이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

2015 개정 교육과정에서 달라지는 점은

• 수학 I
지수함수와 로그함수: 두 대단원 '지수와 로그', '지수함수와 로그함수'가 결합
삼각함수: 사인법칙, 코사인법칙의 귀환 & sec, csc, cot가 미적분 과목으로 이동
수열: 주기함수 관련 문제 출제 가능

• 수학 II
함수의 극한과 연속: 주기함수 관련 문제 출제 가능
미분: 주기함수 관련 문제 출제 가능
적분: 주기함수 관련 문제 출제 가능 & 구분구적분 퇴출

• 미적분
수열의 극한: 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 출제 가능
미분법: 매개변수의 미분법, 음함수의 미분법의 귀환
적분법: 구분구적법은 이과 전용

• 확률과 통계
경우의 수: 순열, 조합 고1 과정으로 이동, 분할(정수/자연수) 퇴출
확률: 변화 없음
통계: 모비율 퇴출

• 기하 (2021 수능에서는 제외)
이차곡선: 기울기가 주어진 접선의 공식 귀환 & 사인법칙, 코사인 법칙 관련 문제 출제 가능
평면벡터: 라디안이 아닌 육십분법 사용 & 벡터의 내적의 정의를 성분으로 함
공간도형과 공간좌표: 공간벡터, 공간에서의 벡터의 방정식 퇴출

2020 수능에서 보여준 출제 경향의 변화는

• 가형16(확률과 통계): 경우의 수를 셀 때 CASE구분을 해야 하는 경우와 하지 말아야 하는 경우를 판단하는 것에 대한 평가 강화!
• 가형21(미적분): 변화 없음이 경향성. 특별한 발상 없이 기출문제에서 연습했던 전형적인 풀이를 적용할 것!
• 가형28(확률과 통계): 사실상 국어영역. 문제를 정확하게 이해하는 것도 이젠 중요한 평가요소.
• 가형30(미적분): 변화 없음이 경향성. 특별한 발상 없이 기출문제에서 연습했던 전형적인 풀이를 적용할 것!

• 나형12(수학2): 사차함수의 그래프의 개형을 알고 있다면 좀 더 빠르게 풀리는 문제. 이젠 실전이론도 평가대상.
• 나형20(수학2): 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 이론을 노골적으로 출제한 문제. 이젠 실전이론도 평가대상.
• 나형21(수학1): 수열을 나열하기 전에 '어떤 규칙이 나올 것인가?'를 알고 있어야 하는 문제. (수열도 21번에 출제 가능!)
• 나형30(수학2): 삼차함수의 수평화와 비율관계를 알고 있으면 어렵지 않은 문제. 이젠 실전이론도 평가대상.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

2021학년도 수능의 시작입니다!

학년도	시험	실시년도/월	학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정			2009	모의평가(9월)	2008년 9월
1991	실험평가(1차)	1990년 12월	2009	대학수학능력	2008년 11월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월	2010	모의평가(6월)	2009년 6월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월	2010	모의평가(9월)	2009년 9월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월	2010	대학수학능력	2009년 11월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월	2011	모의평가(6월)	2010년 6월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월	2011	모의평가(9월)	2010년 9월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월	2011	대학수학능력	2010년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월	2007개정 교육과정		
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월	2012	모의평가(6월)	2011년 6월
1995	대학수학능력	1994년 11월	2012	모의평가(9월)	2011년 9월
1996	대학수학능력	1995년 11월	2012	대학수학능력	2011년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월	2014	예비시행	2012년 5월
1998	대학수학능력	1997년 11월	2013	모의평가(6월)	2012년 6월
6차 교육과정			2013	모의평가(9월)	2012년 9월
1999	대학수학능력	1998년 11월	2013	대학수학능력	2012년 11월
2000	대학수학능력	1999년 11월	2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2001	대학수학능력	2000년 11월	2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2002	대학수학능력	2001년 11월	2014	대학수학능력	2013년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월	2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2003	대학수학능력	2002년 11월	2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월	2015	대학수학능력	2014년 11월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월	2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2004	대학수학능력	2003년 11월	2016	모의평가(9월)	2015년 9월
7차 교육과정			2016	대학수학능력	2015년 11월
2005	예비시행	2003년 12월	2009개정 교육과정		
2005	모의평가(6월)	2004년 6월	2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월	2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2005	대학수학능력	2004년 11월	2017	대학수학능력	2016년 11월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월	2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월	2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2006	대학수학능력	2005년 11월	2018	대학수학능력	2017년 11월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월	2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월	2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월	2019	대학수학능력	2018년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월	2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월	2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월	2020	대학수학능력	2019년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월			

각 과목별 문항 수 및 비율 (총 3617 문항)

수학 Ⅰ	수학 Ⅱ	미적분	확률과 통계	기하	수학	교육과정 外
541	329	522	468	206	300	1251
14.9 %	9.0 %	14.4 %	12.9 %	5.7 %	8.3 %	34.8 %

※ 수학, 교육과정 外 문제집과 해설집은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 무료PDF파일 다운로드 가능

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목 차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

1. 지수와 로그

2. 지수함수와 로그함수

- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함

○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록

A. 거듭제곱과 거듭제곱근

A001
○
(2001-인문1/예체능1/자연1)

$(\sqrt{2})^5$의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

A002
○
(2003-인문1/예체능1/자연1)

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}$ 을 간단히 하면? [2점]

① 2 ② 4 ③ $\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt[3]{2}$

A003
○○
(2003-인문22/예체능22/자연22)

겨울철에 바람이 불면 바람이 불지 않을 때보다 더 춥게 느껴진다. 이와 같이 실제 느껴지는 온도를 체감온도라고 하며, 기온을 t, 풍속을 v, 복사량을 I라고 할 때 체감온도 T는 다음과 같다고 한다.

$$T=t-4\sqrt{v}+12I$$

어느 해의 대학수학능력시험 날, 어떤 지역의 오후의 기온은 오전보다 6도 상승했지만 오후의 풍속이 오전의 4배가 되어 체감온도는 변하지 않았다. 이 지역의 그날 오전의 풍속은? (단, 그날 오전과 오후의 복사량 I의 값은 같았다.) [3점]

① 3 ② 2.75 ③ 2.5
④ 2.25 ⑤ 2

A004
○○
(2005(9)-나형5)

세 수 $A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}$, $B=\sqrt{5}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{28}}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? [3점]

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

A005
○○○
(2007(9)-나형20)

세 양수 a, b, c에 대하여 $a^6=3$, $b^5=7$, $c^2=11$일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

A006
○
(2009(6)-가형1/나형1)

$\left(\sqrt{2\sqrt{6}}\right)^4$의 값은? [2점]

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

A. 지수의 확장

A007

○○ (1992(실험평가2차)-공통16)

$a=3^{x+2}$일 때, 27^x을 a에 관한 식으로 나타내면?

① $\dfrac{a^3}{3^2}$ ② $\dfrac{a^3}{3^3}$ ③ $\dfrac{a^3}{3^4}$

④ $\dfrac{a^3}{3^5}$ ⑤ $\dfrac{a^3}{3^6}$

A008

○ (1998-인문예체능1/자연1)

$\left\{\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{8}{27}$ ② $\dfrac{16}{61}$ ③ $\dfrac{81}{16}$

④ $\dfrac{27}{8}$ ⑤ $\dfrac{64}{81}$

A009

○○ (1999-예체능7)

$2^a=c,\ 2^b=d$일 때 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2a+b}$ 와 같은 것은? [3점]

① $\dfrac{1}{cd}$ ② $\dfrac{1}{2cd}$ ③ $\dfrac{1}{c^2d}$

④ $-cd$ ⑤ $-2cd$

A010

○ (2005(예비)-가형1/나형1)

다음 식을 간단히 하면? [2점]

$$10^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{2}{3}}\times 5^{-\frac{1}{6}}$$

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$

④ 5 ⑤ $\sqrt{10}$

A011

○ (2005(6)-가형1/나형1)

$25^{-\frac{3}{2}}\times 100^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

A012

○ (2005-가형1/나형1)

$3^{\frac{2}{3}}\times 9^{\frac{3}{2}}\div 27^{\frac{8}{9}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3

④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

A013
○○ (2006(6)−나형4)

$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}$일 때, $\sqrt[6]{6}$을 a, b로 나타낸 것은? [3점]

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$
④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

A014
○ (2006(9)−가형1/나형1)

$4^{-\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{5}{3}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

A015
○ (2006−가형1/나형1)

$5^{\frac{2}{3}}\times 25^{-\frac{5}{6}}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{25}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ 1
④ 5 ⑤ 25

A016
○ (2007(6)−가형1/나형1)

$(3\cdot 9^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{5}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt[3]{3}$ ② $\sqrt[3]{3^2}$ ③ 3
④ $\sqrt[3]{3^4}$ ⑤ $\sqrt[3]{3^5}$

A017
○○ (2008(9)−나형4)

다음 식을 간단히 한 것은? [3점]

$$(2^{x+y}+2^{x-y})^2-(2^{x+y}-2^{x-y})^2$$

① 2^{2x} ② 2^{2x+2} ③ 2^{2x+2y}
④ 2^{-2y} ⑤ 2^{-2y+2}

A018
○○ (2008−나형4)

$a=\sqrt{2}$, $b^3=\sqrt{3}$일 때, $(ab)^2$의 값은? (단, b는 실수이다.) [3점]

① $2\cdot 3^{\frac{1}{3}}$ ② $2\cdot 3^{\frac{2}{3}}$ ③ $2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}$
④ $3\cdot 2^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $3\cdot 2^{\frac{2}{3}}$

A019
○○ (2009(9)−나형20)

두 실수 a, b가 $3^{a+b}=4$, $2^{a-b}=5$를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오. [3점]

A020
○○ (2010(6)−나형4)

실수 a가 $\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, 4^a+4^{-a}의 값은? [3점]

① $\dfrac{5}{2}$　② $\dfrac{10}{3}$　③ $\dfrac{17}{4}$
④ $\dfrac{26}{5}$　⑤ $\dfrac{37}{6}$

A021
○○ (2010−가형10/나형10)

조개류는 현탁물을 여과한다. 수온이 t(℃)이고 개체중량이 w(g)일 때, A조개와 B조개가 1시간 동안 여과하는 양(L)을 각각 Q_{A}, Q_{B}라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$Q_{\mathrm{A}}=0.01t^{1.25}w^{0.25}$$
$$Q_{\mathrm{B}}=0.05t^{0.75}w^{0.30}$$

수온이 20℃이고 A조개와 B조개의 개체중량이 각각 8g일 때, $\dfrac{Q_{\mathrm{A}}}{Q_{\mathrm{B}}}$의 값은 $2^a\times5^b$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 유리수이다.) [3점]

① 0.15　② 0.35　③ 0.55
④ 0.75　⑤ 0.95

A022
○○ (2011(9)−가형6/나형6)

양수기로 물을 끌어올릴 때, 펌프의 1분당 회전수 N, 양수량 Q, 양수할 높이 H와 양수기의 비교회전도 S 사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$$S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$$

(단, N, Q, H의 단위는 각각 rpm, m^3/분, m이다.)

펌프의 1분당 회전수가 일정한 양수기에 대하여 양수량이 24, 양수할 높이가 5일 때의 비교회전도를 S_1, 양수량이 12, 양수할 높이가 10일 때의 비교회전도를 S_2라 하자. $\dfrac{S_1}{S_2}$의 값은? [3점]

① $2^{\frac{3}{4}}$　② $2^{\frac{7}{8}}$　③ 2
④ $2^{\frac{9}{8}}$　⑤ $2^{\frac{5}{4}}$

A023
○○○ (2011(9)−나형26)

$1\le m\le3$, $1\le n\le8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는? [3점]

① 6　② 8　③ 10
④ 12　⑤ 14

A024
○○○
(2013(9)−나형6)

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

A025
○○○
(2013−나형26)

$2 \le n \le 100$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. [4점]

A026
○
(2014(6)−A형1)

$4^{\frac{1}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

A027
○○
(2014(6)−A형15/B형24)

지면으로부터 H_1인 높이에서 풍속이 V_1이고 지면으로부터 H_2인 높이에서 풍속이 V_2일 때, 대기 안정도 계수 k는 다음 식을 만족시킨다.

$$V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

(단, $H_1 < H_2$이고, 높이의 단위는 m, 풍속의 단위는 m/초이다.)

A지역에서 지면으로부터 12m와 36m인 높이에서 풍속이 각각 2(m/초)와 8(m/초)이고, B지역에서 지면으로부터 10m와 90m인 높이에서 풍속이 각각 a(m/초)와 b(m/초)일 때, 두 지역의 대기 안정도 계수 k가 서로 같았다. $\frac{b}{a}$의 값을 구하시오. (단, a, b는 양수이다.) [3점]

A028

(2017(6)-나형1)

$2^0 \times 9^{\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

A029

(2017-나형1)

8×2^{-2}의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 4　④ 8　⑤ 16

A030

(2018(6)-나형1)

$3 \times 27^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 3　② 6　③ 9　④ 12　⑤ 15

A031

(2018(9)-나형1)

$3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

A. 로그의 뜻과 성질

A032

(1994(1차)-공통1)

a, x, y가 양의 실수이고 $A = \log_a \dfrac{x^2}{y^3}$, $B = \log_a \dfrac{y^2}{x^3}$일 때, $3A + 2B$와 같은 것은? (단, $a \neq 1$이다.)

① $\log_a \dfrac{1}{x^5}$　② $\log_a \dfrac{1}{y^5}$　③ $\log_a \dfrac{1}{xy}$　④ $\log_a \dfrac{x^5}{y^5}$　⑤ $\log_a \dfrac{x^5}{y^7}$

A033

(1999-인문1/예체능1/자연1)

$\log_2 6 - \log_2 \dfrac{3}{2}$의 값은? [2점]

① 0　② -1　③ 1　④ -2　⑤ 2

A034

(2000-인문1/예체능1/자연1)

$\log_7 \dfrac{1}{\sqrt{7}}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 0　④ $-\dfrac{1}{2}$　⑤ $-\dfrac{1}{4}$

A035
○ (2001-인문17/예체능17/자연17)

다음은 지수법칙 $a^{r+s}=a^r a^s$ 으로부터 모든 양수 x, y에 대하여

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

가 성립함을 증명한 것이다. (단, $a \neq 1$, $a>0$)

〈증명〉 $r=\log_a x$, $s=\log_a y$로 놓으면 $a^r = x$, $a^s = \boxed{\text{(가)}}$ 지수법칙으로부터 $a^{r+s} = \boxed{\text{(나)}}$ 로그의 정의에 의하여 $r+s=\log_a \boxed{\text{(나)}}$ 그러므로 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$이다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [3점]

① x, $x+y$ ② y, $x+y$ ③ x, xy

④ y, xy ⑤ x, $\dfrac{x}{y}$

A036
○ (2001-예체능27)

$\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+\log_2 16$의 값을 구하시오. [2점]

A037
○ (2002-인문2/예체능2)

$\log_2 (4^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{2^5})^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 1 ③ 0

④ -1 ⑤ -2

A038
○ (2003(9)-예체능4)

$\log_{\sqrt{2}} 2 - \log_2 \sqrt{2}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1

④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

A039
○ (2003-예체능26)

$\log_2 \dfrac{24}{5} + \log_2 \dfrac{80}{3}$ 의 값을 구하시오. [2점]

A040
○ (2004(6)-인문1/예체능1/자연1)

$\log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{2}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$

④ $\dfrac{5}{6}$ ⑤ 1

A041
○○ (2004(6)-예체능11)

두 양수 x와 y가 $2\log_{10} x + \log_{10} y = 2$를 만족시킬 때, x^2+y의 최솟값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20

④ 25 ⑤ 40

A042
(2004(9)-인문25/예체능25/자연25)

$\log_2 x + \log_4 \dfrac{1}{x} = 5$일 때, $\log_4 x - \log_2 \dfrac{1}{x}$의 값을 구하시오. [2점]

A043
(2004-인문1/예체능1/자연1)

$\log_3 12 + \log_3 9 - \log_3 4$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A044
(2005(예비)-나형14)

다음은 $\log_a b$를 임의의 양수 $c(c \neq 1)$를 밑으로 하는 로그로 바꾸어 나타낼 수 있음을 증명한 것이다.

〈증명〉
$\log_a b = x$, $\log_c a = y$라고 하면 $a^x = b$, $c^y = a$이다.
이때, $b = c^{\boxed{(가)}}$이므로 $\boxed{\quad (가) \quad} = \log_c b$이다.
즉, $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$ 이다.
여기서 $\boxed{\quad (나) \quad}$이므로 $\log_c a \neq 0$이다.
따라서 $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$이다.

위의 증명에서 (가)와 (나)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)
①	xy	$a \neq 1$
②	xy	$a > 0$
③	$x+y$	$a \neq 1$
④	$x+y$	$a > 0$
⑤	$\dfrac{x}{y}$	$a \neq 1$

A045
(2005(6)-나형4)

$\log_{\sqrt{3}} x = 4$, $\log_3 y = 6$일 때, $\log_x y$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A046
(2005(6)-나형18)

$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{32} \cdot \log_2 \dfrac{1}{16}$의 값을 구하시오. [3점]

A047
(2005(9)-가형7/나형7)

$a = \log_7 \sqrt{7 - \sqrt{48}}$ 일 때, $\dfrac{7^{2a} - 7^{-2a}}{7^{2a} + 7^{-2a}}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{6\sqrt{3}}{7}$ ② $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$
④ $-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $-\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

해설 목차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

1	⑤	2	①	3	④	4	②	5	30
6	⑤	7	⑤	8	④	9	③	10	③
11	④	12	③	13	①	14	④	15	②
16	③	17	②	18	①	19	25	20	②
21	②	22	⑤	23	④	24	②	25	16
26	③	27	16	28	③	29	②	30	③
31	③	32	②	33	⑤	34	④	35	④
36	10	37	①	38	⑤	39	7	40	⑤
41	③	42	15	43	③	44	①	45	③
46	10	47	④	48	③	49	①	50	③
51	⑤	52	32	53	④	54	④	55	④
56	58	57	③	58	①	59	②	60	20
61	④	62	①	63	15	64	②	65	③
66	25	67	②	68	②	69	①	70	78
71	④	72	③	73	①	74	6	75	①
76	②	77	②	78	75	79	⑤	80	10
81	14	82	20	83	54	84	②	85	⑤
86	④	87	④	88	31	89	④	90	③
91	84	92	③	93	③	94	①	95	②
96	②	97	①	98	20	99	③	100	③
101	①	102	④	103	①	104	①	105	②
106	32	107	⑤	108	②	109	④	110	18
111	③	112	10	113	④	114	④	115	⑤
116	②	117	⑤	118	③	119	16	120	④
121	③	122	13	123	④	124	④	125	④
126	16	127	②	128	259	129	53	130	①
131	⑤	132	⑤	133	③	134	③	135	⑤
136	①	137	④	138	①	139	①	140	③
141	②	142	⑤	143	④	144	③	145	④
146	25	147	③	148	③	149	②	150	25
151	18	152	⑤	153	128	154	③	155	①
156	17	157	13	158	27	159	65	160	3
161	⑤	162	④	163	②	164	10	165	36
166	⑤	167	⑤	168	③	169	③	170	①
171	①	172	18	173	①	174	②	175	③
176	⑤	177	15	178	②	179	④	180	③
181	16	182	20	183	④	184	12	185	③
186	17	187	⑤	188	④	189	④	190	③
191	12	192	19	193	4	194	27	195	①
196	14	197	②	198	③	199	③	200	②

201	1	202	②	203	②	204	④	205	⑤
206	80	207	③	208	16	209	①	210	②
211	⑤	212	③	213	④	214	⑤	215	81
216	②	217	36	218	63	219	14	220	②
221	⑤	222	③	223	①	224	②	225	15
226	②	227	392	228	39	229	15	230	196
231	573	232	120	233	86	234	79	235	120
236	②	237	②	238	②	239	①	240	①
241	④	242	11.25	243	12	244	②	245	②
246	②	247	②	248	416	249	①	250	②
251	10	252	④	253	②	254	③	255	①

A001 | 답 ⑤

[풀이]

거듭제곱근의 성질에 의하여

$(\sqrt{2})^5 = \sqrt{2^5} = \sqrt{4^2\times 2} = \sqrt{4^2}\times\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

답 ⑤

A002 | 답 ①

[풀이]

거듭제곱근의 성질에 의하여

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16} = \sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{\sqrt{16}} = \sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$

답 ①

A003 | 답 ④

[풀이]

오전의 기온과 풍속을 각각 t_0, v_0이라고 하면

오후의 기온과 풍속은 각각 t_0+6, $4v_0$이다.

오전의 체감온도를 T_0이라고 하면

$T_0 = t_0 - 4\sqrt{v_0} + 12I$

오후의 체감온도를 T_1이라고 하면

$T_1 = (t_0+6) - 4\sqrt{4v_0} + 12I$

$= T_0 - 4\sqrt{v_0} + 6$ ($\because$ 거듭제곱근의 성질)

주어진 조건에서 $T_0 = T_1$이므로

$4\sqrt{v_0} = 6$

$\therefore\ v_0 = \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$

답 ④

A004 |답 ②

[풀이]

거듭제곱근의 성질에 의하여

$A = \sqrt[3]{\sqrt{10}} = \sqrt[6]{10}$

$B = \sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$

$C = \sqrt[3]{\sqrt{28}} = \sqrt[6]{28}$

세 양수 A, B, C에 대하여

$A^6 < C^6 < B^6$이므로

$\therefore\ A < C < B$

답 ②

A005 |답 30

[풀이]

거듭제곱근의 정의에 의하여

$a = \sqrt[6]{3}$, $b = \sqrt[5]{7}$, $c = \sqrt{11}$

거듭제곱근의 성질에 의하여

$a^n = \sqrt[6]{3^n}$, $b^n = \sqrt[5]{7^n}$, $c^n = \sqrt{11^n}$

3, 7, 11의 최대공약수가 1이므로

$(abc)^n$이 자연수가 되려면 세 수

a^n, b^n, c^n이 자연수가 되어야 한다.

따라서 n의 최솟값은 6, 5, 2의 최소공배수이다.

$\therefore\ n \geq 30$

답 30

A006 |답 ⑤

[풀이]

거듭제곱근의 성질에 의하여

$\left(\sqrt{2\sqrt{6}}\right)^4 = \sqrt{2^4\left(\sqrt{6}\right)^4} = \sqrt{16 \times 36}$

$= \sqrt{(4 \times 6)^2} = 24$

답 ⑤

A007 |답 ⑤

[풀이]

지수법칙에 의하여

$a = 3^x \times 3^2$ 즉, $3^x = \dfrac{a}{3^2}$

지수법칙에 의하여

$27^x = (3^3)^x = (3^x)^3 = \left(\dfrac{a}{3^2}\right)^3 = \dfrac{a^3}{3^6}$

답 ⑤

A008 |답 ④

[풀이]

지수법칙에 의하여

$\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}^{-\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{3}}$

지수법칙에 의하여

$\left\{\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}} = \left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{3}\times\frac{9}{4}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \dfrac{27}{8}$

답 ④

A009 |답 ③

[풀이]

지수법칙에 의하여

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2a+b} = 2^{-2a} \times 2^{-b} = (2^a)^{-2} \times (2^b)^{-1}$

$= c^{-2} \times d^{-1} = \dfrac{1}{c^2 d}$

답 ③

A010 |답 ③

[풀이]

지수법칙에 의하여

$10^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}}$

$= (2 \times 5)^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{6}}$

$= 2^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 2^0 \times 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

답 ③

A011 |답 ④

[풀이]

지수법칙에 의하여

$25^{-\frac{3}{2}} \times 100^{\frac{3}{2}} = (5^2)^{-\frac{3}{2}} \times (2^2 \times 5^2)^{\frac{3}{2}}$

$=2^3\times5^{-3+3}=8$

답 ④

A012 | 답 ③

[풀이]

지수법칙에 의하여

$3^{\frac{2}{3}}\times9^{\frac{3}{2}}\div27^{\frac{8}{9}}$

$=3^{\frac{2}{3}}\times(3^2)^{\frac{3}{2}}\div(3^3)^{\frac{8}{9}}$

$=3^{\frac{2}{3}}\times3^{2\times\frac{3}{2}}\div3^{3\times\frac{8}{9}}$

$=3^{\frac{2}{3}+3-\frac{8}{3}}=3^1=3$

답 ③

A013 | 답 ①

[풀이]

거듭제곱근의 성질과 유리수 지수의 정의에 의하여

$\sqrt[6]{6}=\sqrt[6]{2}\,\sqrt[6]{3}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,\sqrt{\sqrt[3]{3}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

답 ①

A014 | 답 ④

[풀이]

지수법칙에 의하여

$4^{-\frac{1}{2}}\times8^{\frac{5}{3}}=(2^2)^{-\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{5}{3}}$

$=2^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3\times\frac{5}{3}}=2^4=16$

답 ④

A015 | 답 ②

[풀이]

지수법칙에 의하여

$5^{\frac{2}{3}}\times25^{-\frac{5}{6}}=5^{\frac{2}{3}}\times(5^2)^{-\frac{5}{6}}$

$=5^{\frac{2}{3}}\times5^{2\times\left(-\frac{5}{6}\right)}=5^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}}=5^{-1}=\frac{1}{5}$

답 ②

A016 | 답 ③

[풀이]

지수법칙에 의하여

$(3\cdot9^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{5}}=(3\cdot3^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{5}}=3^{\left(1+\frac{2}{3}\right)\frac{3}{5}}=3$

답 ③

A017 | 답 ②

[풀이]

곱셈공식과 지수법칙에 의하여

$(2^{x+y}+2^{x-y})^2-(2^{x+y}-2^{x-y})^2$

$=(2^{x+y}+2^{x-y}+2^{x+y}-2^{x-y})$

$\times(2^{x+y}+2^{x-y}-2^{x+y}+2^{x-y})$

$=2^{x+y+1}\times2^{x-y+1}$

$=2^{x+y+1+x-y+1}=2^{2x+2}$

답 ②

A018 | 답 ①

[풀이]

거듭제곱근의 정의에 의하여

$b=\sqrt[3]{\sqrt{3}}$

거듭제곱근의 성질에 의하여

$b=\sqrt[3]{\sqrt{3}}=\sqrt[6]{3}$

거듭제곱근의 성질에 의하여

$(ab)^2=a^2b^2=(\sqrt{2})^2(\sqrt[6]{3})^2=2\cdot\sqrt[3]{3}$

유리수 지수의 정의에 의하여

$(ab)^2=2\cdot3^{\frac{1}{3}}$

답 ①

A019 | 답 25

[풀이1]

지수법칙에 의하여

$3^{a^2-b^2}=3^{(a+b)(a-b)}=(3^{a+b})^{a-b}$

$=4^{a-b}=(2^{a-b})^2=5^2=25$

답 25

[풀이2] (상용로그)

로그의 정의에서

$a+b=\log_3 4$, $a-b=\log_2 5$

이 두 등식을 변변히 곱하면

$a^2-b^2=(\log_3 4)(\log_2 5)$

$=\dfrac{\log 4}{\log 3}\times\dfrac{\log 5}{\log 2}$

($\because$ 로그의 밑의 변환의 공식)

$=\dfrac{2\log 2}{\log 3}\times\dfrac{\log 5}{\log 2}$

($\because$ 로그의 성질)

$=\dfrac{2\log 5}{\log 3}=\log_3 25$

($\because$ 로그의 밑의 변환의 공식)

로그의 정의에서

$\therefore\ 3^{a^2-b^2}=25$

답 25

A020 |답 ②

[풀이1]

주어진 등식을 변형하면

$\dfrac{(2^a+2^{-a})\times 2^a}{(2^a-2^{-a})\times 2^a}=-2$

지수법칙에 의하여

$\dfrac{4^a+1}{4^a-1}=-2$ 풀면 $4^a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ 4^a+4^{-a}=\dfrac{1}{3}+3=\dfrac{10}{3}$

답 ②

[풀이2]

주어진 등식의 양변에 2^a-2^{-a}을 곱하면

지수법칙에 의하여

$2^a+2^{-a}=-2^{a+1}+2^{-a+1}$

양변에 양수 2^a을 곱하면

지수법칙에 의하여

$2^{2a}+1=-2\cdot 2^{2a}+2$

정리하면

$3\cdot 2^{2a}=1$ 즉, $4^a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ 4^a+4^{-a}=\dfrac{1}{3}+3=\dfrac{10}{3}$

답 ②

A021 |답 ②

[풀이]

지수법칙에 의하여

$\dfrac{Q_A}{Q_B}=\dfrac{0.01\times 20^{1.25}\times 8^{0.25}}{0.05\times 20^{0.75}\times 8^{0.30}}$

$=\dfrac{1}{5}\times 20^{0.5}\times 8^{-0.05}$

$=5^{-1}\times(2^2\times 5)^{0.5}\times(2^3)^{-0.05}$

$=2^{2\times 0.5-3\times 0.05}\times 5^{-1+0.5}$

$=2^{0.85}\times 5^{-0.5}=2^a\times 5^b$

a, b가 유리수이므로

$a=0.85$, $b=-0.5$

$\therefore\ a+b=0.35$

답 ②

A022 |답 ⑤

[풀이]

주어진 조건에서

$S_1=N\times 24^{\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{3}{4}}$

$S_2=N\times 12^{\frac{1}{2}}\times 10^{-\frac{3}{4}}$

지수법칙에 의하여

$\therefore\ \dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{N\times 24^{\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{3}{4}}}{N\times 12^{\frac{1}{2}}\times 10^{-\frac{3}{4}}}=\dfrac{(2^3 3)^{\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{3}{4}}}{(2^2 3)^{\frac{1}{2}}\times(2\times 5)^{-\frac{3}{4}}}$

$=2^{\frac{3}{2}-2\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$

답 ⑤

A023 |답 ④

[풀이]

유리수 지수의 정의에 의하여

$\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$

(1) $m=1$인 경우

$n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되는 n은 1, 8이다.

(2) $m=2$인 경우

$n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되는 n은 1, 8이다.

(3) $m=3$인 경우

$n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되는 n은 1, 2, ⋯, 8이다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 12개다.

답 ④

A024 |답 ②

[풀이]

유리수 지수의 정의와 지수법칙에 의하여

$\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$

$2\sqrt[3]{4}=2^{\frac{5}{3}}$

$\sqrt{2\sqrt[3]{4}}=2^{\frac{5}{6}}$

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}$

그런데 $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로 주어진 실수보다 큰 자연수 중에서 가장 작은 것은 6이다.

답 ②

A025 |답 16

[풀이]

어떤 자연수를 x로 두자.
거듭제곱근의 정의에 의하여

$\sqrt[n]{x}=(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$

유리수 지수의 정의에 의하여

$x^{\frac{1}{n}}=(3^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}$

지수법칙에 의하여

$x^{\frac{1}{n}}=3^{\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}$

정리하면

$x^6=3^{5n}$

자연수 x의 인수는 오직 3뿐이다.
이제 $x=3^k$(k는 자연수)로 두면

$3^{6k}=3^{5n}$

방정식을 풀면

$6k=5n$

$\frac{n}{k}=\frac{6}{5}=\frac{12}{10}=\frac{18}{15}=\cdots=\frac{96}{80}$

따라서 자연수 n의 개수는 16이다.

답 16

A026 |답 ③

[풀이]

지수법칙에 의하여

$4^{\frac{1}{2}}\times 27^{\frac{1}{3}}=2^{2\times\frac{1}{2}}\times 3^{3\times\frac{1}{3}}=6$

답 ③

A027 |답 16

[풀이1]

문제에서 주어진 등식을 변형하면

$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

$H_1=12$, $H_2=36$, $V_1=2$, $V_2=8$을
주어진 등식에 대입하면

$4=3^{\frac{2}{2-k}}$ ⋯㉠

$H_1=10$, $H_2=90$, $V_1=a$, $V_2=b$를
주어진 등식에 대입하면

$\frac{b}{a}=9^{\frac{2}{2-k}}$ ⋯㉡

㉠의 양변을 제곱하면 지수법칙에 의하여

$16=9^{\frac{2}{2-k}}$

이를 ㉡과 비교하면

$\therefore\ \frac{b}{a}=16$

답 16

[풀이2] (로그)

$H_1=12$, $H_2=36$, $V_1=2$, $V_2=8$을
주어진 등식에 대입하면

$8=2\left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$

정리하면

$4=3^{\frac{2}{2-k}}$

로그의 정의에 의하여

$\frac{2}{2-k}=\log_3 4$

주어진 등식은

$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\log_3 4}$

$H_1=10$, $H_2=90$, $V_1=a$, $V_2=b$를
주어진 등식에 대입하면

$\frac{b}{a}=\left(\frac{90}{10}\right)^{\log_3 4}$

정리하면

$\frac{b}{a}=9^{\log_3 4}$

양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3\frac{b}{a}=(\log_3 4)(\log_3 9)$

$\log_3 9=2$이므로

$\log_3\frac{b}{a}=2\log_3 4$

로그의 성질에 의하여

$\log_3\frac{b}{a}=\log_3 4^2=\log_3 16$

방정식을 풀면

$\therefore\ \frac{b}{a}=16$

답 16

A028 | 답 ③

[풀이]

유리수 지수의 정의와 거듭제곱근의 정의에 의하여

$2^0\times 9^{\frac{1}{2}}=1\times\sqrt{9}=3$

답 ③

A029 | 답 ②

[풀이1]

지수법칙에 의하여

$8\times 2^{-2}=2^3\times 2^{-2}=2^{3-2}=2$

답 ②

[풀이2]

음의 정수인 지수의 정의에 의하여

$8\times 2^{-2}=8\times\frac{1}{2^2}=8\times\frac{1}{4}=2$

답 ②

A030 | 답 ③

[풀이1]

유리수인 지수의 정의와 거듭제곱근의 정의에 의하여

$3\times 27^{\frac{1}{3}}=3\times\sqrt[3]{27}=3\times 3=9$

답 ③

[풀이2]

지수법칙에 의하여

$3\times 27^{\frac{1}{3}}=3\times(3^3)^{\frac{1}{3}}=3\times 3=9$

답 ③

A031 | 답 ③

[풀이]

지수법칙에 의하여

$3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=3$

답 ③

A032 | 답 ②

[풀이]

지수법칙과 로그의 성질에 의하여

$3A+2B=3\log_a\frac{x^2}{y^3}+2\log_a\frac{y^2}{x^3}$

$=\log_a\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^3+\log_a\left(\frac{y^2}{x^3}\right)^2$

$=\log_a\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^3\left(\frac{y^2}{x^3}\right)^2$

$=\log_a\frac{x^6\times y^4}{y^9\times x^6}$

$=\log_a\frac{1}{y^5}$

답 ②

A033 | 답 ⑤

[풀이]

지수법칙과 로그의 성질에 의하여

$\log_2 6-\log_2\frac{3}{2}=\log_2\left(6\times\frac{2}{3}\right)=\log_2 2^2=2$

답 ⑤

A034 | 답 ④

[풀이]

유리수 지수의 정의에 의하여

$7^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$

이므로, 로그의 정의에 의하여

$\log_7 \frac{1}{\sqrt{7}}=-\frac{1}{2}$

답 ④

A035 | 답 ④

[풀이]

〈증명〉

$r=\log_a x$, $s=\log_a y$로 놓으면

로그의 정의에 의하여

$a^r=x$, $a^s=\boxed{y}$

지수법칙으로부터

$a^{r+s}=\boxed{xy}$

로그의 정의에 의하여

$r+s=\log_a \boxed{xy}$

그러므로 $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$이다.

(가): y

(나): xy

답 ④

A036 | 답 10

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+\log_2 16$

$=\log_2 2+\log_2 2^2+\log_2 2^3+\log_2 2^4$

$=\log_2 2+2\log_2 2+3\log_2 2+4\log_2 2$

$=1+2+3+4=10$

답 10

A037 | 답 ①

[풀이]

지수법칙과 유리수 지수의 정의에 의하여

$4^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{2^5}=(2^2)^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{5}{2}}=2^{2\times\frac{3}{4}+\frac{5}{2}}=16$

로그의 정의에 의하여

$\therefore\ \log_2(4^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{2^5})^{\frac{1}{2}}=\log_2 4=2$

답 ①

A038 | 답 ⑤

[풀이]

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$\log_{\sqrt{2}}2=\frac{\log_2 2}{\log_2\sqrt{2}}=\frac{\log_2 2}{\frac{1}{2}\log_2 2}=2$

로그의 성질에 의하여

$\log_{\sqrt{2}}2-\log_2\sqrt{2}=2-\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$

답 ⑤

A039 | 답 7

[풀이]

지수법칙과 로그의 성질에 의하여

$\log_2\frac{24}{5}+\log_2\frac{80}{3}=\log_2\frac{24}{5}\times\frac{80}{3}$

$=\log_2 2^7=7$

답 7

A040 | 답 ⑤

[풀이]

거듭제곱근의 성질과 로그의 성질에 의하여

$\log_2\sqrt{8}-\log_2\sqrt{2}=\log_2\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\log_2 2=1$

답 ⑤

A041 | 답 ③

[풀이]

진수의 조건에서 $x>0$, $y>0$

로그의 성질에 의하여

$\log_{10}x^2+\log_{10}y=2$

$\log_{10}x^2y=2$

로그의 정의에서

$x^2y=10^2$

산술기하절대부등식에 의하여

$x^2+y\geq 2\sqrt{x^2y}=20$

(단, 등호는 $x=\sqrt{10}$, $y=10$일 때 성립한다.)

답 ③

A042 | 답 15

[풀이]

로그의 성질과 로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$\log_2 x+\log_4\frac{1}{x}=\log_2 x-\frac{\log_2 x}{\log_2 4}$

$=\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2 x=5$

정리하면

$\log_2 x=10$

로그의 성질과 로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$\therefore\ \log_4 x-\log_2\frac{1}{x}$

$=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+\log_2 x=\frac{1}{2}\log_2 x+\log_2 x$

$=\frac{3}{2}\log_2 x=15$

답 15

A043 | 답 ③

[풀이]

지수법칙과 로그의 성질에 의하여

$\log_3 12+\log_3 9-\log_3 4$

$=\log_3\frac{12\times 9}{4}=\log_3 27=3$

답 ③

A044 | 답 ①

[풀이]

$\log_a b=x$, $\log_c a=y$라고 하면

로그의 정의에 의하여

$a^x=b$, $c^y=a$

이때, $b=a^x=(c^y)^x=c^{\boxed{xy}}$이므로

로그의 정의에 의하여

$\boxed{xy}=\log_c b$

즉, $\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$이다.

여기서 $\boxed{a\neq 1}$이므로 $\log_c a\neq 0$이다.

따라서 $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$이다.

답 ①

A045 | 답 ③

[풀이]

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$\log_{\sqrt{3}}x=\frac{\log_3 x}{\log_3\sqrt{3}}=2\log_3 x=4$이므로

$\log_3 x=2$

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$\therefore\ \log_x y=\frac{\log_3 y}{\log_3 x}=\frac{6}{2}=3$

답 ③

A046 | 답 10

[풀이]

유리수지수의 정의와 로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{32}\cdot\log_2\frac{1}{16}$

$=\frac{\log_2 2^{\frac{5}{2}}}{\log_2 2^{-1}}\cdot\log_2 2^{-4}$

$=-\frac{5}{2}\cdot(-4)=10$

답 10

A047 | 답 ④

[풀이]

로그의 정의에서

$7^a=\sqrt{7-\sqrt{48}}$

양변을 제곱하면

$7^{2a}=7-\sqrt{48}$ 이므로

$7^{-2a}=\dfrac{1}{7-\sqrt{48}}=7+\sqrt{48}$

$\therefore \dfrac{7^{2a}-7^{-2a}}{7^{2a}+7^{-2a}}=\dfrac{7-\sqrt{48}-(7+\sqrt{48})}{7-\sqrt{48}+7+\sqrt{48}}=-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

답 ④

A048 | 답 ③

[풀이]

〈증명〉

$x=\log_{a^m}b^n$로 놓으면

로그의 정의에 의하여

$b^n=\boxed{(a^m)^x}=(a^x)^{\boxed{m}}$이므로 $a^x=\boxed{b^{\frac{n}{m}}}$

로그의 정의와 성질에 의하여

$x=\log_a\boxed{b^{\frac{n}{m}}}=\dfrac{n}{m}\log_a b$가 성립한다.

(가): $(a^m)^x$ (나): m (다): $b^{\frac{n}{m}}$

답 ③

A049 | 답 ①

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

로그의 성질에 의하여

$\log_2 1+\log_2 2+\log_2 3+\cdots+\log_2 10$

$=\log_2(1\times2\times3\times\cdots\times10)=\log_2 10!$

로그의 정의에 의하여

$2^{\log_2 1+\log_2 2+\log_2 3+\cdots+\log_2 10}=2^{\log_2 10!}=10!$

▸ ㄴ. (거짓)

지수법칙에 의하여

$2^1\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^{10}$

$=2^{1+2+3+\cdots+10}=2^{55}$

지수법칙과 로그의 성질에 의하여

$\log_2(2^1\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^{10})^2$

$=\log_2(2^{55})^2=\log_2 2^{55\times2}$

$=\log_2 2^{110}=110\neq55^2$

▸ ㄷ. (거짓)

로그의 성질에 의하여

$\log_2 2^1=1,\ \log_2 2^2=2,\ \cdots,\ \log_2 2^{10}=10$

이므로

$(\log_2 2^1)(\log_2 2^2)(\log_2 2^3)\cdots(\log_2 2^{10})$

$=1\times2\times3\times\cdots\times10=10!\neq55$

이상에서 참인 것은 ㄱ이다.

답 ①

A050 | 답 ③

[풀이]

로그의 정의에서

$\log_4 64=3$

답 ③

A051 | 답 ⑤

[풀이]

〈증명〉

자연수 n에 대하여 $\log_2 n$이 유리수라고 하자.

n이 자연수이므로 $n=2^k\cdot m$을 만족시키는 $k\geq0$인 정수 k와 홀수인 자연수 m이 존재한다.

그러면 로그의 성질에 의하여 $\log_2 n=\boxed{k+\log_2 m}$이다.

따라서 $\log_2 n$이 유리수이면 $\log_2 m$도 유리수이어야 하므로

$\log_2 m=\dfrac{q}{p}$(단, p는 자연수이고 q는 정수)로 놓을 수 있다.

그러면 로그의 정의에 의하여 $m=2^{\frac{q}{p}}$이므로 $\boxed{m^p=2^q}$이다.

m이 홀수이므로 m^p은 홀수이다.

따라서 2^q도 홀수이어야 하므로 $\boxed{q=0}$이고 $m=1$이다.

따라서 n을 $n=2^k$(단, k는 $k\geq0$인 정수)의 꼴로 나타낼 수 있다.

(가): $k+\log_2 m$ (나): $m^p=2^q$ (다): $q=0$

답 ⑤

[참고1]

아래의 표처럼 모든 자연수는 $2^k\cdot m$으로 표현할 수 있다.

(단, k는 음이 아닌 정수, m은 양의 홀수)

k \ m	1	3	5	7	9	11	⋯
0	1	3	5	7	9	11	⋯
1	2	6	10	14	18	22	⋯
2	4	12	20	28	36	44	⋯
3	8	24	40	56	72	88	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

2015 개정 교육과정에서 달라지는 점은

• 수학 I
지수함수와 로그함수: 두 대단원 '지수와 로그', '지수함수와 로그함수'가 결합
삼각함수: 사인법칙, 코사인법칙의 귀환 & sec, csc, cot가 미적분 과목으로 이동
수열: 주기함수 관련 문제 출제 가능

• 수학 II
함수의 극한과 연속: 주기함수 관련 문제 출제 가능
미분: 주기함수 관련 문제 출제 가능
적분: 주기함수 관련 문제 출제 가능 & 구분구적분 퇴출

• 미적분
수열의 극한: 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 출제 가능
미분법: 매개변수의 미분법, 음함수의 미분법의 귀환
적분법: 구분구적법은 이과 전용

• 확률과 통계
경우의 수: 순열, 조합 고1 과정으로 이동, 분할(정수/자연수) 퇴출
확률: 변화 없음
통계: 모비율 퇴출

• 기하 (2021 수능에서는 제외)
이차곡선: 기울기가 주어진 접선의 공식 귀환 & 사인법칙, 코사인 법칙 관련 문제 출제 가능
평면벡터: 라디안이 아닌 육십분법 사용 & 벡터의 내적의 정의를 성분으로 함
공간도형과 공간좌표: 공간벡터, 공간에서의 벡터의 방정식 퇴출

2020 수능에서 보여준 출제 경향의 변화는

• 가형16(확률과 통계): 경우의 수를 셀 때 CASE구분을 해야 하는 경우와 하지 말아야 하는 경우를 판단하는 것에 대한 평가 강화!
• 가형21(미적분): 변화 없음이 경향성. 특별한 발상 없이 기출문제에서 연습했던 전형적인 풀이를 적용할 것!
• 가형28(확률과 통계): 사실상 국어영역. 문제를 정확하게 이해하는 것도 이젠 중요한 평가요소.
• 가형30(미적분): 변화 없음이 경향성. 특별한 발상 없이 기출문제에서 연습했던 전형적인 풀이를 적용할 것!

• 나형12(수학2): 사차함수의 그래프의 개형을 알고 있다면 좀 더 빠르게 풀리는 문제. 이젠 실전이론도 평가대상.
• 나형20(수학2): 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 이론을 노골적으로 출제한 문제. 이젠 실전이론도 평가대상.
• 나형21(수학1): 수열을 나열하기 전에 '어떤 규칙이 나올 것인가?'를 알고 있어야 하는 문제. (수열도 21번에 출제 가능!)
• 나형30(수학2): 삼차함수의 수평화와 비율관계를 알고 있으면 어렵지 않은 문제. 이젠 실전이론도 평가대상.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

2021학년도 수능의 시작입니다!

학년도	시험	실시년도/월	학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정			2009	모의평가(9월)	2008년 9월
1991	실험평가(1차)	1990년 12월	2009	대학수학능력	2008년 11월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월	2010	모의평가(6월)	2009년 6월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월	2010	모의평가(9월)	2009년 9월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월	2010	대학수학능력	2009년 11월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월	2011	모의평가(6월)	2010년 6월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월	2011	모의평가(9월)	2010년 9월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월	2011	대학수학능력	2010년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월	2007개정 교육과정		
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월	2012	모의평가(6월)	2011년 6월
1995	대학수학능력	1994년 11월	2012	모의평가(9월)	2011년 9월
1996	대학수학능력	1995년 11월	2012	대학수학능력	2011년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월	2014	예비시행	2012년 5월
1998	대학수학능력	1997년 11월	2013	모의평가(6월)	2012년 6월
6차 교육과정			2013	모의평가(9월)	2012년 9월
1999	대학수학능력	1998년 11월	2013	대학수학능력	2012년 11월
2000	대학수학능력	1999년 11월	2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2001	대학수학능력	2000년 11월	2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2002	대학수학능력	2001년 11월	2014	대학수학능력	2013년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월	2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2003	대학수학능력	2002년 11월	2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월	2015	대학수학능력	2014년 11월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월	2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2004	대학수학능력	2003년 11월	2016	모의평가(9월)	2015년 9월
7차 교육과정			2016	대학수학능력	2015년 11월
2005	예비시행	2003년 12월	2009개정 교육과정		
2005	모의평가(6월)	2004년 6월	2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월	2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2005	대학수학능력	2004년 11월	2017	대학수학능력	2016년 11월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월	2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월	2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2006	대학수학능력	2005년 11월	2018	대학수학능력	2017년 11월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월	2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월	2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월	2019	대학수학능력	2018년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월	2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월	2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월	2020	대학수학능력	2019년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월			

각 과목별 문항 수 및 비율 (총 3617 문항)

수학 Ⅰ	수학 Ⅱ	미적분	확률과 통계	기하	수학	교육과정 外
541	329	522	468	206	300	1251
14.9 %	9.0 %	14.4 %	12.9 %	5.7 %	8.3 %	34.8 %

※ 수학, 교육과정 外 문제집과 해설집은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 무료PDF파일 다운로드 가능

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목 차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

D 함수의 극한과 연속

- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함

○ 합성함수의 극한과 연속성 관련 문제 제외 (미적분(이과)에 포함됨)

D. 함수의 극한

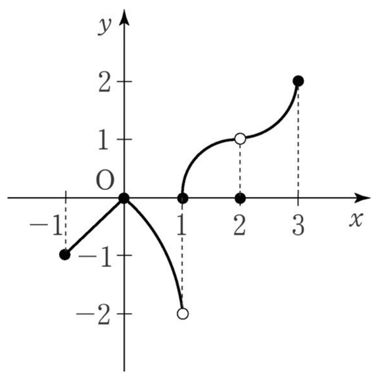
D001
○○
(1993(실험평가6차)−공통14)

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여, $A(x)$를 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{Q}(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 면적이라 하고, $B(x)$를 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 면적이라 하자. 이때, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{A(x)}{B(x)}$의 값은?

① 0　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
④ 1　⑤ 2

D002
○○
(2005(6)−가형5)

정의역이 $\{x\,|\,-1\le x\le 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

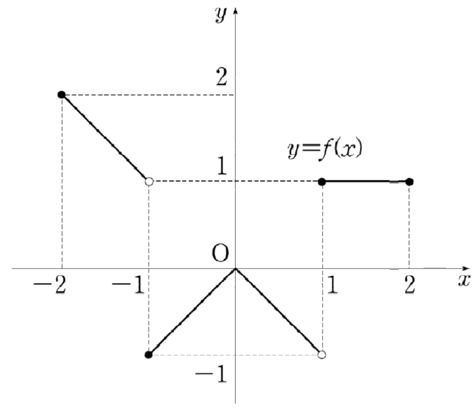


ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$가 존재한다.
ㄴ. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$가 존재한다.
ㄷ. $-1<a<1$인 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

D003
○
(2012(6)−나형7)

정의역이 $\{x\,|\,-2\le x\le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim\limits_{x\to -1-}f(x)+\lim\limits_{x\to 1+}f(x)$의 값은? [3점]



① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

D004
○○
(2012(6)−나형18)

실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to 1-}f(t)$의 값은? [4점]

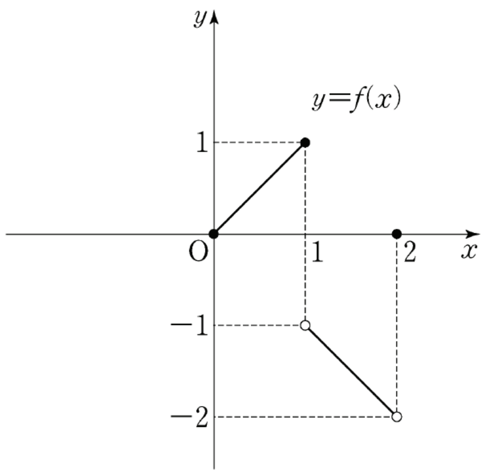
① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

D005

(2014(9)−A형15)

정의역이 $\{x\,|\,-2\leq x\leq 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[0,\ 2]$에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)+\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$의 값은? [4점]

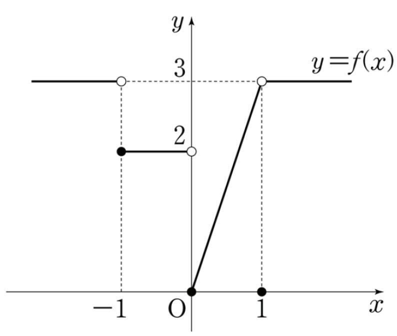


① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

D006

(2014−A형11)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



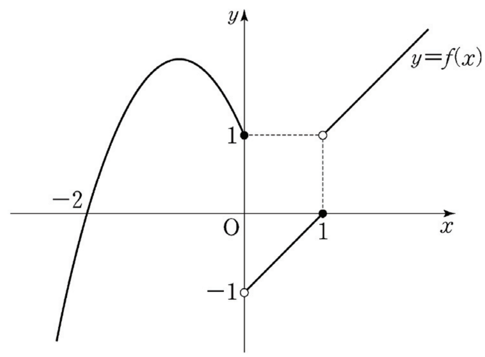
$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)+\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

D007

(2018(6)−나형9)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



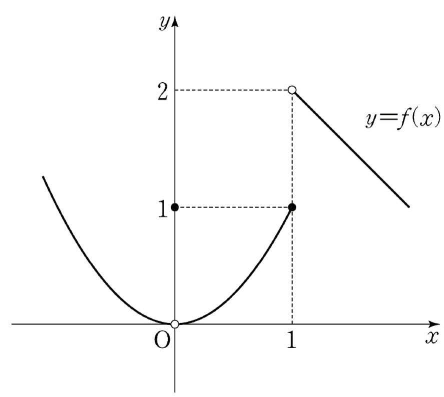
$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

D008

(2018(9)−나형5)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



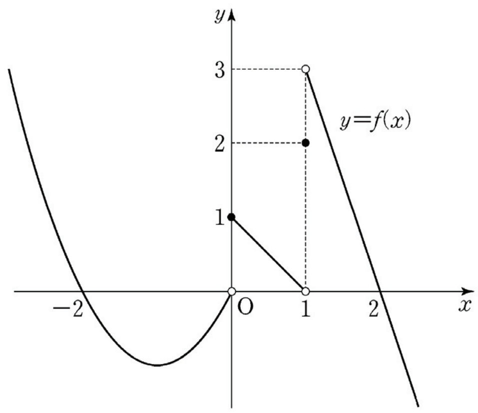
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

D009

○ (2018−나형5)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

D. 함수의 극한값의 계산

D010

○○ (1994(2차)−공통2)

서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 $\alpha+\beta=1$일 때,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\alpha^2}-\sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha}-\sqrt{4x+\beta}}$ 의 값은?

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ 2　④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ 4

D011

○ (1999−인문3)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ 의 값은? [2점]

① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ 0　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

D012

○○ (2001−인문27)

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}=1$일 때,

$f(1)$의 값을 구하시오. [2점]

D013
○
(2002-인문4/자연4)

다음 식을 성립하게 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값은? [2점]

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\frac{1}{3}$$

① -3 ② -2 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

D014
○
(2004-인문26/자연26)

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{2x+4}{\sqrt{x+11}-3}$의 값을 구하시오. [2점]

D015
○
(2005(6)-가형18)

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$의 값을 구하시오. [3점]

D016
○
(2005-가형18)

두 실수 a, b가 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-2}=\frac{2}{5}$를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

D017
○○
(2006(6)-가형3)

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax}=b$(단, $b\neq0$)가 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은? [2점]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

D018
○○
(2006(6)-가형4)

곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $(t,\ \sqrt{t})$에서 점 $(1,\ 0)$까지의 거리를 d_1, 점 $(2,\ 0)$까지의 거리를 d_2라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ 0

D019

○○ (2006-가형3)

두 상수 a, b가 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=3$을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [2점]

① -6　② -4　③ -2
④ 0　⑤ 2

D020

○ (2007(9)-가형18)

$\lim_{x\to 0}\frac{20x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$의 값을 구하시오. [3점]

D021

○○ (2008(6)-가형3)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=b$일 때, ab의 값은? [2점]

① 16　② 4　③ 1
④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{16}$

D022

○○ (2008(6)-가형5)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(-1)=2,\ f(0)=0,\ f(1)=-2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값은? [3점]

① -1　② -2　③ -3
④ -4　⑤ -5

D023

○○ (2008(6)-가형6)

극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=4$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 〈보기〉에서 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $f(x)=4\|x\|$
ㄴ. $f(x)=2x^2+2x$
ㄷ. $f(x)=x+\frac{4}{x}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D024

○ (2008(9)−가형2)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$일 때, ab의 값은? [2점]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

D025

○ (2009(6)−가형2)

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x}$의 값은? [2점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

D026

○○ (2009(6)−가형4)

다항함수 $g(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$가 존재한다. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)+x-1=(x-1)g(x)$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

D027

○○ (2009(9)−가형3)

$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2-x-3}+ax}{x+3}=b$가 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은? [2점]

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

D028

○○○ (2010(6)−가형19)

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

D029
○○○ (2011(6)-가형24)

x가 양수일 때, x보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수를 $f(x)$라 하고, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>2f(x)) \\ \dfrac{1}{f(x)} & (x\le 2f(x)) \end{cases}$$

라고 하자. 예를 들어, $f\left(\dfrac{7}{2}\right)=2$이고 $\dfrac{7}{2}<2f\left(\dfrac{7}{2}\right)$이므로 $g\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이다.

$\lim\limits_{x\to 8+} g(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to 8-} g(x)=\beta$라고 할 때, $\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하시오. [4점]

D030
○○ (2011(9)-가형5)

다항함수 $f(x)$가 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=5$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=x$의 한 근이 -2일 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

D031
○○ (2012(6)-나형5)

함수 $f(x)=x^2+ax$가 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$를 만족시킬 때, 상수 a의 값은? [3점]

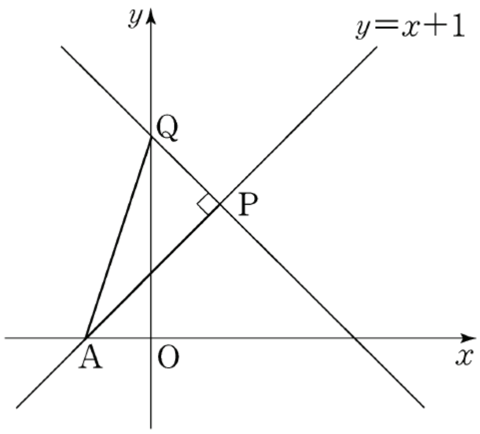
① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

D032
○ (2012(6)-나형22)

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+ax+1}=\dfrac{1}{9}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

D033
○○ (2012-나형12)

그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$과 $\mathrm{P}(t,\ t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}$의 값은? [3점]



① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

D034
○ (2012-나형22)

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+3x+7)}{x-1}$의 값을 구하시오. [3점]

D035
○ (2014(예비)-A형22)

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+9x-22}{x-2}$의 값을 구하시오. [3점]

D036
○○ (2013(6)-나형9)

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=4$일 때, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값은? [3점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

D037
○○ (2014(6)-A형9)

함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$$

일 때, $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{18}$　② $\frac{1}{21}$　③ $\frac{1}{24}$　④ $\frac{1}{27}$　⑤ $\frac{1}{30}$

D038
★★★
(2015(6)−A형21)

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$
(나) $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)\,(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

D039
○○
(2016(9)−A형28)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=2$
(나) $\lim_{x\to 0}f(x)=-7$

D040
○○○
(2017−나형18)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

D041

○○ (2018(9)-나형12)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$
(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

$f(2)$의 값은? [3점]

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

D042

○○ (2018-나형25)

함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 1}(x+1)f(x)=1$을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1}(2x^2+1)f(x)=a$이다. $20a$의 값을 구하시오. [3점]

D043

●●● (2020(6)-나형20)

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n}=4$ 인 자연수 n이 존재한다.

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

D044

○○○ (2020-나형14)

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$
(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

해설 목차

단원별 알파벳구성

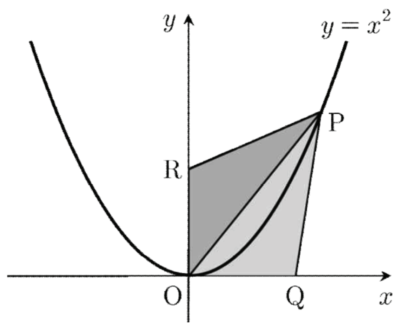
과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

D 함수의 극한과 연속

1	①	2	⑤	3	⑤	4	④	5	①
6	③	7	⑤	8	④	9	③	10	③
11	④	12	16	13	②	14	12	15	2
16	26	17	③	18	①	19	①	20	40
21	④	22	③	23	③	24	③	25	②
26	①	27	⑤	28	10	29	16	30	②
31	①	32	16	33	③	34	11	35	13
36	④	37	⑤	38	⑤	39	13	40	④
41	②	42	30	43	③	44	③	45	⑤
46	⑤	47	①	48	①	49	①	50	①
51	②	52	③	53	④	54	⑤	55	④
56	⑤	57	⑤	58	④	59	④	60	③
61	②	62	①	63	②	64	③	65	③
66	⑤	67	①	68	③	69	④	70	③
71	①	72	13	73	8	74	21	75	③
76	④	77	⑤	78	24	79	20	80	③
81	①	82	④	83	6	84	④	85	④

D001 | 답 ①

[풀이]



P가 제1사분면의 점이면

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$A(x)=\frac{1}{2}x^2,\ B(x)=\frac{1}{2}x$

P가 제2사분면의 점이면

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$A(x)=\frac{1}{2}x^2,\ B(x)=-\frac{1}{2}x$

두 함수 $A(x)$, $B(x)$의 방정식은

$A(x)=\frac{1}{2}x^2,\ B(x)=\frac{1}{2}|x|$

(단, $x\neq 0$)

$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{x^2}{|x|}=|x|$

이므로

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim_{x\to 0}|x|=0$

답 ①

[참고]

다음과 같이 빠르게 계산할 수도 있다.

$\overline{OQ}=\overline{OR}=1$이므로

$A(x):B(x)=$(점 P의 y좌표):|점 P의 x좌표|

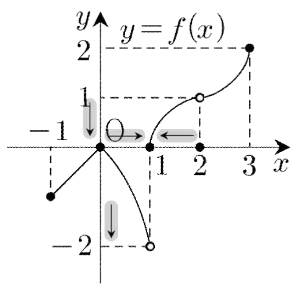
즉, $\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{x^2}{|x|}=|x|$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{B(x)}=0$

D002 | 답 ⑤

[풀이]

▶ ㄱ. (거짓)



$x\to 1+$일 때, $f(x)$가 0보다 큰 값을 가지면서 0에 수렴하므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=0$

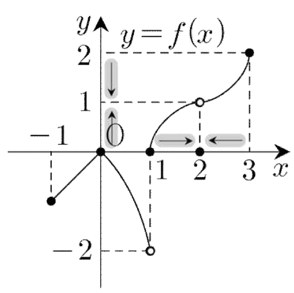
$x\to 1-$일 때, $f(x)$가 -2보다 큰 값을 가지면서 -2에 수렴하므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=-2$

$\lim_{x\to 1+}f(x)\neq\lim_{x\to 1-}f(x)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극한값을 갖지 않는다.

▶ ㄴ. (참)



$x\to 2+$일 때, $f(x)$가 1보다 큰 값을 가지면서 1에 수렴하므로

$\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=1$

$x\to 2-$일 때, $f(x)$가 1보다 작은 값을 가지면서 1에 수렴하므로

$\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=1$

함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 극한값은 1이다.

▸ ㄷ. (참)

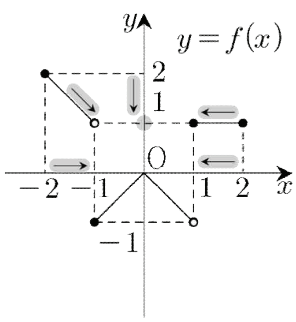
구간 $[-1,\ 1)$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 $-1<a<1$인 실수 a에 대하여 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한값은 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

D003 | 답 ⑤

[풀이]



$x\to -1-$일 때, $f(x)$는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 수렴하므로

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=1$

$x\to 1+$일 때, $f(x)$는 1의 값을 가지면서 1에 수렴하므로

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=1$

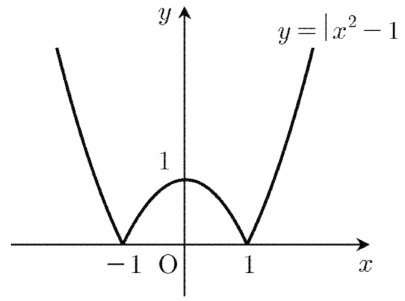
$\therefore\ \lim\limits_{x\to -1-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=2$

답 ⑤

D004 | 답 ④

[풀이]

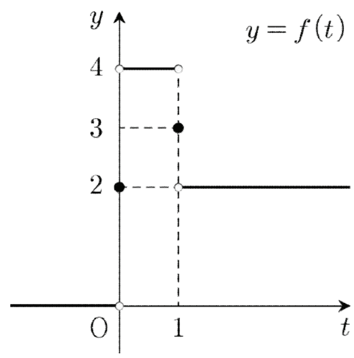
함수 $y=|x^2-1|$의 그래프는



함수 $f(t)$의 방정식은

$$f(t)=\begin{cases}2 & (t>1)\\ 3 & (t=1)\\ 4 & (0<t<1)\\ 2 & (t=0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

함수 $f(t)$의 그래프는



$t\to 1-$일 때, $f(t)$는 4의 값을 가지면서 4에 수렴한다.

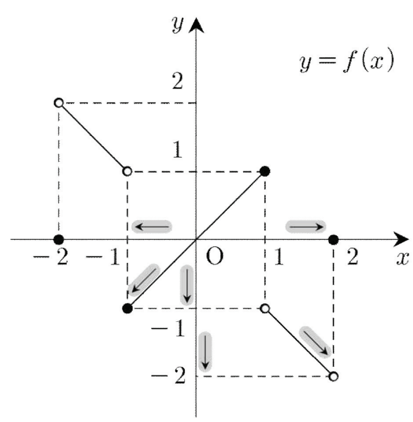
$\therefore\ \lim\limits_{t\to 1-} f(t)=4$

답 ④

D005 | 답 ①

[풀이]

주어진 조건에서 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



$x\to -1+$일 때, $f(x)$는 -1보다 큰 값을 가지면서 -1에 수렴한다.

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=-1$

$x \to 2-$일 때, $f(x)$는 -2보다 큰 값을 가지면서 -2에 수렴한다.

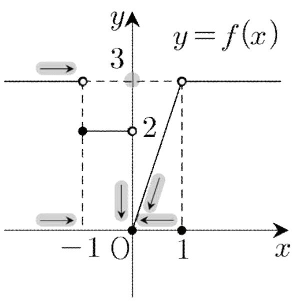
$\lim_{x \to 2-} f(x) = -2$

$\therefore \lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 2-} f(x) = -3$

답 ①

D006 | 답 ③

[풀이]



$x \to -1-$일 때, $f(x)$는 3의 값을 가지면서 3에 수렴한다.

$\lim_{x \to -1-} f(x) = 3$

$x \to 0+$일 때, $f(x)$는 0 보다 큰 값을 가지면서 0에 수렴한다.

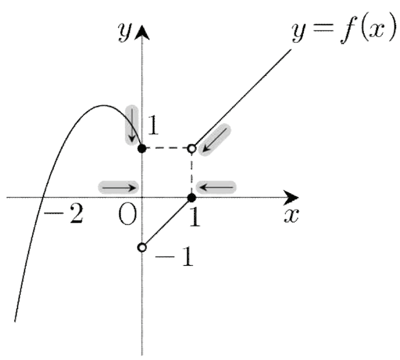
$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$

$\therefore \lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x) = 3$

답 ③

D007 | 답 ⑤

[풀이]



$x \to 0-$일 때, $f(x)$는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) = 1$

$x \to 1+$일 때, $f(x)$는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

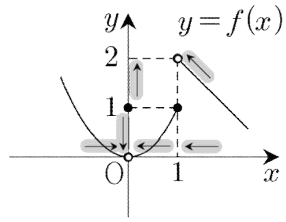
$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$

$\therefore \lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 1 + 1 = 2$

답 ⑤

D008 | 답 ④

[풀이]



$x \to 0+$일 때, $f(x)$는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$

$x \to 0-$일 때, $f(x)$는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$

$x = 0$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 0으로 같으므로

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$x \to 1+$일 때, $f(x)$는 2보다 작은 값을 가지면서 2에 한없이 가까워지므로

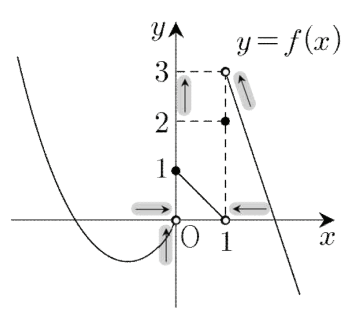
$\lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 0 + 2 = 2$

답 ④

D009 | 답 ③

[풀이]



$x \to 0-$일 때, $f(x)$의 값은 0 보다 작으면서 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$

$x \to 1+$일 때, $f(x)$의 값은 3 보다 작으면서 3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 1+} f(x) = 3$

$\therefore \lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 3$

답 ③

D010 | 답 ③

[풀이1]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+\alpha^2} - \sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha} - \sqrt{4x+\beta}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(\alpha^2-\beta^2)(\sqrt{4x+\alpha}+\sqrt{4x+\beta})}{(\alpha-\beta)(\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2})}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x+\alpha}+\sqrt{4x+\beta}}{\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2}} (\because \alpha+\beta=1)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{\alpha}{x}}+\sqrt{4+\frac{\beta}{x}}}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{x}}+\sqrt{1+\frac{\beta^2}{x}}} = \frac{2+2}{1+1} = 2$$

답 ③

[풀이2] 시험장

$\alpha = 1$, $\beta = 0$으로 두어도 답을 구하는데 문제가 없다.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+\alpha^2} - \sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha} - \sqrt{4x+\beta}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{4x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x})(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x})} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{2+2}{1+1} = 2$$

($\because x \to \infty$일 때,

$\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \approx \frac{\sqrt{4x}+\sqrt{4x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$)

답 ③

D011 | 답 ④

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

답 ④

D012 | 답 16

[풀이]

좌변을 정리하면

$$\lim_{x \to 1} \frac{8(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{8(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2-1)f(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{8(x^2+1)}{f(x)} = 1$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$x \to 1$일 때, (분수식)$\to 1$, (분자)$\to 16$이므로

(분모)$\to 16$, 즉 $\lim_{x \to 1} f(x) = 16$

그런데 함수 $f(x)$는 다항함수이므로

$\therefore f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 16$

답 16

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{8(x^2+1)}{\frac{8(x^2+1)}{f(x)}} = \frac{16}{1} = 16$$

D013 | 답 ②

[풀이1]

$x \to 1$일 때, (분수식)$\to \frac{1}{3}$, (분자)$\to 0$이므로

(분모)$\to 0$

즉, $\lim_{x \to 1}(x^2+ax+b) = 1+a+b = 0$에서 $b = -1-a$

이를 문제에서 주어진 분수식에 대입하자.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax-(1+a)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1+a)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1+a}=\frac{1}{a+2}=\frac{1}{3}$$

$a=1$이므로 $b=-2$이다.

$\therefore\ ab=-2$

답 ②

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\frac{x-1}{x^2+ax+b}}=\frac{\lim_{x\to1}(x-1)}{\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}}$$
$$=0\times3=0$$

이므로

$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$$

즉, $b=-1-a$

[풀이2] 교육과정 외 (로피탈의 정리) 시험장

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)'}{(x^2+ax+b)'}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{2x+a}=\frac{1}{2+a}=\frac{1}{3},\ \text{즉 } a=1$$

$x\to1$일 때, (분수식)$\to\frac{1}{3}$, (분자)$\to0$이므로

(분모)$\to0$, 즉 $1+a+b=0$에서 $b=-2$

$\therefore\ ab=-2$

답 ②

D014 | 답 12

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x+4}{\sqrt{x+11}-3}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(2x+4)(\sqrt{x+11}+3)}{(\sqrt{x+11}-3)(\sqrt{x+11}+3)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)(\sqrt{x+11}+3)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}2(\sqrt{x+11}+3)=2\times6=12$$

답 12

D015 | 답 2

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x^2-3}-1)(\sqrt{x^2-3}+1)}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}=\frac{4}{2}$$
$$=2$$

답 2

D016 | 답 26

[풀이]

$x\to2$일 때, (분수식)$\to\frac{2}{5}$, (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$, 즉 $\sqrt{2^2+a}-b=0$에서

$b=\sqrt{4+a}$ $\cdots$㉠

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a+4}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a+4})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a+4}}=\frac{2}{\sqrt{a+4}}=\frac{2}{5}$$

에서 $a=21$

이를 ㉠에 대입하면

$b=5$

$\therefore\ a+b=26$

답 26

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to2}(\sqrt{x^2+a}-b)$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-2}\times(x-2)$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-2}\times\lim_{x\to2}(x-2)$$
$$=\frac{2}{5}\times0=0$$

이므로

$$\lim_{x\to2}(\sqrt{x^2+a}-b)=\sqrt{4+a}-b=0$$

즉, $b=\sqrt{4+a}$

D017 | 답 ③

[풀이1]
$x\to2$일 때, (분수식)$\to b$, (분자)$\to0$이므로
(분모)$\to0$, 즉 $4+2a=0$, $a=-2$
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x}=\frac{4}{2}=2\text{에서 } b=2$$

$\therefore\ a+b=0$

답 ③

[참고]
생략된 계산과정은 다음과 같다.
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to2}(x^2+ax)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\dfrac{x^2-4}{x^2+ax}}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2+ax}}=\frac{0}{b}=0$$

이므로

$$\lim_{x\to2}(x^2+ax)=4+2a=0\ \text{즉, } a=-2$$

[풀이2] 교육과정 외 (로피탈의 정리) 시험장
$x\to2$일 때, (분수식)$\to b$, (분자)$\to0$이므로
(분모)$\to0$, 즉 $4+2a=0$, $a=-2$
로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)'}{(x^2-2x)'}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2x}{2x-2}=\frac{4}{2}=2=b$$

$\therefore\ a+b=0$

답 ③

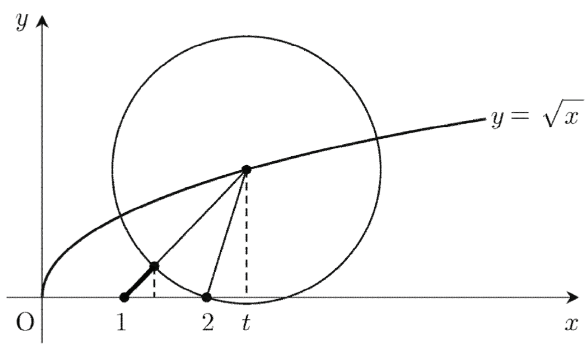
D018 | 답 ①

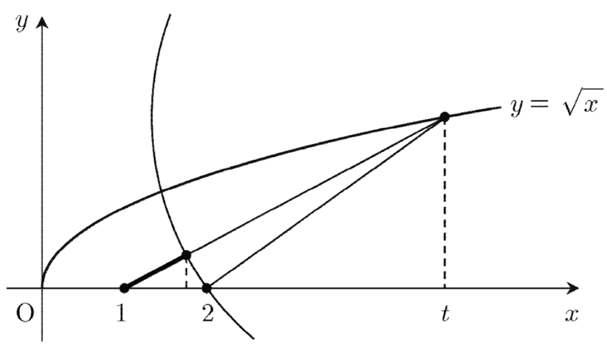
[풀이]
두 점 사이의 거리 공식에 의하여
$d_1=\sqrt{t^2-t+1}$, $d_2=\sqrt{t^2-3t+4}$
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2-3t+4})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2-3t+4}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{t}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{t}+\dfrac{4}{t^2}}}$$
$$=\frac{2}{2}=1$$

답 ①

[참고]





위의 그림에서 $\lim\limits_{t\to\infty}(d_1-d_2)=1$임을 확인해볼 수 있다.

D019 | 답 ①

[풀이1]

$x \to 2$일 때, (분수)$\to 3$, (분자)$\to 0$이므로

(분모)$\to 0$, 즉 $2^2 - b = 0$, $b = 4$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-4}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-a)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-a}{x+2} = \frac{2-a}{4} = 3\text{에서 } a = -10$$

$\therefore$ $a + b = -6$

답 ①

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - b)$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2-(a+2)x+2a}{\dfrac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 2}\{x^2-(a+2)x+2a\}}{\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}} = \frac{0}{3} = 0$$

이므로

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - b) = 2^2 - b = 0\text{에서 } b = 4$$

[풀이2] 교육과정 외 (로피탈의 정리) 시험장

$x \to 2$일 때, (분수식)$\to 3$, (분자)$\to 0$이므로

(분모)$\to 0$, 즉 $4 - b = 0$, $b = 4$

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\{x^2-(a+2)x+2a\}'}{(x^2-4)'}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x-(a+2)}{2x}$$

$$= \frac{2-a}{4} = 3, \text{ 즉 } a = -10$$

$\therefore$ $a + b = -6$

답 ①

D020 | 답 40

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 0} \frac{20x}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{20x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 10(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})$$

$$= 10 \times 4 = 40$$

답 40

D021 | 답 ④

[풀이]

$x \to 1$일 때, (분수)$\to b$, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$, 즉 $\sqrt{2+a} - 2 = 0$, $a = 2$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{x+3}}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x^2-1)(\sqrt{2x+2} + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{2x+2} + \sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8} = b$$

$$\therefore \ ab = \frac{1}{4}$$

답 ④

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 1}(\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+3})$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+3}}{x^2-1} \times (x^2-1)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+3}}{x^2-1} \times \lim_{x \to 1}(x^2-1)$$

$$= b \times 0 = 0$$

이므로

$$\lim_{x \to 1}(\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+3})$$

$$= \sqrt{2+a} - 2 = 0\text{에서 } a = 2$$

D022 | 답 ③

[풀이1]

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

주어진 조건에서

$f(-1)=-1+a-b+c=2$, 즉 $a-b+c=3$

$f(0)=c=0$, 즉 $c=0$

$f(1)=1+a+b+c=-2$, 즉 $a+b+c=-3$

a, b, c에 대한 연립일차방정식을 풀면

$a=0$, $b=-3$, $c=0$

함수 $f(x)$의 방정식은

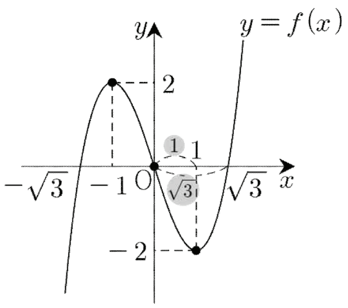
$f(x)=x^3-3x$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^2-3)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3)=-3$

답 ③

[풀이2] 시험장



위의 그림처럼 세 점

$(-1,\ 2)$, $(0,\ 0)$, $(1,\ -2)$

를 지나는 삼차함수는

$y=x^3-3x$

로 유일하다.

따라서 $f(x)=x^3-3x$이다.

왜냐하면

$f(x)=x^3+ax+b+c$

로 두면 구해야 하는 상수가 a, b, c로 3개인데, 주어진 점의 개수가 3으로 같기 때문이다.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3)=-3$

답 ③

D023 | 답 ③

[풀이]

▶ ㄱ. (성립○)

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{16x^2}{4x^2}=\lim_{x\to 0}4=4$$

▶ ㄴ. (성립×)

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^4+8x^3+4x^2}{2x^4+2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+4x+2}{x^2+1}=2$$

▶ ㄷ. (성립○)

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+8+\dfrac{16}{x^2}}{x^2+\dfrac{4}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+8x^2+16}{x^4+4}$$

$$=4$$

이상에서 주어진 조건을 만족하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[참고]

함수 $f(x)$의 $x=0$에서의 미분가능성은 다음과 같다.

▸ ㄱ과 ㄷ: 불가능

ㄱ과 ㄷ의 경우 $f'(0)$이 존재하지 않으므로 미분계수를 이용하여 참, 거짓을 판단할 수 없다.

▸ ㄴ: 가능

ㄴ의 경우 $f'(0)$이 존재하므로 다음과 같은 참, 거짓 판단도 가능하다.

▸ ㄴ. (성립×)

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)^2}{\dfrac{f(x^2)-f(0^2)}{x^2-0^2}}\ (\because f(0)=0)$$

$$=\frac{\{f'(0)\}^2}{f'(0)}=f'(0)=2\neq 4$$

$(\because f'(x)=4x+2)$

D024 | 답 ③

[풀이]

$x \to 1$일 때, (분수식)$\to 2\sqrt{2}$, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$, 즉 $a+b=0$, $b=-a$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 1} \frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}} = \lim_{x \to 1} \frac{ax-a}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{a(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} a(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}$$

에서 $a=1$이고, $b=-1$이다.

$\therefore\ ab=-1$

답 ③

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 1}(ax+b)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}} \times (\sqrt{x+1}-\sqrt{2})$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}} \times \lim_{x \to 1}(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})$$

$$= 2\sqrt{2} \times 0 = 0$$

이므로

$\lim_{x \to 1}(ax+b) = a+b=0$ 즉, $b=-a$

D025 | 답 ②

[풀이]

$t=-x$로 두면 $x \to -\infty$일 때, $t \to \infty$이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim_{t \to \infty} \frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1} = -\frac{1}{2}$$

답 ②

D026 | 답 ①

[풀이1]

$x \to 1$일 때,

$\frac{g(x)-2x}{x-1} \to$ (상수), $x-1 \to 0$이므로

$g(x)-2x \to 0$, 즉 $g(1)=2$

주어진 등식에서

$f(x)=(x-1)\{g(x)-1\}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{x \to 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\{g(x)\}^2-g(x)}{x+1}$$

$$= \frac{\{g(1)\}^2-g(1)}{2} = 1$$

답 ①

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2x}{x-1} = \alpha$ (α는 상수)라고 하자.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 1}\{g(x)-2x\}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2x}{x-1} \times (x-1)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2x}{x-1} \times \lim_{x \to 1}(x-1)$$

$$= \alpha \times 0 = 0$$

이므로

$\lim_{x \to 1}\{g(x)-2x\} = g(1)-2=0$ 즉, $g(1)=2$

[풀이2]

$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2x}{x-1} = \alpha$ (α는 상수)로 두자.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 1}\{g(x)-2x\} = \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2x}{x-1} \times (x-1)$$

$=\alpha \times 0 = 0$이므로 $g(1)=2$이다. $\cdots$ ㉠

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)-2(x-1)}{x-1}$$

$=g'(1)-2=\alpha$ 즉, $g'(1)=\alpha+2$

문제에서 주어진 등식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=0$ $\cdots$ ㉡

문제에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+1=g(x)+(x-1)g'(x)$

위의 등식에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)+1=g(1)$ $\cdots$ ㉢

㉠을 ㉢에 대입하면 $f'(1)=1$ $\cdots$ ㉣

㉠, ㉡에 의하여

$f(1)g(1)=0\times 2=0$

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{2}(f'(1)g(1)+f(1)g'(1))$$

$$=\frac{1}{2}(1\times 2+0\times g'(1))=1$$

답 ①

[풀이3] 교육과정 외 (로피탈의 정리)

$x\to 1$일 때,

$\dfrac{g(x)-2x}{x-1}\to$ (상수)$(=\alpha)$, $x-1\to 0$이므로

$g(x)-2x\to 0$, 즉 $g(1)=2$

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(g(x)-2x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{g'(x)-2}{1}$$

$=g'(1)-2=\alpha$, 즉 $g'(1)=\alpha+2$

문제에서 주어진 등식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=0$

문제에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+1=g(x)+(x-1)g'(x)$

위의 등식에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$f'(1)=g(1)-1=1$

이상의 결과를 정리해서 쓰면

$g(1)=2$, $g'(1)=\alpha+2$, $f(1)=0$, $f'(1)=1$

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)g(x)\}'}{(x^2-1)'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{2x}$$

$$=\frac{f'(1)g(1)+f(1)g'(1)}{2}$$

$$=\frac{1\times 2+0\times(\alpha+2)}{2}=1$$

답 ①

D027 | 답 ⑤

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to -3}(\sqrt{x^2-x-3}+ax)$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2-x-3}+ax}{x+3}\times(x+3)$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2-x-3}+ax}{x+3}\times\lim_{x\to -3}(x+3)$$

$=b\times 0=0$

이므로

$$\lim_{x\to -3}(\sqrt{x^2-x-3}+ax)=3-3a=0$$

$a=1$을 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2-x-3}+x}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{-x-3}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{-1}{\sqrt{x^2-x-3}-x}=-\frac{1}{6}$$

$\therefore\ a+b=\dfrac{5}{6}$

답 ⑤

D028 | 답 10

[풀이1]

$\dfrac{1}{x}=t$로 두면 $x\to 0+$일 때, $t\to\infty$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}=5$$

만약 $f(x)$가 2차 이하의 다항함수이면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}=-\infty$$

이는 가정에 모순이다.

만약 $f(x)$가 4차 이상의 다항함수이면

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}$은 발산하므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$는 삼차함수이다.

그런데 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1이 아닌 삼차함수라고 하면 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}$은 발산하므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{at^2+bt+c}{1+t^2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+1}=a=5$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+5x^2+bx+c$

$x\to1$일 때,

$\frac{f(x)}{x^2+x-2}\to\frac{1}{3}$이고, $x^2+x-20\to0$이므로

$f(x)\to0$, 즉 $f(1)=6+b+c=0$ 즉, $c=-b-6$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+5x^2+bx-b-6$

인수분해하면

$f(x)=(x-1)(x^2+6x+b+6)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x+b+6}{x+2}$$

$=\frac{b+13}{3}=\frac{1}{3}$에서 $b=-12$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-1)(x^2+6x-6)$

$\therefore\ f(2)=10$

답 10

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}\times(x^2+x-2)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}\times\lim_{x\to1}(x^2+x-2)$$

$$=\frac{1}{3}\times0=0$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^3+5x^2+bx+c)$$

$=6+b+c=0$ 즉, $c=-b-6$

[풀이2] 시험장

$x\to1$일 때,

$\frac{f(x)}{x^2+x-2}\to\frac{1}{3}$, $x^2+x-2\to0$이므로

$f(x)\to0$, 즉 $f(1)=0$ …㉠

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+2}$$

$=\frac{1}{3}f'(1)=\frac{1}{3}$, 즉 $f'(1)=1$ …㉡

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}=5$$

($\frac{1}{x}=t$로 두면 $x\to0+$일 때, $t\to\infty$이다.)

$f(t)-t^3$은 최고차항의 계수가 5인 이차함수이므로

$f(t)=t^3+5t^2+at+b$에서

$f(1)=6+a+b=0$ ($\because$ ㉠)

$f'(t)=3t^2+10t+a$에서

$f'(1)=13+a=1$, 즉 $a=-12$ ($\because$ ㉡)

$b=-a-6=6$

함수 $f(t)$의 방정식은

$f(t)=t^3+5t^2-12t+6$

$\therefore\ f(2)=10$

답 10

D029 | 답 16

[풀이]

8 이하의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로

$x\to8+$일 때, $f(x)=4$이고,

$x>8=2f(x)$이므로 $g(x)=f(x)$

$$\alpha=\lim_{x\to8+}g(x)=\lim_{x\to8+}f(x)=4$$

8보다 작은 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로

$x\to8-$일 때, $f(x)=4$이고,

$x\le8=2f(x)$이므로 $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\beta=\lim_{x\to8-}g(x)=\lim_{x\to8-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ \frac{\alpha}{\beta}=16$

답 16

D030 | 답 ②

[풀이1] 시험장

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0 \Rightarrow f(x)=ax^2+\cdots$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5 \Rightarrow f(x)=\cdots+5x$

(즉, $f(0)=0$, $f'(0)=5$)

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=ax^2+5x$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$f(-2)=4a-10=-2$ 풀면 $a=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+5x$

$\therefore\ f(1)=7$

답 ②

[풀이2]

함수 $f(x)$를 다음과 같이 두자.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(단, $a_n\neq 0$)

$n\geq 4$이라고 가정하자.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{n-3}\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_2}{x^{n-2}}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)$$

$a_n>0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\infty$

$a_n<0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=-\infty$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $n\leq 3$

$n=3$이라고 가정하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(a_3+\frac{a_2}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_0}{x^3}\right)=a_3\neq 0$$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $n\leq 2$

$n=2$이라고 가정하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_2}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_0}{x^3}\right)=0$$

$n=1$이라고 가정하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_0}{x^3}\right)=0$$

다항함수 $f(x)$는 2차 이하이다.

이제 $f(x)=ax^2+bx+c$로 두자.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+c}{x}$$

$=\lim_{x\to 0}\left(ax+b+\frac{c}{x}\right)=5$에서 $b=5$, $c=0$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^2+5x$

주어진 조건에서 방정식

$ax^2+5x=x$의 한 근이 -2이므로

$4a-10=-2$에서 $a=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+5x$

$\therefore\ f(1)=7$

답 ②

[참고]

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 결정해도 좋다.

함수 $f(x)-x$가 이차함수이므로

인수정리에 의하여

$f(x)-x=a(x+2)(x-b)$

(단, $a(\neq 0)$, b는 상수)

로 둘 수 있다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x+2)(x-b)+x$

그런데 문제에서 주어진 등식

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5 \qquad \cdots ㉠$$

에 의하여 함수 $f(x)$의 상수항은 0이다.

즉, $f(0)=-2ab=0$에서 $b=0$($\because a\neq 0$)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^2+(2a+1)x$

㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 일차항의 계수는 5이므로

$2a+1=5$에서 $a=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+5x$

D031 | 답 ①

[풀이1]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\to 0}(x+a)=a=4$$

$\therefore\ a=4$

답 ①

[풀이2]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=2x+a$
미분계수의 정의에 의하여
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=a=4$$
$\therefore\ a=4$
답 ①

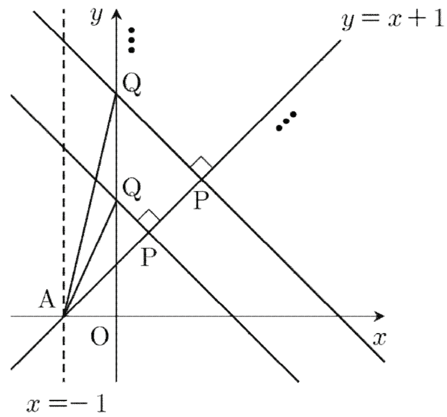
D032 | 답 16

[풀이]
함수의 극한에 대한 성질에 의하여
$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+ax+1}=\frac{2}{a+2}=\frac{1}{9}$$
$\therefore\ a=16$
답 16

D033 | 답 ③

[풀이]
점 P를 지나고 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식은
$y=-x+2t+1$
점 Q의 좌표는
$\mathrm{Q}(0,\ 2t+1)$
두 점 사이의 거리 공식에 의하여
$\overline{\mathrm{AP}}^2=2t^2+4t+2$
$\overline{\mathrm{AQ}}^2=4t^2+4t+2$
함수의 극한에 대한 성질에 의하여
$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}=2$$
답 ③

[참고]



위의 그림에서 $t\to\infty$일 때 직선 AQ가 $x=-1$에 한없이 가까워지는 것을 관찰할 수 있다.
직각삼각형 APQ에 대하여
$t\to\infty$일 때 $\angle\mathrm{QAP}\to 45^\circ$이므로
삼각비의 정의에 의하여
$$\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{QA}}}\to\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=2$$

D034 | 답 11

[풀이]
함수의 극한에 성질에 의하여
$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+3x+7)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^2+3x+7)=1^2+3\times 1+7=11$$
답 11

D035 | 답 13

[풀이]
함수의 극한에 대한 성질에 의하여
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+9x-22}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+11)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+11)=13$$
답 13

D036 | 답 ④

[풀이1]
$t=x-2$로 두면 $x\to 2$일 때 $t\to 0$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t(t+2)}=4$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x(x+2)}\times(x+2)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x(x+2)}\times\lim_{x\to 0}(x+2)=8$$

답 ④

[풀이2]

※ 함수 $f(x)$가 연속함수라는 조건이 있다면 다음과 같은 풀이도 가능하다.

함수의 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 2}f(x-2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}\times(x^2-2x)=4\times 0=0$$

즉, $\lim_{t\to 0}f(t)=0$, $f(0)=0$

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}\times\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\times\frac{1}{t+2}$$

$$=\frac{1}{2}f'(0)=4 \text{ 즉, } f'(0)=8$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=8$$

답 ④

[풀이3]

$x\to 2$일 때,

$\dfrac{f(x-2)}{x^2-2x}\to 4$이고, $x^2-2x\to 0$이므로

$f(x-2)\to 0$, 즉 $f(0)=0$

모든 곡선과 점을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(x+2)x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$=\frac{1}{2}f'(0)=4, \text{ 즉 } f'(0)=8$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=8$$

답 ④

D037 | 답 ⑤

[풀이1]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}\times(x-2)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}\times\lim_{x\to 2}(x-2)$$

$$=5\times 0=0$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-2}}\times\frac{1}{f(x)-3+6}$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{0+6}=\frac{1}{30}$$

답 ⑤

[풀이2]

※ 함수 $f(x)$가 미분가능한 함수라는 조건이 있다면 다음과 같은 풀이도 가능하다.

$x\to 2$일 때, $\dfrac{f(x)-3}{x-2}\to 5$이고, $x-2\to 0$이므로

$f(x)-3\to 0$, 즉 $f(2)=3$

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=5$$

미분계수의 정의와 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-2}\times\{f(x)+3\}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\{f(x)+3\}}$$

$$=\frac{1}{f'(2)\times\{f(2)+3\}}=\frac{1}{5\times(3+3)}=\frac{1}{30}$$

답 ⑤

[참고]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}\times(x-2)=5\times 0=0$$

이므로

$\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=f(2)-3=0$ 즉, $f(2)=3$

[풀이3] 시험장

※ 함수 $f(x)$가 미분가능하다는 조건이 있다면 아래와 같은 풀이도 가능하다.

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5 \Rightarrow f(2)=3,\ f'(2)=5$

미분계수의 정의에 의하여

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot(f(x)+f(2))}$

$=\frac{1}{f'(2)\cdot 2f(2)}=\frac{1}{30}$

답 ⑤

D038 | 답 ⑤

[풀이1] ★

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)$

조건 (가)에 의하여

$\lim_{x\to 1}g(x)=0$

조건 (나)에서 $n=1$이면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

함수의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x\to 1}g(x)=0\times 0=0$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$ 즉, $f(1)=0$ …㉠

조건 (나)에서 $n=2$이면

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

$g(2)=a$(a는 상수)라고 두자.

마찬가지의 방법으로 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 함숫값을 구하면

$f(2)=0$ …㉡

함수 $f(x)$, $g(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+b)$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$g(x)=(x-1)(x^2+cx+d)$ ($\because$ (가))

조건 (나)에서 $n=1$이면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x+b)}{x^2+cx+d}=\frac{-1-b}{1+c+d}=0$

풀면 $b=-1$이므로

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-1)^2(x-2)$

조건 (나)에서 $n=3$이면

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+cx+d}=\frac{2}{9+3c+d}=2$

분수식을 풀면 $3c+d=-8$ …㉢

조건 (나)에서 $n=4$이면

$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+cx+d}=\frac{6}{16+4c+d}=6$

분수식을 풀면 $4c+d=-15$ …㉣

㉢과 ㉣을 연립하면

$c=-7,\ d=13$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$

$\therefore\ g(5)=12$

답 ⑤

[참고1] ★

인수정리를 이용하여 함수 $f(x)$의 방정식을 유도할 수 있다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$g(1)=0$이고 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이므로 $f(1)=0$이다.

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)P(x)$, $g(x)=(x-1)Q(x)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{P(x)}{Q(x)}=0$에서 $P(1)=0$이다.

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)^2R(x)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)R(x)}{Q(x)}=0$에서 $R(2)=0$이다.

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)^2(x-2)$

[참고2] ★

미분계수의 정의와 인수정리를 이용하여 함수 $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가짐을 보일 수 있다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$g(1)=0$이고 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이므로 $f(1)=0$이다.

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=0$$

에서 $f'(1)=0$이다.

$f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로 인수정리에 의하여

함수 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가진다.

[풀이2] 시험장

조건 (나)에서 $n=1$이면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Rightarrow f(1)=0 \ (\because (가):g(1)=0)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=0$$

$\Rightarrow f'(1)=0$

조건 (나)에서 $n=2$이면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Rightarrow f(2)=0$$

이상의 결과를 정리하면

$f(1)=0$, $f'(1)=0$, $f(2)=0$

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)^2(x-2)$,

$g(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$

(단, $g(2)=4+ax+b\neq0$)

조건 (나)에서 $n=3$이면

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{4}{2(9+3a+b)}=2$$

즉, $3a+b=-8$

조건 (나)에서 $n=4$이면

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{18}{3(16+4a+b)}=6$$

즉, $4a+b=-15$

연립방정식을 풀면

$a=-7$, $b=13$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$

$\therefore\ g(5)=12$

답 ⑤

D039 | 답 13

[풀이1]

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)-x^3$은 다항함수이다.

$f(x)-x^3=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(단, n은 자연수이고 $a_n\neq0$이다.)

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n}{3}x^{n-1}+\frac{a_{n-1}}{3}x^{n-2}+\cdots+\frac{a_1}{3}+\frac{a_0}{3x}\right)$$

$=2$

만약 $n\geq2$이고 $a_n>0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3}x^{n-1}=\infty$$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{3}x^{n-1}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\cdots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)$$

$=\infty$

이는 가정에 모순이다.

만약 $n\geq2$이고 $a_n<0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3}x^{n-1}=-\infty$$

이므로 마찬가지의 방법으로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=-\infty$$

이는 가정에 모순이다.

따라서 $n=1$이므로 다항함수 $f(x)-x^3$는 일차식이다.

$f(x)-x^3=ax+b$ (단, $a\neq0$)

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3x}\right)=\frac{a}{3}=2$$

풀면

$a=6$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+6x+b$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x^3+6x+b)=b=-7$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+6x-7$

$\therefore\ f(2)=13$

답 13

[풀이2] 시험장

(가) $\Rightarrow f(x)-x^3=6x+a$

(나) $\Rightarrow f(0)=a=-7$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+6x-7$

$\therefore\ f(2)=13$

답 13

D040 | 답 ④

[풀이1]

방정식 $f(x)=0$의 두 근이 각각 α, β이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}$

$=\lim_{x\to a}\{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-a)\}$

$=(a-\alpha)(a-\beta)=f(a)$ $\cdots$㉠

$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}$

$=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}\times\{f(x)+(x-a)\}$

$=\dfrac{3}{5}\times f(a)$ $\cdots$㉡

㉠=㉡: $f(a)=\dfrac{3}{5}\times f(a)$

풀면 $f(a)=0$이므로 인수정리에 의하여

$\alpha=a$ 또는 $\beta=a$

(1) $\alpha=a$인 경우

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-a)(x-\beta)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x-\beta-1)}{(x-a)(x-\beta+1)}$

$=\lim_{x\to a}\dfrac{x-\beta-1}{x-\beta+1}=\dfrac{a-\beta-1}{a-\beta+1}=\dfrac{3}{5}$

정리하면

$\beta=a-4$

이므로

$|\alpha-\beta|=4$

(2) $\beta=a$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 아래의 결과를 얻는다.

$|\alpha-\beta|=4$

(1), (2)에서

$\therefore\ |\alpha-\beta|=4$

답 ④

[참고]

$f(a)=0$임을 귀류법을 이용하여 보일 수 있다.

함수 $f(x)$는 다항함수이므로

임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)$이 항상 존재한다.

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\alpha\neq 0$이라고 가정하자.

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\dfrac{\alpha}{\alpha}=1\neq\dfrac{3}{5}$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

$\therefore\ f(a)=0$

[풀이2]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}=f(a)$ $\cdots$㉠

$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}$

$=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}\times\{f(x)+(x-a)\}$

$=\dfrac{3}{5}\times f(a)$ $\cdots$㉡

㉠=㉡: $f(a)=\dfrac{3}{5}\times f(a)$

풀면 $f(a)=0$이므로

인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-a)(x-b)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x-b-1)}{(x-a)(x-b+1)}$

$=\lim_{x\to a}\dfrac{x-b-1}{x-b+1}=\dfrac{a-b-1}{a-b+1}=\dfrac{3}{5}$

정리하면

$b=a-4$

이므로 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는

$(a,\ a-4)$ 또는 $(a-4,\ a)$

이다. 두 경우 모두에 대하여

$\therefore\ |\alpha-\beta|=4$

답 ④

[풀이3]

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^2+bx+c$ $\cdots$(*)

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}=f(a)$ $\cdots$㉠

$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}\times\{f(x)+(x-a)\}$$

$$=\frac{3}{5}\times f(a) \qquad \cdots ㉡$$

㉠=㉡: $f(a)=\frac{3}{5}\times f(a)$

풀면 $f(a)=0$이므로

$f(a)=a^2+ab+c=0$ 즉, $c=-a^2-ab$

이를 (*)에 대입하여 정리하면

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-a)(x+a+b)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a+b-1)}{(x-a)(x+a+b+1)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x+a+b-1}{x+a+b+1}=\frac{2a+b-1}{2a+b+1}=\frac{3}{5}$$

정리하면

$b=4-2a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-a)(x-a+4)$

이므로 순서쌍 (α, β)는

$(a, a-4)$ 또는 $(a-4, a)$

이다. 두 경우 모두에 대하여

$\therefore\ |\alpha-\beta|=4$

답 ④

[풀이4] 시험장

$x\to a$일 때,

$$\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}\to\frac{f(a)}{f(a)}\to\frac{3}{5}\neq 1$$

이므로 $f(a)=0$ $\cdots$ ㉠

($\because f(a)\neq 0$이라고 하면 $\frac{f(a)}{f(a)}\to 1$이기 때문이다.)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+1}$$

$=\frac{f'(a)-1}{f'(a)+1}=\frac{3}{5}$에서 $f'(a)=4$ $\cdots$ ㉡

㉠에 의하여

$f(x)=(x-a)(x-b)$

$f'(x)=2x-a-b$에서

$f'(a)=a-b=4$ ($\because$ ㉡)

$\therefore\ \alpha-\beta=|a-b|=4$

답 ④

D041

| 답 ②

[풀이1]

함수 $f(x)$를 3차함수로 가정하자.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$

조건 (가)에서

$\frac{f(x)}{x^2}=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}$이므로

$a>0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\infty$이고,

$a<0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=-\infty$이다.

이는 가정에 모순이므로 $f(x)$는 3차함수가 아니다.

함수 $f(x)$를 4차이상의 함수로 가정했을 때에도

동일한 모순이 발생한다.

따라서 $f(x)$는 1차 또는 2차함수이다.

함수 $f(x)$가 1차함수라고 가정하자.

$f(x)=ax+b\,(a\neq 0)$

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)=0\neq 2$$

이는 가정에 모순이므로 $f(x)$는 2차함수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a=2$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+bx+c$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2x+b+\frac{c}{x}\right)=3$$

그런데 $\lim_{x\to 0}(2x+b)=b$이므로

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{c}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2x+b+\frac{c}{x}\right)-\lim_{x\to 0}(2x+b)$$

$=3-b$ $\cdots$ ㉠

이때,

$c>0$이면 $\lim_{x\to 0+}\frac{c}{x}=\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{c}{x}=-\infty$,

$c<0$이면 $\lim_{x\to 0+}\frac{c}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{c}{x}=\infty$

이므로 $c=0$이다.

이를 ㉠에 대입하면 $b=3$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+3x$

$\therefore\ f(2)=14$

답 ②

[참고1]

함수 $f(x)$가 2차함수임을 엄밀하게 증명하면 다음과 같다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

으로 두자. (단, $a_n\neq 0$)

$n\geq 3$이라고 가정하자.

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(a_nx^{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x^{3-n}}+\cdots+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}\right)$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a_{n-1}}{x^{3-n}}+\cdots+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}\right)$은 수렴하고,

$\lim\limits_{x\to\infty}a_nx^{n-2}=\infty\,(a_n>0$인 경우$)$,

$\lim\limits_{x\to\infty}a_nx^{n-2}=-\infty\,(a_n<0$인 경우$)$

이므로, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$은 발산한다.

이는 가정에 모순이므로 $n=1$ 또는 $n=2$이다.

$n=1$이라고 가정하자.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=ax+b\,(a\neq 0)$

으로 두면, 조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)=0\neq 2$$

이는 가정에 모순이므로 $n=2$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 2차함수이다.

[참고2]

다음과 같은 빠른 풀이도 가능하다.

조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

조건 (나)에서 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=3$$

에서 $f(0)=0$, $f'(0)=3$임을 알 수 있다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=2x^2+ax+b$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x+a$

$f(0)=b=0$, $f'(0)=a=3$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+3x$

$\therefore\ f(2)=14$

[풀이2] 시험장

(가) $\Rightarrow f(x)=2x^2+\cdots$

(나) $\Rightarrow f(x)=\cdots+3x$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+3x$

$\therefore\ f(2)=14$

답 ②

D042 | 답 30

[풀이1]

$(x+1)f(x)=g(x)$로 치환하면

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=1$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$a=\lim_{x\to 1}(2x^2+1)f(x)=\lim_{x\to 1}g(x)\times\frac{2x^2+1}{x+1}$$

$$=1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$\therefore\ 20a=30$

답 30

[풀이2]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$a=\lim_{x\to 1}(2x^2+1)f(x)$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)f(x)\times\frac{2x^2+1}{x+1}$$

$$=1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$\therefore\ 20a=30$

답 30

[풀이3] 시험장

※ 함수 $f(x)$가 연속이라는 조건이 있다면 다음과 같은 풀이도 가능하다.

함수 $f(x)$가 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1}(x+1)f(x)=2f(1)=1$에서 $f(1)=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+1)f(x)=3f(1)=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 20a=30$

답 30

D043 | 답 ③

[풀이]

우선 문제에서 주어진 왼쪽 등식을 생각하자.

$n=1$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$$

이므로

$f(x)-4x^3+3x^2=6x^2+\cdots$

즉, $f(x)=4x^3+3x^2+\cdots$

$n=2$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$$

이므로

$f(x)-4x^3+3x^2=6x^3+\cdots$

즉, $f(x)=10x^3+\cdots$

$n\geq 3$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^{n+1}+\cdots}{x^{n+1}+1}=6$$

이므로

$f(x)-4x^3+3x^2=6x^{n+1}+\cdots$

즉, $f(x)=6x^{n+1}+\cdots$

정리하면

$n=1$일 때, $f(x)=4x^3+3x^2+\cdots$

$n=2$일 때, $f(x)=10x^3+\cdots$

$n\geq 3$일 때, $f(x)=6x^{n+1}+\cdots$

이제 문제에서 주어진 오른쪽 등식을 생각하자.

$n=1$일 때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+3x^2+\cdots}{x}=4$$

이므로 $f(x)=4x^3+3x^2+4x$

$n=2$일 때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{10x^3+\cdots}{x^2}=4$$

이므로 $f(x)=10x^3+4x^2$

$n\geq 3$일 때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^{n+1}+\cdots}{x^n}=4$$

이므로 $f(x)=6x^{n+1}+4x^n$

이상에서

$$f(1)=\begin{cases}11 & (n=1)\\ 14 & (n=2)\\ 10 & (n\geq 3)\end{cases}$$

따라서 $f(1)$의 최댓값은 14이다.

답 ③

D044 | 답 ③

[풀이1]

$f(x)g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$

(단, $a_n\neq 0$, a_{n-1}, $\cdots$, a_0은 모두 정수)

으로 두자.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=\begin{cases}\pm\infty & (n\geq 4)\\ a_n & (n=3)\\ 0 & (n\leq 2)\end{cases}$$

이므로 조건 (가)에 의하여

$n=3$, $a_n=2$ $\cdots$㉠

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(a_nx^{n-2}+\cdots+a_3x+a_2+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}\right)$$

가 -4에 수렴하려면 (조건(나))

$a_1=a_0=0$, $a_2=-4$ $\cdots$㉡

이어야 한다.

㉠, ㉡에 의하여

함수 $f(x)g(x)$의 방정식은

$f(x)g(x)=2x^3-4x^2$

$=2x^2(x-2)=x^2(2x-4)$

$=2x(x^2-2x)=x(2x^2-4x)$

$f(x)$가 $2x^2$이면 $f(2)$는 최댓값 8을 갖는다.

답 ③

[풀이2] 시험장

(가) $\Rightarrow$ $f(x)g(x)=2x^3+\cdots$

(나) $\Rightarrow$ $f(x)g(x)=\cdots-4x^2$

$f(x)g(x)=2x^3-4x^2$

$=2x^2(x-2)=x^2(2x-4)$

$=2x(x^2-2x)=x(2x^2-4x)$

$f(x)$가 $2x^2$이면 $f(2)$는 최댓값 8을 갖는다.

답 ③

D045 | 답 ⑤

[풀이1]

(1) $k=1$인 경우

구간 $[-1,\ 3]$에서 두 함수 $f(x)$와 $g_1(x)$는 모두 연속이다.

연속함수의 성질에 의하여

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)g_1(x)$는 연속이다.

(2) $k=2$인 경우

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고,

구간 $[-1,\ 0),\ (0,\ 3]$에서 함수 $g_2(x)$가 연속이다.

연속함수의 성질에 의하여

구간 $[-1,\ 0),\ (0,\ 3]$에서 함수 $f(x)g_2(x)$는 연속이다.

$x=0$에서의 함수 $f(x)g_2(x)$의 함숫값은

$f(0)g_2(0)=0\times2=0$

$x=0$에서의 함수 $f(x)g_2(x)$의 극한값은

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)g_2(x)=0\times3=0$

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)g_2(x)=0\times1=0$

즉, $\lim\limits_{x\to0}f(x)g_2(x)=0$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)g_2(x)=0=f(0)g_2(0)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여 함수 $f(x)g_2(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)g_2(x)$는 연속이다.

(3) $k=3$인 경우

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고,

구간 $[-1,\ 2),\ (2,\ 3]$에서 함수 $g_3(x)$가 연속이다.

연속함수의 성질에 의하여

구간 $[-1,\ 2),\ (2,\ 3]$에서 함수 $f(x)g_3(x)$는 연속이다.

$x=2$에서의 함수 $f(x)g_3(x)$의 함숫값은

$f(2)g_3(2)=0\times0=0$

$x=2$에서의 함수 $f(x)g_3(x)$의 극한값은

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)g_3(x)=0\times0=0$

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)g_3(x)=0\times1=0$

즉, $\lim\limits_{x\to2}f(x)g_3(x)=0$

$\lim\limits_{x\to2}f(x)g_3(x)=0=f(2)g_3(2)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여 함수 $f(x)g_3(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

따라서 구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)g_3(x)$는 연속이다.

이상에서 구하는 함수는 $g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x)$이다.

답 ⑤

[풀이2] 시험장

• $k=1$인 경우

구간 $[-1,\ 3]$에서 두 함수 $f(x)$와 $g_1(x)$는 모두 연속이다.

연속함수의 성질에 의하여

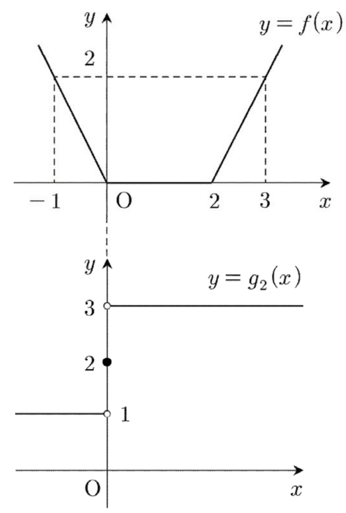
구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)g_1(x)$는 연속이다.

• $k=2$인 경우

함수 $g_2(x)$는 $x=0$에서 불연속이지만

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $f(0)=0$이므로

함수 $f(x)g_2(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

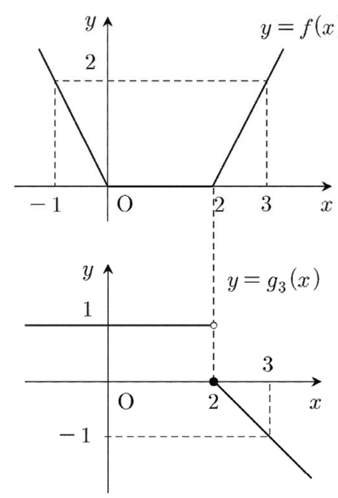


• $k=3$인 경우

함수 $g_3(x)$는 $x=2$에서 불연속이지만

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이고 $f(2)=0$이므로

함수 $f(x)g_3(x)$는 $x=2$에서 연속이다.



이상에서 구하는 함수는 $g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x)$이다.

답 ⑤

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

2015 개정 교육과정에서 달라지는 점은

• 수학 I
지수함수와 로그함수: 두 대단원 '지수와 로그', '지수함수와 로그함수'가 결합
삼각함수: 사인법칙, 코사인법칙의 귀환 & sec, csc, cot가 미적분 과목으로 이동
수열: 주기함수 관련 문제 출제 가능

• 수학 II
함수의 극한과 연속: 주기함수 관련 문제 출제 가능
미분: 주기함수 관련 문제 출제 가능
적분: 주기함수 관련 문제 출제 가능 & 구분구적분 퇴출

• 미적분
수열의 극한: 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 출제 가능
미분법: 매개변수의 미분법, 음함수의 미분법의 귀환
적분법: 구분구적법은 이과 전용

• 확률과 통계
경우의 수: 순열, 조합 고1 과정으로 이동, 분할(정수/자연수) 퇴출
확률: 변화 없음
통계: 모비율 퇴출

• 기하 (2021 수능에서는 제외)
이차곡선: 기울기가 주어진 접선의 공식 귀환 & 사인법칙, 코사인 법칙 관련 문제 출제 가능
평면벡터: 라디안이 아닌 육십분법 사용 & 벡터의 내적의 정의를 성분으로 함
공간도형과 공간좌표: 공간벡터, 공간에서의 벡터의 방정식 퇴출

2020 수능에서 보여준 출제 경향의 변화는

• 가형16(확률과 통계): 경우의 수를 셀 때 CASE구분을 해야 하는 경우와 하지 말아야 하는 경우를 판단하는 것에 대한 평가 강화!
• 가형21(미적분): 변화 없음이 경향성. 특별한 발상 없이 기출문제에서 연습했던 전형적인 풀이를 적용할 것!
• 가형28(확률과 통계): 사실상 국어영역. 문제를 정확하게 이해하는 것도 이젠 중요한 평가요소.
• 가형30(미적분): 변화 없음이 경향성. 특별한 발상 없이 기출문제에서 연습했던 전형적인 풀이를 적용할 것!

• 나형12(수학2): 사차함수의 그래프의 개형을 알고 있다면 좀 더 빠르게 풀리는 문제. 이젠 실전이론도 평가대상.
• 나형20(수학2): 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 이론을 노골적으로 출제한 문제. 이젠 실전이론도 평가대상.
• 나형21(수학1): 수열을 나열하기 전에 '어떤 규칙이 나올 것인가?'를 알고 있어야 하는 문제. (수열도 21번에 출제 가능!)
• 나형30(수학2): 삼차함수의 수평화와 비율관계를 알고 있으면 어렵지 않은 문제. 이젠 실전이론도 평가대상.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

2021학년도 수능의 시작입니다!

학년도	시험	실시년도/월	학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정			2009	모의평가(9월)	2008년 9월
1991	실험평가(1차)	1990년 12월	2009	대학수학능력	2008년 11월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월	2010	모의평가(6월)	2009년 6월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월	2010	모의평가(9월)	2009년 9월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월	2010	대학수학능력	2009년 11월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월	2011	모의평가(6월)	2010년 6월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월	2011	모의평가(9월)	2010년 9월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월	2011	대학수학능력	2010년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월	2007개정 교육과정		
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월	2012	모의평가(6월)	2011년 6월
1995	대학수학능력	1994년 11월	2012	모의평가(9월)	2011년 9월
1996	대학수학능력	1995년 11월	2012	대학수학능력	2011년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월	2014	예비시행	2012년 5월
1998	대학수학능력	1997년 11월	2013	모의평가(6월)	2012년 6월
6차 교육과정			2013	모의평가(9월)	2012년 9월
1999	대학수학능력	1998년 11월	2013	대학수학능력	2012년 11월
2000	대학수학능력	1999년 11월	2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2001	대학수학능력	2000년 11월	2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2002	대학수학능력	2001년 11월	2014	대학수학능력	2013년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월	2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2003	대학수학능력	2002년 11월	2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월	2015	대학수학능력	2014년 11월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월	2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2004	대학수학능력	2003년 11월	2016	모의평가(9월)	2015년 9월
7차 교육과정			2016	대학수학능력	2015년 11월
2005	예비시행	2003년 12월	2009개정 교육과정		
2005	모의평가(6월)	2004년 6월	2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월	2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2005	대학수학능력	2004년 11월	2017	대학수학능력	2016년 11월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월	2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월	2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2006	대학수학능력	2005년 11월	2018	대학수학능력	2017년 11월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월	2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월	2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월	2019	대학수학능력	2018년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월	2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월	2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월	2020	대학수학능력	2019년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월			

각 과목별 문항 수 및 비율 (총 3617 문항)

수학 Ⅰ	수학 Ⅱ	미적분	확률과 통계	기하	수학	교육과정 外
541	329	522	468	206	300	1251
14.9 %	9.0 %	14.4 %	12.9 %	5.7 %	8.3 %	34.8 %

※ 수학, 교육과정 外 문제집과 해설집은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 무료PDF파일 다운로드 가능

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목 차

단원별 알파벳구성

<table>
<tr><th>과목</th><th>대단원</th><th>알파벳</th><th>과목</th><th>대단원</th><th>알파벳</th></tr>
<tr><td rowspan="3">수학 I</td><td>지수함수와 로그함수</td><td>A</td><td rowspan="3">기하</td><td>이차곡선</td><td>M</td></tr>
<tr><td>삼각함수</td><td>B</td><td>평면벡터</td><td>N</td></tr>
<tr><td>수열</td><td>C</td><td>공간도형과 공간좌표</td><td>P</td></tr>
<tr><td rowspan="3">수학 II</td><td>함수의 극한과 연속</td><td>D</td><td rowspan="6">수학</td><td>다항식</td><td>Q</td></tr>
<tr><td>미분</td><td>E</td><td>방정식과 부등식</td><td>R</td></tr>
<tr><td>적분</td><td>F</td><td>도형의 방정식</td><td>S</td></tr>
<tr><td rowspan="3">미적분</td><td>수열의 극한</td><td>G</td><td>집합과 명제</td><td>T</td></tr>
<tr><td>미분법</td><td>H</td><td>함수</td><td>U</td></tr>
<tr><td>적분법</td><td>I</td><td>순열과 조합</td><td>V</td></tr>
<tr><td rowspan="3">확률과
통계</td><td>경우의 수</td><td>J</td><td colspan="2">교육과정 外</td><td>Z</td></tr>
<tr><td>확률</td><td>K</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>통계</td><td>L</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

G 수열의 극한

1. 수열의 극한

2. 급수

- 2015개정 교육과정

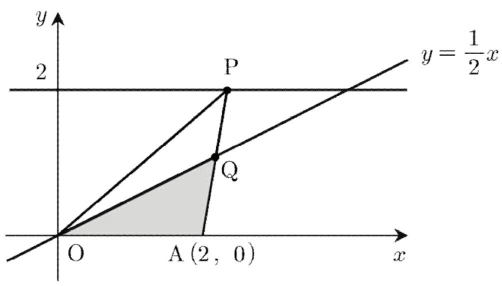
○ 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식은 수학Ⅰ 삼각함수 단원을 따름
○ 삼각형, 사각형, 원, 부채꼴의 기하학적 성질은 개정 중학교 수학 교과서를 따름
○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록
○ 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 포함
○ 라디안 표현이 포함된 문제 포함

G. 수열의 극한값의 계산

G001
○○○
(1995-인문예체능26/자연26)

좌표평면 위에 두 점 O$(0,\ 0)$, A$(2,\ 0)$과 직선 $y=2$ 위를 움직이는 점 P$(t,\ 2)$가 있다. 선분 AP와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점을 Q라 하자.

△QOA의 넓이가 △POA의 넓이의 $\frac{1}{3}$일 때 t의 값을 t_1, $\frac{1}{2}$일 때 t의 값을 t_2, $\cdots$, $\frac{n}{n+2}$일 때 t의 값을 t_n이라 하면 $\lim_{n\to\infty} t_n$의 값은? [2점]



① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

G002
○○○
(1997-인문예체능14/자연14)

모든 실수에 대하여 정의된 함수 $f(x)$는 $f(x)=x^2$ $(-1\le x\le 1)$과 $f(x+2)=f(x)$를 만족시킨다. 좌표평면 위에서 각 자연수 n에 대하여 직선 $y=\frac{1}{2n}x+\frac{1}{4n}$과 함수 $y=f(x)$의 그래프와의 교점의 개수를 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [2점]

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

G003
○○○
(2000-인문21)

자연수 n에 대하여, 두 곡선

$$y=x^2-2,\ y=-x^2+\frac{2}{n^2}$$

로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

① $\frac{16}{3}$　② $\frac{14}{3}$　③ 4
④ $\frac{10}{3}$　⑤ $\frac{8}{3}$

G004

○ (2005(6)-가형3/나형3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt{n^2-1}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}-1$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{2}+1$

G005

○○○ (2005(6)-나형9)

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{2}\pi\right)$의 값은? [3점]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

G006

○○○ (2005(6)-나형15)

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\begin{cases} a_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2} \\ b_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2} \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a_1=b_1$일 때, $a_n=b_n$
ㄴ. $a_1=0,\ b_1=1$일 때, $a_{n+1}>a_n$
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G007

○○○
(2005(6)−가형14)

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x+1)=f(x)$를 만족시키고, 0과 1 사이에서 다음과 같이 정의된다.

$$f(x)=\begin{cases} x & \left(0 \le x \le \dfrac{1}{2}\right) \\ 1-x & \left(\dfrac{1}{2} < x \le 1\right) \end{cases}$$

〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f\left(f\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)=f\left(\dfrac{2}{3}\right)$

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2}$

ㄷ. 수열 $\left\{f\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{2}\right)\right\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G008

○○
(2005(9)−나형3)

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 6인 등차수열이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{3}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

G009

○
(2005−나형4)

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n+4}-n)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

G010

○○
(2005−나형28)

이차함수 $f(x)=3x^2$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(n,\ f(n))$과 $\mathrm{Q}(n+1,\ f(n+1))$ 사이의 거리를 a_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$의 값은? (단, n은 자연수이다.) [4점]

① 9 ② 8 ③ 7
④ 6 ⑤ 5

G011

○
(2006(6)−나형3)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

G012
○○ (2006(6)−나형6)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$S_n = 2n^2 - n$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{S_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

G013
○ (2006(9)−나형19)

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+15n+13} - \sqrt{n^2-13n})$

의 값을 구하시오. [3점]

G014
○○ (2006−나형7)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n < a_n < n+1$을

만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

G015
○○ (2007(9)−나형21)

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})} = 5$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [4점]

G016
○○ (2008(6)−나형7)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n-3}{a_n+1} = \frac{3}{4}$일 때,

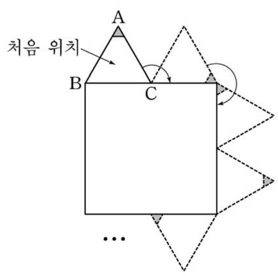
$\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

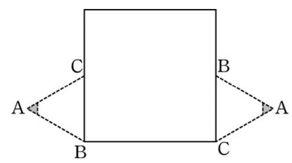
G017

○○○
(2008(6)–가형17/나형17)

한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. [그림1]과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를 n바퀴 도는 동안, 변 BC가 정사각형의 변위에 놓이는 횟수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=1$일 때, [그림2]와 같이 변 BC가 2회 놓이므로 $a_1=2$이다. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}$의 값은? [4점]



[그림1]



[그림2]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

G018

○○
(2008(6)–나형30)

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=4$, $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=28$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. [4점]

G019

○
(2008(9)–나형2)

$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+n+1}{n^2+1}$의 값은? [2점]

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

G020

●●●
(2009(6)–나형29)

자연수 n에 대하여 집합 $\{k \mid 1\le k\le 2n,\ k$는 자연수$\}$의 세 원소 a, b, $c(a<b<c)$가 등차수열을 이루는 집합 $\{a,\ b,\ c\}$의 개수를 T_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

G021

○○○ (2009(9)−나형29)

자연수 n에 대하여 이차함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

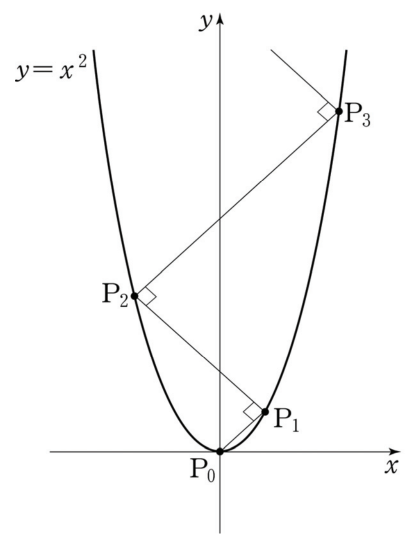
G022

●●● (2009−가형13/나형13)

자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 두 점 P_0, P_1의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(1, 1)$이다.
(나) 점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이다.
(단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

$l_n=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}$의 값은? [3점]



① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

G023

○ (2010(6)-나형3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-n}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

G024

○○ (2010(6)-나형5)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}b_n$의 값은? [3점]

(가) $20-\frac{1}{n}<a_n+b_n<20+\frac{1}{n}$

(나) $10-\frac{1}{n}<a_n-b_n<10+\frac{1}{n}$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

G025

○○ (2010(6)-나형7)

수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=\log\frac{n+1}{n}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

G026

○ (2010-나형3)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n-1)}{2n^2+1}$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

G027

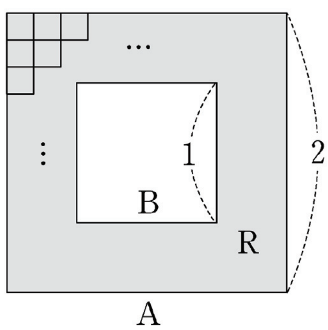
★★★ (2010−나형25)

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여 있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자.

2 이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

(가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다.
(나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

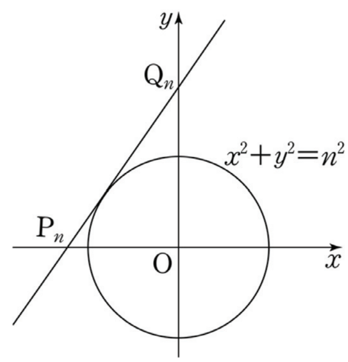
이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=12$, $a_3=20$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=c$라 할 때, $100c$의 값을 구하시오. [4점]



G028

○○ (2011(9)−가형9/나형9)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=n^2$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. $l_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}$의 값은? [4점]

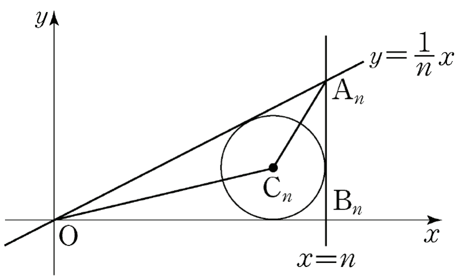


① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

G029

●●● (2011-나형14)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 $x=n$이 만나는 점을 A_n, 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 B_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OC}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

G030

○○ (2012(9)-가형25/나형25)

수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이

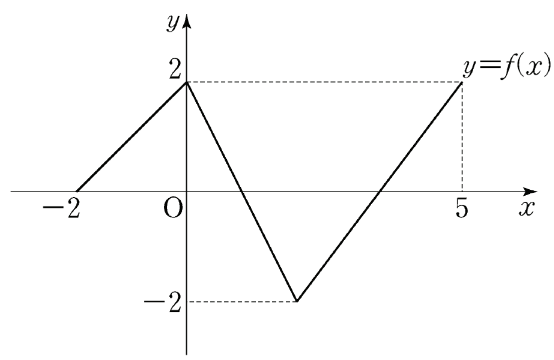
$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=2,\ \lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n=7$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$의 값을 구하시오. (단, $a_n\neq 0$) [3점]

G031

●●● (2013(6)-나형20)

닫힌구간 $[-2,\ 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$을 만족시키는 상수 a의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

G032

○○
(2013(6)−나형23)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+7}{3n+1}=4$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

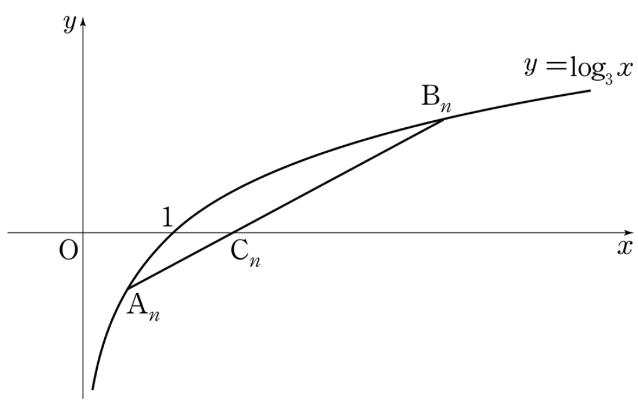
G033

○○○
(2013(9)−가형15/나형15)

2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. 그래프 위의 점 B_n과 x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.
> (나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n}=1:2$

점 C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$　⑤ 1

G034

○
(2014(6)−A형24)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

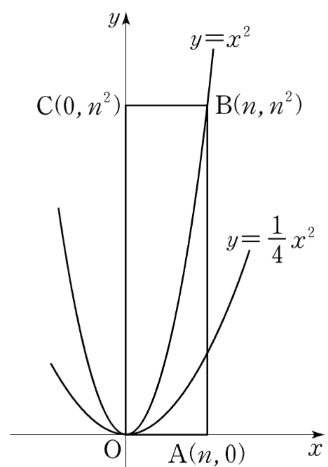
$$3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n}$의 값을 구하시오. [3점]

G035

●●●
(2014(9)−A형14변형)

그림은 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$과 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(n,\ 0)$, $\mathrm{B}(n,\ n^2)$, $\mathrm{C}(0,\ n^2)$인 직사각형 OABC를 나타낸 것이다. (단, n은 자연수이다.)



자연수 n에 대하여, x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 두 선분 BC, CO와 곡선 OB로 둘러싸인 도형의 경계 및 내부에 있는 모든 점의 개수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값은? [4점]

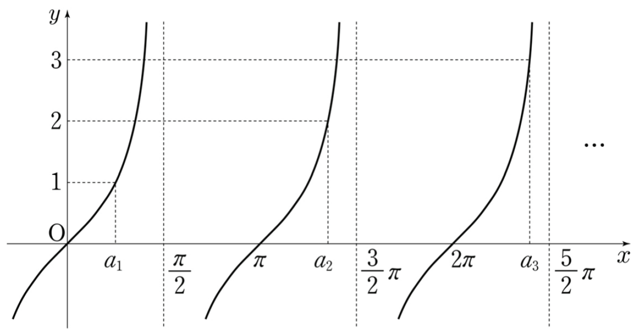
① $\frac{1}{2}$　② $\frac{7}{12}$　③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{5}{6}$

▶ 위의 문제는 두 개의 문제로 구성된 세트 문항의 두 번째 문제이다. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$은 첫 번째 문제에서만 사용되는 조건이므로 위의 문제를 풀 때에는 무시해도 좋다.

G036

○○ (2014-B형18)

자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=\tan x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [4점]



① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{\pi}{2}$　③ $\frac{3}{4}\pi$

④ π　⑤ $\frac{5}{4}\pi$

G037

○○ (2015(9)-A형28)

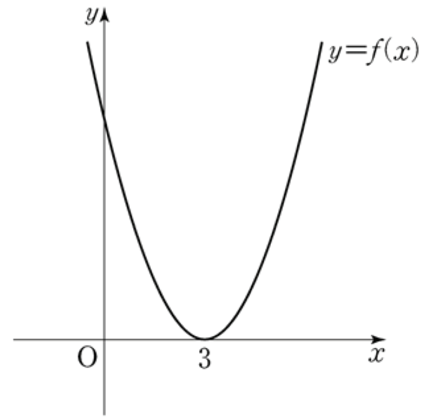
자연수 n에 대하여 점 $(3n,\ 4n)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 O_n이 있다.

원 O_n 위를 움직이는 점과 점 $(0,\ -1)$ 사이의 거리의 최댓값을 a_n, 최솟값을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값을 구하시오. [4점]

G038

○○○ (2016(6)-A형14)

함수 $f(x)$는 $f(x)=(x-3)^2$이다.



자연수 n에 대하여 방정식 $f(x)=n$의 두 근이 α, β일 때 $h(n)=|\alpha-\beta|$라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$$

의 값은? [4점]

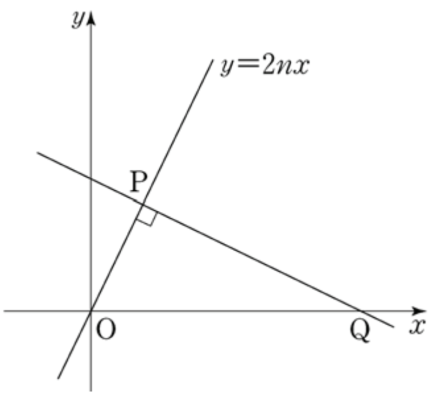
① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$

④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

G039

○○
(2016(6)-B형10)

자연수 n에 대하여 직선 $y=2nx$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ 2n^2)$을 지나고 이 직선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 OQ의 길이를 l_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

G040

○○
(2016(9)-A형27)

양수 a와 실수 b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+4n}-bn)=\frac{1}{5}$$

일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

G041

○○
(2016(9)-B형24)

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2+2nx-4n=0$$

의 양의 실근을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

G042

○○
(2016-A형10)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

해설 목차

G. 수열의 극한

H. 미분법

I. 적분법

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 I	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 II	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

G 수열의 극한

1	⑤	2	③	3	⑤	4	①	5	①
6	③	7	⑤	8	②	9	⑤	10	④
11	①	12	②	13	14	14	②	15	25
16	③	17	①	18	12	19	④	20	②
21	①	22	②	23	①	24	③	25	①
26	①	27	50	28	④	29	③	30	35
31	②	32	12	33	①	34	15	35	③
36	④	37	4	38	②	39	④	40	110
41	2	42	⑤	43	⑤	44	④	45	④
46	17	47	10	48	③	49	①	50	④
51	②	52	15	53	⑤	54	10	55	②
56	②	57	40	58	④	59	①	60	21
61	12	62	③	63	③	64	90	65	③
66	③	67	30	68	②	69	③	70	33
71	③	72	②	73	4	74	⑤	75	16
76	①	77	23	78	④	79	③	80	16
81	19	82	①	83	⑤	84	4	85	②
86	①	87	5	88	①	89	54	90	9
91	①	92	③	93	⑤	94	16	95	③
96	12	97	40	98	③	99	⑤	100	④
101	⑤	102	18	103	12	104	16	105	③
106	32	107	19	108	①	109	16	110	①
111	⑤	112	④	113	⑤	114	②	115	②
116	②	117	37	118	①	119	②	120	9
121	①	122	③	123	6	124	13	125	②
126	④	127	⑤	128	③	129	④	130	⑤
131	②	132	⑤	133	⑤	134	④	135	②
136	③	137	②	138	②	139	④	140	②
141	②	142	②	143	③	144	④	145	②
146	②	147	②	148	②	149	③	150	④
151	③	152	①	153	③	154	①	155	④
156	①	157	③	158	②	159	⑤	160	③
161	③	162	①	163	③	164	②	165	②
166	②	167	④	168	②	169	①	170	⑤

G001 | 답 ⑤

[풀이1]

직선 AP 의 방정식은

$t=2$이면 $x=2$

$t \neq 2$이면 $y=\dfrac{2}{t-2}(x-2)$

두 직선 AP, $y=\dfrac{1}{2}x$의 방정식을 연립하여 점 Q의 좌표를 구하면

$t=2$이면 Q$(2,\ 1)$

$t=6$이면 점 Q는 존재하지 않는다. ($\because$ 두 직선이 서로 평행)

$t \neq 2$, $t \neq 6$이면 Q$\left(\dfrac{8}{6-t},\ \dfrac{4}{6-t}\right)$

($\triangle$POA의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times$(점 P의 y좌표)$=2$

($\triangle$QOA의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times$(점 Q의 y좌표)$=\dfrac{4}{6-t}$

주어진 조건에 의하여

$$\frac{4}{6-t_n} : 2 = n : n+2$$

정리하면

$$t_n=\frac{4n-4}{n}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{4}{n}\right)=4$$

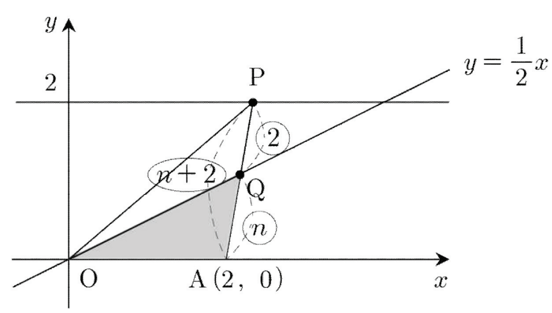
답 ⑤

[풀이2]

원점 O에서 직선 AP에 이르는 거리를 d라고 하면

($\triangle$POA의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times d$

($\triangle$QOA의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times d$



주어진 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{AQ}} : \overline{\mathrm{AP}} = n : n+2$

점 Q는 선분 AP의 $n : 2$ 내분점이다.

내분점의 공식에 의하여

Q$\left(\dfrac{nt_n+4}{n+2},\ \dfrac{2n}{n+2}\right)$

점 Q는 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$ 위의 점이므로

$$\frac{2n}{n+2}=\frac{1}{2}\times\frac{nt_n+4}{n+2}$$

정리하면

$t_n = \dfrac{4n-4}{n}$

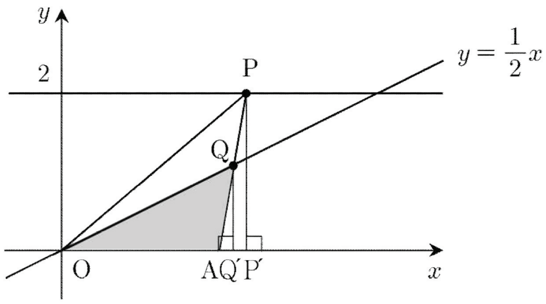
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\dfrac{4}{n}\right)=4$

답 ⑤

[참고]

두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P$'$, Q$'$라고 하자.



서로 닮은 두 직각삼각형 APP$'$, AQQ$'$에 대하여

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PP'}}=\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{QQ'}}$

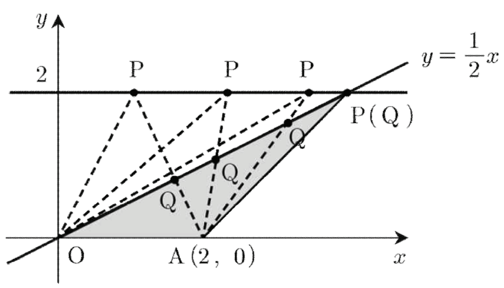
정리하면

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{AQ}}$ =(점 P의 y좌표):(점 Q의 y좌표)$=n+2:n$

[풀이3] 시험장

$n\to\infty$일 때, $\dfrac{n}{n+2}\to 1$

두 삼각형 QOA, POA의 넓이는 하나의 실수에 수렴한다.



두 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$, $y=2$의 교점은 $(4,\ 2)$이다.

위의 그림에서 점 P(Q)가 점 $(4,\ 2)$에 한없이 가까이 다가가면 두 삼각형 QOA, POA의 넓이는 2에 수렴한다.

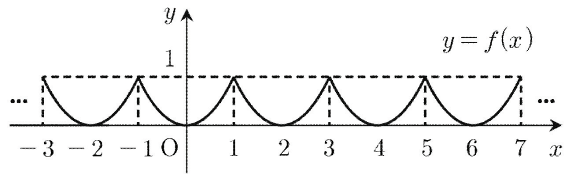
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} t_n = 4$

답 ⑤

G002 | 답 ③

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는

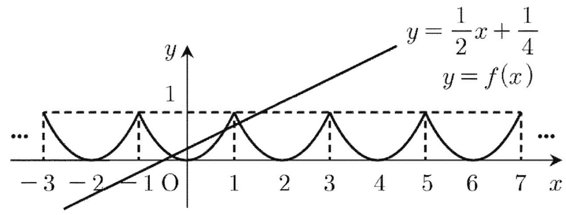


주어진 직선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2n}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

이 직선은 n의 값에 관계없이 항상 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$을 지난다.

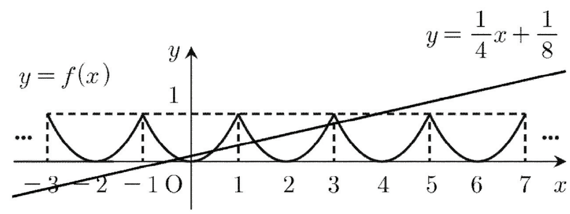
$n=1$인 경우



함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{1}{4n}$의

교점의 개수는 3이므로 $a_1=3$

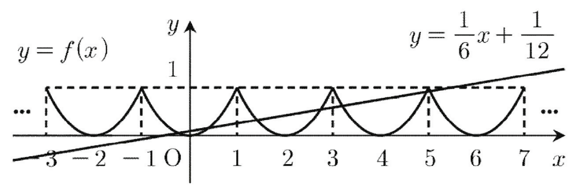
$n=2$인 경우



함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{1}{4n}$의

교점의 개수는 5이므로 $a_2=5$

$n=3$인 경우



함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{1}{4n}$의

교점의 개수는 7이므로 $a_3=7$

⋮

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열이다.

일반항 a_n은

$a_n=2n+1$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$

답 ③

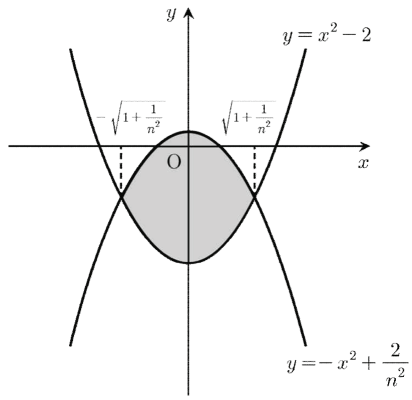
G003 | 답 ⑤

[풀이1]

우선 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하자.

두 곡선의 방정식을 연립하면

$x^2-2=-x^2+\frac{2}{n^2}$ 풀면 $x=\pm\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$



두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 정적분의 공식에 의하여

$$S_n=\int_{-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}^{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\left|(x^2-2)-\left(-x^2+\frac{2}{n^2}\right)\right|dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\left(-2x^2+\frac{2}{n^2}+2\right)dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+\left(2+\frac{2}{n^2}\right)x\right]_0^{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{8}{3}$

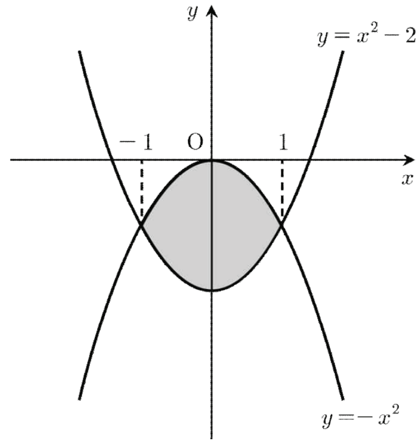
답 ⑤

[풀이2] 시험장

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}=0$이므로 $n\to\infty$일 때,

곡선 $y=-x^2+\frac{2}{n^2}$은 곡선 $y=-x^2$에 한없이 가까워진다.

$\lim_{n\to\infty}S_n=$(두 곡선 $y=x^2-2$와 $y=-x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이)



두 곡선 $y=x^2-2$와 $y=-x^2$의 교점의 x좌표를 구하자.

두 곡선의 방정식을 연립하면

$x^2-2=-x^2$에서 $x=\pm1$

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 정적분의 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_{-1}^{1}|(x^2-2)-(-x^2)|dx$$

$$=2\int_0^1(-2x^2+2)dx=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1=\frac{8}{3}$$

답 ⑤

G004 | 답 ①

[풀이1]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

답 ①

[풀이2] 시험장

$n\to\infty$일 때,

$2n^2-n\approx 2n^2,\ n^2-1\approx n^2$

$n\to\infty$일 때,

$$\frac{n}{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$\approx\frac{n}{\sqrt{2n^2}+\sqrt{n^2}}\to\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

답 ①

G005 | 답 ①

[풀이]

$a_n = \sin\frac{n}{2}\pi$로 두자.

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \cdots$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots$

모든 자연수 n에 대하여

$0 \le S_n \le 1$

각 변을 n으로 나누면

$$0 \le \frac{S_n}{n} \le \frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty} 0 = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$이므로

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{2}\pi\right) = 0$$

답 ①

G006 | 답 ③

[풀이1]

▸ ㄱ. (참)

$a_1 = b_1 = p$(p는 상수)로 두자.

문제에서 주어진 귀납적 정의에서

$$a_2 = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}p + \frac{3}{2}$$

$$b_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}p + \frac{3}{2}$$

즉, $a_2 = b_2$

$$a_3 = -\frac{1}{2}b_2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}p + \frac{3}{4}$$

$$b_3 = -\frac{1}{2}a_2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}p + \frac{3}{4}$$

즉, $a_3 = b_3$

$\vdots$

마찬가지의 방법으로 4 이상의 자연수 n에 대하여

$a_n = b_n$

▸ ㄴ. (거짓)

문제에서 주어진 귀납적 정의에서

$$a_2 = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{3}{2} = 1$$

$$b_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = -\frac{1}{2}b_2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$b_3 = -\frac{1}{2}a_2 + \frac{3}{2} = 1$$

$\vdots$

그런데 $a_2 > a_3$이므로 모든 자연수 n에 대하여 항상 $a_{n+1} > a_n$이 성립하는 것은 아니다.

▸ ㄷ. (참)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$

(단, α, β는 상수)

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} b_n + \frac{3}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}\beta + \frac{3}{2} \quad \cdots ㉠$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{3}{2}$$

$$\beta = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2} \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면

$\alpha = \beta = 1$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[풀이2]

거미줄을 이용하여 문제를 해결해보자.

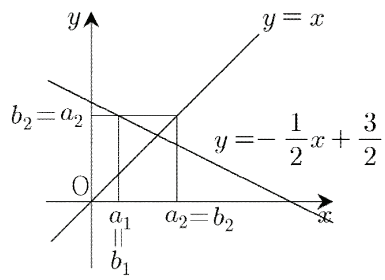
두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = x$를 이용하여

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$

$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots$

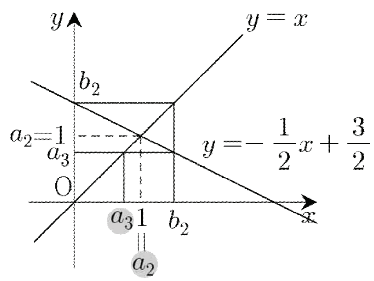
의 값을 수직선 위에 나타내자.

▸ ㄱ. (참)



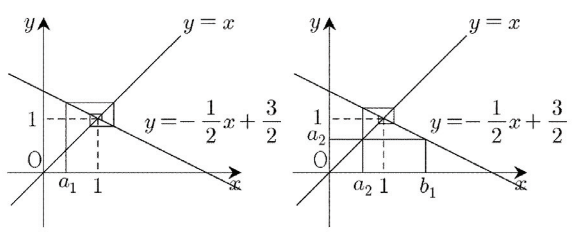
위의 그림처럼 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=b_n$임을 알 수 있다.

▸ ㄴ. (거짓)



위의 그림처럼 $a_3<a_2$인 경우가 있으므로 주어진 부등식이 항상 성립하는 것은 아니다.

▸ ㄷ. (참)



위의 그림과 같이 a_1, b_1의 값이 주어졌을 때,

$n\to\infty$일 때, $a_n\to 1$임을 알 수 있다.

마찬가지의 방법으로

$n\to\infty$일 때, $b_n\to 1$이다.

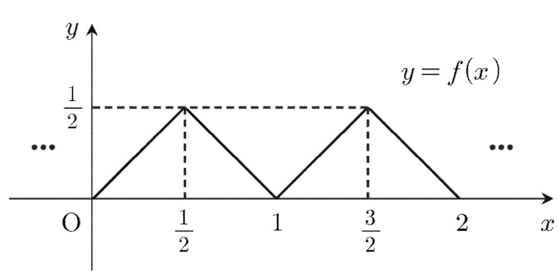
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

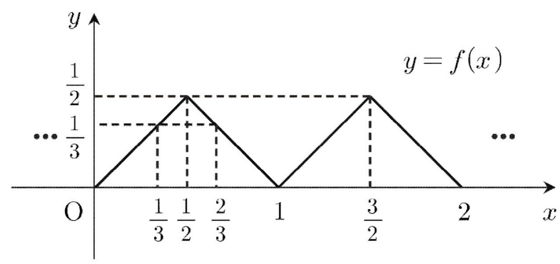
G007 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)



$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$

합성함수의 정의에 의하여

$f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

$\therefore\ f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)$

▸ ㄴ. (참)

$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$으로 두자.

$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\le 1$이므로

$f(a_n)=1-a_n$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

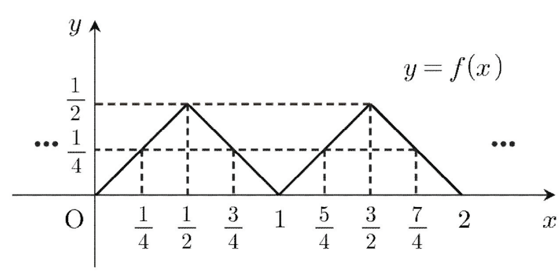
$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

▸ ㄷ. (참)

$b_n=\frac{1}{4}+\frac{n}{2}$으로 두자.



자연수 k에 대하여

$n=2k-1$이면

$f(b_n)=f\left(\frac{3}{4}+k-1\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$

$n=2k$이면

$f(b_n)=f\left(k+\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

모든 자연수 n에 대하여

$f(b_n)=\frac{1}{4}$

따라서 수열 $\left\{f\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)\right\}$은 $\frac{1}{4}$에 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

G008 | 답 ②

[풀이1]

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 6n - 5$

n의 자리에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1} = 6n+1$

수열 $\{b_n\}$의 일반항은

$$b_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{3} = 4n - \frac{4}{3}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n-4}{18n-15}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{12 - \frac{4}{n}}{18 - \frac{15}{n}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

답 ②

[풀이2] 시험장

일반항 a_n은 최고차항의 계수가 $6(=$공차$)$인 일차식이므로

a_{n+1}은 최고차항의 계수가 $6(=$공차$)$인 일차식이다.

일반항 b_n은 최고차항의 계수가 $4\left(=\frac{6+6}{3}\right)$인 일차식이다.

$n\to\infty$일 때, $\frac{b_n}{a_n} = \frac{4n + \cdots}{6n + \cdots} \to \frac{2}{3}$이다.

답 ②

[풀이3]

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 6n - 5$

n의 자리에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1} = 6n+1$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{6n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 + \frac{1}{n}}{6 - \frac{5}{n}} = \frac{6}{6} = 1$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

답 ②

G009 | 답 ⑤

[풀이1]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+6n+4} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+4}{\sqrt{n^2+6n+4}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6 + \frac{4}{n}}{\sqrt{1 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2}} + 1} = \frac{6}{1+1} = 3$$

답 ⑤

[풀이2] 시험장

$n\to\infty$일 때,

$$\sqrt{n^2+6n+4} - n \approx \frac{(n^2 - n^2) + 6n}{\sqrt{n^2}+n} \to 3$$

답 ⑤

G010 | 답 ④

[풀이1]

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$a_n = \overline{PQ} = \sqrt{1 + 9(2n+1)^2}$

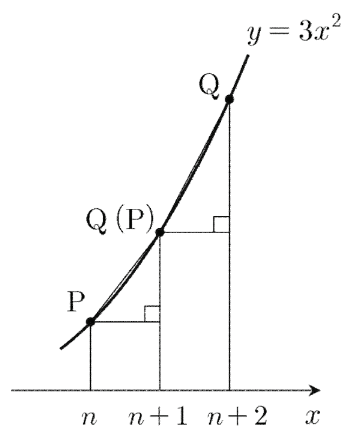
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+9(2n+1)^2}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} + 9\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2} = 6$$

답 ④

[풀이2] 시험장



$n\to\infty$일 때,

두 점 P, Q의 x좌표의 차이는 1로 일정하지만
두 점 P, Q의 y좌표의 차이는 무한대로 발산하므로
$n \to \infty$일 때, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} \approx f(n+1)-f(n)$
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)-f(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+3}{n}=6$$

답 ④

G011 | 답 ①

[풀이1]
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

답 ①

[풀이2] 시험장
$n \to \infty$일 때,

$$\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}\approx\frac{2(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2})}{2n-(-2n)}\to 1$$

답 ①

G012 | 답 ②

[풀이1]
수열의 합과 일반항의 관계에서
$a_1=S_1=1$
$a_n=S_n-S_{n-1}=4n-3\,(n\ge 2)$
일반항 a_n은
$a_n=4n-3\,(n\ge 1)$
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n}{2n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{4}{2}=2$$

답 ②

[풀이2] 시험장
함수 $y=2x^2-x\,(S_n)$의 도함수는 $y'=4x-1$이므로
일반항 a_n은 최고차항의 계수가 4(=공차)인 일차함수이다.

$n\to\infty$일 때, $\dfrac{na_n}{S_n}=\dfrac{4n^2+\cdots}{2n^2+\cdots}\to 2$

답 ②

[참고]
등차수열에서의 '이산과 연속의 관계'에 대하여 알아보자.
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.
$S_n=pn^2+qn$ $\cdots$ ㉠
수열의 합과 일반항의 관계에 의하여
$a_1=S_1=p+q$
$a_n=S_n-S_{n-1}=2pn-p+q\ (n\ge 2)$
그런데 $2p\times 1-p+q=p+q$이므로
$a_n=\boxed{2p}n-p+q\ (n\ge 1)$ $\cdots$ ㉡
이때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는 $2p$이다.
㉠에서 n의 자리에 x를 대입하면
$S(x)=px^2+qx$
함수 $S(x)$의 도함수는
$S'(x)=\boxed{2p}x+q$ $\cdots$ ㉢
㉡, ㉢에서 일차항의 계수는 $2p$로 같다.

G013 | 답 14

[풀이1]
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+15n+13}-\sqrt{n^2-13n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{28n+13}{\sqrt{n^2+15n+13}+\sqrt{n^2-13n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{28+\frac{13}{n}}{\sqrt{1+\frac{15}{n}+\frac{13}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{13}{n}}}=\frac{28}{1+1}=14$$

답 14

[풀이2] 시험장
$n\to\infty$일 때,

$$\sqrt{n^2+15n+13}-\sqrt{n^2-13n}$$
$$\approx\frac{15n-(-13n)}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}\to 14$$

답 14

G014 | 답 ②

[풀이1]

주어진 부등식에서

$1 < a_1 < 2$

$2 < a_2 < 3$

$3 < a_3 < 4$

$\vdots$

$n < a_n < n+1$

자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$\frac{n^2+n}{2} < a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \frac{n^2+3n}{2}$$

각 변이 모두 양수이므로

$$\frac{2}{n^2+3n} < \frac{1}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n} < \frac{2}{n^2+n}$$

각 변에 양수 n^2을 곱하면

$$\frac{2n^2}{n^2+3n} < \frac{n^2}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n} < \frac{2n^2}{n^2+n}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{3}{n}} = 2$$

수열의 극한에 대한 대소 관계에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = 2$$

답 ②

[풀이2] 시험장

어차피 '수렴하는 수열의 극한의 대소 관계' 로 문제를 해결해야 하므로 $a_n = n$으로 두고 극한값을 구하자. (또는 $a_n = n+1$로 두어도 좋다.)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

답 ②

G015 | 답 25

[풀이1]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt{k+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = \sqrt{k} = 5$$

$\therefore\ k = 25$

답 25

[풀이2] 시험장

$n\to\infty$일 때,

$$\frac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}$$

$$\approx \frac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n})}{n(1-(-1))}$$

$$= \frac{2\sqrt{k}}{2} = 5$$

$\therefore\ k = 25$

답 25

G016 | 답 ③

[풀이1]

문제에서 수열 $\{a_n\}$이 수렴한다는 조건을 주었으므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (단, α는 상수)로 두자.

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_n+1} = \frac{2\lim_{n\to\infty}a_n - 3}{\lim_{n\to\infty}a_n+1} = \frac{2\alpha-3}{\alpha+1} = \frac{3}{4}$$

α에 대한 분수식을 정리하면

$\therefore\ \alpha = 3$

답 ③

[풀이2]

$b_n = \frac{2a_n-3}{a_n+1}$으로 두면

$a_n = \frac{b_n+3}{2-b_n}$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{4}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

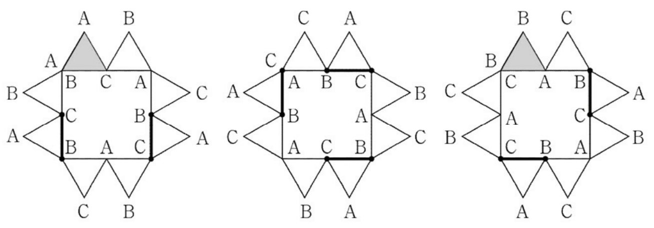
$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n+3}{2-b_n} = \frac{\frac{3}{4}+3}{2-\frac{3}{4}} = 3$$

답 ③

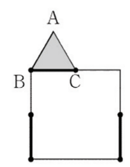
G017 | 답 ①

※ 수열의 귀납적 정의에서는 일반항을 유도하지 않지만 등차수열, 등비수열, (발견적 추론으로) 규칙이 명확한 수열의 경우 수열의 귀납적 정의에서 일반항을 유도하는 것이 가능합니다.

[풀이]



[1회전] [2회전] [3회전]



[4회전]

위의 그림처럼 정삼각형 ABC는 4회전 째에 다시 처음 상태가 된다.

$a_1 = 2$

$a_4 = a_1 + 8 = 10$

$a_7 = a_4 + 8 = 18$

⋮

일반항 a_{3n-2}는

$a_{3n-2} = 8n - 6 (n \geq 1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{3n-2}}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(8 - \frac{6}{n}\right) = 8$$

답 ①

G018 | 답 12

[풀이1]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + a_5$

$= -d - d + (a_1 + 4d) = 4 + 2d = 28$

풀면

$d = 12$

일반항 a_n은

$a_n = a_1 + (n-1)d = 12n - 8$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n-8}{n} = 12$$

답 12

[풀이2]

등차중항의 정의에 의하여

$2a_3 = a_1 + a_5 = a_2 + a_4$

이므로, 문제에서 주어진 등식은

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 2a_3 - 2a_3 + a_3 = a_3 = 28$

즉, $a_3 = 28$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$$d = \frac{a_3 - a_1}{3-1} = \frac{28-4}{2} = 12$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n-8}{n} = 12$$

답 12

[풀이3] 시험장

$a_1 + (a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) = 28$

$4 + 2d = 28$, $d = 12$

$n \to \infty$일 때, $\frac{a_n}{n} \approx \frac{dn}{n} \to 12$

답 12

G019 | 답 ④

[풀이1]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 6$$

답 ④

[풀이2] 시험장

$n \to \infty$일 때, $\frac{6n^2+n+1}{n^2+1} \approx \frac{6n^2}{n^2} \to 6$

답 ④

G020 | 답 ②

[풀이1]

▸ (1) $n=2$인 경우

주어진 집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.

공차가 1인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 4)$ ← 2개

따라서 $T_2=2$

▸ (2) $n=3$인 경우

주어진 집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이다.

공차가 1인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 6)$← 4개

공차가 2인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 3,\ 5),\ (2,\ 4,\ 6)$ ← 2개

따라서 $T_3=4+2=6$

▸ (3) $n=4$인 경우

주어진 집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이다.

공차가 1인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 6),$

$(5,\ 6,\ 7),\ (6,\ 7,\ 8)$ ← 6개

공차가 2인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 3,\ 5),\ (2,\ 4,\ 6),\ (3,\ 5,\ 7),\ (4,\ 6,\ 8)$← 4개

공차가 3인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 4,\ 7),\ (2,\ 5,\ 8)$ ← 2개

따라서 $T_4=6+4+2=12$

$\vdots$

2 이상의 자연수 n에 대하여

$T_n=2(n-1)+2(n-2)+\ \cdots\ +2\times 1$

$=n(n-1)$($\because$ 등차수열의 합의 공식)

그런데 $T_1=0$이므로 일반항 T_n은

$T_n=n^2-n(n\geq 1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

답 ②

[풀이2]

공차에 따른 집합을 모두 쓰면 다음과 같다.

공차 1: $\{1,\ 2,\ 3\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\ \cdots,$

$\{\boxed{2n-2},\ 2n-1,\ 2n\}$ ($2n-2$개)

공차 2: $\{1,\ 3,\ 5\},\ \{2,\ 4,\ 6\},\ \cdots,$

$\{\boxed{2n-4},\ 2n-2,\ 2n\}$ ($2n-4$개)

공차 3: $\{1,\ 4,\ 7\},\ \{2,\ 5,\ 8\},\ \cdots,$

$\{\boxed{2n-6},\ 2n-3,\ 2n\}$ ($2n-6$개)

$\vdots$

공차 $n-1$: $\{1,\ n,\ 2n-1\},$

$\{\boxed{2},\ n+1,\ 2n\}$ (2개)

상자 $\boxed{}$ 안에 들어간 수만을 다시 쓰면

$2n-2,\ 2n-4,\ 2n-6,\ \cdots,\ 2(=2n-2(n-1))$

위의 수열은 첫째항이 $2n-2$이고, 공차가 -2인 등차수열이다.

$$T_n=\frac{(2n-2)+2}{2}\times(n-1)=n^2-n$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

답 ②

[풀이3] +확률과 통계(조합)

등차중항의 정의에 의하여

$b=\dfrac{a+c}{2}$ 즉, $2b=a+c$

a와 c의 값이 결정되면 b의 값이 결정된다.

$a+c$는 짝수이므로

a와 c가 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다.

a와 c가 모두 홀수일 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_n\mathrm{C}_2$이고, a와 c가 모두 짝수일 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_n\mathrm{C}_2$이다. ($2n$ 이하의 자연수 중에서 홀수와 짝수의 개수는 각각 n이다.)

합의 법칙에 의하여

$T_n={}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_2=n(n-1)$(단, $n\geq 2$)

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

답 ②

G021 | 답 ①

[풀이1]

자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x^2-\frac{2k}{n}x+\frac{k^2}{n^2}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x^2-\frac{2x}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=nx^2-(n+1)x+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

$= n\left(x - \frac{n+1}{2n}\right)^2 + \frac{n^2-1}{12n}$

함수 $f(x)$는 $x = \frac{n+1}{2n}$일 때 최솟값을 갖는다.

일반항 a_n은

$a_n = \frac{n^2-1}{12n}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{12n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{12}$

답 ①

[풀이2]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 2\sum_{k=1}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right) = 2nx - n - 1$

$f'(x) = 0$이면 $x = \frac{n+1}{2n}$

$x = \frac{n+1}{2n}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = \frac{n+1}{2n}$에서 극솟값(최솟값)을 갖는다.

$a_n = f\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-2k}{2n}\right)^2$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^2 - 4(n+1)k + 4k^2}{4n^2}$

$= \frac{(n+1)^2}{4n} - \frac{n+1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2$

$= \frac{(n+1)^2}{4n} - \frac{(n+1)^2}{2n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

답 ①

[참고] +확률과 통계(이산확률변수) (선택)

n개의 수

$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n}{n}$ $\cdots(*)$

의 평균을 $x\left(= \frac{n+1}{2n}\right)$라고 할 때,

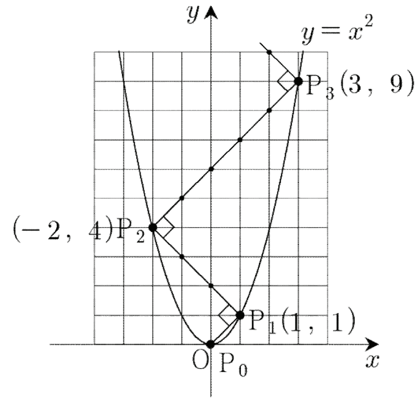
$\frac{f(x)}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{1}{n}$

은 (*)의 분산이다.

G022 | 답 ②

[풀이1] 시험장

아래 그림과 같이 격자를 그리자.



위의 그림에서 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$의 좌표를 구하면

$(1, 1)$, $(-2, 4)$, $(3, 9)$, $\cdots$

이다. 이제 다음과 같이 추론할 수 있다.

'점 P_n의 x좌표는 $(-1)^{n-1}n$이다.'

선분 P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, $\cdots$의 길이는

$\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $\cdots$ (등차수열)

수열 $\{l_n\}$의 일반항은

$l_n = (2n-1)\sqrt{2}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{n} = 2\sqrt{2}$

답 ②

[풀이2]

조건 (가), (나)를 이용하여 점 P_2, P_3, $\cdots$의 좌표를 구하자.

- 우선 점 P_2의 좌표를 구하자.

직선 P_0P_1의 기울기는 1이므로

점 P_1을 지나고 직선 P_0P_1에 수직인 직선의 방정식은

P_1P_2: $y - 1 = -(x-1)$ 즉, $y = -x + 2$

직선 P_1P_2의 방정식과 곡선 $y = x^2$을 연립하면

$x^2 = -x + 2$ 즉, $(x+2)(x-1) = 0$

풀면 $x = 1$ 또는 $x = -2$

점 P_2의 좌표는 $P_2(-2, 4)$이다.

- 점 P_3의 좌표를 구하자.

직선 P_1P_2의 기울기는 -1이므로

점 P_2를 지나고 직선 P_1P_2에 수직인 직선의 방정식은

P_2P_3: $y - 4 = x + 2$ 즉, $y = x + 6$

직선 P_2P_3의 방정식과 곡선 $y = x^2$을 연립하면

$x^2 = x + 6$ 즉, $(x+2)(x-3) = 0$

풀면 $x=-2$ 또는 $x=3$

점 P_3의 좌표는 $\mathrm{P}_3(3,\ 9)$이다.

⋮

점 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \cdots$의 좌표는 각각

$\mathrm{P}_1(1,\ 1),\ \mathrm{P}_2(-2,\ 4),\ \mathrm{P}_3(3,\ 9),\ \cdots$

발견적 추론에 의하여

점 P_n의 x좌표와 y좌표는 각각

$(-1)^{n+1}n,\ n^2$

즉, $\mathrm{P}_n((-1)^{n+1}n,\ n^2)$,

$\mathrm{P}_{n-1}((-1)^n(n-1),\ (n-1)^2)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$l_n=\sqrt{((-1)^n)^2(-n-n+1)^2+(2n-1)^2}$

$=\sqrt{2(2n-1)^2}=\sqrt{2}(2n-1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2\sqrt{2}$$

답 ②

※ 수열의 귀납적 정의에서는 일반항을 유도하지 않지만 등차수열, 등비수열, (발견적 추론으로) 규칙이 명확한 수열의 경우 수열의 귀납적 정의에서 일반항을 유도하는 것이 가능합니다.

[풀이3]

점 P_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라고 하자.

조건 (가)에서

$x_0=0,\ x_1=1$

직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$의 기울기는

$$\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\frac{x_n^2-x_{n-1}^2}{x_n-x_{n-1}}$$

$$=\frac{(x_n+x_{n-1})(x_n-x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$$

$=x_n+x_{n-1}$

점 P_n을 지나고 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 수직인 직선의 방정식은

$$y-x_n^2=-\frac{1}{x_n+x_{n-1}}(x-x_n)$$

이 직선의 방정식과 함수 $y=x^2$의 방정식을 연립하면

$$x^2-x_n^2=-\frac{1}{x_n+x_{n-1}}(x-x_n)$$

정리하면

$$(x-x_n)\left(x+x_n+\frac{1}{x_n+x_{n-1}}\right)=0$$

$$x=x_n\ \text{또는}\ x+x_n=-\frac{1}{x_n+x_{n-1}}$$

조건 (나)에서

두 점 P_n와 P_{n+1}의 x좌표가 다르므로 $x\neq x_n$이다.

$$x_{n+1}=-\frac{1}{x_n+x_{n-1}}-x_n$$

수열 $\{x_n\}$의 귀납적 정의는

$$x_0=0,\ x_1=1,\ x_{n+2}=-\frac{1}{x_{n+1}+x_n}-x_{n+1}$$

수열 $\{x_n\}$을 나열하면

$0,\ 1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6,\ \cdots$

일반항 x_n은

$x_n=(-1)^{n+1}n(n\geq 0)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$l_n=\sqrt{(x_n-x_{n-1})^2+(x_n^2-x_{n-1}^2)^2}=\sqrt{2}(2n-1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2\sqrt{2}$$

답 ②

G023 | 답 ①

[풀이1]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(\sqrt{9n^2+1}+n)}{8n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{8+\frac{1}{n^2}}=\frac{2\times 4}{8}=1$$

답 ①

[풀이2] 시험장

$n\to\infty$일 때,

$$\frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-n}$$

$$\approx\frac{(2n+1)(\sqrt{9n^2}+n)}{9n^2-n^2}\to\frac{2\times 4}{8}=1$$

답 ①

G024 | 답 ③

[풀이1]

조건 (가), (나)에서 주어진 두 부등식에서

$5-\frac{1}{n}<b_n<5+\frac{1}{n}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=5$

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n=5$

답 ③

[풀이2]

조건 (가)에서

$\lim_{n\to\infty}\left(20-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(20+\frac{1}{n}\right)=20$이므로

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=20$ $\cdots$㉠

조건 (나)에서

$\lim_{n\to\infty}\left(10-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(10+\frac{1}{n}\right)=10$이므로

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=10$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n-(a_n-b_n)}{2}=\frac{20-10}{2}=5$

답 ③

[풀이3] 시험장

세 수열

$\{b_n\}$, $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$

이 모두 수렴하므로 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하는 값을 각각 α, β라고 하면

(가) $\Rightarrow$ $\alpha+\beta=20$

(나) $\Rightarrow$ $\alpha-\beta=10$

$\alpha=15$, $\beta=5$

답 ③

G025 | 답 ①

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$a_1+a_2+\cdots+a_n$

$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}$

$=\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$

$=\log(n+1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{\log(n+1)}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$ $(\because a^{\log_a b}=b)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$

답 ①

[참고]

로그의 성질에 의하여

$10^{a_n}=\frac{n+1}{n}$

지수법칙에 의하여

$10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}=10^{a_1}\times10^{a_2}\times\cdots\times10^{a_n}$

$=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}=n+1$

G026 | 답 ①

[풀이1]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n-1)}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{2}$

답 ①

[풀이2] 시험장

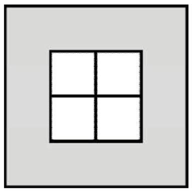
$n\to\infty$일 때,

$\frac{(n+1)(3n-1)}{2n^2+1}\approx\frac{3n^2}{2n^2}=\frac{3}{2}$

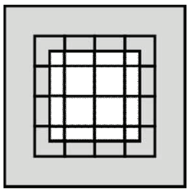
답 ①

G027 | 답 50

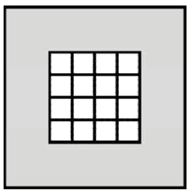
[풀이1]



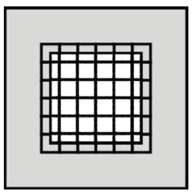
위의 그림에서 $a_2 = 4(2^2 - 1^2)$



위의 그림에서 $a_3 = 4(3^2 - 2^2)$

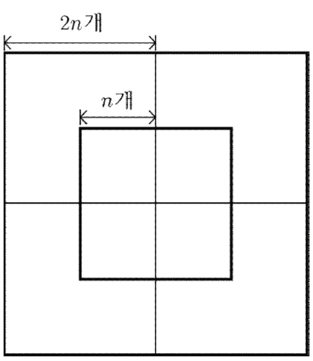


위의 그림에서 $a_4 = 4(4^2 - 2^2)$



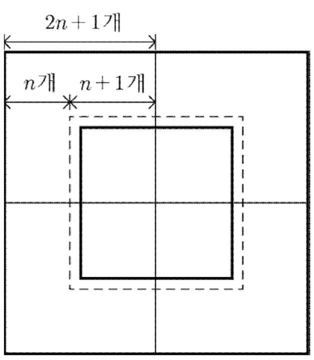
위의 그림에서 $a_5 = 4(5^2 - 3^2)$

$\vdots$



모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n} = 4\{(2n)^2 - n^2\} = 12n^2$



모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n+1} = 4\{(2n+1)^2 - (n+1)^2\} = 12n^2 + 8n$

이므로

$a_{2n+1} - a_{2n} = 8n(n \geq 1)$

$a_{2n} - a_{2n-1} = 16n - 4(n \geq 2)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$c = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{8n}{16n - 4} = \lim_{n \to \infty} \frac{8}{16 - \frac{4}{n}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ 100c = 50$

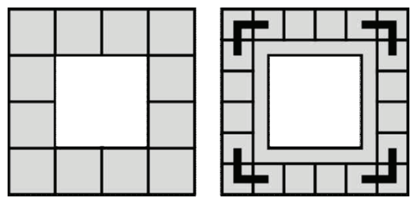
답 50

[풀이2]

수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$을 각각

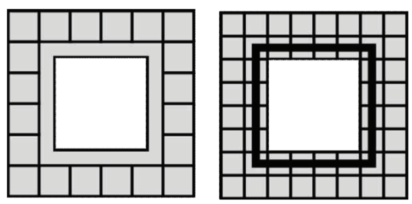
$b_n = a_{2n+1} - a_{2n}(n \geq 1)$

$c_n = a_{2n} - a_{2n-1}(n \geq 2)$



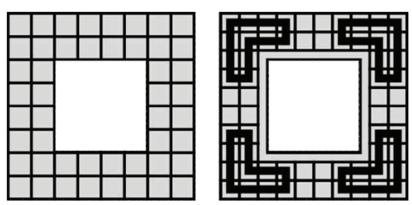
(단, 굵은 선이 그려진 정사각형의 개수는 왼쪽 그림의 작은 정사각형의 개수와 같다.)

위의 그림에서 $b_1 = 4 \times 2$



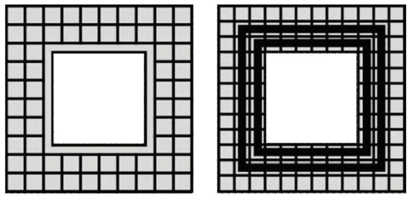
(단, 굵은 선이 그려진 정사각형의 개수는 왼쪽 그림의 작은 정사각형의 개수와 같다.)

위의 그림에서 $c_2 = 4 \times 7$



(단, 굵은 선이 그려진 정사각형의 개수는 왼쪽 그림의 작은 정사각형의 개수와 같다.)

위의 그림에서 $b_2 = 4 \times 4$



(단, 굵은 선이 그려진 정사각형의 개수는 왼쪽 그림의 작은 정사각형의 개수와 같다.)

위의 그림에서 $c_3=4\times 11$

⋮

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 8이고 공차가 8인 등차수열이다.

일반항 b_n은

$b_n=8n(n\geq 1)$

수열 $\{c_n\}$은 제2항이 28이고 공차가 16인 등차수열이다.

일반항 c_n은

$c_n=16n-4(n\geq 2)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{16n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{16-\frac{4}{n}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 100c=50$

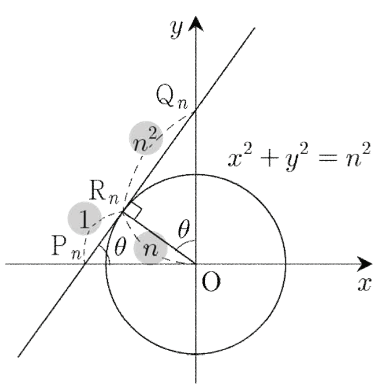
답 50

G028 ㅣ답 ④

[풀이1] 시험장

접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\tan\theta=n=$(기울기)



서로 닮음인 두 직각삼각형

OR_nP_n, Q_nR_nO에서

삼각비의 정의에 의하여

$\overline{OR_n}=n$, $\overline{Q_nR_n}=n^2$

$l_n=n^2+1$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

답 ④

[풀이2]

접선의 방정식은

$y=nx+n\sqrt{n^2+1}$

두 점 P_n, Q_n의 좌표는 각각

$P_n(-\sqrt{n^2+1},\ 0)$, $Q_n(0,\ n\sqrt{n^2+1})$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$l_n=n^2+1$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

답 ④

[참고1]

주어진 원에 접하는 기울기가 n인 접선의 방정식을

$nx-y+a=0(a>0)$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\frac{a}{\sqrt{n^2+1}}=n$ 즉, $a=n\sqrt{n^2+1}$

[참고2]

직선 $y=nx+a$의 방정식과 주어진 원의 방정식을 연립하면

$x^2+(nx+a)^2=n^2$

정리하면

$(1+n^2)x^2+2anx+a^2-n^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D/4=(an)^2-(1+n^2)(a^2-n^2)=n^4+n^2-a^2=0$

풀면

$a=n\sqrt{n^2+1}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

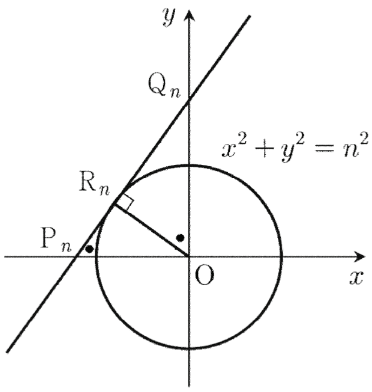
$y=nx+n\sqrt{n^2+1}$

[풀이3]

점 O에서 직선 P_nQ_n에 내린 수선의 발을 R_n이라고 하자.

원의 정의에 의하여

$\overline{OR_n}=n$ …㉠



직선 P_nQ_n의 기울기가 n이므로

$$\frac{\overline{OQ_n}}{\overline{P_nO}}=n$$

서로 닮은 두 삼각형 P_nOQ_n, OR_nQ_n에 대하여

$$\frac{\overline{OQ_n}}{\overline{P_nO}}=n=\frac{\overline{R_nQ_n}}{\overline{OR_n}} \quad \cdots ㉡$$

㉠과 ㉡에 의하여

$\overline{R_nQ_n}=n^2$

서로 닮은 두 삼각형 P_nOQ_n, P_nR_nO에 대하여

$$\frac{\overline{OQ_n}}{\overline{P_nO}}=n=\frac{\overline{R_nO}}{\overline{P_nR_n}} \quad \cdots ㉢$$

㉠과 ㉢에 의하여

$\overline{P_nR_n}=1$

일반항 l_n은

$l_n=\overline{P_nR_n}+\overline{R_nQ_n}=n^2+1$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

답 ④

[참고3]

서로 닮은 두 직각삼각형 P_nR_nO, OR_nQ_n에 대하여

$$\frac{\overline{R_nO}}{\overline{P_nR_n}}=\frac{\overline{R_nQ_n}}{\overline{OR_n}}$$

등비수열의 정의에 의하여 세 선분

$\overline{P_nR_n}$, $\overline{OR_n}$, $\overline{R_nQ_n}$

의 길이는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$\overline{P_nR_n}=a_n$, $\overline{R_nQ_n}=b_n$으로 두면

$a_n+b_n=l_n$, $a_nb_n=n^2$($\because$ 등비중항의 정의)

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

a_n, b_n은 이차방정식

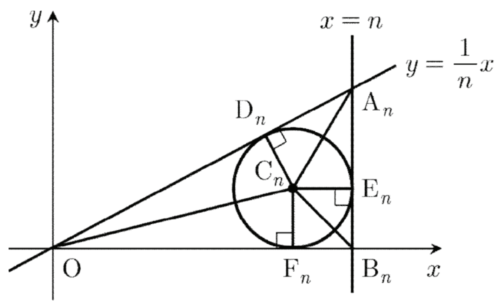
$t^2-l_nt+n^2=0$

의 두 실근이다.

G029 | 답 ③

[풀이1] ★

점 C_n에서 세 선분 OA_n, A_nB_n, B_nO에 내린 수선의 발을 각각 D_n, E_n, F_n이라고 하자.



삼각형 OA_nB_n에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

원의 정의와 정사각형의 정의에 의하여

$\overline{E_nB_n}=\overline{B_nF_n}=r_n$

두 직각삼각형 C_nOF_n, C_nOD_n은 서로 RHS합동이므로

$\overline{OD_n}=\overline{OF_n}=\overline{OB_n}-\overline{F_nB_n}=n-r_n$

두 직각삼각형 $C_nA_nE_n$, $C_nA_nD_n$은 서로 RHS합동이므로

$\overline{A_nD_n}=\overline{A_nE_n}=\overline{A_nB_n}-\overline{E_nB_n}=1-r_n$

$\overline{OA_n}=\overline{OD_n}+\overline{D_nA_n}=n+1-2r_n \quad \cdots ㉠$

직각삼각형 OA_nB_n에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{OA_n}=\sqrt{n^2+1} \quad \cdots ㉡$

㉠과 ㉡에서

$n+1-2r_n=\sqrt{n^2+1}$

정리하면

$$r_n=\frac{n+1-\sqrt{n^2+1}}{2}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{OA_n}\times r_n=\frac{\sqrt{n^2+1}\,(n+1-\sqrt{n^2+1})}{4}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}\,(n+1-\sqrt{n^2+1})}{4n}$$

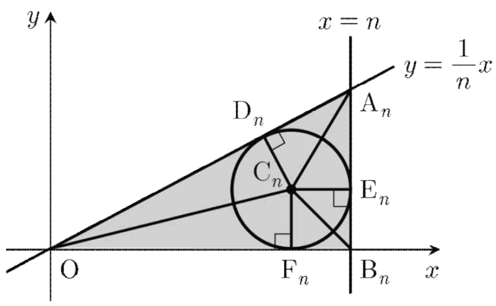
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2(n+1+\sqrt{n^2+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}$$

답 ③

[풀이2] ★

점 C_n에서 세 선분 OA_n, A_nB_n, B_nO에 내린 수선의 발을 각각 D_n, E_n, F_n이라고 하자.



삼각형 OA_nB_n에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.

$(\triangle OA_nB_n\text{의 넓이}) = \frac{1}{2}\times\overline{OB_n}\times\overline{A_nB_n} = \frac{n}{2}$

직각삼각형 OA_nB_n에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{OA_n} = \sqrt{n^2+1}$

$(\triangle A_nOC_n\text{의 넓이}) = \frac{1}{2}\times\overline{A_nO}\times\overline{C_nD_n} = \frac{r_n\sqrt{1+n^2}}{2}$

$(\triangle B_nC_nO\text{ 의 넓이}) = \frac{1}{2}\times\overline{OB_n}\times\overline{C_nF_n} = \frac{r_n n}{2}$

$(\triangle A_nC_nB_n\text{의 넓이}) = \frac{1}{2}\times\overline{A_nB_n}\times\overline{C_nE_n} = \frac{r_n}{2}$

삼각형 A_nOB_n의 넓이는 세 삼각형 A_nOC_n, B_nC_nO, $A_nC_nB_n$ 각각의 넓이의 합과 같다.

$$\frac{n}{2} = \frac{(n+1+\sqrt{n^2+1})r_n}{2}$$

정리하면

$$r_n = \frac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S_n = \frac{n\sqrt{n^2+1}}{2(n+1+\sqrt{n^2+1})}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2(n+1+\sqrt{n^2+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}$$

답 ③

[풀이3] 교육과정 외 (부등식의 영역)

점 C_n의 좌표를 $C_n(x_n,\ y_n)$으로 두면 내접원의 반지름의 길이는 y_n이다. 왜냐하면 중심이 제1사분면에 있는 내접원이 x축에 접하기 때문이다.

점 C_n은 직선 $y=\frac{1}{n}x$의 아래쪽에 놓여 있으므로 부등식의 영역에 의하여

$y_n < \frac{1}{n}x_n$ 즉, $x_n - ny_n > 0$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

(점 C_n에서 직선 $x-ny=0$까지의 거리)

$$= \frac{|x_n-ny_n|}{\sqrt{1^2+(-n)^2}} = \frac{x_n-ny_n}{\sqrt{1+n^2}} = y_n$$

=(내접원의 반지름의 길이)

정리하면

$x_n - (n+\sqrt{1+n^2})y_n = 0$ …㉠

점 C_n에서 직선 $x=n$까지의 거리는 $n-x_n$이므로

$n - x_n = y_n$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$$x_n = \frac{n^2+n\sqrt{1+n^2}}{1+n+\sqrt{1+n^2}},\ y_n = \frac{n}{1+n+\sqrt{1+n^2}}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S_n = \frac{1}{2}\times\overline{OA_n}\times y_n = \frac{n\sqrt{1+n^2}}{2(1+n+\sqrt{1+n^2})}$$

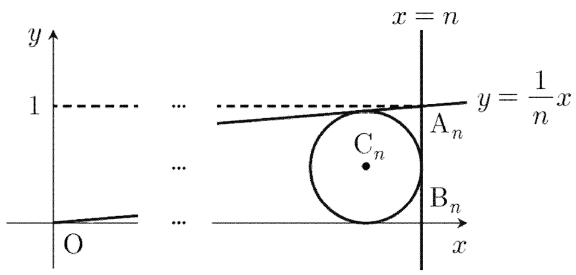
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2(n+1+\sqrt{n^2+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}$$

답 ③

[풀이4] 시험장



두 직선 $x=n$, $y=\frac{1}{n}x$의 방정식을 연립하면

$x=n$, $y=1$

점 A_n의 좌표는 $A_n(n,\ 1)$이다.

두 직선 $x=n$, $y=1$과 x축에 동시에 접하는 원을 C라고 하자.

(단, 원 C의 x좌표는 n보다 작다.)

$n\to\infty(x\to\infty)$일 때, 점 A_n을 지나는 직선 $y=\frac{1}{n}x$의 기울기는 0에 수렴하므로 직선 $y=\frac{1}{n}x$은 직선 $y=1$에 한없이 가까워진다. 이때, 원 C_n의 지름의 길이는 원 C의 지름의 길이에 수렴한다.

내접원의 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\frac{1}{2}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{OA_n}\times r_n}{2n}$$

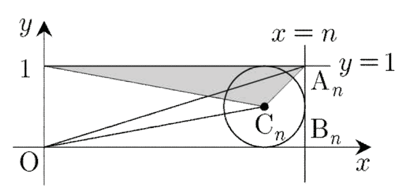
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}\times r_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2}\times r_n$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

답 ③

[참고] 시험장

위의 '기하학적인 풀이'를 좀 더 간략히 하면 다음과 같다.



$n\to\infty$일 때, 점 $(n,\ 1)$을 지나는 직선 $y=\frac{1}{n}x$는 직선 $y=1$에 한없이 가까워지므로 삼각형 A_nOC_n의 넓이는 위의 그림에서 어둡게 색칠한 삼각형의 넓이에 수렴한다.

$n\to\infty$일 때,

$$(\triangle A_nOC_n\text{의 넓이})\div n\approx\frac{\frac{1}{2}\times n\times\frac{1}{2}}{n}\to\frac{1}{4}$$

G030 | 답 35

[풀이1]

$c_n=(n+1)a_n$으로 두면

$a_n=\frac{c_n}{n+1}$이고, $\lim_{n\to\infty}c_n=2$

$d_n=(n^2+1)b_n$으로 두면

$b_n=\frac{d_n}{n^2+1}$이고, $\lim_{n\to\infty}d_n=7$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2+11n+1}{n^2+1}\times\frac{d_n}{c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{11}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\times\frac{d_n}{c_n}=10\times\frac{7}{2}=35$$

답 35

[풀이2]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)a_n}\times\frac{(n^2+1)b_n}{1}\times\frac{(10n+1)(n+1)}{n^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\times 7\times 10=35$$

답 35

[풀이3] 시험장

$n\to\infty$일 때, $a_n\approx\frac{2}{n}$, $b_n\approx\frac{7}{n^2}$이므로

$$\frac{(10n+1)b_n}{a_n}\approx\frac{7n(10n+1)}{2n^2}\to 35$$

답 35

G031 | 답 ②

[풀이]

$nf(a)\ge 1$이라고 가정하자.

$|nf(a)-1|=nf(a)-1$

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2n+3}=0\neq 1$$

문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

따라서 $nf(a)<1$이다.

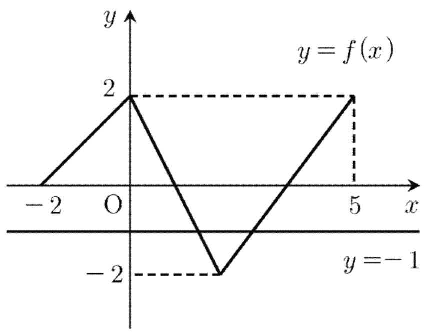
$|nf(a)-1|=1-nf(a)$

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2nf(a)}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-2f(a)}{2+\frac{3}{n}}$$

$=-f(a)=1$ 즉, $f(a)=-1$



함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$은 교점의 개수는 2이다.

따라서 방정식 $f(a)=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

답 ②

G032 | 답 12

[풀이1]

$a>0$이라고 가정하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+7}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b+\frac{7}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\infty$$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

$a<0$이라고 가정하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+7}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b+\frac{7}{n}}{3+\frac{1}{n}}=-\infty$$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

따라서 $a=0$

$a=0$을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+7}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{7}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{b}{3}=4$$

에서 $b=12$이다.

$\therefore\ a+b=12$

답 12

[풀이2] 시험장

$n\to\infty$일 때,

$$\frac{an^2+bn+7}{0\cdot n^2+3n+1}\to 4$$

이므로

$a=0,\ b=3\cdot 4=12$

$\therefore\ a+b=12$

답 12

G033 | 답 ①

[풀이]

점 A_n의 좌표는 $\mathrm{A}_n\left(\frac{1}{n},\ \log_3\frac{1}{n}\right)$

점 C_n의 좌표는 $\mathrm{C}_n(x_n,\ 0)$

점 B_n의 좌표를 $\mathrm{B}_n(b_n,\ \log_3 b_n)$

조건 (나)에서

C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 $1:2$로 내분하는 점이다.

내분점의 공식에 의하여

$$x_n=\frac{b_n+\frac{2}{n}}{3},\quad 0=\frac{\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}}{3}$$

이 두 식을 연립하면

$$b_n=n^2,\ x_n=\frac{2}{3n}+\frac{n^2}{3}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

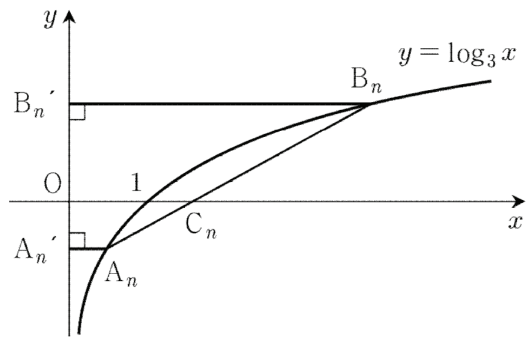
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3n^3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

답 ①

[참고1] ★

점 B_n의 좌표를 다음과 같이 구할 수도 있다.

두 점 A_n, B_n에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A}_n{}'$, $\mathrm{B}_n{}'$이라고 하자.



도형의 닮음에 의하여

$\overline{A_nC_n}:\overline{C_nB_n}=1:2=\overline{A_n'O}:\overline{OB_n'}$

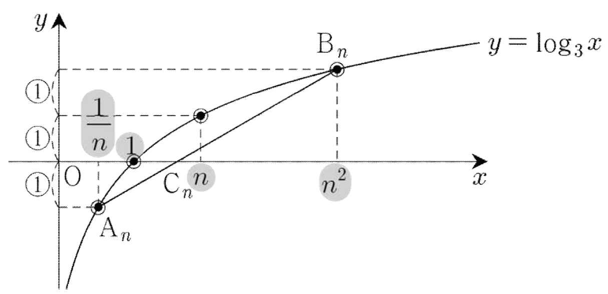
이므로

(점 B_n의 y좌표)$=-2\times$(점 A_n의 y좌표)

점 B_n의 좌표는 $B_n(n^2,\ \log_3 n^2)$이다.

[참고2]

다음과 같이 b_n, x_n의 일반항을 빠르게 유도할 수 있다.



위의 그림에서 ◉으로 표시된 네 개의 점의 y좌표는 크기 순서대로 등차수열을 이루므로 이 네 점의 x좌표는 크기 순서대로 공비가 n인 등비수열을 이룬다. 이 등비수열을 쓰면

$\frac{1}{n}(A_n),\ 1,\ n,\ n^2(B_n)$

이므로 $b_n=n^2$

내분점의 공식에 의하여

$$x_n=\frac{1\times n^2+2\times\frac{1}{n}}{1+2}=\frac{n^2}{3}+\frac{2}{3n}$$

G034 | 답 15

[풀이1]

주어진 부등식의 각 변에 양수 $\frac{5}{n^2+2n}$를 곱하면

$$\frac{15n^2+10n}{n^2+2n}<\frac{5a_n}{n^2+2n}<\frac{15n^2+15n}{n^2+2n}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{15n^2+10n}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{15+\frac{10}{n}}{1+\frac{2}{n}}=15$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{15n^2+15n}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{15+\frac{15}{n}}{1+\frac{2}{n}}=15$$

수열의 극한값에 대한 대소 관계에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n}=15$$

답 15

[풀이2] 시험장

어차피 '수렴하는 수열의 극한에 대한 대소 관계(즉, 샌드위치 법칙)'을 사용하여 문제를 해결해야 하므로

$a_n=3n^2+3n$ (또는 $a_n=3n^2+2n$)

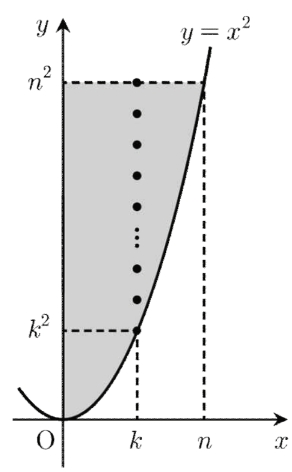
으로 두자.

$n\to\infty$일 때, $\frac{5a_n}{n^2+2n}=\frac{15n^2+15n}{n^2+2n}\to 15$

답 15

G035 | 답 ③

[풀이1]



문제에서 주어진 영역에 속하는 점 중에서 직선 $x=k$ 위의 점의 개수는

n^2-k^2+1

(단, k는 n 이하의 음이 아닌 정수)

자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2+1)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(n^2+1)-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$(\because \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{0} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = 0 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2)$

$= (n^2+1)(n+1) - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \dfrac{4n^3+3n^2+5n+6}{6}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{5}{6n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = \frac{2}{3}$$

답 ③

[참고]

다음과 같이 계산할 수도 있다.

$a_n = \sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2+1)$

$= \sum_{k=0}^{0}(n^2-k^2+1) + \sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2+1)$

$= n^2+1+\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2+1)$

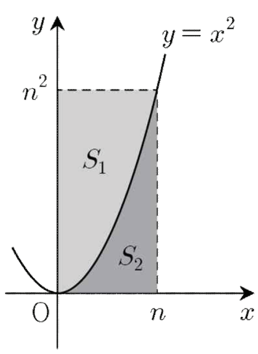
$= n^2+1+\sum_{k=1}^{n}(n^2+1) - \sum_{k=1}^{n}k^2$

$= n^2+1+n(n^2+1) - \sum_{k=1}^{n}k^2$

$= (n^2+1)(n+1) - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \dfrac{4n^3+3n^2+5n+6}{6}$)

[풀이2] 시험장 ★



곡선 $y=x^2$과 직선 $y=n^2$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1,

곡선 $y=x^2$과 직선 $x=n$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라고 하자.

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여 아래의 비례식이 성립함을 알 수 있다.

$S_1 : S_2 = 2 : 1$

$n\to\infty$일 때,

$n^3 =$ (□OABC의 넓이) $\approx$ (□OABC의 내부 또는 경계의 격자점의 개수),

$a_n =$ (곡선 $y=x^2$과 직선 $y=n^2$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 내부 또는 경계의 격자점의 개수)

$\approx$ (곡선 $y=x^2$과 직선 $y=n^2$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이)

이므로

$n\to\infty$일 때, $\dfrac{a_n}{n^3} \approx \dfrac{S_1}{S_1+S_2} = \dfrac{2}{3}$

답 ③

G036 | 답 ④

[풀이]

$a_1 = \dfrac{\pi}{4}$

$a_1 + \pi < a_2 < \dfrac{3}{2}\pi$

$a_2 + \pi < a_3 < \dfrac{5}{2}\pi$

$\vdots$

$a_{n-1} + \pi < a_n < \dfrac{2n-1}{2}\pi$

(단, $n \ge 2$)

위의 부등식을 변변히 모두 더하면

$(n-1)\pi + \dfrac{\pi}{4} < a_n$

2 이상의 자연수 n에 대하여

$(n-1)\pi + \dfrac{\pi}{4} < a_n < \dfrac{2n-1}{2}\pi$

각 변을 n으로 나누면

$\dfrac{4n-3}{4n}\pi < \dfrac{a_n}{n} < \dfrac{2n-1}{2n}\pi$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n-3}{4n}\pi = \pi,\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n}\pi = \pi$

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \pi$$

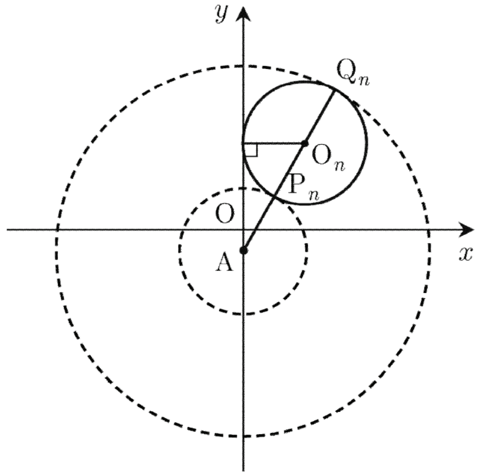
답 ④

G037 | 답 4

[풀이1]

점 $(0,\ -1)$을 A라고 하자.

직선 AO_n이 원 O_n과 만나는 두 점 중에서 점 A에 가까운 점을 P_n, 먼 점을 Q_n이라고 하자.



원 O_n의 반지름의 길이가 $3n$이므로

$a_n = \overline{AO_n} + \overline{O_nQ_n} = \sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}+3n$

$b_n = \overline{AO_n} - \overline{O_nP_n} = \sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}-3n$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}+3n}{\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}-3n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+8n+1}+3n}{\sqrt{25n^2+8n+1}-3n}$$

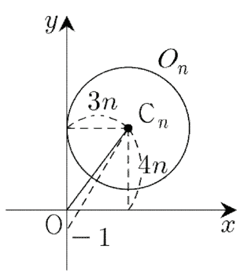
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}-3} = \frac{5+3}{5-3} = 4$$

답 4

[풀이2] 시험장

이 문제를 기하학적인 관점에서 해결해 보자.

원 O_n의 중심을 C_n이라고 하자.



$n\to\infty$일 때,

$a_n \approx \overline{OC_n} + 3n = 5n+3n = 8n$

$b_n \approx \overline{OC_n} - 3n = 5n-3n = 2n$

이므로

$n\to\infty$일 때,

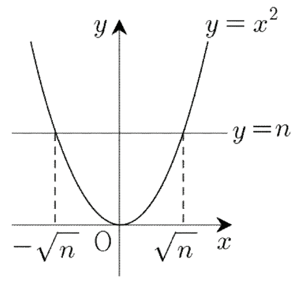
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{8}{2} = 4$$

답 4

G038 | 답 ②

[풀이1] 시험장

문제에서 주어진 모든 도형(곡선, 직선)과 점을 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동하자.



방정식 $x^2=n$을 풀면

$x=\pm\sqrt{n}$이므로 $h(n)=2\sqrt{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{2} = 1$$

답 ②

[풀이2]

주어진 방정식은

$x^2-6x+9-n=0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=9-n$

곱셈공식에 의하여

$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta = 4n$

이므로

$|\alpha-\beta| = 2\sqrt{n}$

함수 $h(n)$의 방정식은

$h(n)=2\sqrt{n}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{2}{1+1} = 1$$

답 ②

G039 | 답 ④

[풀이1]

직선 PQ의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2n}(x-n)+2n^2$$

$y=0$을 대입하여 정리하면

$$x = 4n^3+n$$

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(4n^3+n,\ 0)$이므로

$$l_n = 4n^3+n$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

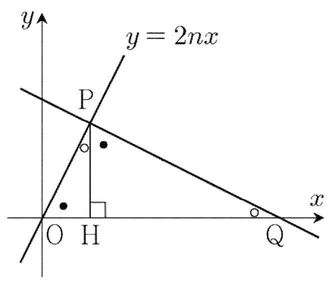
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n^2}\right) = 4$$

답 ④

[풀이2] ★

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

이때, 점 H의 좌표는 $\mathrm{H}(n,\ 0)$이다.



서로 닮은 두 직각삼각형 OHP, PHQ에 대하여

$\overline{\mathrm{OH}} : \overline{\mathrm{PH}} = \overline{\mathrm{PH}} : \overline{\mathrm{HQ}}$ 즉, $\overline{\mathrm{PH}}^2 = \overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{HQ}}$

등비중항의 정의에 의하여

세 선분 OH, PH, HQ의 길이는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

두 선분 OH, PH의 길이는 각각 n, $2n^2$이므로 선분 HQ의 길이는 $4n^3$이다.

$$l_n = \overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{HQ}} = n+4n^3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n^2}\right) = 4$$

답 ④

G040 | 답 110

[풀이1]

주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+4}{\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b} = \frac{1}{5}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\{(a-b^2)n+4\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+4}{\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b}\times\left(\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+4}{\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b}\times\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b\right)$$

$$= \frac{1}{5}\times(\sqrt{a}+b) \quad \cdots ㉠$$

$\lim_{n\to\infty}\{(a-b^2)n+4\}$가 수렴하기 위해서는

$$a-b^2 = 0$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$(\text{좌변}) = 4 = \frac{1}{5}\times(\sqrt{b^2}+b) = (\text{우변})$$

즉, $4 = \frac{1}{5}\times(|b|+b) \quad \cdots ㉡$

$b \le 0$인 경우

㉡의 좌변과 우변이 각각 4, 0이므로 등식 ㉡은 성립하지 않는다.

$b > 0$인 경우

㉡은 $4 = \frac{2}{5}b$ 풀면

$b = 10$이므로 $a = b^2 = 100$

$\therefore\ a+b = 110$

답 110

[참고]

$n\to\infty$일 때, $\sqrt{an^2+4n}-bn$이 발산하지 않으려면

$\sqrt{an^2+4n} \approx bn$ 즉, $\sqrt{a}\,n \approx bn$이어야 한다.

($\because$ $n\to\infty$일 때, $\sqrt{an^2+4n} \approx \sqrt{an^2} = \sqrt{a}\,n$)

$\therefore\ \sqrt{a} = b$

[풀이2] **시험장**

$n\to\infty$일 때,

$$\sqrt{an^2+4n}-bn \approx \frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2}+bn}$$

$$= \frac{0\cdot n^2+4n}{\sqrt{a}\,n+bn} = \frac{4}{\sqrt{a}+b} \to \frac{1}{5}$$

이므로

$a-b^2 = 0$, $\sqrt{a}+b = 20$

$a=100,\ b=10$

$\therefore\ a+b=110$

답 110

G041 | 답 2

[풀이1]

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x=-n\pm\sqrt{n^2+4n}$

모든 자연수 n에 대하여

$-n-\sqrt{n^2+4n}<0$이므로

$a_n=-n+\sqrt{n^2+4n}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+1}=\dfrac{4}{2}=2$

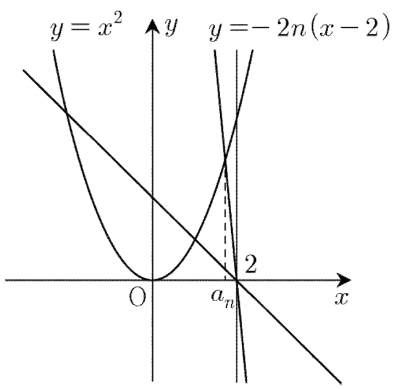
답 2

[풀이2] 시험장

문제에서 주어진 이차방정식을 변형하면

$x^2=-2n(x-2)$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=-2n(x-2)$의 두 교점 중에서 x좌표가 양수인 점의 x좌표는 a_n이다.



위의 그림에서 $n\to\infty$일 때, 직선 $y=-2n(x-2)$은 직선 $x=2$에 한없이 가까워지므로 $a_n\to 2$임을 알 수 있다.

답 2

G042 | 답 ⑤

[풀이]

▶ 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$이 x축과 만나므로

이차방정식

$x^2-(n+1)x+a_n=0$ $\cdots$ ㉠

은 실근을 가져야 한다.

(㉠의 판별식)$=(n+1)^2-4a_n\geq 0$

정리하면

$a_n\leq\dfrac{(n+1)^2}{4}$

▶ 곡선 $y=x^2-nx+a_n$이 x축과 만나지 않으므로

이차방정식

$x^2-nx+a_n=0$ $\cdots$ ㉡

은 허근을 가져야 한다.

(㉡의 판별식)$=n^2-4a_n<0$

정리하면

$a_n>\dfrac{n^2}{4}$

모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{n^2}{4}<a_n\leq\dfrac{(n+1)^2}{4}$

양변을 $n^2(>0)$으로 나누면

$\dfrac{1}{4}<\dfrac{a_n}{n^2}\leq\dfrac{(n+1)^2}{4n^2}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4},\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=\dfrac{1}{4}$

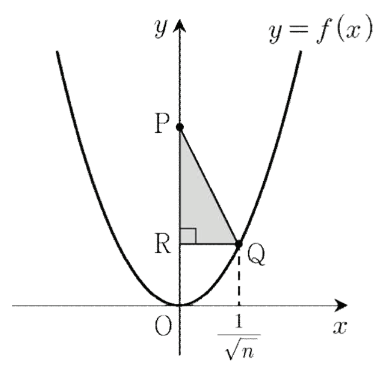
답 ⑤

G043 | 답 ⑤

[풀이1]

방정식 $f(x)=1$(단, $x>0$)을 풀면

$x=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ 1\right)$이다.



직선 RQ가 x축에 평행하므로

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

2015 개정 교육과정에서 달라지는 점은

• 수학 I
지수함수와 로그함수: 두 대단원 '지수와 로그', '지수함수와 로그함수'가 결합
삼각함수: 사인법칙, 코사인법칙의 귀환 & sec, csc, cot가 미적분 과목으로 이동
수열: 주기함수 관련 문제 출제 가능

• 수학 II
함수의 극한과 연속: 주기함수 관련 문제 출제 가능
미분: 주기함수 관련 문제 출제 가능
적분: 주기함수 관련 문제 출제 가능 & 구분구적분 퇴출

• 미적분
수열의 극한: 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 출제 가능
미분법: 매개변수의 미분법, 음함수의 미분법의 귀환
적분법: 구분구적법은 이과 전용

• 확률과 통계
경우의 수: 순열, 조합 고1 과정으로 이동, 분할(정수/자연수) 퇴출
확률: 변화 없음
통계: 모비율 퇴출

• 기하 (2021 수능에서는 제외)
이차곡선: 기울기가 주어진 접선의 공식 귀환 & 사인법칙, 코사인 법칙 관련 문제 출제 가능
평면벡터: 라디안이 아닌 육십분법 사용 & 벡터의 내적의 정의를 성분으로 함
공간도형과 공간좌표: 공간벡터, 공간에서의 벡터의 방정식 퇴출

2020 수능에서 보여준 출제 경향의 변화는

• 가형16(확률과 통계): 경우의 수를 셀 때 CASE구분을 해야 하는 경우와 하지 말아야 하는 경우를 판단하는 것에 대한 평가 강화!
• 가형21(미적분): 변화 없음이 경향성. 특별한 발상 없이 기출문제에서 연습했던 전형적인 풀이를 적용할 것!
• 가형28(확률과 통계): 사실상 국어영역. 문제를 정확하게 이해하는 것도 이젠 중요한 평가요소.
• 가형30(미적분): 변화 없음이 경향성. 특별한 발상 없이 기출문제에서 연습했던 전형적인 풀이를 적용할 것!

• 나형12(수학2): 사차함수의 그래프의 개형을 알고 있다면 좀 더 빠르게 풀리는 문제. 이젠 실전이론도 평가대상.
• 나형20(수학2): 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 이론을 노골적으로 출제한 문제. 이젠 실전이론도 평가대상.
• 나형21(수학1): 수열을 나열하기 전에 '어떤 규칙이 나올 것인가?'를 알고 있어야 하는 문제. (수열도 21번에 출제 가능!)
• 나형30(수학2): 삼차함수의 수평화와 비율관계를 알고 있으면 어렵지 않은 문제. 이젠 실전이론도 평가대상.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

2021학년도 수능의 시작입니다!

학년도	시험	실시년도/월	학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정			2009	모의평가(9월)	2008년 9월
1991	실험평가(1차)	1990년 12월	2009	대학수학능력	2008년 11월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월	2010	모의평가(6월)	2009년 6월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월	2010	모의평가(9월)	2009년 9월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월	2010	대학수학능력	2009년 11월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월	2011	모의평가(6월)	2010년 6월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월	2011	모의평가(9월)	2010년 9월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월	2011	대학수학능력	2010년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월	2007개정 교육과정		
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월	2012	모의평가(6월)	2011년 6월
1995	대학수학능력	1994년 11월	2012	모의평가(9월)	2011년 9월
1996	대학수학능력	1995년 11월	2012	대학수학능력	2011년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월	2014	예비시행	2012년 5월
1998	대학수학능력	1997년 11월	2013	모의평가(6월)	2012년 6월
6차 교육과정			2013	모의평가(9월)	2012년 9월
1999	대학수학능력	1998년 11월	2013	대학수학능력	2012년 11월
2000	대학수학능력	1999년 11월	2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2001	대학수학능력	2000년 11월	2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2002	대학수학능력	2001년 11월	2014	대학수학능력	2013년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월	2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2003	대학수학능력	2002년 11월	2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월	2015	대학수학능력	2014년 11월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월	2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2004	대학수학능력	2003년 11월	2016	모의평가(9월)	2015년 9월
7차 교육과정			2016	대학수학능력	2015년 11월
2005	예비시행	2003년 12월	2009개정 교육과정		
2005	모의평가(6월)	2004년 6월	2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월	2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2005	대학수학능력	2004년 11월	2017	대학수학능력	2016년 11월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월	2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월	2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2006	대학수학능력	2005년 11월	2018	대학수학능력	2017년 11월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월	2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월	2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월	2019	대학수학능력	2018년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월	2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월	2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월	2020	대학수학능력	2019년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월			

각 과목별 문항 수 및 비율 (총 3617 문항)

수학 Ⅰ	수학 Ⅱ	미적분	확률과 통계	기하	수학	교육과정 外
541	329	522	468	206	300	1251
14.9 %	9.0 %	14.4 %	12.9 %	5.7 %	8.3 %	34.8 %

※ 수학, 교육과정 外 문제집과 해설집은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 무료PDF파일 다운로드 가능

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목 차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

J 경우의 수

1. 순열과 조합

- 2015개정 교육과정

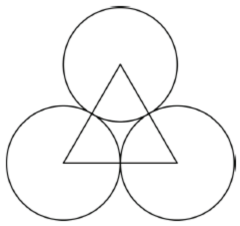
○ 순열, 조합, 분할(정수/자연수) 관련 문제 모두 제외

J. 원순열

J001

○○○
(2012(6)-가형15)

그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 3개와 이 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 있다. 원의 내부 또는 정삼각형의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

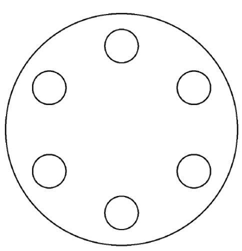


① 1260 ② 1680 ③ 2520
④ 3760 ⑤ 5040

J002

○
(2012(9)-가형6)

그림과 같이 최대 6개의 용기를 넣을 수 있는 원형의 실험 기구가 있다. 서로 다른 6개의 용기 A, B, C, D, E, F를 이 실험 기구에 모두 넣을 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

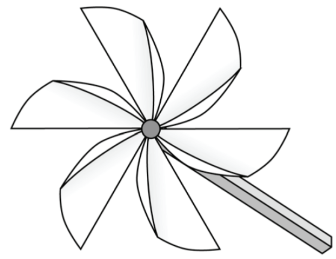


① 36 ② 48 ③ 60
④ 72 ⑤ 84

J003

○
(2014(예비)-B형6)

빨간색과 파란색을 포함한 서로 다른 6가지의 색을 모두 사용하여, 날개가 6개인 바람개비의 각 날개에 색칠하려고 한다. 빨간색과 파란색을 서로 맞은편의 날개에 칠하는 경우의 수는? (단, 각 날개에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

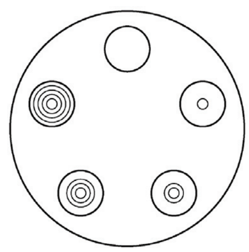


① 12 ② 18 ③ 24
④ 30 ⑤ 36

J004

○
(2018(9)-나형6)

서로 다른 5개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

J. 중복순열

J005

○○
(2001-인문28/자연28)

문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 세 개를 택하여 만든 단어를 전송하려고 한다. 단, 전송되는 단어에 a가 연속되면 수신이 불가능하다고 하자. 예를 들면 aab, aaa 등은 수신이 불가능하고 bba, aba 등은 수신이 가능하다. 수신 가능한 단어의 개수를 구하시오. [2점]

J006

○○
(2005(예비)-가형21/나형21)

세 주사위 A, B, C를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수를 구하시오. [3점]

J007

○○○
(2004-인문14/자연14)

세 숫자 1, 2, 3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 1과 2가 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는? [3점]

① 58 ② 56 ③ 54
④ 52 ⑤ 50

J008

○○
(2005-가형28이산수학)

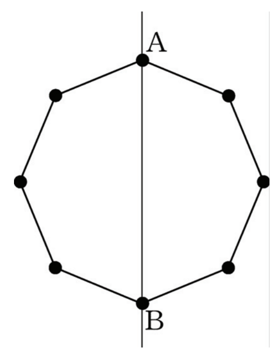
집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 서로소인 두 부분집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는? [3점]

① 729 ② 720 ③ 243
④ 64 ⑤ 36

J009

○○
(2006(6)-가형27이산수학)

정팔각형의 모든 꼭짓점에 숫자 0 또는 1을 지정하려고 한다. 오른쪽 그림과 같이 고정된 두 꼭짓점 A와 B를 잇는 직선에 대하여 대칭인 점에 같은 숫자를 지정하는 경우의 수는? [3점]



① 16 ② 32 ③ 48
④ 64 ⑤ 80

J010

○○
(2007-가형14/나형14)

1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적힌 5개의 공을 3개의 상자 A, B, C에 넣으려고 한다. 어느 상자에도 넣어진 공에 적힌 수의 합이 13 이상이 되는 경우가 없도록 공을 상자에 넣는 방법의 수는? (단, 빈 상자의 경우에는 넣어진 공에 적힌 수의 합을 0으로 한다.) [4점]

① 233 ② 228 ③ 222
④ 215 ⑤ 211

J011

○○
(2011-가형6/나형6)

어느 행사장에는 현수막을 1개씩 설치할 수 있는 장소가 5곳이 있다. 현수막은 A, B, C 세 종류가 있고, A는 1개, B는 4개, C는 2개가 있다. 다음 조건을 만족시키도록 현수막 5개를 택하여 5곳에 설치할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 현수막끼리는 구분하지 않는다.) [3점]

(가) A는 반드시 설치한다.
(나) B는 2곳 이상 설치한다.

① 55 ② 65 ③ 75
④ 85 ⑤ 95

J012

○
(2016(6)-B형9)

서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 1024 ② 1034 ③ 1044
④ 1054 ⑤ 1064

J013

○○
(2017(9)-가형19)

서로 다른 과일 5개를 3개의 그릇 A, B, C에 남김없이 담으려고 할 때, 그릇 A에는 과일 2개만 담는 경우의 수는? (단, 과일을 하나도 담지 않은 그릇이 있을 수 있다.) [4점]

① 60 ② 65 ③ 70
④ 75 ⑤ 80

J014

○

(2017-가형5)

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수가 5의 배수인 경우의 수는? [3점]

① 115 ② 120 ③ 125
④ 130 ⑤ 135

J015

○○○

(2018-가형18)

서로 다른 공 4개를 남김없이 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣으려고 할 때, 넣은 공의 개수가 1인 상자가 있도록 넣는 경우의 수는? (단, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.) [4점]

① 220 ② 216 ③ 212
④ 208 ⑤ 204

J016

○○

(2019(6)-가형27)

세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 문자 a가 두 번 이상 나오는 경우의 수를 구하시오. [4점]

J. 같은 것이 있는 순열

J017

○

(1996-인문예체능5)

영문자 P, A, S, S를 일렬로 배열하는 방법의 수는? [1점]

① 6 ② 8 ③ 12
④ 18 ⑤ 24

J018

○○○

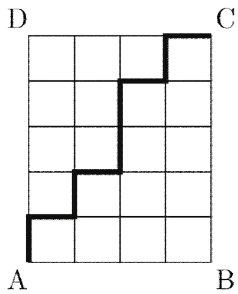
(2005(6)-나형30)

7개의 문자 a, a, b, b, c, d, e를 일렬로 나열할 때, a끼리 또는 b끼리 이웃하게 되는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]

J019

○○○
(2005(9)−나형22)

그림과 같은 바둑판 모양의 도로망이 있다. 갑은 A에서 C까지 굵은 선을 따라 걷고, 을은 C에서 A까지 굵은 선을 따라 걸으며, 병은 B에서 D까지 도로를 따라 최단거리로 걷는다. 갑, 을, 병 세 사람이 모두 만나도록 병이 B에서 D까지 가는 경우의 수를 구하시오. (단, 갑, 을, 병은 동시에 출발하고 같은 속력으로 걷는다고 가정한다.) [4점]



J020

○○
(2005−나형30)

1, 2, 2, 4, 5, 5를 일렬로 배열하여 여섯 자리 자연수를 만들 때, 300000보다 큰 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

J021

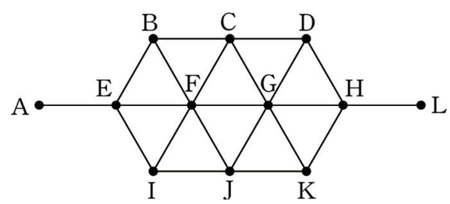
○○○
(2006(6)−나형30)

어느 건물에서는 출입을 통제하기 위하여 각 자리가 '0'과 '1'로 이루어진 8자리 문자열의 보안카드를 이용하고 있다. 보안카드의 8자리 문자열에 '1'의 개수가 5개이거나 문자열의 처음 4자리가 '0110'이면 이 건물의 출입문을 통과할 수 있다. 예를 들어, 보안카드의 문자열이 '10110011'이거나 '01100101'이면 이 건물에 출입할 수 있다. 이 건물의 출입문을 통과할 수 있는 서로 다른 보안카드의 총 개수를 구하시오. [4점]

J022

○○
(2007(9)−가형30이산수학)

그림은 지점 A부터 지점 L까지 12개의 지점을 연결한 것이다.

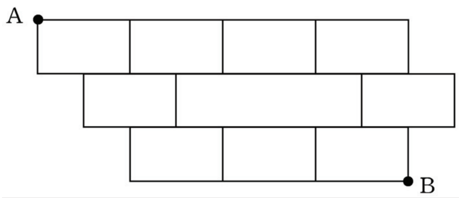


지점 A에서 출발하여 5개의 지점을 거쳐 지점 L에 도착하는 방법의 수를 구하시오. [4점]

J023

○○○
(2008(9)−가형12/나형12)

그림과 같은 모양의 도로망이 있다. 지점 A에서 지점 B까지 도로를 따라 최단 거리로 가는 경우의 수는? (단, 가로 방향 도로와 세로 방향 도로는 각각 서로 평행하다.) [4점]



① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

J024

○○○
(2009(6)−나형30)

$\frac{4}{4}$박자는 4분음을 한 박으로 하여 한 마디가 네 박으로 구성된다. 예를 들어 $\frac{4}{4}$박자 한 마디는 4분 음표(♩) 또는 8분 음표(♪)만을 사용하여 ♩♩♩♩ 또는 ♪♩♪♩♩와 같이 구성할 수 있다. 4분 음표 또는 8분 음표만 사용하여 $\frac{4}{4}$박자의 한 마디를 구성하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

J025

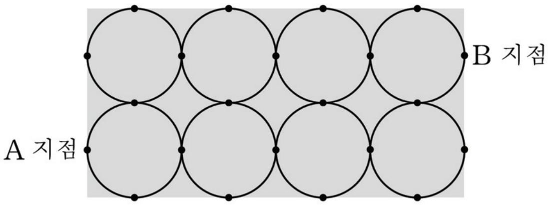
●●●
(2009(6)−가형30확률통계)

A, B 두 사람이 하루에 한 번씩 탁구 경기를 하기로 하였다. 첫 경기부터 A가 이긴 횟수가 B가 이긴 횟수보다 항상 많거나 같도록 유지되면서 경기가 진행될 때, 처음 7일 동안 경기를 치른 결과, A가 네 번 이기고 B가 세 번 이기는 경우의 수를 구하시오. [4점]

J026

(2009-나형25)

직사각형 모양의 잔디밭에 산책로가 만들어져 있다. 이 산책로는 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 원 8개가 서로 외접하고 있는 형태이다.



A 지점에서 출발하여 산책로를 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수를 구하시오. (단, 원 위에 표시된 점은 원과 직사각형 또는 원과 원의 접점을 나타낸다.) [4점]

J027

(2010(6)-가형25/나형25)

좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x,\ y)\,|\,x$와 y는 정수$\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

점 P에서 한 번의 '점프'로 점 Q로 이동할 때, 선분 PQ의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$이다.

점 $A(-2,\ 0)$에서 점 $B(2,\ 0)$까지 4번만 '점프'하여 이동하는 경우의 수를 구하시오. (단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.) [4점]

J028

○○○
(2010(9)-나형30)

다음 표와 같이 3개의 과목에 각각 2개의 수준으로 구성된 6개의 과제가 있다. 각 과목의 과제는 수준 I 의 과제를 제출한 후에만 수준 II 의 과제를 제출할 수 있다.
예를 들어 '국어A → 수학 A → 국어 B → 영어 A → 영어 B → 수학 B' 의 순서로 과제를 제출할 수 있다.

수준 \ 과목	국어	수학	영어
I	국어A	수학A	영어A
II	국어B	수학B	영어B

6개의 과제를 모두 제출할 때, 제출순서를 정하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

J029

○○
(2010-가형6/나형6)

어느 회사원이 처리해야 할 업무는 A, B를 포함하여 모두 6가지이다. 이 중에서 A, B를 포함한 4가지 업무를 오늘 처리하려고 하는데, A를 B보다 먼저 처리해야 한다. 오늘 처리할 업무를 택하고, 택한 업무의 처리 순서를 정하는 경우의 수는? [3점]

① 60 ② 66 ③ 72
④ 78 ⑤ 84

J030

○○○
(2011(6)-나형28)

1개의 본사와 5개의 지사로 이루어진 어느 회사의 본사로부터 각 지사까지의 거리가 표와 같다.

지사	가	나	다	라	마
거리(km)	50	50	100	150	200

본사에서 각 지사에 A, B, C, D, E를 지사장으로 각각 발령할 때, A보다 B가 본사로부터 거리가 먼 지사의 지사장이 되도록 5명을 발령하는 경우의 수는? [4점]

① 50 ② 52 ③ 54
④ 56 ⑤ 58

J031

○
(2012-가형5)

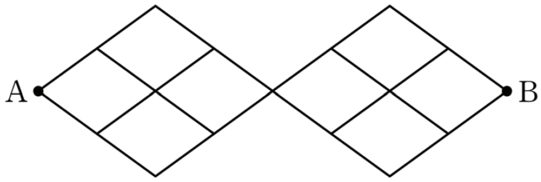
흰색 깃발 5개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 모두 나열할 때, 양 끝에 흰색 깃발이 놓이는 경우의 수는? (단, 같은 색 깃발끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 56 ② 63 ③ 70
④ 77 ⑤ 84

J032

○
(2013(9)−가형5)

그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]

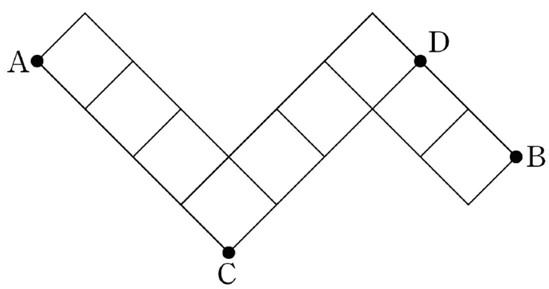


① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

J033

○○
(2013−가형5)

그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 C지점을 지나지 않고, D지점도 지나지 않으면서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]



① 26 ② 24 ③ 22
④ 20 ⑤ 18

J034

○○
(2014(6)−B형5)

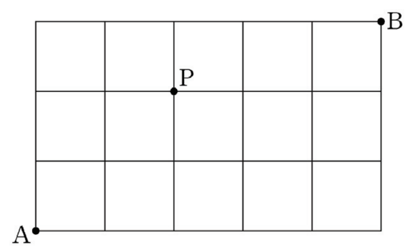
1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 2가 적혀 있는 카드는 4가 적혀 있는 카드보다 왼쪽에 나열하고 홀수가 적혀 있는 카드는 작은 수부터 크기 순서로 왼쪽부터 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 56 ② 60 ③ 64
④ 68 ⑤ 72

J035

○
(2018(6)−나형7)

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]



① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

해설 목차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

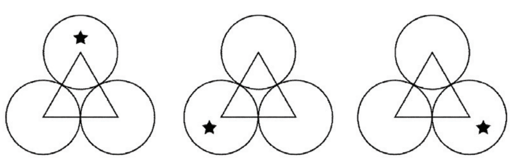
J 경우의 수

1	②	2	②	3	③	4	④	5	22
6	189	7	⑤	8	①	9	②	10	②
11	①	12	①	13	⑤	14	③	15	②
16	33	17	③	18	600	19	36	20	90
21	68	22	12	23	①	24	34	25	14
26	40	27	19	28	90	29	③	30	③
31	①	32	④	33	②	34	②	35	⑤
36	450	37	②	38	210	39	185	40	10
41	④	42	③	43	⑤	44	455	45	⑤
46	17	47	28	48	171	49	126	50	60
51	35	52	⑤	53	②	54	④	55	③
56	⑤	57	④	58	⑤	59	③	60	9
61	②	62	220	63	68	64	①	65	32
66	④	67	③	68	③	69	36	70	④
71	32	72	①	73	④	74	⑤	75	②
76	①	77	84	78	49	79	③	80	285
81	①	82	⑤	83	682	84	12	85	135
86	84	87	⑤	88	20	89	⑤	90	102
91	②	92	③	93	25	94	10	95	20
96	3	97	①	98	25	99	③	100	②
101	②	102	①	103	③				

J001 | 답 ②

[풀이1] ★

서로 다른 7개의 색을 칠하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_7\mathrm{P}_7$이다.



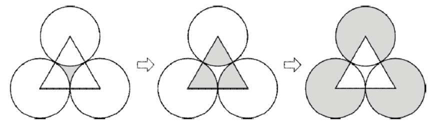
위의 그림처럼 3가지씩 같은 경우가 생기므로, 구하는 경우의 수는

$$\frac{{}_7\mathrm{P}_7}{3}=1680$$

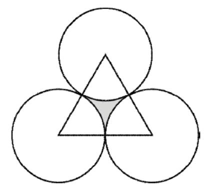
답 ②

[풀이2] ★

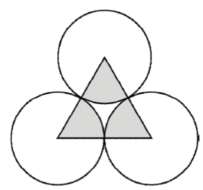
아래와 같은 순서대로 색칠하자.



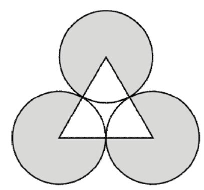
아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_7\mathrm{C}_1$이다.



아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 조합의 수와 원순열의 수에 의하여 ${}_6\mathrm{C}_3\times\dfrac{3!}{3}$이다.



아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3\mathrm{P}_3$이다.



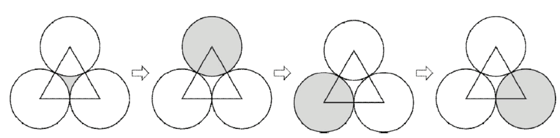
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$${}_7\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_3\times\frac{3!}{3}\times{}_3\mathrm{P}_3=1680$$

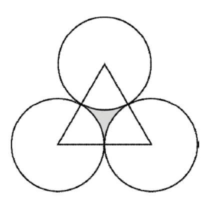
답 ②

[풀이3] ★

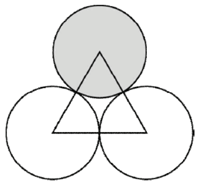
아래와 같은 순서대로 색칠하자.



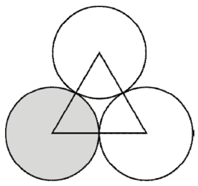
아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_7\mathrm{C}_1$이다.



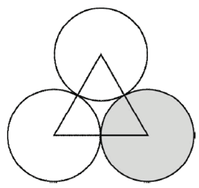
아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_6\mathrm{P}_2$이다.



아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_2$이다.



아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여 ${}_2\mathrm{P}_2$이다.



원순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
구하는 경우의 수는

$${}_7\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{P}_2 \times {}_4\mathrm{P}_2 \times {}_2\mathrm{P}_2 \times \frac{1}{3} = 1680$$

답 ②

J002 | 답 ②

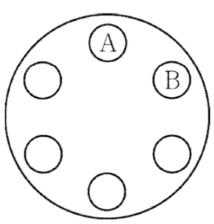
[풀이1]
두 개의 용기 A, B를 한 개의 용기로 보고, 다섯 개의 용기 (AB), C, D, E, F를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $4!$ $\left(=\frac{5!}{5}\right)$이므로 구하는 경우의 수는

$2!4! = 48$

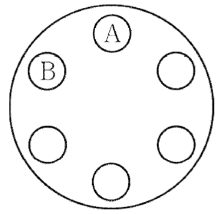
이다. 이때, $2!$은 두 개의 용기 A, B를 일렬로 배열하는 순열의 수이다.

답 ②

[풀이2]
(1) A, B가 시계 방향으로 나열되는 경우



C, D, E, F를 나열하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_4$이다.
(2) A, B가 시계 반대방향으로 나열되는 경우



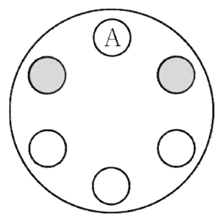
C, D, E, F를 나열하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_4$이다.
(1), (2)가 동시에 일어나지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{P}_4 + {}_4\mathrm{P}_4 = 48$

답 ②

[풀이3] +확률과 통계(확률)
주어진 6개의 용기를 실험 기구에 넣을 경우의 수는
원순열의 수에 의하여

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_6}{6} = \frac{6!}{6} = 5!$$

용기 A가 아래 그림과 같이 실험 기구에 넣어졌다고 하자.



용기 B가 용기 A에 이웃할 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

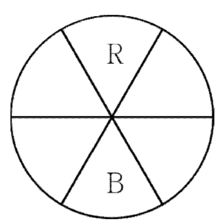
따라서 구하는 경우의 수는

$$5! \times \frac{2}{5} = 48$$

답 ②

J003 | 답 ③

[풀이1]
빨간색과 파란색을 각각 R, B라고 하자.



위의 그림과 같이 빨간색과 파란색을 색칠하고 다른 4가지의 색을 칠하면 된다. 이때, 다른 4가지의 색을 칠하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여

${}_4P_4 = 24$

따라서 구하는 경우의 수는 24이다.

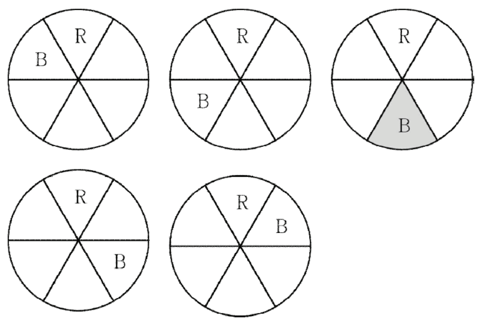
답 ③

[풀이2] +확률과 통계(확률)

주어진 색을 모두 사용하여 주어진 바람개비에 색칠하는 경우의 수는 원순열의 수에 의하여

$\frac{{}_6P_6}{6} = \frac{6!}{6} = 5!$

빨간색과 파란색을 각각 R, B라고 하자.



위의 그림처럼 빨간색과 파란색을 서로 맞은편의 날개에 칠할 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$5! \times \frac{1}{5} = 24$

답 ③

J004 | 답 ④

[풀이]

원순열의 수를 구하는 공식에 의하여

구하는 경우의 수는

$\frac{{}_5P_5}{5} = \frac{5!}{5} = 4! = 24$

답 ④

J005 | 답 22

[풀이]

a, b, c에서 중복을 허용하여 세 개를 택하여 만든 단어의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$

이때, a가 연속으로 나열되는 경우는

aaa, aab, aac, baa, caa

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$27 - 5 = 22$

답 22

J006 | 답 189

[풀이]

세 주사위 A, B, C를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라고 하자.

곱의 법칙에 의하여 아래 표의 각각의 경우의 수를 구하면

a	b	c	abc	경우의 수
짝수	짝수	짝수	짝수	3^3
짝수	짝수	홀수	짝수	3^3
짝수	홀수	짝수	짝수	3^3
홀수	짝수	짝수	짝수	3^3
짝수	홀수	홀수	짝수	3^3
홀수	짝수	홀수	짝수	3^3
홀수	홀수	짝수	짝수	3^3
홀수	홀수	홀수	홀수	3^3

a, b, c 중에서 적어도 하나가 짝수이면 세 수의 곱 abc는 짝수이다. 중복순열의 수에 의하여

a, b, c가 모두 홀수인 경우의 수는 ${}_3\Pi_3 (= 3^3)$이므로

구하는 경우의 수는 ${}_6\Pi_3 - {}_3\Pi_3 = 6^3 - 3^3 = 189$이다.

답 189

[참고]

곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여 경우의 수를

$3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 7 \times 3^3$

으로 구해도 좋다.

하지만 이 문제의 경우 여집합의 관점에서 문제를 해결하는 것이 낫다.

J007 | 답 ⑤

[풀이1] ★

• 네 자리의 자연수가 1을 포함하지 않는 경우

2, 3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_2\Pi_4$이다.

• 네 자리의 자연수가 2를 포함하지 않는 경우

1, 3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_2\Pi_4$이다.

• 네 자리의 자연수가 1, 2를 모두 포함하지 않는 경우

3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 경우의 수는 1이

다.
따라서 구하는 경우의 수는
$_3\Pi_4 - ({}_2\Pi_4 + {}_2\Pi_4 - 1) = 3^4 - (2^4 + 2^4 - 1) = 50$
답 ⑤

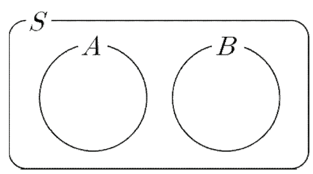
[풀이2] ★
3을 세 개 이상 사용하면 1, 2 중 적어도 하나는 포함되지 않으므로 3을 두 개 이하로 사용하거나 사용하지 않아야 한다.
(1) 3을 두 개 사용하는 경우
1을 한 개 사용해야 한다.
1, 2, 3, 3을 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{2!} = 12$이다.
(2) 3을 한 개 사용하는 경우
1을 두 개 이하로 사용해야 한다.
(단, 1을 사용하지 않는 경우는 없다.)
1, 1, 2, 3을 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{2!} = 12$이다.
1, 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{2!} = 12$이다.
(3) 3을 사용하지 않는 경우
1을 세 개 이하로 사용해야 한다.
(단, 1을 사용하지 않는 경우는 없다.)
1, 1, 1, 2을 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{3!} = 4$이다.
1, 1, 2, 2을 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{2!2!} = 6$이다.
1, 2, 2, 2을 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{3!} = 4$이다.
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$12 + 24 + 14 = 50$
답 ⑤

[풀이3]
3을 세 개 이상 사용하면 1, 2 중 적어도 하나는 포함되지 않으므로 3을 두 개 이하로 사용하거나 사용하지 않아야 한다.
(1) 3을 두 개 사용하는 경우
$_4C_2 \times ({}_2\Pi_2 - 2) = 6 \times 2 = 12$
이때, $_4C_2$는 3을 나열하는 경우의 수이고, $_2\Pi_2 - 2$는 1, 2를 나열하는 경우의 수이다. 후자에서 2를 빼는 이유는 $_2\Pi_2$에 1111, 2222가 포함되기 때문이다.
(2) 3을 한 개 사용하는 경우
$_4C_1 \times ({}_2\Pi_3 - 2) = 4 \times 6 = 24$
이때, $_4C_1$은 3을 나열하는 경우의 수이고, $_2\Pi_3 - 2$는 1, 2를 나열하는 경우의 수이다. 후자에서 2를 빼는 이유는 $_2\Pi_3$에 1111, 2222가 포함되기 때문이다.
(3) 3을 사용하지 않는 경우
$_2\Pi_4 - 2 = 14$
이때, $_2\Pi_4 - 2$는 1, 2를 나열하는 경우의 수이다. 2를 빼는 이유는 $_2\Pi_4$에 1111, 2222가 포함되기 때문이다.
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는
$12 + 24 + 14 = 50$
답 ⑤

J008 | 답 ①

[풀이1]
주어진 전체집합의 어떤 원소라도 세 집합
A, B, $(A \cup B)^C$
중에서 오직 한 집합만의 원소라면
두 집합 A, B는 서로소이다.
구하는 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여
$_3\Pi_6 = 3^6 = 729$
답 ①

[풀이2]
두 집합 A, B가 서로소이므로
$A \cap B = \varnothing$



6 이하의 자연수 k에 대하여 k는
집합 A의 원소이거나,
집합 B의 원소이거나,
집합 $(A \cup B)^C$의 원소이다.
집합 A의 원소의 개수가 $n(0 \le n \le 6)$일 때,
순서쌍 (A, B)의 개수는
$_6C_n\,{}_2\Pi_{6-n} (= {}_6C_n 2^{6-n})$
이다. 이때, $_6C_n$은 집합 A의 개수이고, $_2\Pi_{6-n}$은 집합 B의 개수이다. (두 집합 A, B가 결정되면 집합 $(A \cup B)^C$는 자동적으로 결정된다.)

예를 들어 $n=2$일 때, 다음과 같은 경우가 가능하다.

	1	2	3	4	5	6	경우의 수
A	●	●					$_6C_2$
B			●	×	×	●	$_2\Pi_{6-n}$
$(A\cup B)^C$			×	●	●	×	

따라서 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$$\sum_{n=0}^{6} {}_6C_n\,{}_2\Pi_{6-n} = \sum_{n=0}^{6} {}_6C_n 2^{6-n}$$

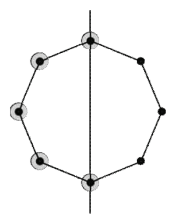
$$= {}_6C_0 2^6 + {}_6C_1 2^5 + {}_6C_2 2^4 + \cdots + {}_6C_6 2^0$$

$$= (1+2)^6 = 3^6 = 729$$

답 ①

J009 | 답 ②

[풀이]



5개의 꼭짓점 ◉에 올 숫자를 결정하면 나머지 3개의 꼭짓점에 올 숫자가 자동적으로 결정된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$_2\Pi_5 = 2^5 = 32$

답 ②

J010 | 답 ②

[풀이]

5개의 공을 3개의 상자에 넣는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$_3\Pi_5 = 3^5 = 243$

(1) 3개의 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 각각 15, 0, 0인 경우

A	B	C
1, 2, 3, 4, 5	×	×
×	1, 2, 3, 4, 5	×
×	×	1, 2, 3, 4, 5

경우의 수는 3이다.

(2) 3개의 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 각각 14, 1, 0인 경우

A	B	C
2, 3, 4, 5	1	×
2, 3, 4, 5	×	1
1	2, 3, 4, 5	×
×	2, 3, 4, 5	1
1	×	2, 3, 4, 5
×	1	2, 3, 4, 5

경우의 수는 6이다.

(3) 3개의 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 각각 13, 2, 0인 경우

A	B	C
1, 3, 4, 5	2	×
1, 3, 4, 5	×	2
2	1, 3, 4, 5	×
×	1, 3, 4, 5	2
2	×	1, 3, 4, 5
×	2	1, 3, 4, 5

경우의 수는 6이다.

(1), (2), (3)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$3^5-(3+6+6)=228$

답 ②

J011 | 답 ①

[풀이1] ★

우선 A를 설치하자.

조건 (가)에 의하여 A를 설치하는 경우의 수는 5이다.

조건 (나)를 고려하지 않고 나머지 4곳에 B, C를 설치하는 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여

$_2\Pi_4 = 2^4 = 16$

16가지의 경우 중에서 B가 1곳에 설치되는 경우의 수는 4이고, B가 설치되지 않는 경우의 수는 1이다.

따라서 A가 설치되었을 때, 조건 (나)를 만족시키지 않도록 B, C를 설치하는 경우의 수는

$16-(4+1)=11$

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$5\times 11=55$

답 ①

[풀이2] ★

우선 A를 설치하자.

조건 (가)에 의하여 A를 설치하는 경우의 수는 5이다.

조건 (나)에 의하여

• 2곳에 B를 설치하는 경우
남은 4곳 중에서 2곳에 B를 설치하고,
남은 2곳에 C를 설치하면 된다.
경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여
$\frac{4!}{2!2!}=6$
• 3곳에 B를 설치하는 경우
남은 4곳 중에서 3곳에 B를 설치하고,
남은 1곳에 C를 설치하면 된다.
경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여
$\frac{4!}{3!}=4$
• 4곳에 B를 설치하는 경우
남은 4곳 모두에 B를 설치하면 된다.
경우의 수는 1이다.
구하는 경우의 수는 합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여
$5\times(6+4+1)=55$
답 ①

[풀이3] ★
우선 A를 설치하자.
조건 (가)에 의하여 A를 설치하는 경우의 수는 5이다.
조건 (나)에 의하여
• 2곳에 B를 설치하는 경우
남은 4곳 중에서 2곳에 B를 설치하고,
남은 2곳에 C를 설치하면 된다.
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여
${}_4C_2\times{}_2C_2=6$
• 3곳에 B를 설치하는 경우
남은 4곳 중에서 3곳에 B를 설치하고,
남은 1곳에 C를 설치하면 된다.
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여
${}_4C_3\times1=4$
• 4곳에 B를 설치하는 경우
남은 4곳 모두에 B를 설치하면 된다.
경우의 수는 1이다.
구하는 경우의 수는 합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여
$5\times(6+4+1)=55$
답 ①

[참고]
B가 아닌 C가 설치되는 개수를 기준으로 문제를 해결할 수도 있다.
• 2곳에 C를 설치하는 경우
경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_2C_2=6$
• 1곳에 C를 설치하는 경우
경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_3C_3=4$
• C가 설치되지 않는 경우
경우의 수는 ${}_4C_0\times{}_4C_4=1$
구하는 경우의 수는 합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여
$5\times(6+4+1)=55$

J012 | 답 ①

[풀이]
서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
${}_4\Pi_5=4^5=2^{10}=1024$
답 ①

J013 | 답 ⑤

[풀이]
그릇 A에 담을 2개의 과일을 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_5C_2$
남은 3개의 과일을 남은 2개의 그릇 B, C에 담을 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여
${}_2\Pi_3$
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
${}_5C_2\times{}_2\Pi_3=\frac{5\times4}{2\times1}\times2^3=80$
답 ⑤

J014 | 답 ③

[풀이]
네 자리의 자연수가 5의 배수이므로 이 자연수의 일의 자리에는 5가 와야 한다.
○○○5
나머지 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$
답 ③

J015 | 답 ②

[풀이1] ★

서로 다른 공 4개를 각각 ◐, ◑, ◓, ◒, 서로 다른 상자 4개를 각각 A, B, C, D라고 하자.

서로 다른 공 4개를 남김없이 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

(전체 경우의 수)$= {}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$

넣은 공의 개수가 1인 상자가 없는 경우를 생각하자.

▸ (경우1) 4개+0개+0개+0개

A	B	C	D
◐◑ ◓◒	×	×	×

A	B	C	D
×	◐◑ ◓◒	×	×

⋮

4개의 공을 모두 넣을 상자를 선택하는 경우의 수는 4이다.

▸ (경우2) 2개+2개+0개+0개

A	B	C	D
◐◑	◓◒	×	×

A	B	C	D
◐◓	◑◒	×	×

A	B	C	D
◐◒	◑◓	×	×

⋮

A	B	C	D
◐◑	×	◓◒	×

⋮

2개, 2개씩의 공을 넣을 두 개의 상자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다. 예를 들어 두 개의 상자 A, B가 선택되었을 때, 상자 A에 2개의 공을 넣을 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$, 상자 B에 2개의 공을 넣을 경우의 수는 $1(={}_2C_2)$이다. (즉, 남은 2개의 공을 상자 B에 넣으면 된다.) 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_4C_2 \times 1 = 36$이다.

합의 법칙에 의하여

(제외해야 하는 경우의 수)$= 4 + 36 = 40$

(1), (2)에서

(구하는 경우의 수)$= 256 - 40 = 216$

답 ②

[참고1] ★

(경우2)에서 2개, 2개씩의 공을 넣을 두 개의 상자를 선택하는 경우의 수를 다음과 같이 구해도 좋다.

0개의 공을 ◎, 2개의 공을 ◉라고 하자.

◎, ◎, ◉, ◉을 일렬로 나열하는 경우의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{4!}{2!2!} = 6(= {}_4C_2)$

[참고2] ★

(경우2)에서 $36(= {}_4C_2 \times {}_4C_2)$는 다음과 같이 구해도 좋다.

2개, 2개씩의 공을 넣을 두 개의 상자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다. 서로 다른 4개의 공을 2개, 2개씩 나누는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2 \times \dfrac{1}{2!}$이다.

이때, ${}_4C_2$를 $2!$으로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다.

(◐◑) (◓◒)와 (◓◒) (◐◑)는 중복

(◐◓) (◑◒)와 (◑◒) (◐◓)는 중복

(◐◒) (◑◓)와 (◑◓) (◐◒)는 중복

⋮

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_4C_2 \times \left({}_4C_2 \times \dfrac{1}{2!}\right) \times 2! = 36$

이때, $2!$은 2개, 2개씩의 공을 선택된 두 상자에 넣는 경우의 수이다.

[풀이2] ★

서로 다른 공 4개를 각각 ◐, ◑, ◓, ◒, 서로 다른 상자 4개를 각각 A, B, C, D라고 하자.

넣은 공의 개수가 1인 상자가 있는 경우를 생각하자.

▸ (경우1) 1개+1개+1개+1개

예를 들어

A	B	C	D
◐	◑	◓	◒

순열의 수에 의하여 경우의 수는

${}_4P_4 = 4! = 24$

▸ (경우2) 2개+1개+1개+0개

예를 들어

A	B	C	D
◐◑	◓	◒	×

2개의 공을 넣을 한 상자와 1개씩의 공을 넣을 두 상자를 선

택하는 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_4C_1\times{}_3C_2(=12)$이다. 예를 들어 2개의 공을 넣을 상자로 A, 1개, 1개씩의 공을 넣을 두 상자로 B, C가 선택되었다고 하자. 세 상자 A, B, C에 넣을 공을 선택할 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1(=12)$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$12\times12=144$

▸ (경우3) 3개+1개+0개+0개
예를 들어

A	B	C	D
◐◑ ◓	◒	×	×

3개의 공을 넣을 한 상자와 1개의 공을 넣을 한 상자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_4C_1\times{}_3C_1(=12)$이다. 예를 들어 3개의 공을 넣을 상자로 A, 1개의 공을 넣을 상자로 B가 선택되었다고 하자. 두 상자 A, B에 넣을 공을 선택할 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_4C_3\times{}_1C_1(=4)$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$12\times4=48$
(경우1), (경우2), (경우3)은 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$24+144+48=216$
답 ②

[참고3] ★
(경우2)에서 2개, 1개, 1개씩의 공을 넣을 세 개의 상자를 선택하는 경우의 수를 다음과 같이 구해도 좋다.
0개의 공을 ◎, 1개의 공을 ◍, 2개의 공을 ◉라고 하자.
◎, ◍, ◍, ◉을 일렬로 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여
$\frac{4!}{2!}=12(={}_4C_1\times{}_3C_2)$

[참고4] ★
(경우2)의 경우의 수는 다음과 같이 구해도 좋다.
2개, 1개, 1개씩의 공을 넣을 세 개의 상자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3(=4)$이다. 서로 다른 4개의 공을 2개, 1개, 1개씩 나누는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}(=6)$이다.
이때, ${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1$을 2!으로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다.
(◐◑) (◓) (◒)와 (◐◑) (◒) (◓)는 중복
(◐◓) (◑) (◒)와 (◐◓) (◒) (◑)는 중복
(◐◒) (◑) (◓)와 (◐◒) (◓) (◑)는 중복
⋮
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$${}_4C_3\times\left({}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\right)\times3!=144$$
이때, 3!은 2개, 1개, 1개씩의 공을 선택된 세 상자에 넣는 경우의 수이다.

[참고5] ★
(경우3)에서 3개, 1개씩의 공을 넣을 세 개의 상자를 선택하는 경우의 수를 다음과 같이 구해도 좋다.
0개의 공을 ◎, 1개의 공을 ◍, 3개의 공을 ◈라고 하자.
◎, ◎, ◍, ◈을 일렬로 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여
$\frac{4!}{2!}=12(={}_4C_1\times{}_3C_1)$

[참고6] ★
(경우3)의 경우의 수는 다음과 같이 구해도 좋다.
3개, 1개씩의 공을 넣을 두 개의 상자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2(=6)$이다. 서로 다른 4개의 공을 3개, 1개씩 나누는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3\times{}_1C_1(=4)$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
${}_4C_2\times({}_4C_3\times{}_1C_1)\times2!=48$
이때, 2!은 3개, 1개씩의 공을 선택된 두 상자에 넣는 경우의 수이다.

J016 | 답 33

[풀이1]
세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는
중복순열의 수에 의하여 ${}_3\Pi_4=3^4=81$이다.
(1) a가 한 번 나오는 경우
a가 올 자리를 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_1=4$이다. (아래)
a◯◯◯, ◯a◯◯, ◯◯a◯, ◯◯◯a
각각의 경우에 대하여 ◯의 자리에 b 또는 c가 올 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_2\Pi_3=2^3=8$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $4\times8=32$이다.
(2) a가 나오지 않는 경우
◯◯◯◯

◯의 자리에 b 또는 c가 올 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_{2}\Pi_{4}=2^{4}=16$이다.
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$81-(32+16)=33$
답 33

[참고1]
같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 (1), (2)의 경우의 수를 구할 수도 있다.
(1)
$a,\ b,\ b,\ b$: $\dfrac{4!}{3!}=4$
$a,\ b,\ b,\ c$: $\dfrac{4!}{2!}=12$
$a,\ b,\ c,\ c$: $\dfrac{4!}{2!}=12$
$a,\ c,\ c,\ c$: $\dfrac{4!}{3!}=4$
합의 법칙에 의하여 경우의 수는
$4+12+12+4=32$이다.
(2)
$b,\ b,\ b,\ b$: 1
$b,\ b,\ b,\ c$: $\dfrac{4!}{3!}=4$
$b,\ b,\ c,\ c$: $\dfrac{4!}{2!2!}=6$
$b,\ c,\ c,\ c$: $\dfrac{4!}{3!}=4$
$c,\ c,\ c,\ c$: 1
합의 법칙에 의하여 경우의 수는
$1+4+6+4+1=16$이다.

[풀이2]
(1) a가 네 번 나오는 경우
$aaaa$
경우의 수는 1이다.
(2) a가 세 번 나오는 경우
a가 올 자리를 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$이다. (아래)
aaa◯, aa◯a, a◯aa, ◯aaa
각각의 경우에 대하여 ◯의 자리에 b 또는 c가 올 경우의 수는 2이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $4\times2=8$이다.
(3) a가 두 번 나오는 경우
a가 올 자리를 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_{4}C_{2}=6$이다. (아래)
aa◯◯, a◯a◯, a◯◯a,
◯aa◯, ◯a◯a, ◯◯aa
각각의 경우에 대하여 ◯의 자리에 b 또는 c가 올 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_{2}\Pi_{2}=2^{2}=4$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $6\times4=24$이다.
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$1+8+24=33$
답 33

[참고2]
같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 (2), (3)의 경우의 수를 구할 수도 있다.
(2)
$a,\ a,\ a,\ b$: $\dfrac{4!}{3!}=4$
$a,\ a,\ a,\ c$: $\dfrac{4!}{3!}=4$
합의 법칙에 의하여 경우의 수는 $4+4=8$이다.
(3)
$a,\ a,\ b,\ b$: $\dfrac{4!}{2!2!}=6$
$a,\ a,\ b,\ c$: $\dfrac{4!}{2!}=12$
$a,\ a,\ c,\ c$: $\dfrac{4!}{2!2!}=6$
합의 법칙에 의하여 경우의 수는 $6+12+6=24$이다.

J017 | 답 ③

[풀이]
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 구하는 방법의 수는
$\dfrac{4!}{2!}=12$
답 ③

J018 | 답 600

[풀이1]
(1) a끼리 이웃한 경우
문자열 aa를 하나의 문자 A로 간주하고 6개의 문자 A, b, b, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{6!}{2!}=360$이다.

(2) b끼리 이웃한 경우

문자열 bb를 하나의 문자 B로 간주하고 6개의 문자 a, a, B, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{6!}{2!}=360$이다.

(3) a끼리 이웃하고 b끼리 이웃한 경우

문자열 aa를 하나의 문자 A로 문자열 bb를 하나의 문자 B로 간주하고 5개의 문자 A, B, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $5!=120$이다.

(1), (2), (3)에서 구하는 경우의 수는

$360+360-120=600$

답 600

[풀이2]

▸ (경우1)

아래의 4개의 ○ 자리에 a, a를 나열할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2(=6)$이다.

○c○d○e○

예를 들어 다음과 같이 나열하였다고 하자.

○cad○ea 즉, $cadea$

아래의 6개의 ○ 자리에 b, b를 나열할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_6C_2(=15)$이다.

○c○a○d○e○a○

예를 들어 다음과 같이 나열하였다고 하자.

bc○abd○e○a○ 즉, $bcabdea$

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6\times15\times3!=540$ …㉠

이때, $3!$은 c, d, e를 나열하는 경우의 수이다.

▸ (경우2)

이제 다음과 같은 경우를 생각하자.

아래의 4개의 ○ 자리에 aa를 나열할 경우의 수는 4이다.

○c○d○e○

예를 들어 다음과 같이 나열하였다고 하자.

○c○$daae$○ 즉, $cdaae$

아래의 5개의 ○ 자리에 b를 나열할 경우의 수는 5이다.

○c○d○$a\boxed{b}a$○e○ (←사각형 안에는 반드시 b가 들어가야 한다.)

예를 들어 다음과 같이 나열하였다고 하자.

○cbd○$a\boxed{b}a$○e○ 즉, $cbdabae$

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times5\times3!=120$ …㉡

이때, $3!$은 c, d, e를 나열하는 경우의 수이다.

문제에서 주어진 7개의 문자를 일렬로 나열할 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{7!}{2!2!}=1260$

따라서 구하는 경우의 수는

$1260-(㉠+㉡)=600$

답 600

[풀이3]

'a끼리 또는 b끼리 서로 이웃한다.'의 부정은 다음과 같다.

'a끼리 이웃하지 않고 b끼리 이웃하지 않는다.'

이제 네 개의 ○에 a끼리 이웃하지 않고 b끼리 이웃하지 않도록 a와 b를 나열하자.

○c○d○e○

▸ $abab$ 또는 $baba$: ${}_4C_1+{}_4C_1=8$

예를 들어 $c(abab)de$, $cde(baba)$, … 등이 가능하다.

▸ aba/b: ${}_4P_2=12$

예를 들어 $cd(aba)e(b)$, $c(b)d(aba)e$, … 등이 가능하다.

▸ bab/a: ${}_4P_2=12$

예를 들어 $(bab)cd(a)e$, $(a)cde(bab)$, … 등이 가능하다.

▸ ab/ab 또는 ab/ba 또는 ba/ab 또는 ba/ba:

${}_4C_2\times2!\times2!=24$

예를 들어 $c(ab)d(ab)e$, $(ba)c(ab)de$, $cd(ba)e(ba)$, … 등이 가능하다.

▸ $ab/a/b$ 또는 $ba/a/b$: ${}_4P_3\times2!=48$

예를 들어 $(ab)c(a)d(b)e$, $c(ba)d(b)e(a)$, … 등이 가능하다.

▸ $a/b/a/b$: ${}_4C_2=6$

예를 들어 $(a)c(b)d(a)e(b)$, $(b)c(b)d(a)e(a)$, … 등이 가능하다.

전체 경우의 수는

$\frac{7!}{2!2!}=1260$

따라서 구하는 경우의 수는

$1260-(8+12+12+24+48+6)\times3!=600$

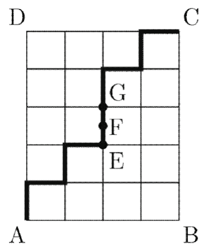
이때, $3!$은 c, d, e를 나열하는 경우의 수이다.

답 600

J019 | 답 36

[풀이]

갑과 을의 속력이 같으므로 갑과 을은 아래 그림처럼 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점에서 만난다. 이 교점을 F라고 하자. 그리고 두 교차로 E, G가 그림과 같다고 하자.



병의 이동경로는 다음과 같다.

B→E→F→G→D

병이 B에서 E까지 최단 거리로 이동할 경우의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$

병이 E에서 G까지 최단 거리로 이동할 경우의 수는

1

병이 G에서 D까지 최단 거리로 이동할 경우의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6\times1\times6=36$

답 36

J020 | 답 90

[풀이1]

(1) 십만 자리의 수가 4 인 경우

4					

나머지 다섯 자리에 1, 2, 2, 5, 5를 배열할 경우의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{5!}{2!\,2!}=30$

(2) 십만 자리의 수가 5 인 경우

5					

나머지 다섯 자리에 1, 2, 2, 4, 5를 배열할 경우의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{5!}{2!}=60$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$30+60=90$

답 90

[풀이2] 시험장

주어진 6개의 수 중 3 보다 큰 수의 개수와 3 보다 작은 수의 개수가 같으므로 300000보다 큰 여섯 자리 자연수의 개수와 300000보다 작은 여섯 자리 자연수의 개수는 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6!}{2!2!}=90$

답 90

[참고]

300000 보다 작은 수는

1○○○○○: ○ 안에 2, 2, 4, 5, 5를 배열한다. (경우1)

2○○○○○: ○ 안에 1, 2, 4, 5, 5를 배열한다. (경우2)

300000 보다 큰 수는

4○○○○○: ○ 안에 1, 2, 2, 5, 5를 배열한다. (경우3)

5○○○○○: ○ 안에 1, 2, 2, 4, 5를 배열한다. (경우4)

(경우1), (경우3)의 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!2!}$으로 같고,

(경우2), (경우4)의 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!}$으로 같으므로

300000 보다 작은 수의 개수와 300000 보다 큰 수의 개수는 같다.

J021 | 답 68

[풀이]

(1) 보안카드의 8자리의 문자열에 '1'의 개수가 5인 경우

5개의 '1'과 3개의 '0'을 일렬로 배열하는 순열의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{8!}{5!3!}=56$

혹은 다음과 같이 조합의 수로 경우의 수를 구해도 좋다.

서로 다른 8개의 자리 중에서 '1'이 들어갈 5개의 자리를 택하는 조합의 수는

${}_8C_5=56$

(2) 보안카드의 8자리의 문자열의 처음 4자리가 '0110'인 경우

나머지 4자리에 '0', '1'에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 배열하는 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여

${}_2\Pi_4=2^4=16$

(3) 보안카드의 8자리의 문자열이 (1), (2)를 동시에 만족하는 경우

나머지 4자리에 3개의 '1'과 1개의 '0'을 일렬로 배열하는 순열의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{4!}{3!}=4$

혹은 다음과 같이 조합의 수로 경우의 수를 구해도 좋다.
서로 다른 4개의 자리 중에서 '1'이 들어갈 3개의 자리를 택하는 조합의 수는

${}_4C_3 = 4$

(1), (2), (3)에서 서로 다른 보안카드의 개수는

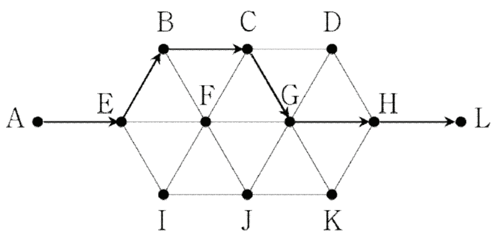
$56 + 16 - 4 = 68$

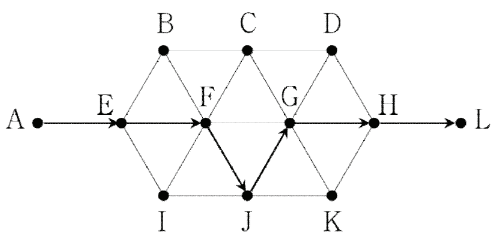
답 68

J022 | 답 12

[풀이]

예를 들어 아래 그림과 같이 이동하면 된다.





⋮

지점 E에서 지점 H까지 →의 방향으로 2번, ↗의 방향으로 1번, ↘의 방향으로 1번 이동해야 한다.
구하는 경우의 수는 →, →, ↗, ↘를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

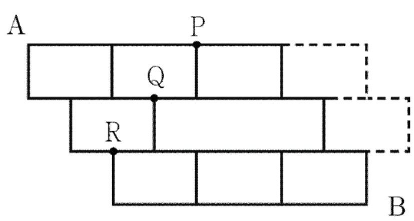
$\dfrac{4!}{2!} = 12$

답 12

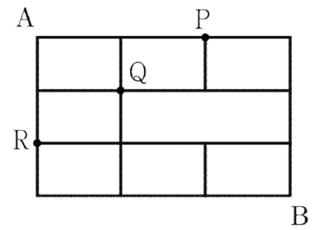
J023 | 답 ①

[풀이1]

세 교차로 P, Q, R이 아래 그림과 같다고 하자.



우리에게 익숙한 모양으로 바꾸면 다음과 같다.



같은 것이 있는 순열의 수와 합의 법칙, 곱의 법칙에 의하여

$A \to P \to B$: $1 \times 2 = 2$

$A \to Q \to B$: $2 \times \left(1 + \dfrac{3!}{2!}\right) = 8$

$A \to R \to B$: $1 \times \dfrac{4!}{3!} = 4$

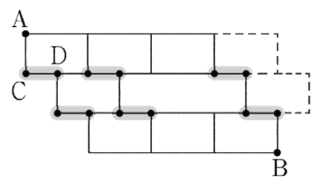
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$2 + 8 + 4 = 14$

답 ①

[참고]

지점 A에서 지점 B까지 도로를 따라 최단 거리로 가기 위해서는 항상 → 또는 ↓ 방향으로만 움직여야 한다. 따라서 아래 그림처럼 점선으로 표시된 도로는 지날 수 없다.

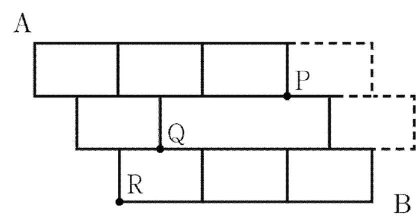


(단, C, D는 도로의 교차로이다.)

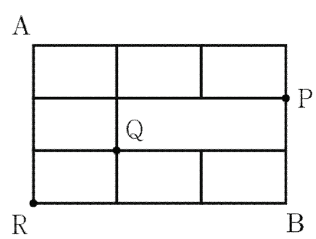
만약 지점 C를 지난다면 반드시 지점 D를 지나게 된다. 따라서 이 두 지점을 겹쳐서 그릴 수 있다. 나머지의 10개의 교차로도 동일한 이유로 두 지점씩 겹쳐서 그릴 수 있다.

[풀이2]

세 교차로 P, Q, R이 아래 그림과 같다고 하자.



우리에게 익숙한 모양으로 바꾸면 다음과 같다.



같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$A \to P \to B$: $\dfrac{4!}{3!} \times 1 = 4$

$A \to Q \to B$: $\dfrac{3!}{2!} \times \dfrac{3!}{2!} = 9$

$A \to R \to B$: $1 \times 1 = 1$

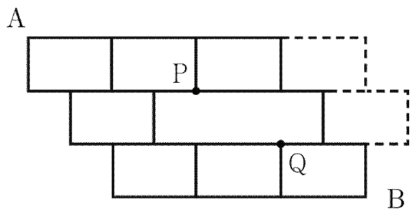
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$4 + 9 + 1 = 14$

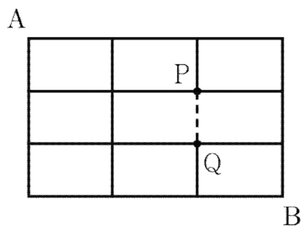
답 ①

[풀이3]

두 교차로 P, Q가 아래 그림과 같다고 하자.



우리에게 익숙한 모양으로 바꾸면 다음과 같다.



두 교차로 P와 Q가 연결되었을 때, 지점 A에서 지점 B까지 최단거리로 가는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{6!}{3!3!} = 20$

두 교차로 P와 Q가 연결되었을 때, 아래의 경로를 따라 최단거리로 가는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$A \to P \to Q \to B$: $\dfrac{3!}{2!} \times 1 \times 2 = 6$

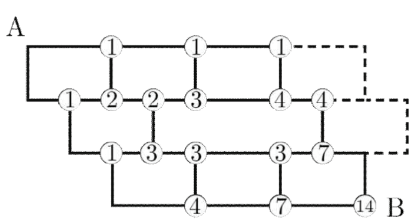
따라서 구하는 경우의 수는

$20 - 6 = 14$

답 ①

[풀이4] 시험장

지점 A에서 각각의 교차로까지 도로를 따라 최단거리로 가는 경우의 수를 합의 법칙을 이용하여 구하면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 14이다.

답 ①

J024 | 답 34

[풀이]

(1) 4분 음표(♩)를 4개 사용하는 경우

경우의 수는 1이다.

(2) 4분 음표(♩)를 3개 사용하는 경우

8분 음표(♪)는 2개 사용해야 한다.

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{5!}{3!2!} = 10$

(3) 4분 음표(♩)를 2개 사용하는 경우

8분 음표(♪)는 4개 사용해야 한다.

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{6!}{2!4!} = 15$

(4) 4분 음표(♩)를 1개 사용하는 경우

8분 음표(♪)는 6개 사용해야 한다.

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{7!}{6!} = 7$

(5) 4분 음표(♩)를 사용하지 않는 경우

8분 음표(♪)는 8개 사용해야 한다.

경우의 수는 1이다.

(1)~(5)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$1 + 10 + 15 + 7 + 1 = 34$

답 34

[참고]

이 문제는 아래와 같은 문제이다.

'8개의 계단을 한 번에 1계단 혹은 2계단씩 오를 수 있다. 이 계단을 오르는 경우의 수를 구하시오.'

제1항과 제2항이 각각 1, 2인 피보나치수열을 쓰면

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ⋯

따라서 구하는 경우의 수는 34(제8항)이다.

J025 | 답 14

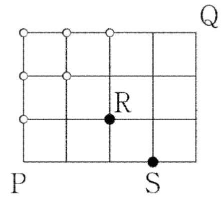
[풀이1]

주어진 문제를 최단거리의 개수를 구하는 문제로 치환하여 생각하자.

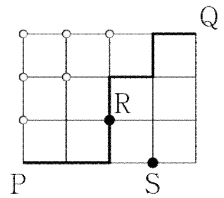
아래와 같은 도로망이 있다.

P지점에서 Q지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구하자.

(단, ‘○’ 표시가 된 교차로는 지날 수 없다.)



오른쪽(→)으로 한 칸 가는 것을 A가 이기는 것으로 위쪽(↑)으로 한 칸 가는 것을 B가 이기는 것으로 하자.



예를 들어 위와 같은 경로로 이동하는 것은
A, A, B, B, A, B, A
의 순서대로 이기는 것과 같다.
이는 문제에서 주어진 모든 조건을 만족시킨다.
(1) P→R→Q의 경로로 가는 경우
같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에
의하여 경우의 수는

$$1\times 2\times\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)=10$$

(2) P→S→Q의 경로로 가는 경우
같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에
의하여 경우의 수는

$$1\times\frac{4!}{3!}=4$$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여
$10+4=14$
답 14

[참고]
P지점에서 Q지점까지 최단 거리로 갈 때, 반드시 R지점 또는 S지점을 지나야 한다. 하지만 R지점과 S지점을 모두 지날 수는 없다.(만약 이 두 지점을 모두 지난다면 최단 거리가 아니다.) 따라서 ‘P→R→Q의 경로’ 또는 ‘P→S→Q의 경로’ 만이 가능하다.

[풀이2]
A가 이길 경우에는 아래의 표에 ‘A’를 기록하고,
B가 이길 경우에는 아래의 표에 ‘B’를 기록하자.

1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일

(1) A가 마지막으로 이긴 날이 ‘4일’인 경우

1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
A	A	A	A	B	B	B

경우의 수는 1이다.
(2) A가 마지막으로 이긴 날이 ‘5일’인 경우

1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
A	A	A	B	A	B	B
A	A	B	A	A	B	B
A	B	A	A	A	B	B

(3) A가 마지막으로 이긴 날이 ‘6일’인 경우

1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
A	B	A	B	A	A	B
A	B	A	A	B	A	B
A	A	B	B	A	A	B
A	A	B	A	B	A	B
A	A	A	B	B	A	B

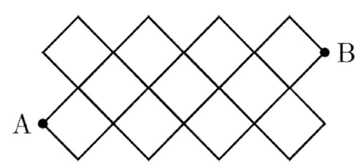
(4) A가 마지막으로 이긴 날이 ‘7일’인 경우

1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
A	A	A	B	B	B	A
A	A	B	A	B	B	A
A	A	B	B	A	B	A
A	B	A	A	B	B	A
A	B	A	B	A	B	A

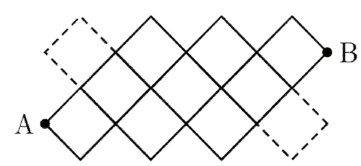
(1)~(4)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$1+3+5+5=14$
답 14

J026 | 답 40

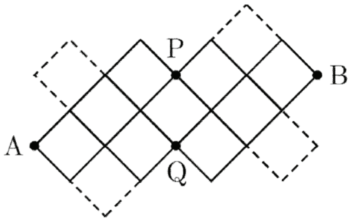
[풀이1] ★
문제에서 주어진 산책로와 아래의 도로망은 연결 상태가 같다.



최단 거리로 움직이므로 지나지 않는 길을 제외하면 아래 그림과 같다.



2개의 교차로 P, Q는 각각 아래 그림과 같다고 하자.



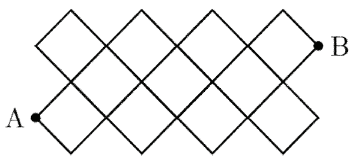
(1) 교차로 P를 지나는 경우
같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
경우의 수는 $\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)=20$이다.

(2) 점 Q를 지나는 경우
같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
경우의 수는 $\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)\times\frac{4!}{3!}=20$이다.

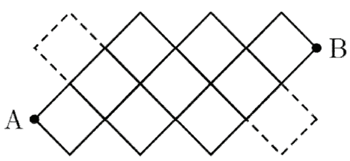
(1)과 (2)는 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$20+20=40$

답 40

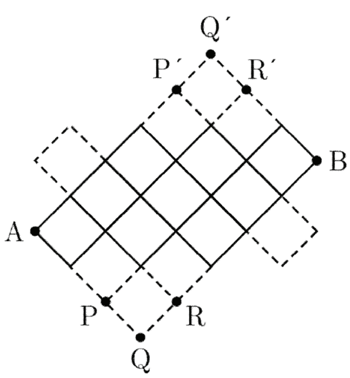
[풀이2] ★
문제에서 주어진 산책로와 아래의 도로망은 연결 상태가 같다.



최단 거리로 움직이므로 지나지 않는 길을 제외하면 아래 그림과 같다.



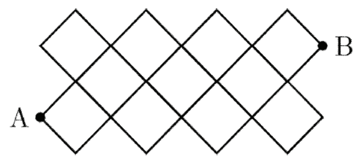
6개의 교차로 P, Q, R, P′, Q′, R′은 각각 아래 그림과 같다고 하자.



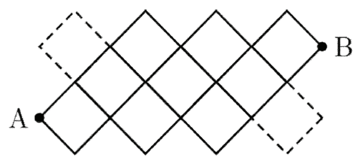
3개의 교차로 P, Q, R을 지나는 경우를 각각 P, Q, R이라고 하자. 같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
$n(P)=6$, $n(Q)=1$, $n(R)=4$,
$n(P\cap Q)=1$, $n(Q\cap R)=1$, $n(R\cap P)=2$,
$n(P\cap Q\cap R)=1$
이므로
$n(P\cup Q\cup R)=n(P)+n(Q)+n(R)$
$-n(P\cap Q)-n(Q\cap R)$
$-n(R\cap P)+n(P\cap Q\cap R)=8$
3개의 교차로 P′, Q′, R′을 지나는 경우를 각각 P', Q', R'이라고 하면 마찬가지의 방법으로
$n(P'\cup Q'\cup R')=8$
따라서 구하는 경우의 수는
$\frac{8!}{5!3!}-2\times8=40$

답 40

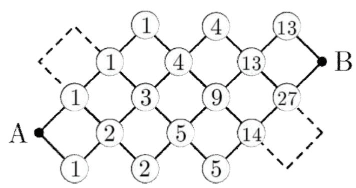
[풀이3] 시험장 ★
문제에서 주어진 산책로와 아래의 도로망은 연결 상태가 같다.



최단 거리로 움직이므로 지나지 않는 길을 제외하면 아래 그림과 같다.



A 지점에서 각각의 교차로까지 도로를 따라 최단거리로 가는 경우의 수를 합의 법칙을 이용하여 구하면 다음과 같다.



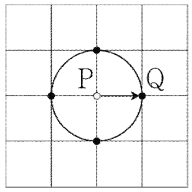
따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$13+27=40$

답 40

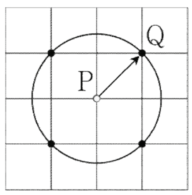
J027 | 답 19

[풀이1] ★
문제에서 주어진 '점프'에 대한 정의를 평행이동의 관점에서 해석하면 다음과 같다.

- 선분 PQ의 길이가 1인 경우

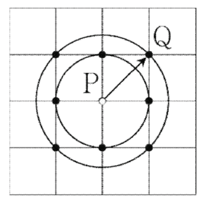


(단, ∘는 출발한 점, •는 도착한 점)
→ : x축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.
← : x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.
↑: y축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.
↓: y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.
• 선분 PQ의 길이가 $\sqrt{2}$인 경우

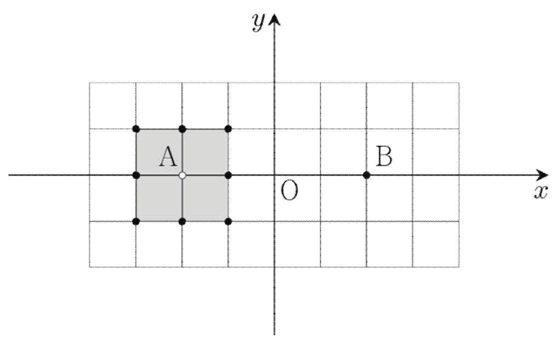


(단, ∘는 출발한 점, •는 도착한 점)
↗: x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.
↘: x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.
↖: x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.
↙: x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.
점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$을 x축의 방향으로 4만큼 평행이동시키면 점 $\mathrm{B}(2,\ 0)$이다.
점 A에서 점 B까지 4번만 점프하여 이동하기 위해서는 반드시 → 또는 ↗ 또는 ↘ 의 방향으로 점프해야 한다.
점프 →, ↗, ↘을 각각 a번, b번, c번 한다고 하자.
문제에서 주어진 조건에 의하여
$a+b+c=4,\ b=c\ (a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0)$
(만약 $b\ne c$이면 점 A에서 4번만 점프하여 도착한 점의 y좌표는 0일 수 없다.)
연립하면
$a+2b=4\ (a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0)$
풀면
$(a,\ b)=(4,\ 0)$ 또는 $(a,\ b)=(2,\ 1)$ 또는 $(a,\ b)=(0,\ 2)$
(1) 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 $(4,\ 0,\ 0)$인 경우
→, →, →, →을 나열하는 경우의 수는 1이다.
(2) 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 $(2,\ 1,\ 1)$인 경우
→, →, ↗, ↘을 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{4!}{2!}=12$이다.
(3) 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 $(0,\ 2,\ 2)$인 경우
↗, ↗, ↘, ↘을 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$이다.
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$1+12+6=19$
답 19

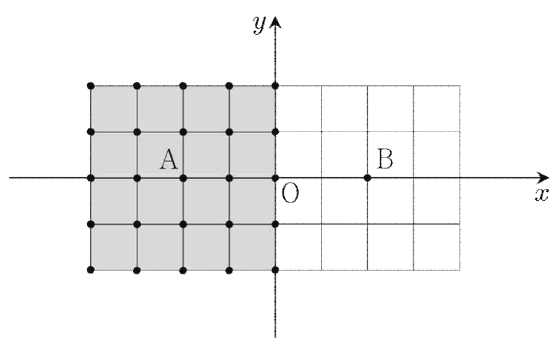
[풀이2]
점 P에서 한 번의 '점프'로 이동할 수 있는 점 Q는 아래 그림과 같다. (총 8개의 점)



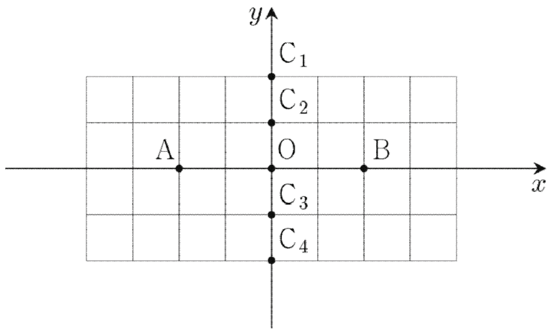
점 A에서 1번 '점프'할 때, 아래 그림처럼 8개의 점으로 이동할 수 있다.



점 A에서 2번 '점프'할 때, 아래 그림처럼 25개의 점으로 이동할 수 있다.



점 A에서 4번 '점프'하여 점 B에 도착하려면 점 A에서 2번 '점프'하여 y축 위의 점에 도착해야 한다.
원점을 제외한 y축 위의 4개의 도착점을 각각 C_1, C_2, C_3, C_4라고 하자.



(1) $A \to C_1 \to B$ 인 경우

점 A에서 2번 '점프' 하여 점 C_1에 도착하는 방법은

(↗, ↗)

점 C_1에서 2번 '점프' 하여 점 B에 도착하는 방법은

(↘, ↘)

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $1 \times 1 = 1$

(2) $A \to C_2 \to B$ 인 경우

점 A에서 2번 '점프' 하여 점 C_2에 도착하는 방법은

(↗, →) 또는 (→, ↗)

점 C_2에서 2번 '점프' 하여 점 B에 도착하는 방법은

(→, ↘) 또는 (↘, →)

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$

(3) $A \to O \to B$ 인 경우

점 A에서 2번 '점프' 하여 점 O에 도착하는 방법은

(→, →) 또는 (↗, ↘) 또는 (↘, ↗)

점 O에서 2번 '점프' 하여 점 B에 도착하는 방법은

(→, →) 또는 (↗, ↘) 또는 (↘, ↗)

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$

(4) $A \to C_3 \to B$ 인 경우

(2)와 마찬가지의 방법으로 경우의 수를 구하면 4이다.

(5) $A \to C_4 \to B$ 인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수를 구하면 1이다.

(1)~(5)는 동시에 발생하지 않으므로

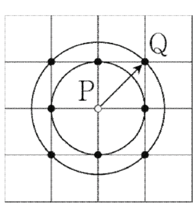
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$1+4+9+4+1=19$

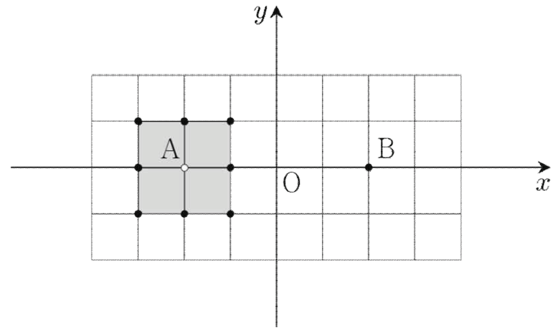
답 19

[풀이3]

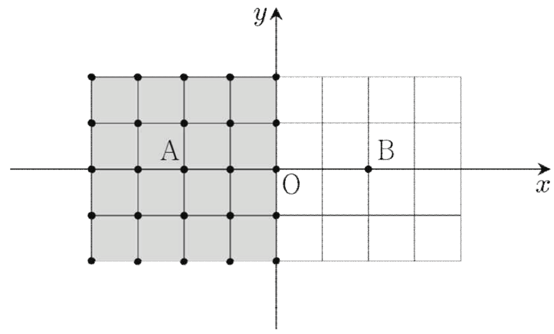
점 P에서 한 번의 '점프' 로 이동할 수 있는 점 Q는 아래 그림과 같다. (총 8개의 점)



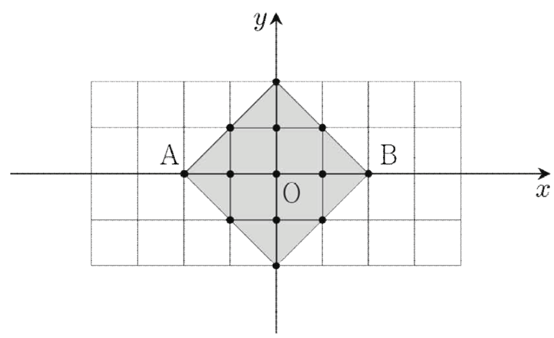
점 A에서 1번 '점프' 할 때, 아래 그림처럼 8개의 점으로 이동할 수 있다.



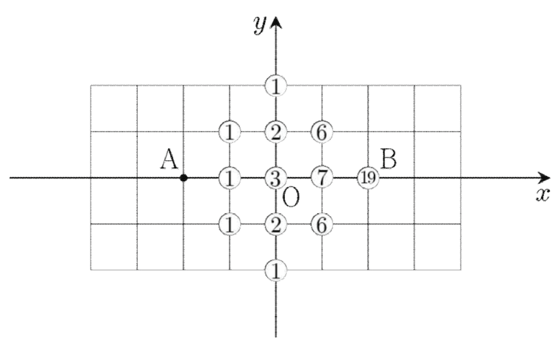
점 A에서 2번 '점프' 할 때, 아래 그림처럼 25개의 점으로 이동할 수 있다.



점 A에서 4번 '점프' 하여 점 B에 도착하려면 점 A에서 2번 '점프' 하여 y축 위의 점에 도착해야 한다. 점 A에서 점 B까지 4번만 '점프' 하여 이동할 때, 지날 수 있는 점은 아래 그림과 같다.



점 A에서 점 B까지 4번만 '점프' 하여 이동하는 경우의 수를 합의 법칙을 이용하여 구하면 다음과 같다.



답 19

J028 | 답 90

[풀이1] ★

'국어A'와 '국어B'를 같은 것으로 간주하고,
'영어A'와 '영어B'를 같은 것으로 간주하고,
'수학A'와 '수학B'를 같은 것으로 간주하자.

이 상태에서 6개의 과제를 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$$\frac{6!}{2!2!2!}=90$$

예를 들어 아래와 같이 6개의 과제가 나열되었다고 하자.

국어→영어→영어→수학→국어→수학

이제 앞에 오는 과목에 'A', 뒤에 오는 과목에 'B'를 붙이면 된다.

국어A→영어A→영어B→수학A→국어B→수학B

답 90

[풀이2] ★

우선 국어A, 국어B의 제출순서를 정할 경우의 수는
조합의 수에 의하여 ${}_6C_2$이다.

예를 들어 아래와 같다고 하자.

국어A		국어B			

영어A, 영어B의 제출순서를 정할 경우의 수는
조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다.

예를 들어 아래와 같다고 하자.

국어A	영어A	국어B		영어B	

수학A, 수학B의 제출순서를 정할 경우의 수는
조합의 수에 의하여 ${}_2C_2$이다.

예를 들어 아래와 같다고 하자.

국어A	영어A	국어B	수학A	영어B	수학B

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2=15\times6\times1=90$

답 90

J029 | 답 ③

[풀이1]

이 회사원이 처리해야 할 업무를 각각 A, B, c, d, e, f라고 하자.

A, B를 포함한 4가지 업무를 택하는 경우의 수는
c, d, e, f에서 2가지 업무를 택하는 조합의 수 ${}_4C_2$와 같다.

예를 들어 A, B, c, f를 택하였다고 하자.

A와 B를 각각 ○, ○로 두자. (즉, 같은 것으로 간주한 것이다.) ○, ○, c, f를 나열하는 방법의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$$\frac{4!}{2!}=12$$

예를 들어

c, ○, f, ○은 c, A, f, B,
○, f, c, ○은 A, f, c, B
에 대응된다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_2\times\frac{4!}{2!}=72$이다.

답 ③

[풀이2]

이 회사원이 처리해야 할 업무를 각각 A, B, c, d, e, f라고 하자.

A, B를 포함한 4가지 업무를 택하는 경우의 수는
c, d, e, f에서 2가지 업무를 택하는 조합의 수 ${}_4C_2$와 같다.

예를 들어 A, B, c, f를 택하였다고 하자.

이제 네 업무 A, B, c, f의 처리 순서를 정하면 된다.
즉, 네 문자 A, B, c, f의 배열 순서를 정하면 된다.
주어진 조건에 의하여 A가 B의 왼쪽에 와야 한다.
A가 B의 왼쪽에 올 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다.

예를 들면 다음과 같은 경우가 가능하다.

B○A○

나머지 두 자리에 c, f를 배열할 경우의 수는
순열의 수에 의하여 $2!$이다. 예를 들어

BcAf 또는 BfAc

곱의 법칙에서 구하는 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_4C_2\times2!=72$이다.

답 ③

J030 | 답 ③

[풀이1]

A와 B를 모두 ◎로 두고(즉, 같은 것으로 간주하고), ◎, ◎, C, D, E를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{5!}{2!}$$

이다. 예를 들어

◎, E, D, ◎, C는
A(50), E(50), D(100), B(150), C(200),
E, C, ◎, ◎, D는
E(50), C(50), A(100), B(150), D(200)

에 각각 대응된다.
그런데 A, B, D, E, C의 경우
A(50), B(50), D(100), E(150), C(200)
이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
이때, 경우의 수는 $3!$이다.
($\because$ ◎, ◎, $\underbrace{C, D, E}_{\text{경우의 수 : }3!}$에서 ◎을 고정시키고, 나머지 세 개의 문자를 일렬로 나열한다.)
따라서 구하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}-3!=54$
답 ③

[풀이2]
(1) A가 '가' 또는 '나'에 발령을 받을 경우
B는 '다', '라', '마' 중에서 한 곳에 발령을 받으면 된다.
그리고 C, D, E는 남은 세 곳으로 발령을 받으면 된다.
경우의 수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
$2\times3\times3!=36$
(2) A가 '가'와 '나'에 발령을 받지 않을 경우
A, B는 각각
'다', '라' 또는 '다', '마' 또는 '라', '마'
에 발령을 받으면 된다.
그리고 C, D, E는 남은 세 곳으로 발령을 받으면 된다.
경우의 수는 조합의 수, 순열의 수, 곱의 법칙에 의하여
${}_3C_2\times3!=18$
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$36+18=54$
답 ③

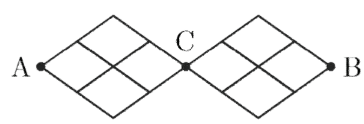
[풀이3] 시험장
A보다 B가 본사로부터 거리가 먼 지사의 지사장이 되는 경우의 수를 p라고 하면 B보다 A가 본사로부터 거리가 먼 지사의 지사장이 되는 경우의 수는 p이다. 그리고 A와 B가 본사로부터 거리가 같은 지사의 지사장이 되는 경우의 수를 q라고 하면 다음의 등식이 성립한다.
$2p+q=$(전체 경우의 수)
q와 '전체 경우의 수'를 구하자.
$q=$(A와 B가 각각 '가, 나' 또는 '나, 가'에 지사장으로 발령받을 경우의 수)
$=2!\times3!=12$
이때, $2!$은 A와 B가 발령받을 경우의 수이고, $3!$은 C, D, E가 발령받을 경우의 수이다.
순열의 수에 의하여
(전체 경우의 수)
$=5!=120$
따라서 구하는 경우의 수는
$p=\frac{120-12}{2}=54$
답 ③

J031 | 답 ①

[풀이1]
양 끝을 제외한 8개의 자리에 흰색 깃발 3개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 나열하면 된다.
경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여
$\frac{8!}{3!5!}=56$
답 ①

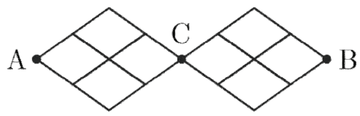
[풀이2]
양 끝을 제외한 8개의 자리에 흰색 깃발 3개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 나열하면 된다.
다시 말하면 양 끝을 제외한 8개의 자리 중에서 3개의 자리를 선택하여 흰색 깃발 3개를 나열하면 된다.
경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_8C_3=56$
답 ①

J032 | 답 ④

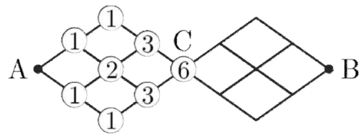
[풀이1]
C지점은 다음 그림과 같다고 하자.


A지점에서 C지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{2!2!}=6$이다.
C지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{2!2!}=6$이다.
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$6\times6=36$
답 ④

[풀이2]
C지점은 다음 그림과 같다고 하자.



A 지점에서 각각의 교차로까지 도로를 따라 최단거리로 가는 경우의 수를 합의 법칙을 이용하여 구하면 다음과 같다. (단, C 지점까지만 생각하자.)

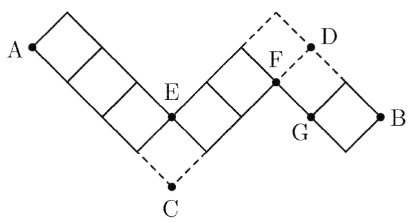


A 지점에서 C 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 6이고, 마찬가지의 방법으로 C 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 6이다.
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$6\times6=36$

답 ④

J033 | 답 ②

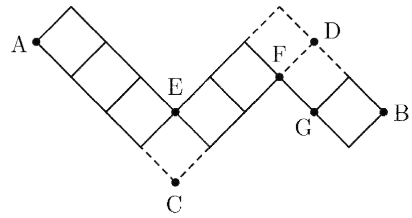
[풀이1]
E 지점, F 지점, G 지점이 아래 그림과 같다고 하자.



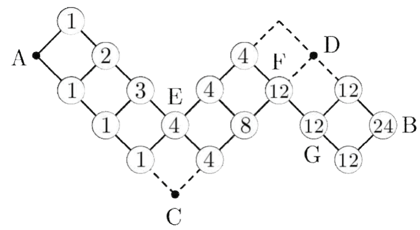
C 지점을 지나지 않으려면 E 지점을 반드시 지나야 하고, D 지점을 지나지 않으려면 F 지점과 G 지점을 반드시 지나야 한다.
A 지점에서 E 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{4!}{3!}=4$이다.
E 지점에서 F 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{3!}{2!}=3$이다.
F 지점에서 G 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 1이다.
G 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2이다.
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$4\times3\times1\times2=24$

답 ②

[풀이2]
E 지점, F 지점, G 지점이 아래 그림과 같다고 하자.



C 지점을 지나지 않으려면 E 지점을 반드시 지나야 하고, D 지점을 지나지 않으려면 F 지점과 G 지점을 반드시 지나야 한다.
A 지점에서 각각의 교차로까지 도로를 따라 최단거리로 가는 경우의 수를 합의 법칙을 이용하여 구하면 다음과 같다.



답 ②

J034 | 답 ②

[풀이1]
2, 4를 각각 ◎, ◎, 1, 3, 5를 각각 ◉, ◉, ◉으로 두고, ◉, ◎, ◉, ◎, ◉, 6을 나열하는 경우의 수를 구하면 된다.
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는
$\dfrac{6!}{3!2!}=60$

답 ②

[풀이2]
아래 그림과 같은 6개의 자리에 주어진 6장의 카드를 나열하자.

$\boxed{2}$, $\boxed{4}$를 나열하는 경우의 수는 ${}_6C_2\left(={}_6P_2\times\dfrac{1}{2!}\right)$이다.
예를 들어

2			4		

$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$를 나열하는 경우의 수는 ${}_4C_3\left(={}_4P_3\times\dfrac{1}{3!}\right)$이다.
예를 들어

2		1	4	3	5

$\boxed{6}$을 나열하는 경우의 수는 1이다.
예를 들어

2	6	1	4	3	5

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

${}_6C_2 \times {}_4C_3 = 60$

답 ②

J035 | 답 ⑤

[풀이1]

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 →, 위로 한 칸 가는 것을 ↑로 표현하자.

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 →, →, ↑, ↑을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다. 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{4!}{2!2!} = 6$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 →, →, →, ↑을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다. 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{4!}{3!} = 4$

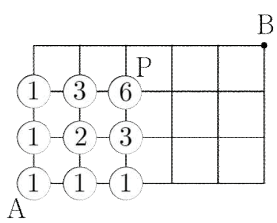
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6 \times 4 = 24$

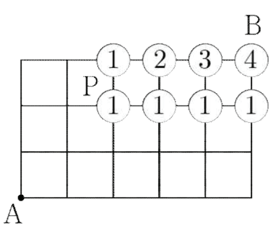
답 ⑤

[풀이2]

A 지점에서 P 지점까지 최단거리로 갈 때, A 지점에서 각 교차로까지 최단거리로 가는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여



P 지점에서 B 지점까지 최단거리로 갈 때, P 지점에서 각 교차로까지 최단거리로 가는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여



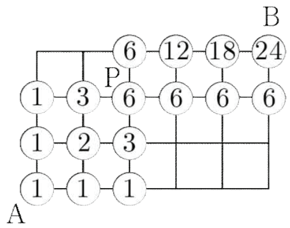
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6 \times 4 = 24$

답 ⑤

[풀이3]

A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단거리로 갈 때, A 지점에서 각 교차로까지 최단거리로 가는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여



구하는 경우의 수는 24이다.

답 ⑤

J036 | 답 450

[풀이]

조건 (가), (나)를 모두 만족시키도록 선택하면

$\text{홀}, \underbrace{\text{짝}, \text{짝}}_{\text{같은 수}}, \underbrace{\text{짝}, \text{짝}}_{\text{같은 수}}$ (예: 1, 2, 2, 6, 6) ⋯㉠

$\underbrace{\text{홀}, \text{홀}, \text{홀}}_{\text{다른 수}}, \underbrace{\text{짝}, \text{짝}}_{\text{같은 수}}$ (예: 1, 3, 5, 4, 4) ⋯㉡

각각의 경우의 수를 구하자.

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

㉠: $\underbrace{{}_3C_1}_{\text{홀 선택}} \cdot \underbrace{{}_3C_2}_{\text{짝 선택}} \cdot \underbrace{\frac{5!}{2!2!}}_{\text{나열}} = 270$

㉡: $\underbrace{{}_3C_3}_{\text{홀 선택}} \cdot \underbrace{{}_3C_1}_{\text{짝 선택}} \cdot \underbrace{\frac{5!}{2!}}_{\text{나열}} = 180$

따라서 구하는 경우의 수는

$270 + 180 = 450$

답 450

J037 | 답 ②

[풀이1]

(1) a로 시작하는 경우

$\check{a}\,b\,\check{a}\,b\,\check{a}\,b\,\check{}$

체크 표시된 곳에 남은 4개의 a를 배치할 경우의 수는 방정식

$p + q + r + s + t = 4$

(단, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $t \geq 0$)

의 해의 개수

${}_5H_4 = {}_{5+4-1}C_4 = {}_8C_4 = 70$

과 같다.

(2) b로 시작하는 경우

$b\,\check{a}\,b\,\check{a}\,b\,\check{a}$

체크 표시된 곳에 남은 4개의 a를 배치할 경우의 수는 방정식

$p + q + r + s = 4$

(단, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$, $s \geq 0$)