 2a$ 이므로

따라서 $a \geq -\dfrac{1}{2}$

151. 부등식 $2 \leq |2x-1| \leq 4$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

152. $|2x-1| \geq 2$에서 $2x-1 \geq 2$ 또는 $2x-1 \leq -2$

$x \geq \dfrac{3}{2}$ 또는 $x \leq -\dfrac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ①

$|2x-1| \leq 4$에서 $-4 \leq 2x-1 \leq 4$ $\therefore -\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{5}{2}$ $\cdots\cdots$ ②

①, ②의 공통부분을 구하면

$-\dfrac{3}{2} \leq x \leq -\dfrac{1}{2}$ 또는 $\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{5}{2}$

따라서 정수 x의 개수는 -1, 1의 2개다.

152. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2-2(a+1)x+4a>0$이 성립하도록 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

153. 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

(x^2의 계수)>0이고, $D<0$이어야 한다.

(i) $a>0$

(ii) $\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-4a^2<0$, $(3a+1)(a-1)>0$, $a<-\dfrac{1}{3}$ 또는 $a>1$

(i), (ii)에 의하여 a값의 범위는 $a>1$

153. 두 부등식 $x^2-2x-3<0$, $(x-a+1)(x-a-3)<0$을 동시에 만족시키는 x가 존재하도록 하는 실수 a의 값의 범위가 $\alpha<a<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값을 구하시오.

154. $x^2-2x-3<0$에서 $(x-3)(x+1)<0$, $-1<x<3$ $\cdots\cdots$ ①

$(x-a+1)(x-a-3)<0$에서 $a-1<x<a+3$ $\cdots\cdots$ ②

①, ②을 동시에 만족시키는 x가 존재하려면

$a-1<3$, $a+3>-1$이 성립해야 한다

즉, 실수 a의 값의 범위는 $-4<a<4$

$\alpha<a<\beta$에서 $\alpha=-4$, $\beta=4$

$\beta-\alpha=4-(-4)=8$, $\beta-\alpha=8$

154. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ (x-3)(x^2+a^2-a)<0 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

155. $x^2-x-6>0$, $(x-3)(x+2)>0$이므로

$x<-2$ 또는 $x>3$

$(x-3)(x^2+a^2-a)<0$에서 $3<x<-a^2+a$ 또는 $-a^2+a<x<3$

공통인 해가 없으려면 다음 그림과 같아야 된다.

(i) $-a^2+a\le 3$일 때, $-a^2+a-3\le 0$, $a^2-a+3\ge 0$이므로

$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+3=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\ge 0$, 항상 성립한다.

(ii) $-a^2+a\ge -2$일 때, $-a^2+a+2\ge 0$, $a^2-a-2\le 0$이므로

$(a-2)(a+1)\le 0$, $-1\le a\le 2$

(i), (ii)의 공통인 범위는

$-1\le a\le 2$

155. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x>0 \\ x^2-6x-4\le 0 \end{cases}$을 만족하는 정수 x의 값의 합을 구하시오.

(단, $\sqrt{13}=3.6$)

156. $x^2-3x>0$에서 $x(x-3)>0$, $\therefore x<0$ 또는 $x>3$

이차방정식 $x^2-6x-4=0$에서 근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$x=3\pm\sqrt{13}$ 이므로 이차부등식 $x^2-6x-4\le 0$의 해는 $3-\sqrt{13}\le x\le 3+\sqrt{13}$

$\sqrt{13}=3.6$이므로 $3-\sqrt{13}=-0.6$, $3+\sqrt{13}=6.6$

$-0.6\le x\le 6.6$이므로

연립부등식을 만족하는 정수 x는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로

$0+1+2+3+4+5+6=21$

[실전수학 도전문제]

156. 등식 $\sqrt{\dfrac{2}{x-3}+1} = -\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$을 만족시키는 모든 실수 x에 대하여 등식 $|x-1|+|x|+|x+1| = ax+b$이 성립할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

156. $\sqrt{\dfrac{2}{x-3}+1} = \sqrt{\dfrac{2+x-3}{x-3}} = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}}$,

$\sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}} = -\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$, $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}} = -\sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}}$,

$x-1>0$, $x-3<0$에서 $1<x<3$이므로

$1-1<x-1<3+1$, $0<x-1<4$,

$1+1<x+1<3+1$, $2<x+1<4$,

$0<x-1<2$, $2<x+1<4$

즉, $|x-1|+|x|+|x+1| = (x-1)+x+(x+1) = 3x$

따라서 $a=3$, $b=0$, $a^2+b^2=3^2+0^2=9$

157. x에 대한 이차식 $6x^2+6(m-1)x+m^2-2m+3$이 $6(x-n)^2$으로 인수분해 될 때, $|mn|$의 최댓값을 구하시오.

157. 이차식이 $6(x-n)^2$ 꼴로 인수분해 되려면 이 이차식은 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, 이차방정식 $6x^2+6(m-1)x+m^2-2m+3=0$이 중근을 가져야 하므로

판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4} = \{3(m-1)\}^2 - 6(m^2-2m+3) = 0$,

$9m^2-18m+9-6m^2+12m+18=0$

$3(m^2-2m-3)=0$, $3(m+1)(m-3)=0$, $m=-1$ 또는 $m=3$

(i) $m=-1$일 때, $6x^2-12x+6=6(x-1)^2$이므로 $n=1$

(ii) $m=3$일 때, $6x^2+12x+6=6(x+1)^2$이므로 $n=-1$

따라서 $|mn| = |3\times(-1)| = 3$의 최댓값은 3

158. 이차함수 $y=x^2+4ax+3a^2-6a+16$의 그래프가 x축과 접할 때, 자연수 a의 값을 구하시오.

158. 이차함수 $y=x^2+4ax+3a^2-6a+16$의 그래프가 x축과 접하므로

이차방정식 $x^2+4ax+3a^2-6a+16=0$이 중근을 가져야 한다.

판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4} = (2a)^2 - 1\times(3a^2-6a+16) = 0$

$4a^2-3a^2+6a-16=0$, $a^2+6a-16=0$, $(a+8)(a-2)=0$

$a=-8$ 또는 $a=2$

a는 자연수이므로 $a=2$

159. 이차방정식 $x^2+5x+2=0$의 두 근을 α, β라 하자. x^2의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(\alpha)=\frac{1}{\beta}$, $f(\beta)=\frac{1}{\alpha}$를 만족시킬 때, 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합을 구하시오.

159. 이차방정식 $x^2+5x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=2$이다. 따라서 $\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{2}$, $\frac{1}{\alpha}=\frac{\beta}{2}$이다.

한편, x^2의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=\frac{1}{\beta}$, $f(\beta)=\frac{1}{\alpha}$이므로

$f(\alpha)=\frac{\alpha}{2}$, $f(\beta)=\frac{\beta}{2}$에서 $f(\alpha)-\frac{\alpha}{2}=0$, $f(\beta)-\frac{\beta}{2}=0$

즉, 이차방정식 $f(x)-\frac{x}{2}=0$의 두 근이 α, β이고 이차함수 $f(x)$의 x^2이 계수가

1이므로 $f(x)-\frac{x}{2}=x^2+5x+2$는 x에 대한 항등식이다.

따라서 $f(x)=x^2+\frac{9}{2}x+2$이므로 이차방정식 $f(x)=0$,

즉 $x^2+\frac{9}{2}x+2=0$의 두 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{9}{2}$

160. 방정식 $x^4+x^3+x+1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $\frac{w^{11}+2w^{10}+1}{w}$의 값을 구하시오.

160. $f(x)=x^4+x^3+x+1$로 놓으면 $f(-1)=-1+1-1+1=0$이므로 $x+1$은
$f(x)$의 인수이다. 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면
$f(x)=(x+1)(x^3+1)=(x+1)^2(x^2+x+1)$
즉, 주어진 방정식은 $(x+1)^2(x^2+x+1)=0$
방정식 $f(x)=0$의 한 허근 w는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로
$w^2+w+1=0$
위의 식의 양변에 $w-1$을 곱하면 $(w-1)(w^2+w+1)=0$
$w^3-1=0$, $w^3=1$

$$\frac{w^{11}+2w^{10}+1}{w}=\frac{w^2(w^3)^3+2w(w^3)^3+1}{w}=\frac{w^2+2w+1}{w}=\frac{-w}{w}=-1$$

161. 부등식 $\sqrt{(x-2)^2}-2|x|<0$의 해를 구하시오.

161. $\sqrt{a^2}=|a|$이므로 부등식 $\sqrt{(x-2)^2}-2|x|<0$에서
(i) $x<0$일 때, $-(x-2)-2(-x)<0$, $x+2<0$이므로 $x<-2$
(ii) $0\le x<2$일 때, $-(x-2)-2x<0$, $-3x+2<0$이므로 $x>\frac{2}{3}$

그런데 $0 \leq x < 2$이므로 $\frac{2}{3} < x < 2$

(iii) $x \geq 2$일 때, $x-2-2x<0$, $x > -2$

그런데 $x \geq 2$이므로 둘의 공통범위는 $x \geq 2$

(i), (ii), (iii)의 공통범위는 $x < -2$ 또는 $\frac{2}{3} < x$

162. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $f(x)=ax^2-2ax+a^2+4a$ 의 최댓값이 18 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하시오.

162. 이차함수 $f(x)=ax^2-2ax+a^2+4a=a(x-1)^2+a^2+3a$

(i) $a>0$일 때, 함수 $f(x)=a(x-1)^2+a^2+3a$는 $x=-1$일 때

최댓값 $f(-1)=a(-2)^2+a^2+3a=18$을 가지므로

$4a+a^2+3a-18=0$, $a^2+8a-18=0$, $(a+9)(a-2)=0$

$a=-9$ 또는 $a=2$

그런데 $a>0$이므로 $a=2$

(ii) $a<0$일 때, 함수 $f(x)=a(x-1)^2+a^2+3a$는 $x=1$일 때

최댓값 $f(1)=a^2+3a=18$을 가지므로

$a^2+3a-18=0$, $(a+6)(a-3)=0$

$a=-6$ 또는 $a=3$

그런데 $a<0$이므로 $a=-6$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 $2+(-6)=-4$

163. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\frac{ax^2-(2a-4)x+1}{x^2+4x+5}<2$가 항상 성립할 때, 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오.

163. $\frac{ax^2-(2a-4)x+1}{x^2+4x+5}<2$에서 $x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$이므로

양변에 x^2+4x+5를 곱하면 $ax^2-(2a-4)x+1<2x^2+8x+10$,

$(a-2)x^2-2(a-2)x-9<0$

(i) $a=2$일 때, $-9<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $a \neq 2$일 때, 모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립하려면 $a-2<0$, $a<2$

또한 이차방정식 $(a-2)x^2-2(a-2)x-9=0$의 판별식 D에 대하여

$D<0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-(a-2)\times(-9)<0$, $a^2-4a+4+9a-18<0$

$a^2+5a-14<0$, $(a+7)(a-2)<0$

$-7<a<2$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는 $-7<a \leq 2$이므로

정수 a의 값의 합은 $(-6)+(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2=-18$

164. 두 실수 x, y가 $4x^2+10y^2+4xy-12y+3=0$을 만족시킬 때, $2x+2y$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

164. $2x+2y=k$라 하면 $2x=k-2y$이므로

$$\begin{aligned}4x^2+10y^2+4xy-12y+3&=(k-2y)^2+10y^2+2(k-2y)y-12y+3\\&=k^2-4ky+y^2+10y^2+2ky-4y^2-12y+3\\&=7y^2-2(k+6)y+k^2+3=0\end{aligned}$$

y에 대한 이차방정식 $7y^2-2(k+6)y+k^2+3=0$이 모든 실수 k에 대하여 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=\{-(k+6)\}^2-7(k^2+3)\ge 0$을 만족해야 하므로

$k^2+12k+36-7k^2-21\ge 0$, $3(2k^2-4k-5)\le 0$, $\frac{2-\sqrt{14}}{2}\le k\le\frac{2+\sqrt{14}}{2}$

k의 최솟값은 $\frac{2-\sqrt{14}}{2}$, 최댓값은 $\frac{2+\sqrt{14}}{2}$

따라서 $2x+2y$의 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{2-\sqrt{14}}{2}+\frac{2+\sqrt{14}}{2}=\frac{4}{2}=2$

165. 연립부등식 $\begin{cases}x^2-4|x|+3\ge 0\\x^2-5|x|+4\le 0\end{cases}$ 을 만족시키는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

165. $x^2-4|x|+3\ge 0$에서 $x^2=|x|^2$이므로 $(|x|-1)(|x|-3)\ge 0$

$|x|\le 1$ 또는 $|x|\ge 3$, $-1\le x\le 1$ 또는 $x\ge 3$ 또는 $x\le -3$…… ①

같은 방법으로 $x^2-5|x|+4\le 0$에서 $x^2=|x|^2$이므로 $(|x|-1)(|x|-4)\le 0$

$1\le|x|\le 4$이므로 $-4\le x\le -1$ 또는 $1\le x\le 4$ …… ②

①, ②의 공통부분을 구하면

$-4\le x\le -3$ 또는 $3\le x\le 4$

모든 정수 x의 개수는 -4, -3, 3, 4이다.

모든 정수 x의 개수의 합은 $-4+(-3)+(3)+4=0$

[실전수학 기본문제]

166. 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구하시오.
(1) $A(-3)$, $B(5)$ (2) $C(1+\sqrt{2})$, $D(1-\sqrt{2})$

166. (1) $\overline{AB}=|5-(-3)|=|8|=8$
(2) $\overline{CD}=|1-\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})|=|-2\sqrt{2}|=2\sqrt{2}$

167. 좌표평면 위의 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.
(1) $O(0,\ 0)$, $A(-4,\ 3)$ (2) $A(-3,\ -1)$, $B(3,\ 5)$
(3) $A(-5,\ 4)$, $B(7,\ -2)$ (4) $A(2,\ -1)$, $B(-3,\ 2)$

167. (1) $\overline{OA}=\sqrt{(-4-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$
(2) $\overline{AB}=\sqrt{(3+3)^2+(5+1)^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$
(3) $\overline{AB}=\sqrt{(7+5)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{12^2+(-6)^2}=\sqrt{144+36}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$
(4) $\overline{AB}=\sqrt{(-3-2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{(-5)^2+3^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$

168. 세 점 $A(-1,\ 3)$, $B(4,\ -2)$, $C(3,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 구하시오.

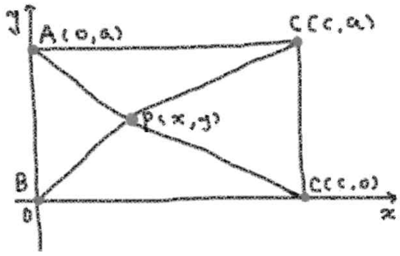
168. $\overline{AB}=\sqrt{(-1-4)^2+(3+2)^2}=\sqrt{50}$,
$\overline{BC}=\sqrt{(4-3)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{50}$,
$\overline{AC}=\sqrt{(-1-3)^2+(3-5)^2}=\sqrt{20}$
이므로 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

169. 세 점 $A(1,\ 2)$, $B(-2,\ -2)$, $C(5,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 구하시오.

169. $\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{25}$
$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{25}$
$\overline{BC}=\sqrt{(5+2)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{50}$
$\overline{AB}=\overline{AC}$이고 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로
$\triangle ABC$는 $\angle A$가 직각인 직각이등변삼각형이다.

170. 직사각형 ABCD와 임의의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$임을 보이시오.

170. 다음 그림과 같이 좌표축을 잡고



A $(0,\ a)$, B $(0,\ 0)$, C $(c,\ 0)$, D $(c,\ a)$, P $(x,\ y)$로 놓으면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=\{x^2+(y-a)^2\}+\{(x-c)^2+y^2\}$

$\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2=(x^2+y^2)+\{(x-c)^2+(y-a)^2\}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2$

171. 수직선 위의 두 점 A (2), B (5)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) $\overline{\mathrm{AB}}$를 $3:2$로 내분하는 점 P

(2) $\overline{\mathrm{AB}}$를 $3:1$로 외분하는 점 Q

(3) $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표인 점 M

171. (1) 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\times5+2\times2}{3+2}\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{15+4}{5}\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{19}{5}\right)$, $\mathrm{P}\left(\dfrac{19}{5}\right)$

(2) 점 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3\times5-1\times2}{3-1}\right)=\mathrm{Q}\left(\dfrac{15-2}{2}\right)=\mathrm{Q}\left(\dfrac{13}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{13}{2}\right)$

(3) 점 $\mathrm{M}\left(\dfrac{1\times5+1\times2}{1+1}\right)=\mathrm{M}\left(\dfrac{5+2}{2}\right)=\mathrm{M}\left(\dfrac{7}{2}\right)$

172. 두 점 A $(-2,\ 1)$, B $(3,\ 6)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $\overline{\mathrm{AB}}$를 $3:2$로 내분하는 점 P의 좌표를 구하시오.

(2) $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:3$으로 외분하는 점 Q의 좌표를 구하시오.

172. (1) 점 P의 $x=\dfrac{3\times3+2\times(-2)}{3+2}=\dfrac{9-4}{5}=\dfrac{5}{5}=1$,

점 P의 $y=\dfrac{3\times6+2\times1}{3+2}=\dfrac{18+2}{5}=\dfrac{20}{5}=4$

점 P $(1,\ 4)$

(2) 점 Q의 $x=\dfrac{2\times3-3\times(-2)}{2-3}=\dfrac{6+6}{-1}=-12$,

점 Q의 $x=\dfrac{2\times6-3\times1}{2-3}=\dfrac{12-2}{-1}=-10$,

점 Q $(-12,\ -10)$

173. 두 점 A $(2,\ 1)$, B $(6,\ 7)$을 이은 선분 AB의 연장선 위에 $3\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{BC}}$가 되도록 하는 점 C의 좌표를 구하시오.

173. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=2:3$이므로 점 C는 선분 AB를 $5:3$으로 외분하는 점 또는 $1:3$으로 외분하는 점이다.

점 C의 좌표는 $\left(\dfrac{30-6}{5-3},\ \dfrac{35-3}{5-3}\right)$ 또는 $\left(\dfrac{6-6}{1-3},\ \dfrac{7-3}{1-3}\right)$

즉, $(12,\ 16)$ 또는 $(0,\ -2)$이다.

점 $C(12,\ 16)$ 또는 $C(0,\ -2)$

174. 세 점 $A(-3,\ 1)$, $B(5,\ 0)$, $C(4,\ -4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하시오.

174. $G(x,\ y)$라고 하면 $x=\dfrac{-3+5+4}{3}=2$, $y=\dfrac{1+0-4}{3}=-1$

$G(2,\ -1)$

175. 삼각형 ABC의 두 꼭짓점의 좌표가 $A(4,\ -5)$, $B(5,\ 2)$이고, 무게중심의 좌표가 $(-3,\ 0)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하시오.

175. 무게중심의 좌표 $G(-3,\ 0)$이라 하고 점 $C(x_1,\ y_1)$이라 하면

$G\left(\dfrac{4+5+x_1}{3},\ \dfrac{(-5)+2+y_1}{3}\right)=(-3,\ 0)$

$9+x_1=3\times(-3)=-9$, $x_1=-9-9=-18$

$(-3)+y_1=3\times 0$, $y_1=3$

점 $C(-18,\ 3)$

176. 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 기울기가 2이고 y절편이 -3인 직선의 방정식

(2) 기울기가 -3이고 x절편이 5인 직선의 방정식

(3) 기울기가 -2이고 점 $(4,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식

(4) 기울기가 3이고 점 $(6,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식

176. (1) 점 $(0,\ -3)$, 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y+3=2(x-0)$, $y=2x-3$

(2) 점 $(5,\ 0)$, 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$y=-3(x-5)=-3x+15$, $y=-3x+15$

(3) 점 $(4,\ 5)$, 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-5=-2(x-4)=-2x+8$, $y=-2x+8+5=-2x+13$, $y=-2x+13$

(4) 점 $(6,\ 1)$, 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-1=3(x-6)=3x-18$, $y=3x-18+1=3x-17$, $y=3x-17$

177. 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $(-2,\ 3)$, $(1,\ 2)$

(2) $(3,\ 1)$, $(0,\ 3)$

(3) $(4,\ -1)$, $(4,\ 3)$

(4) $(1,\ 3)$, $(-2,\ 3)$

177. (1) $y-3=\dfrac{2-3}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$, $y-3=-\dfrac{1}{3}(x+2)=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$,

$y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}+3$, $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}$

(2) $y-1=\frac{3-1}{0-3}(x-3)$, $y-1=-\frac{2}{3}(x-3)=-\frac{2}{3}x+2$,

$y=-\frac{2}{3}x+2+1$, $y=-\frac{2}{3}x+3$

(3) x축이 같으므로 y축에 평행한 직선 $x=4$

(4) y축이 같으므로 x축에 평행한 직선 $y=3$

178. x절편이 2이고, y절편이 3인 직선의 방정식을 구하시오.

178. x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a\neq 0,\ b\neq 0)$이므로

x절편이 2, y절편이 3인 직선의 방정식은 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

179. $ac>0$, $bc>0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 <u>않는</u> 사분면을 보이시오.

179. 직선 $ax+by+c=0$의

x절편은 $-\frac{c}{a}<0$ ($\because$ $ac>0$)

y절편은 $-\frac{c}{b}<0$ ($\because$ $bc>0$)

따라서 직선 $ax+by+c=0$은 제1사분면을 지나지 않는다.

180. 두 직선 $2x-y-3=0$, $x+y-3=0$의 교점과 점 $(0,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

180. 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은 상수 k에 대하여
$(2x-y-3)k+(x+y-3)=0$으로 나타낼 수 있다.

직선 $(2x-y-3)k+(x+y-3)=0$이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$-3k-3=0$, $k=-1$

$k=-1$을 직선 $(2x-y-3)k+(x+y-3)=0$에 대입하여 정리하면

$x-2y=0$

181. 점 $(2,\ 3)$을 지나고 다음 직선에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=\frac{1}{2}x-3$　　(2) $3x+y-5=0$

181. (1) 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$, 구하는 직선이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$, $y=\frac{1}{2}x-1+3=\frac{1}{2}x+2$, $y=\frac{1}{2}x+2$

(2) 직선의 기울기는 -3, 구하는 직선의 점 $(2,\ 3)$을 지나므로
$y-3=-3(x-2)$, $y=-3x+6+3$, $y=-3x+9$

182. 다음 물음에 답하시오.

(1) 직선 $y=2x+1$에 수직이고 점 $(4,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(2) 직선 $2x+3y-6=0$에 수직이고 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(3) 점 $(1,\ -2)$을 지나고 $y=1$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

(4) 점 $(2,\ -1)$을 지나고 $x=2$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

182. (1) $y=2x+1$의 기울기 2, 수직인 직선의 기울기를 m이라고 하면

$m\times 2=-1,\ m=-2$

점 $(4,\ -2)$을 지나므로 $y+2=-2(x-4),\ y=-2x+6$

(2) $2x+3y-6=0$의 기울기 $-\dfrac{2}{3}$, 수직인 직선의 기울기를 m이라고 하면

$$m\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-1,\ m=\frac{3}{2}$$

점 $(2,\ 1)$을 지나므로 $y-1=\dfrac{3}{2}(x-2),\ y=\dfrac{3}{2}x-2$

(3) 점 $(1,\ -2)$을 지나고 $y=1$에 수직인 직선은 $x=1$

(4) 점 $(2,\ -1)$을 지나고 $x=2$에 수직인 직선은 $y=-1$

183. 두 직선 $kx-y+3=0$, $(k-2)x+3y-1=0$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 상수 k의 값을 구하시오.

(1) 평행하다.

(2) 수직이다.

183. $kx-y+3=0,\ y=kx+3$

$$(k-2)x+3y-1=0,\ y=-\frac{(k-2)}{3}x+\frac{1}{3}$$

(1) 평행이면 $k=-\dfrac{(k-2)}{3},\ 3k=-k+2,\ 4k=2,\ k=\dfrac{1}{2}$

(2) 수직이면 $(-k)\times\dfrac{(k-2)}{3}=-1,\ k(k-2)=3,\ k^2-2k-3=0,$

$(k-3)(k+1)=0,\ k=3$ 또는 $k=-1$

184. 다음 점과 직선 사이의 거리를 구하시오.

(1) $(5,\ 4),\ 3x+4y-12=0$ (2) $(3,\ -2),\ 4x-y+7=0$

184. (1) $d=\dfrac{|5\times 3+4\times 4-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|15+16-12|}{\sqrt{25}}=\dfrac{19}{5}$

(2) $d=\dfrac{|3\times 4+(-2)\times(-1)+7|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\dfrac{|12+2+7|}{\sqrt{17}}=\dfrac{21}{\sqrt{17}}=\dfrac{21\sqrt{17}}{17}$

185. 원점 O에서 직선 $3x-4y+5=0$에 이르는 거리를 구하시오.

185. $d=\dfrac{|0\times 3+0\times(-4)+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{25}}=\dfrac{5}{5}=1$

186. 서로 평행한 두 직선 $3x+2y-4=0$, $3x+2y+5=0$ 사이의 거리를 구하시오.

186. 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+2y-4=0$
위의 한 점 $(0,\ 2)$와 직선 $3x+2y+5=0$ 사이의 거리이므로
$$d=\frac{|0\times3+2\times2+5|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|4+5|}{\sqrt{13}}=\frac{9\sqrt{13}}{13}$$

187. 다음 원의 방정식을 구하시오.
(1) 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원
(2) 중심이 점 $(1,\ -2)$이고 점 $(3,\ 0)$을 지나는 원

187. (1) 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5이므로 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2=5^2$, $x^2+y^2=25$
(2) 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y+2)^2=r^2$
이 원이 점 $(3,\ 0)$을 지나므로
$(3-1)^2+(0+2)^2=r^2$, $4+4=r^2$, $r^2=8$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y+2)^2=8$

188. 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

188. 원의 중심의 좌표는 두 점의 중점의 좌표 $\mathrm{C}(a,\ b)$라 하면
$\mathrm{C}(a,\ b)=\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)=(4,\ 3)$, 중점의 좌표 $(4,\ 3)$
원의 반지름의 길이는 선분 AC의 길이와 같으므로
$\sqrt{(4-2)^2+(3-4)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$
원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=(\sqrt{5})^2$,
$(x-4)^2+(y-3)^2=5$

189. 다음 방정식이 나타내는 원의중심과 반지름의 길이를 구하시오.
(1) $x^2+y^2+2x-4y+3=0$ (2) $x^2+y^2-x+y=0$

189. (1) $x^2+y^2+2x-4y+3=0$, $(x+1)^2-1+(y-2)^2-4+3=0$,
$(x+1)^2+(y-2)^2=2$이므로
원의 중심: $(-1,\ 2)$ 원의 반지름의 길이: $\sqrt{2}$
(2) $x^2+y^2-x+y=0$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$,

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$이므로

원의중심: $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 원의 반지름의 길이: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

190. 이차방정식 $x^2+y^2+2kx-4ky+3k+2=0$이 나타내는 도형이 원이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

190. $(x+k)^2-k^2+(y-2k)^2-4k^2+3k+2=0$,

$(x+k)^2+(y-2k)^2=5k^2-3k-2$

이 식이 원을 나타내려면 $5k^2-3k-2>0$이어야 하므로 $(5k+2)(k-1)>0$

$k<-\frac{2}{5}$ 또는 $k>1$

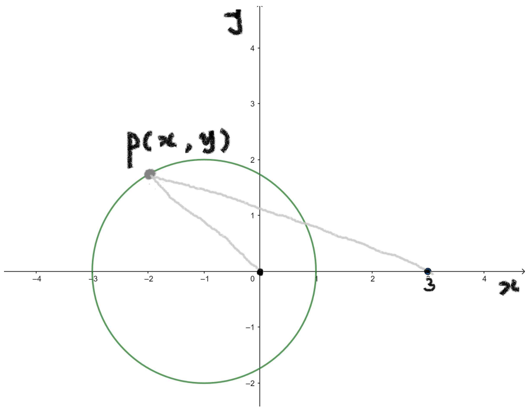
191. 원점 O와 점 A$(3,\ 0)$에서의 거리의 비가 $1:2$인 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

191. P$(x,\ y)$로 놓으면 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x^2+y^2}$, $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{AP}}=1:2$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{OP}}$, $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$, $(x-3)^2+y^2=4(x^2+y^2)$

$(x+1)^2+y^2=4$인 원의방정식이다.



192. 두 점 A$(2,\ 3)$, B$(5,\ 6)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:1$을 만족시키는 점 P$(x,\ y)$의 자취는 원이다. 이 원의 반지름의 길이를 구하시오.

192. $\overline{\mathrm{PA}}=2\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=4\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$(x-2)^2+(y-3)^2=4\{(x-5)^2+(y-6)^2\}$,

$x^2+y^2-4x-6y+13=4(x^2+y^2-10x-12y+61)$,

$3x^2+3y^2-36x-42y+231=0$,

$x^2+y^2-12x-14y+77=0$, $(x-6)^2+(y-7)^2=8$

따라서 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$

193. 다음 원과 직선의 위치 관계를 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=6$과 직선 $y=-x+4$

(2) 원 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$과 직선 $3x-4y=27$

193. (1) $y=-x+4$를 $x^2+y^2=6$에 대입하면

$x^2+(-x+4)^2=6$, $2x^2-8x+10=0$, $x^2-4x+5=0$

판별식 $\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times 5=4-5=-4<0$

서로 만나지 않는다.

(2) $x^2+y^2-4x-2y-20=0$, $(x-2)^2+(y-1)^2=25$

원의 중심은 $(2,\ 1)$이고 반지름의 길이 r는 5이다.

원의 중심 $(2,\ 1)$에서 직선 $3x-4y-27=0$까지의 거리 d는

$d=\frac{|3\times 2-4\times 1-27|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{25}{5}=5$

즉, $d=5$이므로 원과 직선은 접한다.

194. 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y-\sqrt{3}x-k=0$이 만나도록 하는 상수 k값의 범위를 구하시오.

194. $y=\sqrt{3}x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$x^2+(\sqrt{3}x+k)^2=4$, $4x^2+2\sqrt{3}kx+k^2-4=0$

판별식을 D라고 하면 원과 직선이 만나야 하므로 $\frac{D}{4}=(\sqrt{3}k)^2-4(k^2-4)\geq 0$

$k^2-16\leq 0$, $(k+4)(k-4)\leq 0$, $-4\leq k\leq 4$

195. 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k의 값의 범위를 구하시오.

195. $y=x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하여 정리하면

$x^2+(x+k)^2=4$, $2x^2+2kx+k^2-4=0$

판별식 $\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-4)>0$이어야 하므로 $k^2<8$

$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

196. 원 $x^2+y^2-6x+2y+9=0$와 직선 $4x-3y=0$의 위치 관계를 구하시오.

196. $x^2+y^2-6x+2y+9=0$, $(x-3)^2+(y+1)^2=1$

중심의 좌표는 $(3,\ -1)$, 반지름의 길이는 1

중심 $(3,\ -1)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4\times 3-3\times(-1)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{15}{5}=3$

이때, $3>1$이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

197. 다음 물음에 답하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=5$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식을 구하여라.

(2) 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$과 수직이고 원 $x^2+y^2=4$에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

197. (1) 기울기 $m=\frac{1}{2}$, 반지름 $\sqrt{5}$인 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}$, $y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}x\pm\frac{5}{2}$,

$y=\frac{1}{2}x\pm\frac{5}{2}$

(2) 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$과 수직이므로 $m\times\frac{1}{2}=-1$, $m=-2$

기울기 $m=-2$이고 반지름 2인 원 $x^2+y^2=4$에 접하는 직선의 방정식은

$y=-2x\pm2\sqrt{4+1}$, $y=-2x\pm2\sqrt{5}$

198. 다음 물음에 답하시오.

(1) 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(-1,\ -3)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 점 $(0,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

198. (1) $x^2+y^2=10$의 접점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라 하면

점 P에서의 접선의 방정식은 $xx_1+yy_1=10$,

이 접선의 방정식 위의 점 $(-1,\ -3)$이므로

$x\times(-1)+y\times(-3)=10$, $-x-3y=10$, $x+3y+10=0$,

$x+3y+10=0$

(2) 접점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라고 하면

점 P에서 그은 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=9$

이 접선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3y_1=9$, 즉 $y_1=2$ ……㉠

한편 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로 $x_1^2+y_1^2=9$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x_1^2=\frac{9}{4}$, $x_1=\pm\frac{3}{2}$

구하는 접선의 방정식은

$3x+4y=9$ 또는 $3x-4y=-9$

199. 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.
(1) 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동한 점 P'의 좌표는 $\mathrm{P}'(\square,\ \square)$
(2) 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(\square,\ \square)=0$

199. (1) $\mathrm{P}'(x+1,\ y+b)$ (2) $f(x-a,\ y-b)=0$

200. 다음 점을 x축으로 -3만 큼, y축 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하시오.
(1) $(-2,\ 1)$ (2) $(3,\ 7)$ (3) $(-3,\ -2)$

200. (1) $(-2-3,\ 1+5)=(-5,\ 6)$, $(-5,\ 6)$
(2) $(3-3,\ 7+5)=(0,\ 12)$, $(0,\ 12)$
(3) $(-3-3,\ -2+5)=(-6,\ 3)$, $(-6,\ 3)$

201. 다음 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.
(1) $2x-y+3=0$ (2) $y=x^2$
(3) $x^2+y^2=1$ (4) $(x-3)^2+y^2=9$

201. 도형의 이동이므로 x 대신 $x+1$을, y 대신 $y-3$을 대입하면
(1) $2(x+1)-(y-3)+3=0$, $2x-y+8=0$
(2) $y-3=(x+1)^2$, $y=x^2+2x+4$
(3) $(x+1)^2+(y-3)^2=1$,
(4) $(x+1-3)^2+(y-3)^2=9$, $(x-2)^2+(y-3)^2=9$

202. 원 $x^2+y^2=16$이 평행이동 $f:\ (x,\ y)\to(x+a,\ y+b)$에 의하여 원 $x^2+y^2-8x+2y+c=0$으로 옮겨졌다. 이때 $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, $a,\ b,\ c$는 상수)

202. 원 $x^2+y^2=16$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=16$, $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-16=0$
$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-16=0$은 $x^2+y^2-8x+2y+c=0$와 일치하므로
즉, $-2a=-8$, $-2b=2$, $c=a^2+b^2-16$,
$a=4$, $b=-2$, $c=4^2+(-1)^2-16=16+1-16=1$
$a=4$, $b=-1$, $c=1$
$a+b+c=4$

203. 직선 $2x+3y+5=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a+1$만큼 평행이동하였더니 직선 $2x+3x-8=0$과 겹쳐졌다. 이때 상수 a의 값을 구하시오.

203. x 대신에 $x-a$, y 대신에 $y-(a+1)$을 $2x+3y+5=0$에 대입하면
$2(x-a)+3(y-a-1)+5=0$, $2x+3y-5a+2=0$
이 식은 $2x+3y-8=0$과 일치하므로
$-5a+2=-8$, $a=2$

204. 원 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$을 x축으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원의 중심이 원점으로 옮겨졌다. 상수 a, b의 값의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

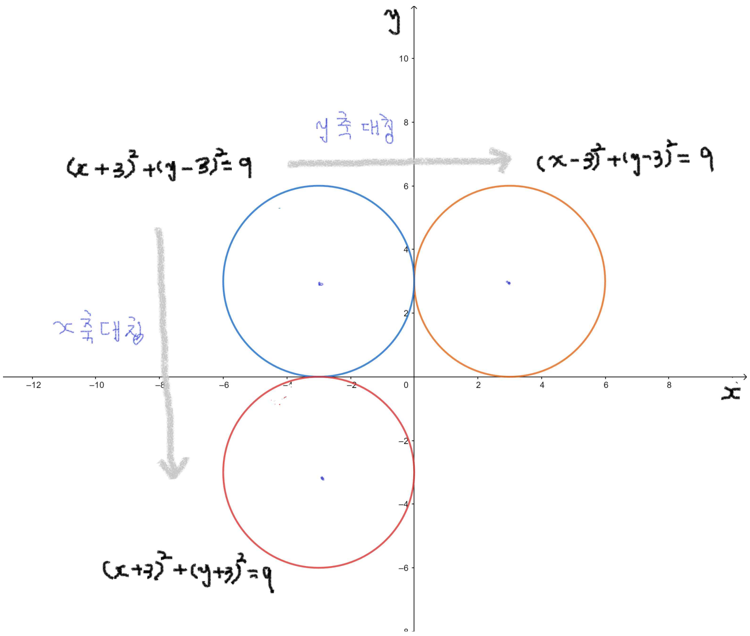
204. 원 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$, $(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-4=0$,
$(x-2)^2+(y+1)^2=9$
평행이동하면 $(x-a-2)^2+(y-b+1)^2=9$, 원의 중심 $(a+2,\ b-1)$
$(a+2,\ b-1)=(0,\ 0)$로 옮겨졌으므로
$a+2=0$, $b-1=0$
$a=-2$, $b=1$
$a+b=-2+1=-1$

205. 점 $(-3,\ 2)$를 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.
(1) x축 (2) y축 (3) 원점 (4) 직선 $y=x$

205. (1) $(-3,\ 2)$ ⇨ x축 대칭이동 $(-3,\ -2)$
(2) $(-3,\ 2)$ ⇨ y축 대칭이동 $(3,\ 2)$
(3) $(-3,\ 2)$ ⇨ 원점 대칭이동 $(3,\ -2)$
(4) 점 $(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(y,\ x)$이므로 구하는 점은 $(2,\ -3)$

206. 다음 방정식이 나타내는 도형을 x축, y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 각각 구하시오.
(1) $y=-3x+1$
(2) $2x-y+6=0$
(3) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

206. (1) x축 : $-y=-3x+1$ ⇨ $y=3x-1$, y축 : $y=-(-3)x+1$ ⇨ $y=3x+1$
(2) x축 : $2x-(-y)+6=0$ ⇨ $2x+y+6=0$, y축 : $-2x-y+6=0$ ⇨ $2x+y-6=0$
(3) x축 : $(x+3)^2+(y+3)^2=9$, y축 : $(x-3)^2+(y-3)^2=9$



207. 다음 방정식이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 각각 구하시오.

(1) $y=5x+1$

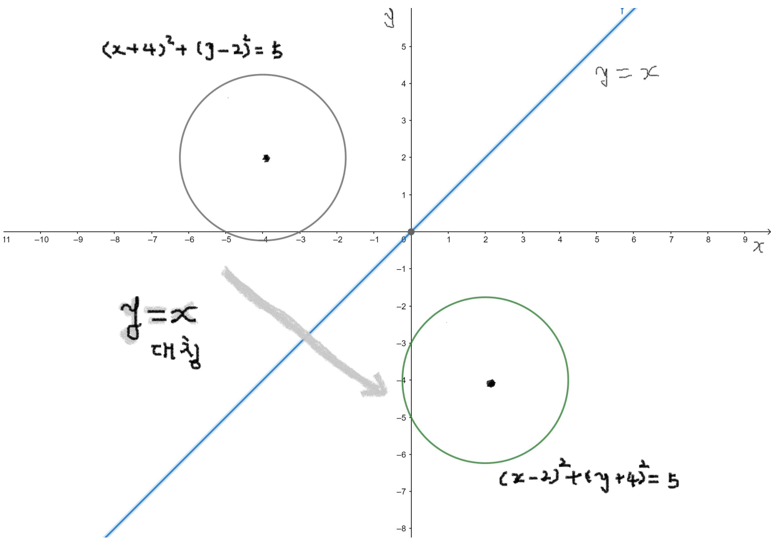
(2) $4x+y-7=0$

(3) $(x+4)^2+(y-2)^2=5$

207. (1) $y=5x+1$ ⇨ $x=5y+1,\ y=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{1}{5}$

(2) $4x+y-7=0$ ⇨ $4y+x-7=0,\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{4}$

(3) $(x+4)^2+(y-2)^2=5$ ⇨ $(x-2)^2+(y+4)^2=5$



208. 원 $x^2+y^2=8$을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 직선 $x-y+k=0$과 한 점에서 만난다고 할 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, $k>0$)

208. 원 $x^2+y^2=8$을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $x^2+(y-1)^2=8$,
평행이동한 원에서 직선 $x-y+k=0$과 한 점에서 만나므로
$x=y-k$, $(y-k)^2+(y-1)^2=8$,
$2y^2-2(k+1)y+k^2-7=0$
이 방정식이 중근을 가져야 하므로
판별식 $\frac{D}{4}=(k+1)^2-2(k^2-7)=0$, $k^2-2k-15=0$, $(k+3)(k-5)=0$
조건에서 $k>0$이므로 $k=5$

209. 두 원 $x^2+y^2-4x-8y+16=0$, $x^2+y^2+8x-12y+48=0$이 점 P에 대하여 대칭일 때, 점 P의 좌표를 구하시오.

209. $x^2+y^2-4x-8y+16=0$에서 $(x-2)^2+(y-4)^2=4$,
이 원의 중심의 좌표는 $(2,\ 4)$
$x^2+y^2+8x-12y+48=0$에서 $(x+4)^2+(y-6)^2=4$,
이 원의 중심의 좌표는 $(-4,\ 6)$
즉, 두 점 $(2,\ 4)$, $(-4,\ 6)$의 중점이 점 P이므로 점 P의 좌표는
$\left(\frac{2+(-4)}{2},\ \frac{4+6}{2}\right)=(-1,\ 5)$,
점 $\mathrm{P}(-1,\ 5)$

[실전수학 연습문제]

210. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} \le 3$을 만족하는 모든 정수 a의 값을 구하시오.

210. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = |a-3|$이므로 $|a-3| \le 3$

$-3 \le a-3 \le 3$, $0 \le a \le 6$

모든 정수 a의 개수는 7개다.

211. 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b-1)$, $\mathrm{Q}(a-4,\ b+2)$ 사이의 거리를 구하시오.

211. $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\{(a-4)-a\}^2 + \{(b+2)-(b-1)\}^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

212. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(2,\ -3)$과 y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오.

212. 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$과 y축에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면 $\mathrm{A}'(-1,\ 3)$

이때, $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}} \ge \overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{(2+1)^2+(-3-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $3\sqrt{5}$

213. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(6,\ -7)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 이은 선분의 중점의 좌표를 구하시오.

213. 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times6+3\times1}{2+3},\ \dfrac{2\times(-7)+3\times3}{2+3}\right) = (3,\ -1)$

선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times6-3\times1}{2-3},\ \dfrac{2\times(-7)-3\times3}{2-3}\right) = (-9,\ 23)$

내분점과 외분점을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{3+(-9)}{2},\ \dfrac{(-1)+23}{2}\right) = (-3,\ 11) = (-3,\ 11)$

214. 세 점 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 1)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 점 $\mathrm{G}(1,\ 2)$일 때, 선분 OC의 길이를 구하시오. (단, O는 원점)

214. 세 점 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 1)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\dfrac{-3+4+a}{3},\ \dfrac{2+1+b}{3}\right) = \left(\dfrac{a+1}{3},\ \dfrac{b+3}{3}\right)$

한편, 점 $\mathrm{G}(1,\ 2)$가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\dfrac{a+1}{3} = 1$, $\dfrac{b+3}{3} = 2$, $a=2$, $b=3$

즉, 점 C의 좌표는 (2, 3)이므로

$\overline{OC}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

215. $3\overline{PA}=2\overline{PB}$가 되도록 하는 선분 AB 위의 점 P에 대하여 A$(-3,\ 2)$이고, P$(1,\ 0)$일 때, 점 B의 x좌표와 y좌표의 합을 구하시오.

215. $3\overline{PA}=2\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$이고, 점 P가 선분 AB 위의 점이므로 점 P는 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이다.
이때, 점 B의 좌표를 B$(a,\ b)$라 하면

$\left(\dfrac{2\times a+3\times(-3)}{2+3},\ \dfrac{2\times b+3\times 2}{2+3}\right)=(1,\ 0)$, $\dfrac{2a-9}{5}=1$, $\dfrac{2b+6}{5}=0$

$a=7$, $b=-3$, B$(a,\ b)=$B$(7,\ -3)$

$a+b=4$

216. 두 직선 $ax+by-6=0$, $(b-1)x+ay+3=0$이 일치할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. (단, $a\neq 0$, $b\neq 0$)

216. $a\neq 0$, $b\neq 0$이므로 두 직선의 방정식을 변형하면

$y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{6}{b}$, $y=-\dfrac{b-1}{a}x-\dfrac{3}{a}$

$-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{b-1}{a}$에서 $a^2=b^2-b$ ……㉠

$\dfrac{6}{b}=-\dfrac{3}{a}$에서 $-6a=3b$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 정리하면 $a=-\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{4}{3}$

217. 두 직선 $x+2y-2=0$, $mx-y+2m-1=0$이 제1사분면에서 만날 때, 상수 m의 값의 범위를 구하시오.

217. 직선 $mx-y+2m-1=0$을 m에 대하여 정리하면

$(x+2)m-(y+1)=0$ ……㉠

즉, 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ -1)$을 지난다.

직선 $x+2y-2=0$은 x절편이 2, y절편이 1이므로

(i) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때, $4m-1=0$, $m=\dfrac{1}{4}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 1)$을 지날 때, $2m-2=0$, $m=1$

(i), (ii)에서 $\dfrac{1}{4}<m<1$

218. 세 점 A$(1,\ -3)$, B$(2,\ 4)$, C$(4,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 점 A를 지나고, 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.

218. 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면
변 BC의 중점 $(3,\ 1)$을 지나야 한다.
즉, 두 점 $(1,\ -3)$, $(3,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y+3=\frac{4}{2}(x-1)$, $y=2x-5$

219. 두 직선 $mx-4y-2=0$, $(m+3)x+y+1=0$에 대한 설명으로 옳은 것만을 모두 고르시오. (단, m은 상수이다.)
㉠ $m=1$일 때, 두 직선은 수직이다.
㉡ $m=-\frac{12}{5}$일 때, 두 직선은 평행하다.
㉢ $m=-2$일 때, 두 직선은 일치한다.
㉣ $m=4$일 때, 두 직선은 한 점에서 만난다.

219. ㉠ $m=1$ 일 때, 두 직선의 기울기를 곱하면 -1이 되므로 두 직선은 수직이다.
㉡ $m=-\frac{12}{5}$ 일 때, 두 직선의 기울기는 같으므로 평행이다.
㉢ $m=-2$ 일 때, 두 직선은 $x+2y+1=0$, $x+y+1=0$이므로 일치하지 않는다.
㉣ $m=4$ 일 때, $4x-4y-2=0$, $7x+y+1=0$ 은 한 점에서 만난다.
따라서 옳은 것은 ㉠ ㉡ ㉣

220. 두 직선 $x-y+10=0$, $x+3y-2=0$의 교점을 지나는 직선 중 $2x+4y+1=0$과 만나지 않는 직선의 방정식을 구하시오.

220. 직선은 두 직선의 교점 $(-8,\ 2)$을 지나고, 직선 $2x+4y+1=0$과 평행하므로
기울기가 $-\frac{1}{2}$이다.
즉, 직선의 방정식은 $y-2=-\frac{1}{2}(x+8)$, $y=-\frac{1}{2}x-2$

221. 두 점 $(2,\ a)$, $(a+2,\ 4)$를 지나는 직선이 점 $(1,\ 3)$을 지날 때, 상수 a가 될 수 있는 모든 값의 합을 구하시오.

221. 두 점 $(2,\ a)$, $(a+2,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-a=\frac{4-a}{a}(x-2)$,
$y=\frac{4-a}{a}x+\frac{a^2+2a-8}{a}$

이 직선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 $3=\dfrac{a^2+a-4}{a}$, $a^2-2a-4=0$

근과 계수의 관계에 따라 상수 a가 될 수 있는 모든 값의 합은 2

222. 점 $(8,\ -3)$을 지나고, x축, y축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1인 직선의 방정식을 구하시오.

222. x절편이 a이고, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

이 직선이 점 $(8,\ -3)$을 지나므로 $\dfrac{8}{a}+\dfrac{(-3)}{b}=1$ ……㉠

두 좌표축과 직선이 이루는 삼각형의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}ab=1$ ……㉡

㉡에서 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}b$

이것을 ㉠에 대입하면 $8\left(\dfrac{1}{2}b\right)-\dfrac{3}{b}=1$에서 $4b^2-b-3=0$,

$(4b+3)(b-1)=0$

$b>0$이므로 $b=1$, $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$, $a=2$

$a=2$, $b=1$에서 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{x}{2}+y=1$,

$x+2y=2$

223. 점 $(-1,\ 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 모두 구하시오.

223. 점 $(-1,\ 2)$는 제2사분면 위의 점이므로 반지름의 길이를 r라고 하면

원의 방정식은 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$, $r^2-6r+5=0$, $r=1$ 또는 $r=5$

원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x+5)^2+(y-5)^2=25$

224. 좌표평면에서 중심의 좌표가 $(1,\ 4)$이고 직선 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$에 접하는 원의 반지름의 길이를 구하시오.

224. 점 $(1,\ 4)$에서 $3x-4y-2=0$까지의 거리는 $\frac{|3-16-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3$이므로

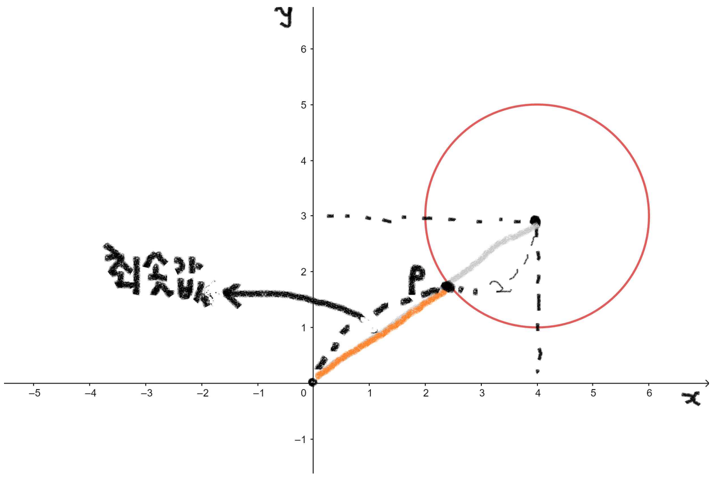
접하는 원의 반지름의 길이는 3

225. 원 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최솟값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

225. $x^2+y^2-8x-6y+21=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$의 최솟값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에서 원의 반지름의 길이를 뺀 것이므로



$\sqrt{4^2+3^2}-2=3$

226. 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$을 지나고 x축에 접하는 원의 방정식을 구하시오.

226. 원의 중심을 $(a,\ b)$라 하면

x축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

이 원이 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$을 지나므로

$(3-a)^2+(1-b)^2=b^2$ ……㉠

$(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2$ ……㉡

㉠$-$㉡에서 $b=a+5$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$a^2 - 8a = 0$, $a(a-8) = 0$, $a = 0$ 또는 $a = 8$

㉢에서 $a = 0$일 때 $b = 5$, $a = 8$일 때 $b = 13$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2 + (y-5)^2 = 5^2$ 또는 $(x-8)^2 + (y-13)^2 = 13^2$

227. 중심이 직선 $y = x$ 위에 있고 두 점 $(-6,\ 0)$, $(0,\ 6)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

227. 원의 중심을 $(a,\ a)$, 반지름의 길이를 r라고 하면

원의 방정식은 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$

두 점 $(-6,\ 0)$, $(0,\ 6)$을 지나므로

$(-6-a)^2 + (-a)^2 = r^2$, $(-a)^2 + (6-a)^2 = r^2$

두 식을 정리하면

$24a = 0$, $a = 0$

이때 $r^2 = 36$이므로 구하는 원의 방정식은

$x^2 + y^2 = 36$

228. 원 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$의 넓이가 직선 $y = 2x + k$에 의하여 이등분될 때, 상수 k의 값을 구하시오.

228. 방정식 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$을 변형하면

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$

직선 $y = 2x + k$가 이 원의 넓이를 이등분하려면

직선은 원의 중심 $(3,\ 2)$를 지나야 한다.

$2 = 2 \times 3 + k$, $k = -4$

229. 원 $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$ 위의 점 P와 직선 $3x + 4y + 18 = 0$ 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M + m$의 값을 구하시오.

229. $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$에서 $x^2 + (y-3)^2 = 16$

원의 중심 $(0,\ 3)$과 직선 $3x + 4y + 18 = 0$ 사이의 거리 d는 $d = \dfrac{|12 + 18|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6$

즉, 원 위의 점 P와 직선 $3x + 4y + 18 = 0$ 사이의 거리는 점 P가 점 A에 위치할 때 최소이고, 점 B에 위치할 때 최대가 된다.

이때 원의 반지름의 길이가 4이므로

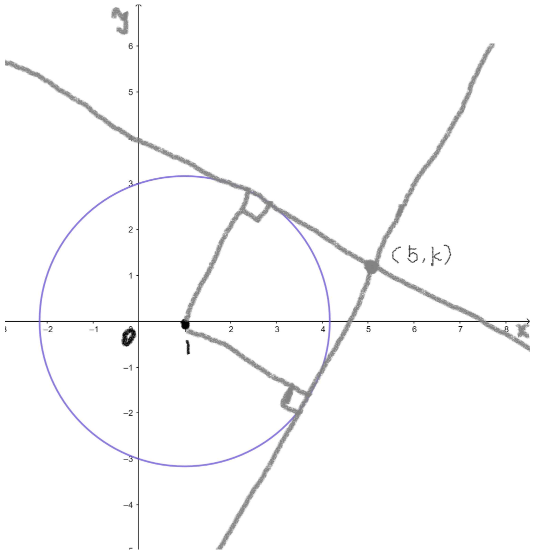
$M = 6 + 4 = 10$, $m = 6 - 4 = 2$, $M + m = 12$

230. 원 밖의 한 점 $(5,\ k)$에서 원 $(x-1)^2+y^2=10$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

230. 점 $(5,\ k)$에서 주어진 원에 그은 접선이 기울기를 m이라고 하면

접선의 방정식은 $y-k=m(x-5)$

이때 다음 그림과 같이 원의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 $mx-y-5m+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같아야 하므로



$\dfrac{|m\times 1-0-5m+k|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$, $|-4m+k|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16m^2-8km+k^2=10m^2+10$,

$6m^2-8km+(k^2-10)=0$

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{k^2-10}{6}=-1,\ k^2=4,\ k=\pm 2$

그런데 $k>0$이므로 $k=2$

231. 좌표평면 두 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, $(x-3)^2+(y-4)^2=1$이 직선 $ax+by+5=0$에 대하여 대칭일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수)

231. 두 원의 중심 $O_1(1,\ 2)$와 $O_2(3,\ 4)$가 직선 $ax+by+5=0$에 대여 대칭이므로

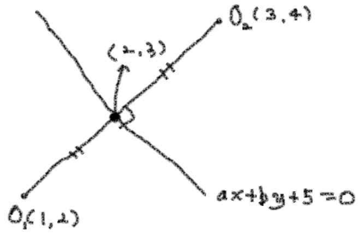
두 점의 중점 $(2,\ 3)$이 직선 위의 점이다.

$2a+3b+5=0$ ……㉠

이때 직선 O_1O_2의 기울기가 $\dfrac{4-2}{3-1}=1$이므로

$\left(-\dfrac{a}{b}\right)\times 1=-1,\ a=b$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=b=-1,\ a+b=-2$



232. 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 있다. 점 P를 지나는 접선이 점 $(6,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

232. 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은 $x^2+y^2=4$
이 원 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 지나는 접선의 방정식은 $ax+by-4=0$ ……㉠
점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=4$
한편 점 $(5,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원과 직선 ㉠이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(5,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 1보다 작아야 하므로
$$\frac{|5a-4|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$$
이때 $a^2+b^2=4$이므로 $|5a-4|<2$, $\frac{2}{5}<a<\frac{6}{5}$

233. 점 $(x,\ y)$를 점 $(x+a,\ y-2a)$로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $y=2x+3$을 평행이동 하였더니 직선 $y=2x-5$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

233. 점 $(x+a,\ y-2a)$는 점 $(x,\ y)$를
x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-2a$만큼 평행이동한 것이므로
직선 $y=2x+3$을 평행이동하면 $y+2a=2(x-a)+3$,
즉 $y=2x-4a+3$
$-4a+3=-5$이므로 $a=2$

234. 원 $x^2+4x+y^2-5=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동 하였더니 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$가 되었다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

234. 원의 방정식을 변형하면 $(x+2)^2+y^2=9$, 이 원을 평행이동하면
$(x-a+2)^2+(y-b)^2=9$

이 원이 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$이므로

$a=5$, $b=-1$, $a+b=4$

235. 직선 $2x+ay-3=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 도형이 자기 자신이 될 때, 상수 a의 값을 구하시오.

235. 직선 $2x+ay-3=0$을 대칭이동하면

$-2x-ay-3=0$, 즉 $2x+ay+3=0$

다시 평행이동하면 $2(x-a)+ay+3=0$

즉, $2x+ay-2a+3=0$

이 직선이 $2x+ay-3=0$이므로

$-2a+3=-3$, $a=3$

236. 이차함수 $y=x^2+4x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시켜 직선 $y=2x$와 서로 다른 두 점 P, Q에서 만나도록 할 때, 두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이 되었다. 이때 상수 a의 값을 구하여라.

236. $(x-a)^2+4(x-a)=2x$

$x^2-(2a-2)x+a^2-4a=0$

$x^2-(2a-2)x+a^2-4a=0$의 두 근의 합이 근과 계수의 관계에 의하여 0이다.

$2a-2=0$, $a=1$

237. 점 $\mathrm{P}(a, b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하였더니 점 $(3-2a, -b-1)$이 되었다. 이때 점 P의 좌표를 구하시오.

237. 점 $\mathrm{P}(a, b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (b, a)이고, 이 점을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(b+4, a-2)$이다.

점 $(b+4, a-2)$가 점 $(3-2a, -b-1)$이므로

$b+4=3-2a$ ……㉠

$a-2=-b-1$ ……㉡

㉡에서 $b=-a+1$

이것을 ㉠에 대입하면

$-a+1+4=3-2a$, $a=-2$, $b=3$

따라서 점 P의 좌표는 $(-2,\ 3)$

238. 직선 $3x+5y+2=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 $ax+by-2=0$이라 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

238. 직선 $3x+5y+2=0$을 원점에 대하여 대칭이동하면

$3\times(-x)+5\times(-y)+2=0$, $-3x-5y+2=0$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$-3y-5x+2=0$, $5x+3y-2=0$

따라서 $a=5$, $b=3$이므로

$a-b=5-3=2$

239. 직선 $4x-3y+a=0$을 x축에 대하여 대칭이동 하였더니 원 $(x+2)^2+(y-5)^2=4$와 접하였다. 상수 a의 값을 모두 구하시오.

239. 직선을 x축에 대하여 대칭이동하면

$4x+3y+a=0$

이 직선이 원과 접하므로 원의 중심 $(-2,\ 5)$와 직선 사이의 거리는

$\dfrac{|-8+15+a|}{\sqrt{25}}=2$, $|7+a|=10$

$a=3$ 또는 $a=-17$

240. 원 $C_1: x^2+y^2+4x-2y=0$과 원점을 중심으로 하는 원 C_2가 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b에 대하여 $2ab$의 값을 구하시오.

240. 원 $C_1: (x+2)^2+(y-1)^2=5$와 원 C_2는 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이므로 크기가 같다.

즉, 원 C_2의 방정식은 $x^2+y^2=5$이다.

두 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$, $x^2+y^2=5$가 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이므로 이 직선은 두 원의 중심 $(-2,\ 1)$과 $(0,\ 0)$을 지나는 선분을 수직이등분 한다.

두 원의 중심의 중점 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$은 직선 위에 있고 기울기의 곱은 -1

$\dfrac{1}{2}=-a+b$, $\dfrac{1}{-2}\times a=-1$, $a=2$, $b=\dfrac{5}{2}$

$2ab=2\times2\times\dfrac{5}{2}=10$

[실전수학 도전문제]

241. 두 점 A$(4,\ 2)$, B$(1,\ -3)$과 직선 $2x-y-1=0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오.

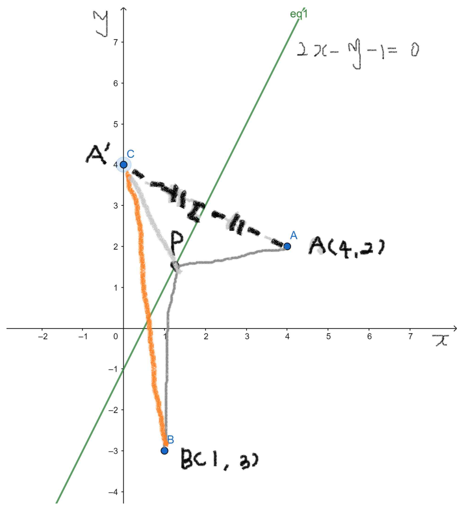
241. 점 A$(4,\ 2)$를 직선 $2x-y-1=0$에 대하여 대칭이동한 점을 A$'(a,\ b)$라 하면

선분 AA$'$의 중점 $\left(\dfrac{4+a}{2},\ \dfrac{2+b}{2}\right)$는 직선 $2x-y-1=0$ 위의 점이므로

$$2\times\frac{4+a}{2}-\frac{2+b}{2}-1=0$$

$\therefore\ 2a-b+4=0$ ……㉠

선분 AA$'$은 직선 $2x-y-1=0$을 수직이등분 하므로



$\dfrac{2-b}{4-a}\times 2=-1$, $a+2b=8$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$a=0$, $b=4$, A$'(0,\ 4)$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(-1)^2+7^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

242. 두 점 A$(-4,\ -2)$, B$(1,\ 10)$과 y축 위의 점 C$(0,\ k)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 넓이가 34일 때, k의 값을 구하시오. (단, $k<0$)

242. 두 점 A, B 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(1+4)^2+(10+2)^2}=13$

직선 AB의 방정식은 $y-10=\dfrac{10-(-2)}{1-(-4)}(x-1)$, $12x-5y+38=0$

점 C$(0,\ k)$에서 직선 AB까지의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|12\times 0-5k+38|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{|38-5k|}{13}$$

이때, $k<0$이므로 $h=\dfrac{38-5k}{13}$

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이가 24이므로

$\dfrac{1}{2}\times13\times\dfrac{38-5k}{13}=34$, $5k=-30$, $k=-6$

243. 좌표평면에서 원점과 직선 $x+y-3+k(x-y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라 할 때, $f(k)$의 최댓값을 구하시오.

243. $x+y-3+k(x-y)=0$, $(1+k)x+(1-k)y-3=0$

$f(k)=\dfrac{|-3|}{\sqrt{(1+k)^2+(1-k)^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{k^2+1}}$

$f(k)$의 최댓값은 분모가 최소일 때이므로

$k=0$일 때 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

244. 세 직선 $y=-x$, $y=mx+3$, $y=2x-3$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 실수 m의 값의 합을 구하시오.

244. (i) 직선 $y=mx+3$이 직선 $y=-x$ 또는 $y=2x-3$과 평행한 경우.

삼각형을 이루지 않으므로

$m=-1$ 또는 $m=2$

(ii) 직선 $y=mx+3$이 두 직선 $y=-x$, $y=2x-3$의 교점 $(1,\ -1)$을 지나는 경우.

삼각형을 이루지 않으므로

$-1=m+3$, $m=-4$

(i), (ii)에서 $m=-4$ 또는 $m=-1$ 또는 $m=2$, $(-4)+(-1)+2=-3$

245. 두 직선 $x+2y=5$, $y=2x-2$에 이르는 거리가 같은 y축 위의 점은 두 개가 있다. 이 두 점을 각각 $(0,\ a)$, $(0,\ b)$라 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

245. 두 직선 $x+2y=5$, $y=2x-2$로부터 같은 거리에 있는 y축 위의 점을 $(0,\ p)$라 하면

$\dfrac{|2p-5|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{|-p-2|}{\sqrt{4+1}}$

양변을 제곱하여 정리하면

$p^2-8p+7=0$, $(p-1)(p-7)=0$, $p=1$ 또는 $p=7$

$a+b=8$

246. 두 원 $x^2+y^2+2x-4y-6=0$, $x^2+y^2-18x-8y+6=0$의 교점과 원점을 지나는 원의 중심의 좌표를 구하시오.

246. 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2+2x-4y-6)+k(x^2+y^2-18x-8y+6)=0$

(단, $k\neq-1$) ……㉠

이 원이 원점을 지나므로

$-6+6k=0$, $k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-8x-6y=0$, $(x-4)^2+(y-3)^2=25$

따라서 구하는 중심의 좌표는 $(4,\ 3)$

247. 좌표평면 위의 점 $(3,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 구하시오.

247. 점 $(3,\ 3)$을 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식을 $y-3=m(x-3)$이라 하면 원의 중심인 원점에서 접선 $mx-y-3m+3=0$까지의 거리가 반지름의 길이 2와 같으므로

$\dfrac{|-3m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=2$, $|-3m+3|=2\sqrt{m^2+1}$, $9m^2-18m+9=4m^2+4$

$5m^2-18m+5=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 곱은 $-\dfrac{5}{5}=-1$이므로

두 접선의 기울기의 합은 -1

248. 점 $(2,\ a)$에서 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=16$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 모든 a의 값들의 합을 구하시오.

248. 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(2,\ a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-a=m(x-2)$, $mx-y-2m+a=0$

원의 중심 $(2,\ 3)$과 직선 $mx-y-2m+a=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 4와 같으므로

$\dfrac{|m\times2-3-2m+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=4$, $|a-3|=4\sqrt{m^2+1}$

양변을 각각 제곱하면

$a^2-6a+9=16(m^2+1)$, $16m^2-a^2+6a+7=0$ ……㉠

이때, 두 접선이 서로 수직이므로 두 접선의 기울기의 곱은 -1이다.

두 접선의 기울기는 m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에서

$\dfrac{-a^2+6a+7}{16}=-1$, $a^2-6a-23=0$

따라서 근과 계수의 관계에서 구하는 모든 a의 값들의 합은 6

249. 점 P를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 Q, x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점을 R라 하자. 두 점 Q, R가 일치할 때, 점 P의 좌표를 구하시오.

249. 점 P의 좌표를 P$(a,\ b)$라 하면

원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a,\ -b)$이므로

점 Q의 좌표는 $(-a,\ -b)$이다.

또, x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점 R의 좌표는

$(a+4,\ b-6)$이다.

이때, 두 점 Q, R가 일치하므로

$-a=a+4$ ……㉠

$-b=b-6$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$a=-2$, $b=3$

따라서 점 P의 좌표는 P$(-2,\ 3)$

250. 점 $(-2,\ 3)$을 지나는 직선 l을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(7,\ 3)$을 지났다. 이때, 직선 l의 방정식을 구하시오.

250. 점 $(-2,\ 3)$을 지나는 직선 l의 기울기를 m이라 할 때, 직선 l의 방정식은

$y=m(x+2)+3$

이 직선을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$y+2=m(x-3+2)+3$, $\quad y=m(x-1)+1$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x=m(y-1)+1$

이 직선이 점 $(7,\ 3)$을 지나므로

$7=m(3-1)+1$, $2m=6$, $m=3$

따라서 직선 l의 방정식은

$y=3(x+2)+3$, $\quad y=3x+9$