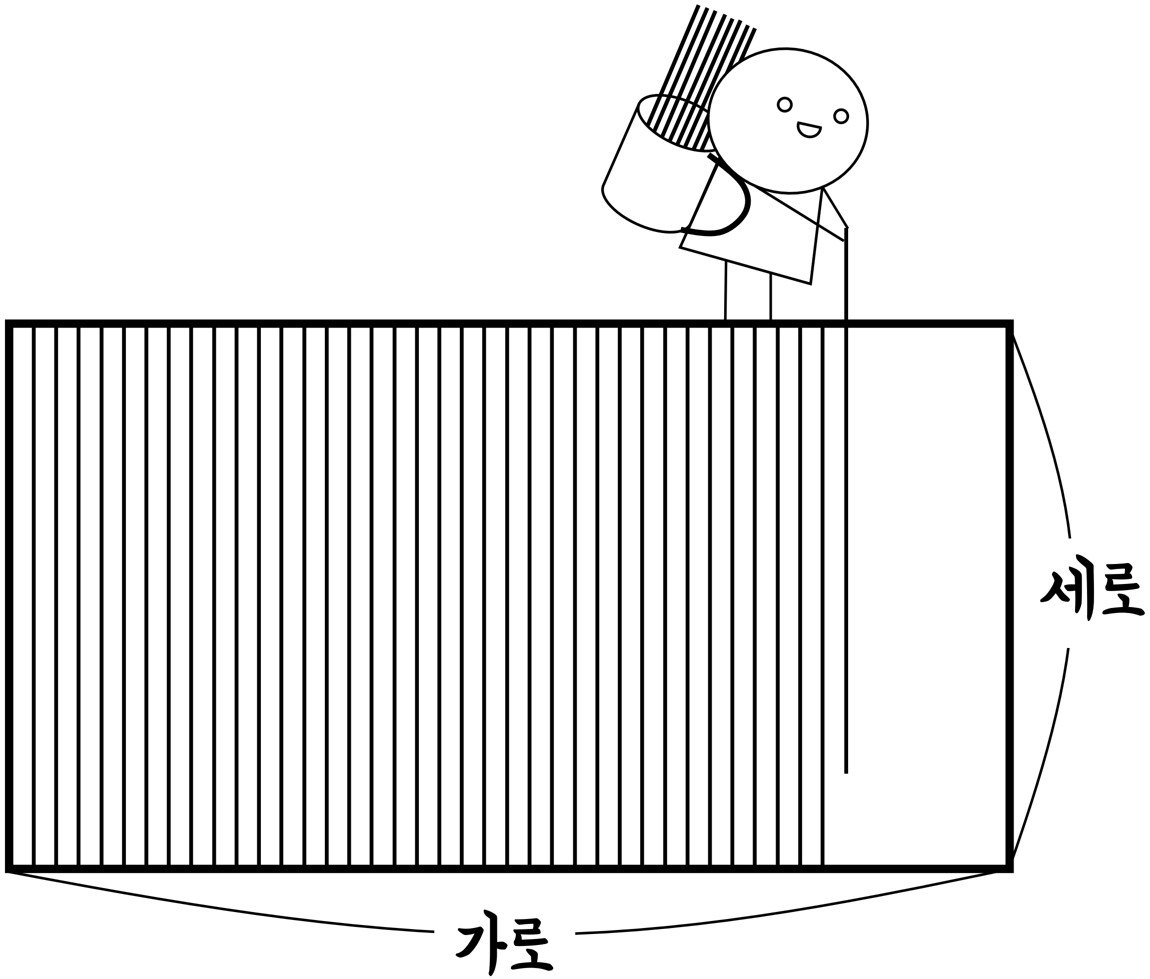
여러분 안녕하세요! 도우미 입니다. 이번 시간부터는 정적분에 대한 이야기를 떠들어 볼 텐데요. 미분의 역연산으로 정의되었던 부정적분의 개념은 머릿속에서 잠시만 지워주세요. 우리는 지금 미분과는 상관 없는 적분 그대로의 모습을 들여 다 보려고 합니다.

적분은 넓이를 구하려는 인간의 머릿속에서 태어난 개념입니다. 우리는 (직사각형의 넓이) = (가로)×(세로) 라는 사실을 익히 알고있는데요. '왜' 직사각형의 면적을 구하는데 가로와 세로를 곱해야 하는지는 아래와 같이 직관적으로 이해해 볼 수 있습니다.

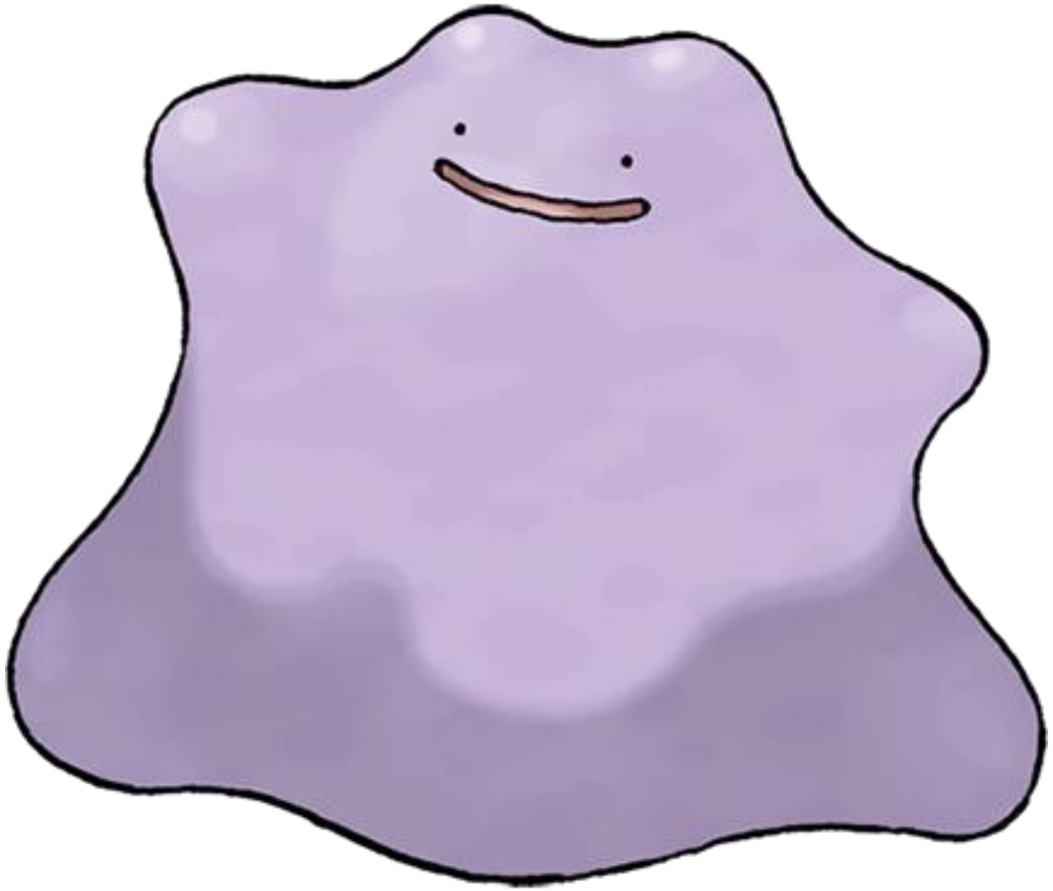


직사각형의 넓이

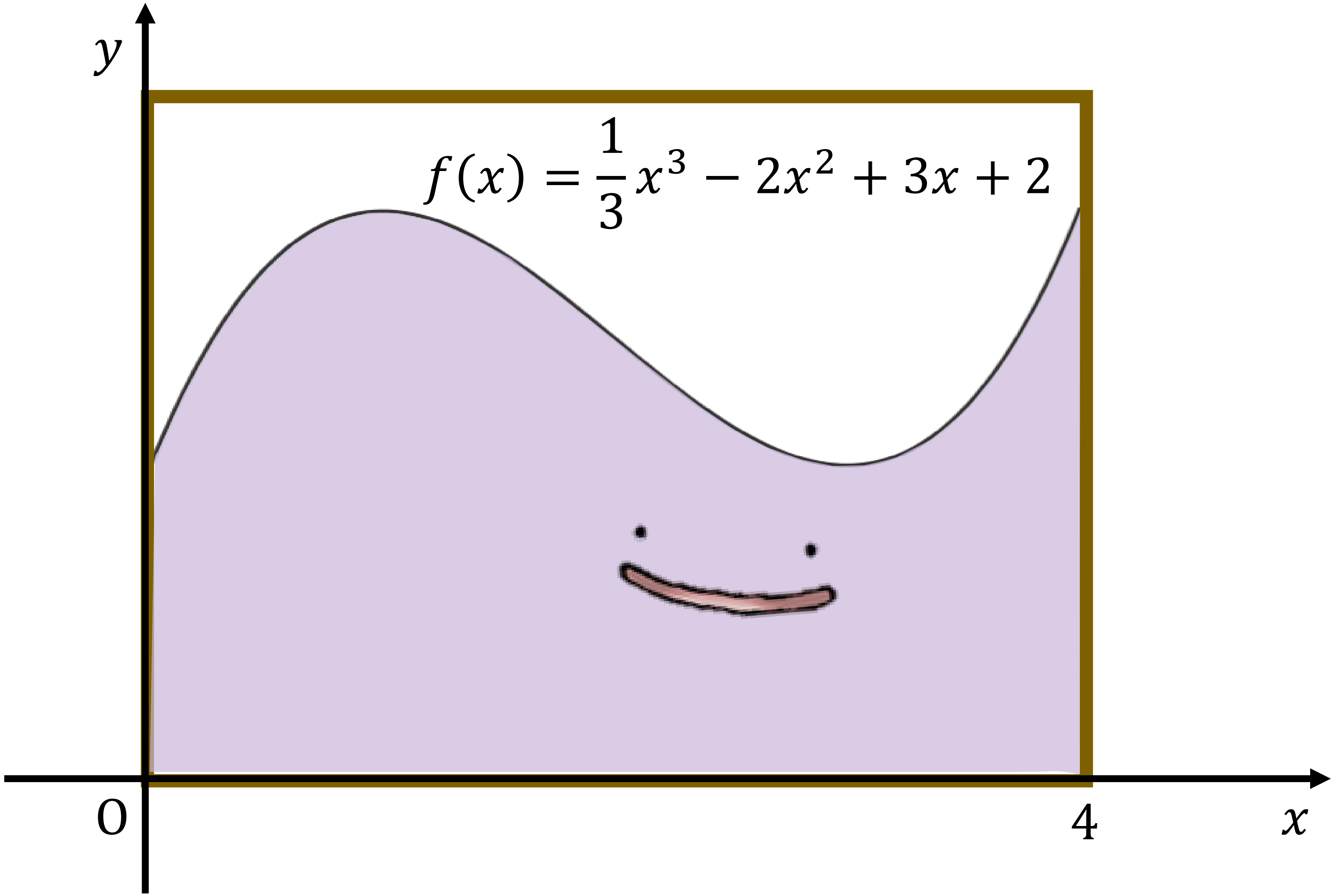
=세로의 길이를 가로의 길이만큼 쌓는다

=세로 × 가로

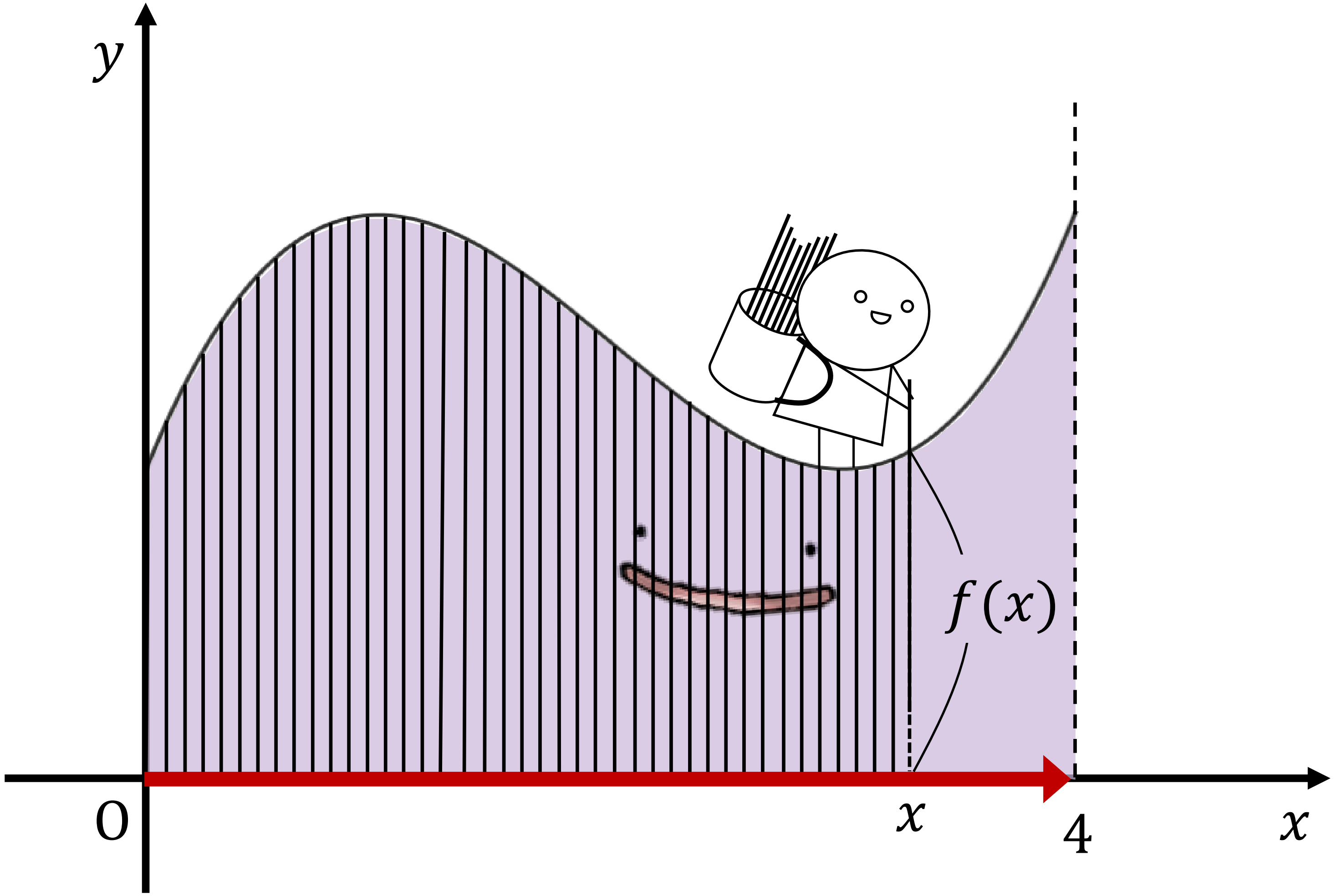
"세로의 길이를 가로의 길이만큼 쌓아서 넓이를 구한다" 이 방법을 응용하면 우리는 메타몽의 몸뚱이처럼 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이도 구할 수 있습니다.



마침 아래 그림과 같이 창밖으로 보이는 메타몽의 테두리가 삼차함수 $f(x)$를 따르고 있다네요ㅎㅎ 이 기회를 놓치지 말고 창밖으로 보이는 메타몽의 넓이를 구해 봅시다.



여기서 세로의 길이는 $f(x)$의 값이라 할 수 있는데요. 메타몽이 직사각형과 다른 점은 이 세로의 길이 $f(x)$가 일정하지 않다는 점입니다. 그러니까 우리는 x의 값이 0에서부터 4까지 변하는 동안 연속적으로 변하는 $f(x)$를 쌓아야 하는 것이죠.



이렇게 구한 메타몽의 넓이를 기호로 $\int_0^4 f(x)$와 같이 나타내기로 합시다.

x가 0부터 4까지 변하는 동안

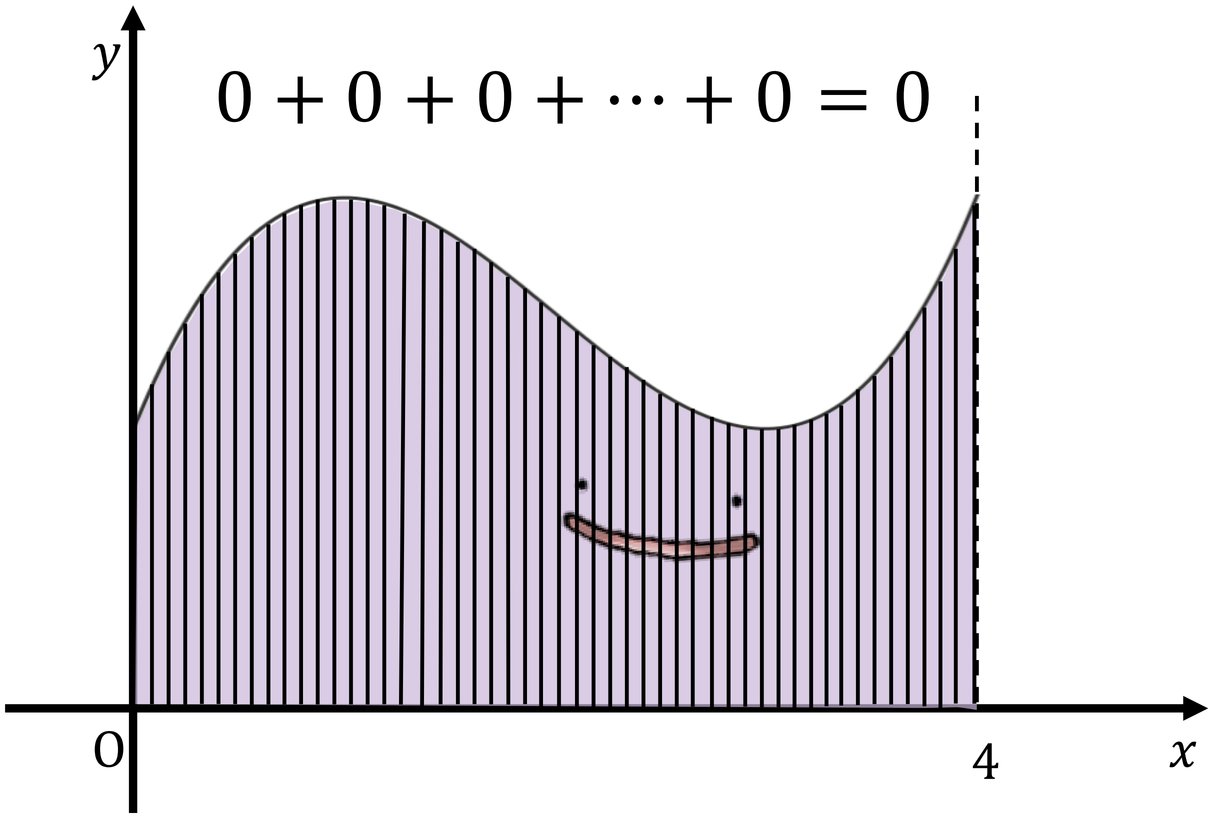
$$\int_0^4 f(x)$$

$f(x)$를 차곡차곡 쌓아서

합한다.

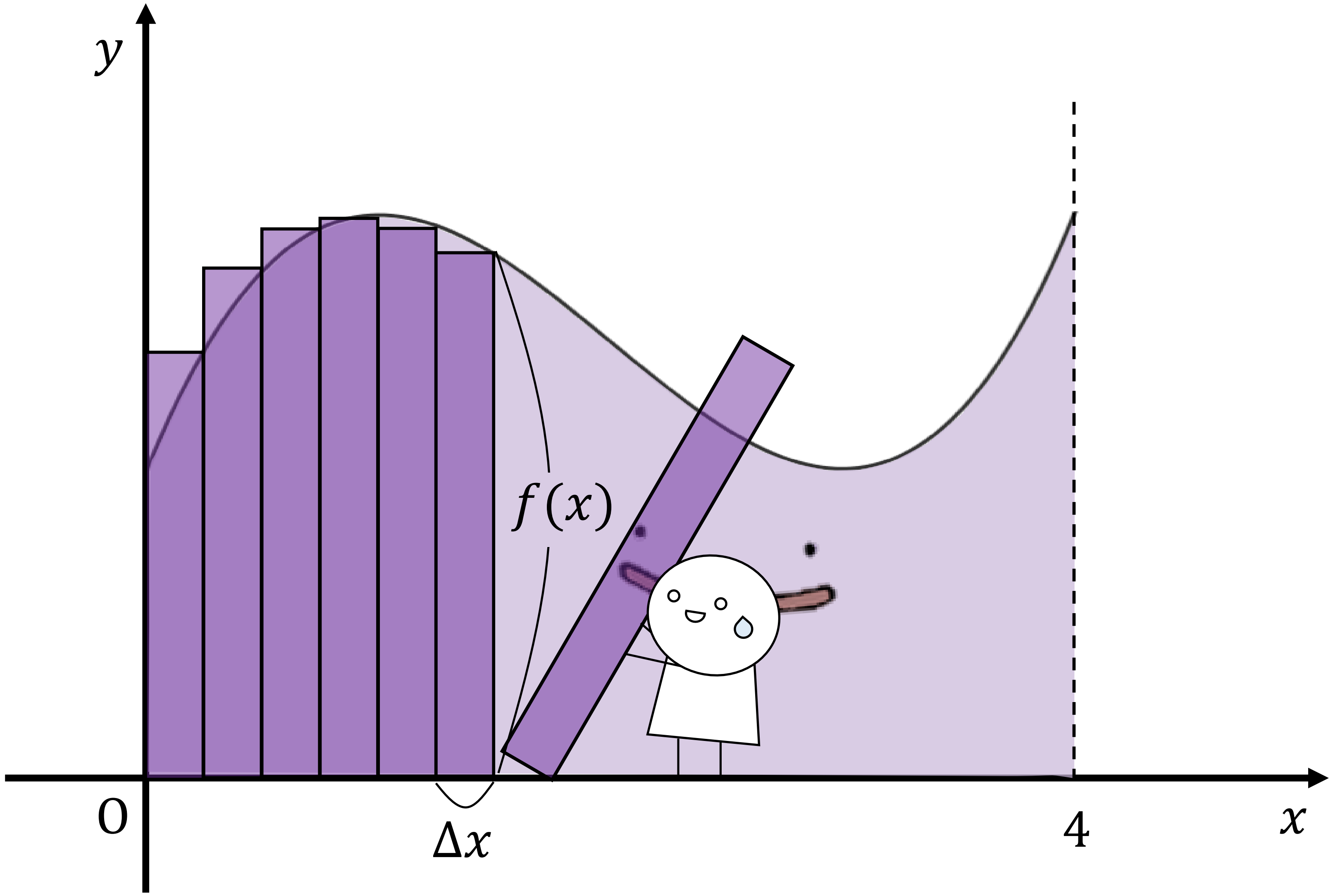
*$\int$(인테그랄)← intergrate: 통합하다

그런데 세로를 쌓는 이 방법에는 문제가 하나 있습니다. '길이'라는 것은 넓이를 갖지 않는, 순수하게 거리만을 나타내는 양인지라 세로의 길이를 쌓는 우리의 노력은 물거품이 되어 버립니다. 0은 아무리 더해도 0일 뿐이니까요.

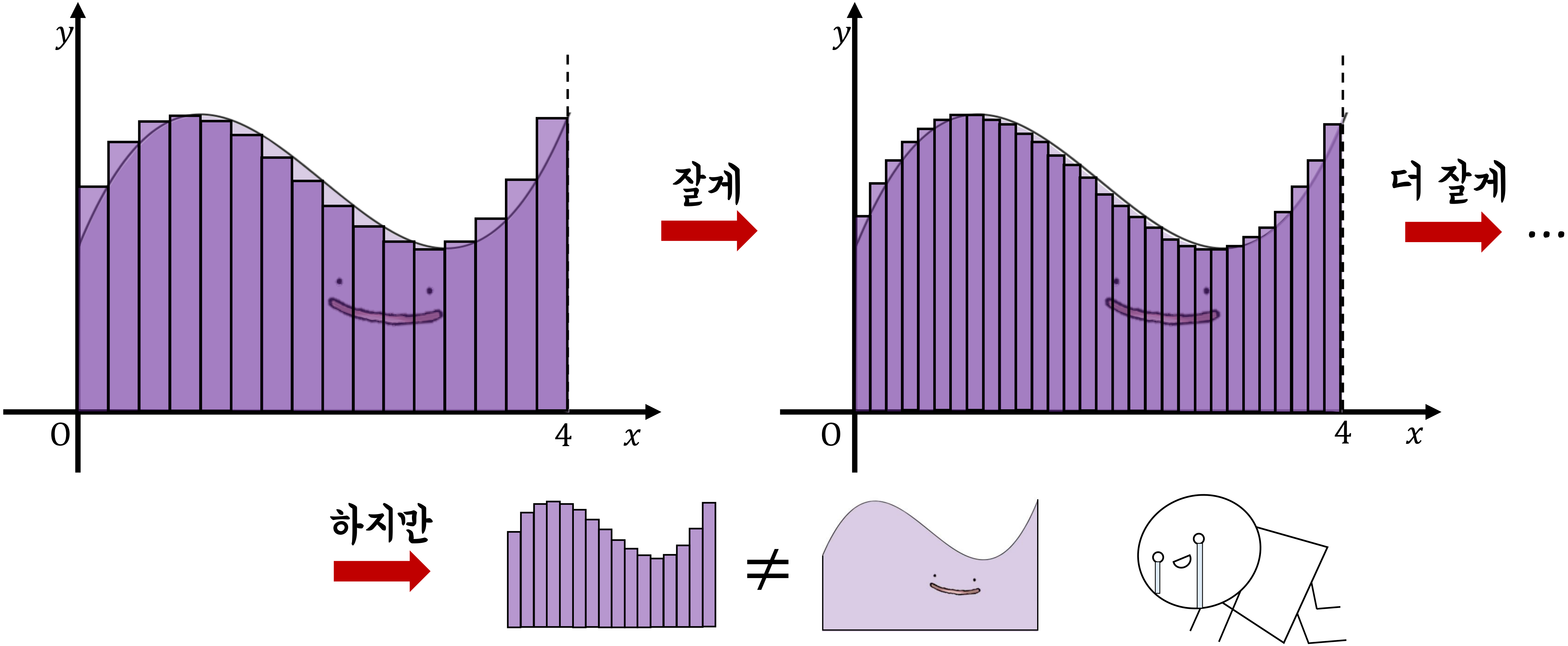


$$\int_0^4 f(x) = 0\ \ldots?$$

문제를 해결하기 위해서 세로의 길이 $f(x)$에다가 작은 가로의 길이 Δx를 곱해서 직사각형의 넓이를 쌓는 것으로 전략을 살짝 바꿔 봅시다.



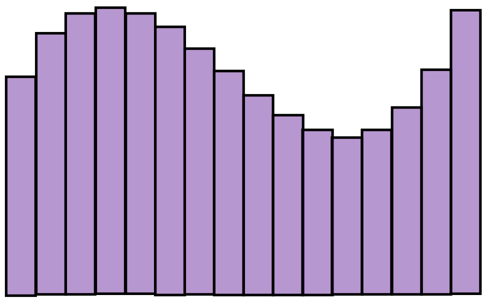
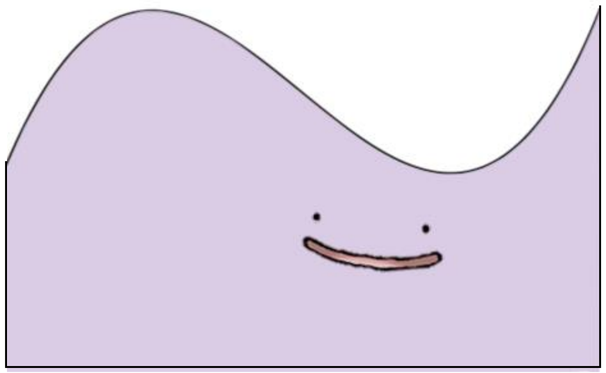
흠... 이 전략에도 문제가 좀 있죠? 우리가 쌓은 직사각형의 넓이의 총합은 메타몽의 넓이와 같지 않습니다. 가로의 길이를 더욱 잘게해서 쌓으면 메타몽의 실제 넓이에 가까워지긴 하겠지만 아무리 잘게 쌓더라도 근소한 차이가 생기는 것은 어쩔 수 없습니다.

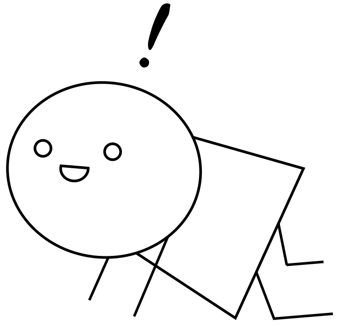


아직 좌절은 이릅니다. 우리는 답을 찾을 것입니다.

방금, 가로의 길이를 잘게 할수록 우리가 쌓은 직사각형의 넓이는 메타몽의 실제 넓이에 가까워진다고 말씀드렸죠?

다시 말해서 가로의 길이가 무한히 작아질 때 직사각형 넓이의 총합이 한없이 가까워 지는 값, 즉 극한값 이 메타몽의 실제 넓이가 되는 것입니다!

$\lim_{\Delta x \to 0}$  $=$ 

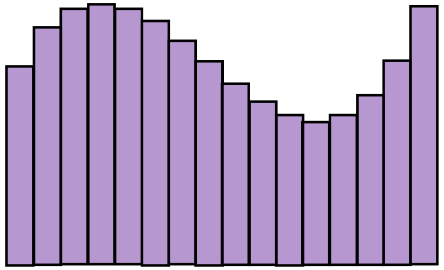


(가로가 아주아주 짧긴 하지만 어쨌든 0은 아니기 때문에 우리가 쌓는 직사각형의 넓이 역시 0이 아니고 이들을 열심히 쌓는 우리의 노력은 결코 헛되지 않습니다.)

여기서 아주아주 작아지는 (0에 한없이 가까워지는) 가로의 길이를 dx라고 하면 직사각형의 넓이는 $f(x)dx$가 되므로 메타몽의 넓이는 기호로 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

x가 0부터 4까지 변하는 동안

$$\lim_{\Delta x \to 0}$$

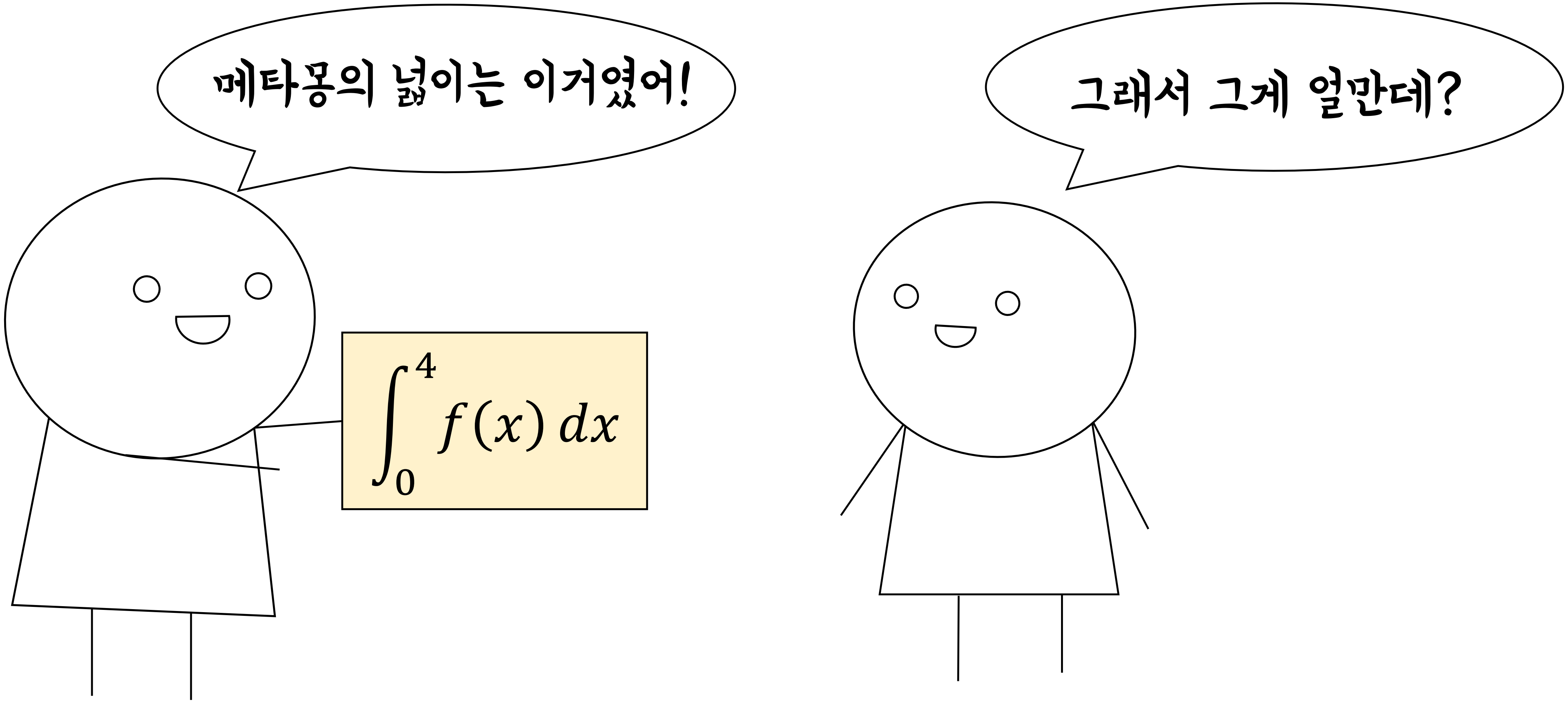


$$= \int_0^4 f(x)\,dx$$

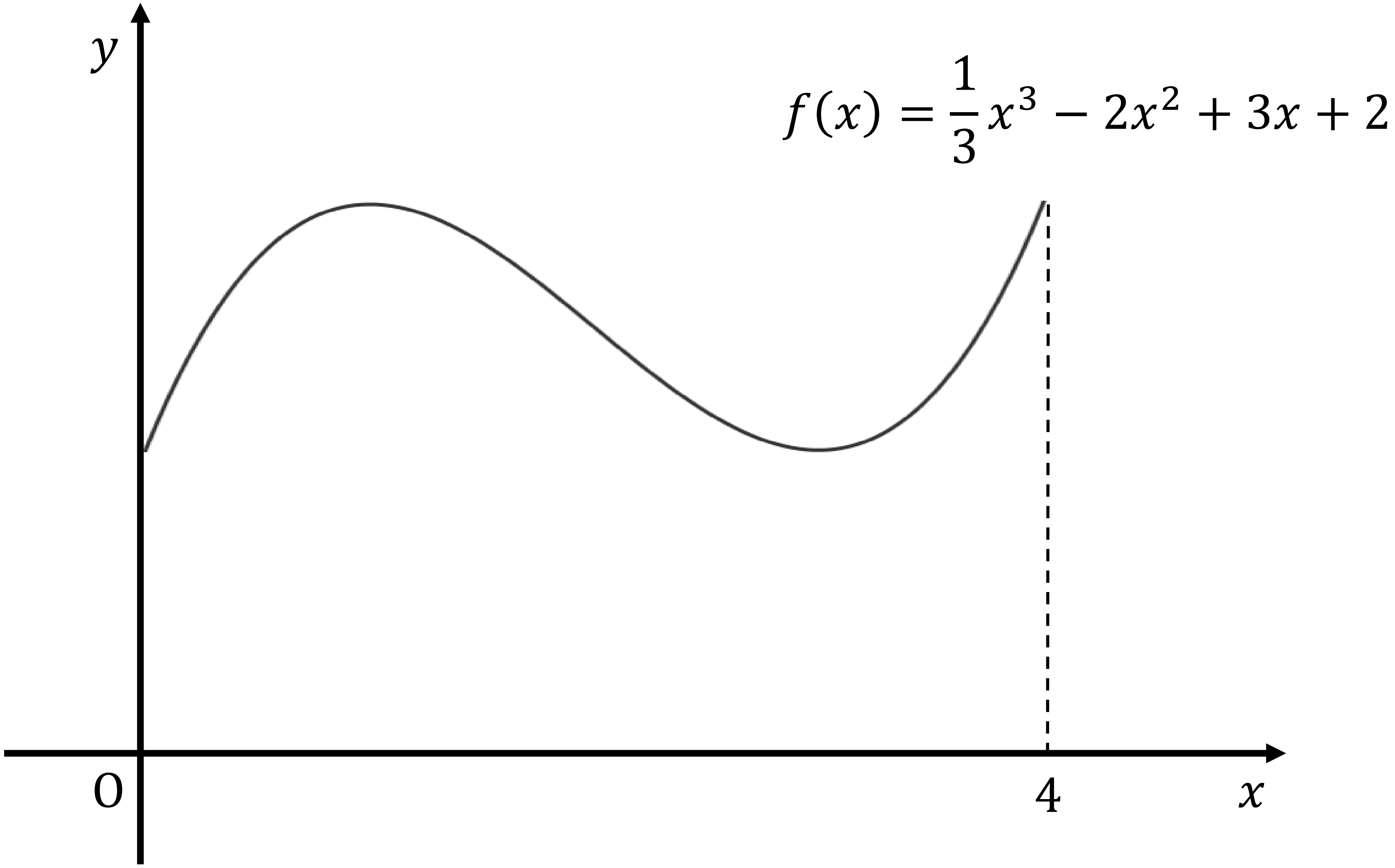
$f(x)dx$(직사각형의 넓이)를 차곡차곡 쌓아서

합한다.

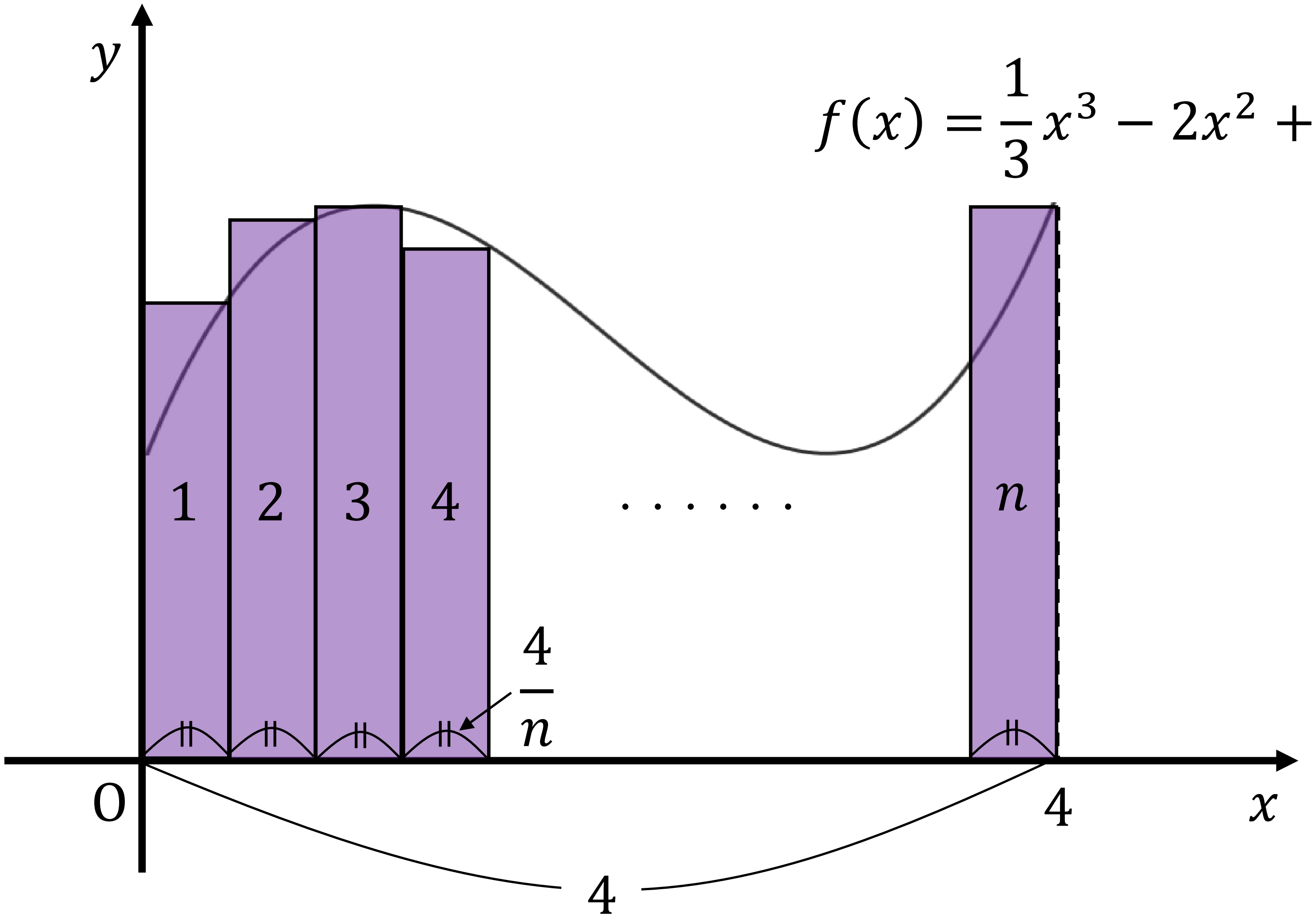
자, 그럼 방법은 알았으니 이제 진짜 넓이를 구해 봅시다.



구간 $[0,4]$에서 메타몽의 테두리가 삼차함수 $f(x)$를 따르고 있었죠?

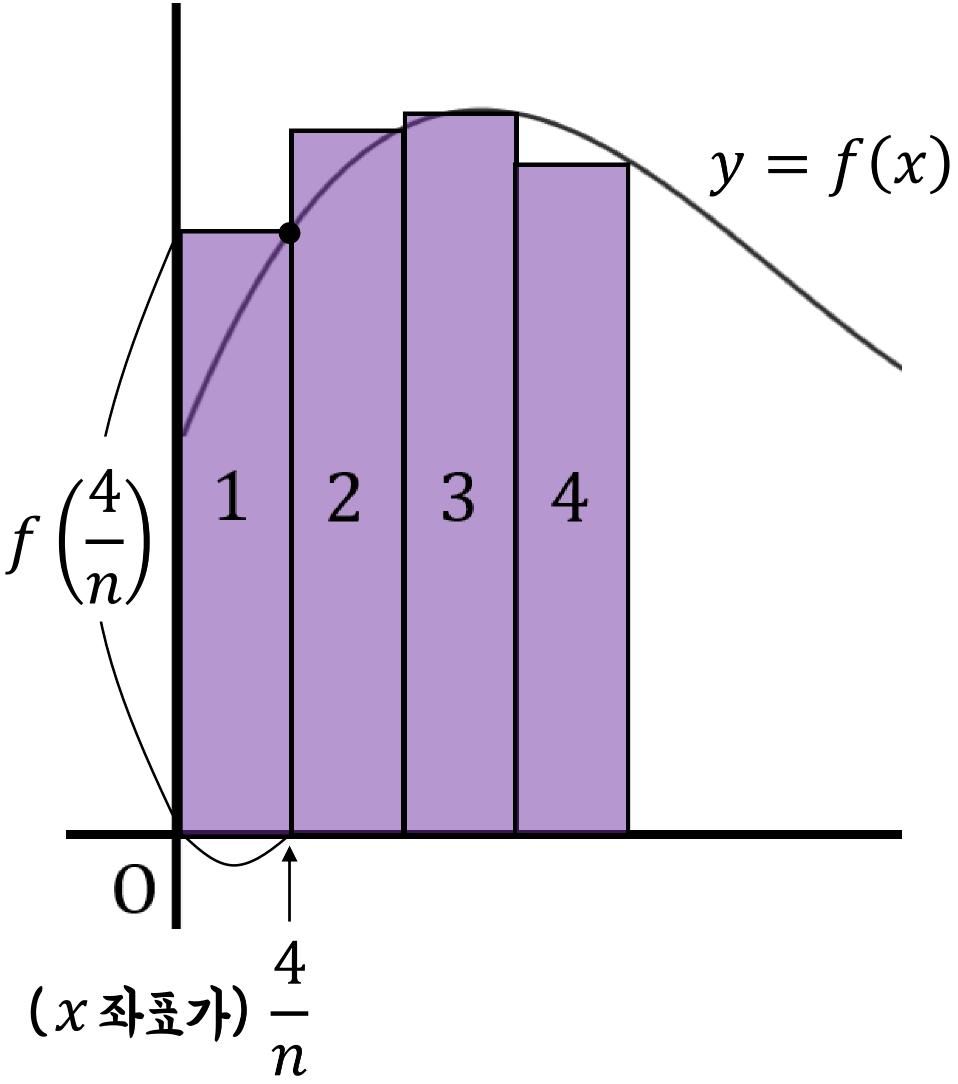


일단, 구간 $[0,4]$를 n등분해서 n개의 직사각형을 쌓아봅시다. 구간의 길이가 4이므로 n등분하면 직사각형의 한 개당 가로의 길이는 $\frac{4}{n}$로 일정합니다.



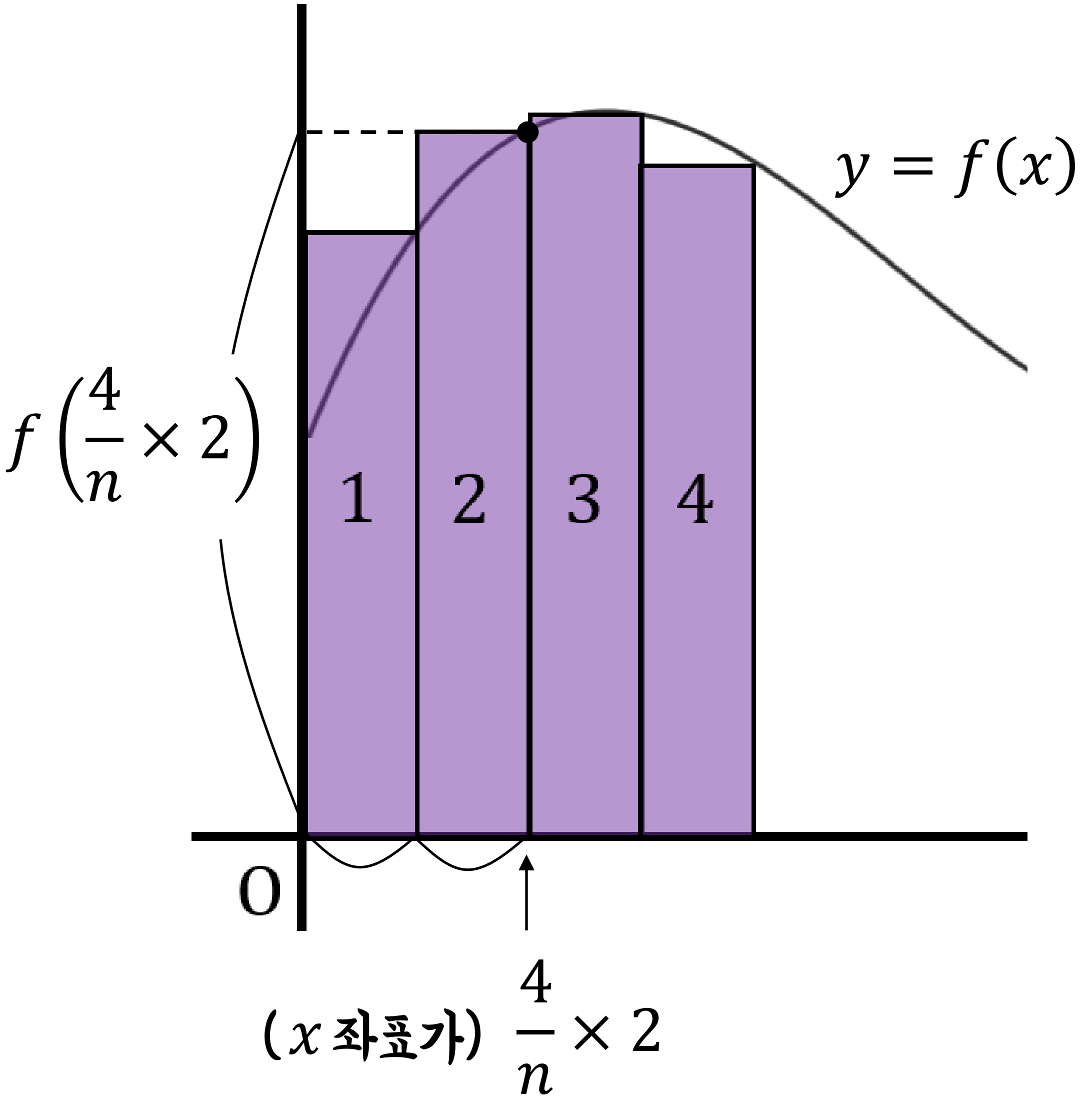
$\frac{4}{n} = \Delta x$

반면에 세로의 길이는 직사각형마다 다른 값을 갖습니다. 1번 직사각형부터 세로의 길이와 넓이를 구해 보면...



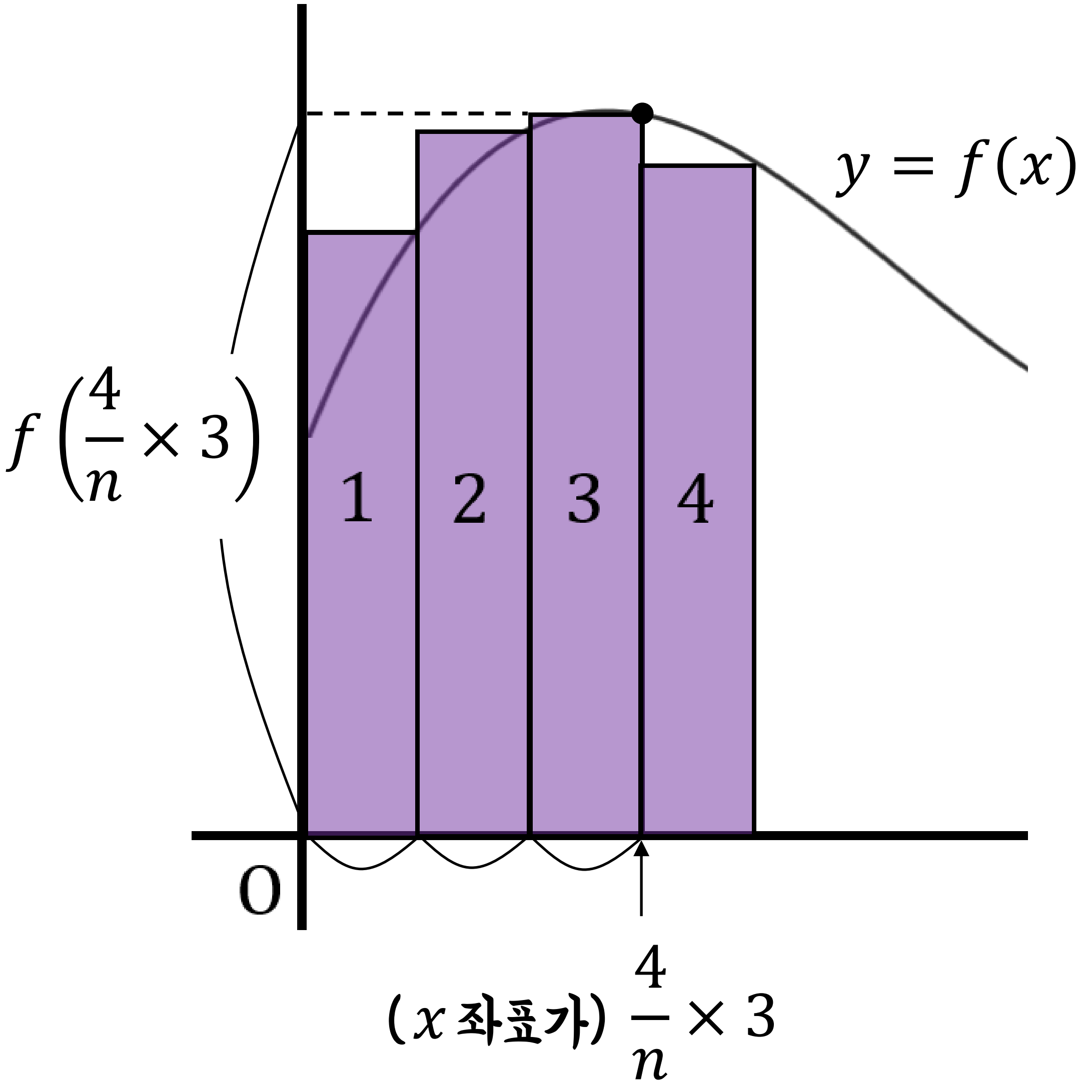
1번 직사각형의 넓이

$$=\underbrace{\frac{4}{n}}_{\text{가로}}\times\underbrace{f\left(\frac{4}{n}\times 1\right)}_{\text{세로}}$$



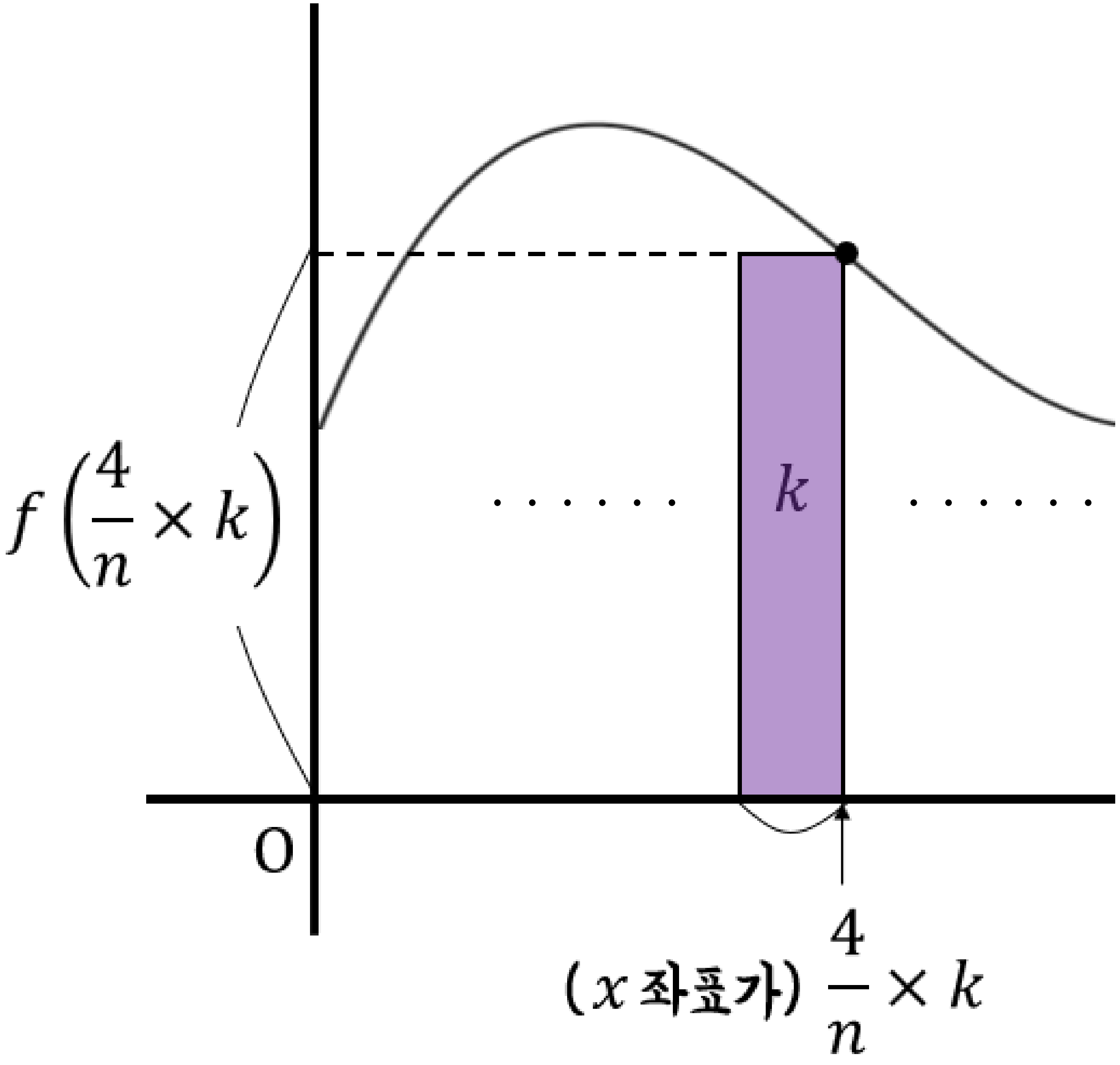
2번 직사각형의 넓이

$$=\underbrace{\frac{4}{n}}_{\text{가로}}\times \underbrace{f\left(\frac{4}{n}\times 2\right)}_{\text{세로}}$$



3번 직사각형의 넓이

$$=\underbrace{\frac{4}{n}}_{\text{가로}}\times\underbrace{f\left(\frac{4}{n}\times 3\right)}_{\text{세로}}$$



k번 직사각형의 넓이

$$=\underbrace{\frac{4}{n}}_{\text{가로}}\times\underbrace{f\left(\frac{4}{n}\times k\right)}_{\text{세로}}$$

이제 1번 직사각형부터 n번 직사각형까지의 넓이를 모두 더해봅시다.

$$\left\{\frac{4}{n}\times f\left(\frac{4}{n}\times 1\right)\right\}+\left\{\frac{4}{n}\times f\left(\frac{4}{n}\times 2\right)\right\}+\left\{\frac{4}{n}\times f\left(\frac{4}{n}\times 3\right)\right\}+\cdots+\left\{\frac{4}{n}\times f\left(\frac{4}{n}\times n\right)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}\times f\left(\frac{4}{n}k\right)$$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$이므로...

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{n} \times f\left(\frac{4}{n}k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{n} \times \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{n}k\right)^3 - 2\left(\frac{4}{n}k\right)^2 + 3\left(\frac{4}{n}k\right) + 2\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{n} \times \left(\frac{64}{3n^3}k^3 - \frac{32}{n^2}k^2 + \frac{12}{n}k + 2\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{256}{3n^4}k^3 - \frac{128}{n^3}k^2 + \frac{48}{n^2}k + \frac{8}{n}\right)$$

(k가 변수이므로 k가 아닌 것들은 상수 취급하여 시그마 앞으로 빠져 나올 수 있다)

$$= \frac{256}{3n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 - \frac{128}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{48}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + 8$$

$$= \frac{256}{3n^4} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \frac{128}{n^3} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} + \frac{48}{n^2} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} + 8$$

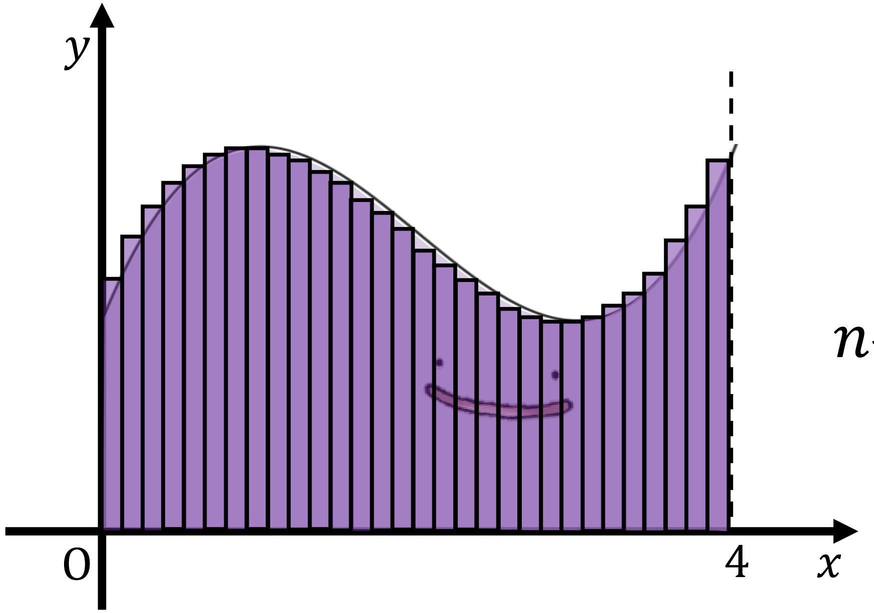
자연수의 거듭제곱의 합

❶ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

❷ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

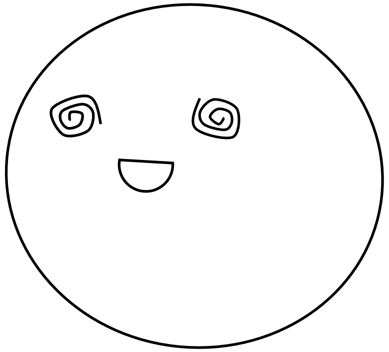
❸ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

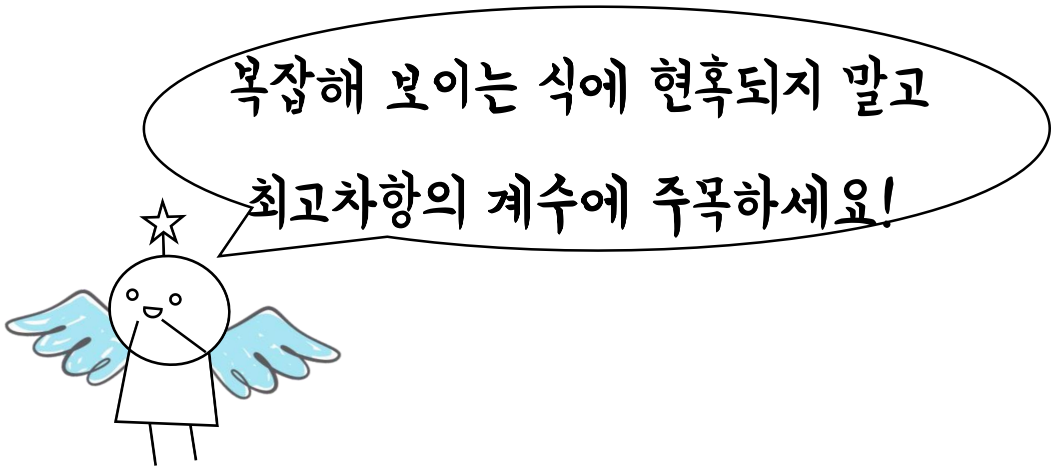
헌데 그냥 직사각형 넓이의 총합이 아니라 가로의 길이가 무한히 작아질 때 직사각형 넓이의 총합의 극한값이 메타몽의 실제 넓이였죠? 가로의 길이를 무한히 작게 한다는 것은 구간의 길이를 무한히 잘게 등분한다는 것이므로 n이 무한대로 가는 극한을 취해줍시다.



n등분에서 n을 무한히 크게 하여 무한히 잘게 나누자!

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{256}{3n^4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{128}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}+\frac{48}{n^2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}+8\right]$$

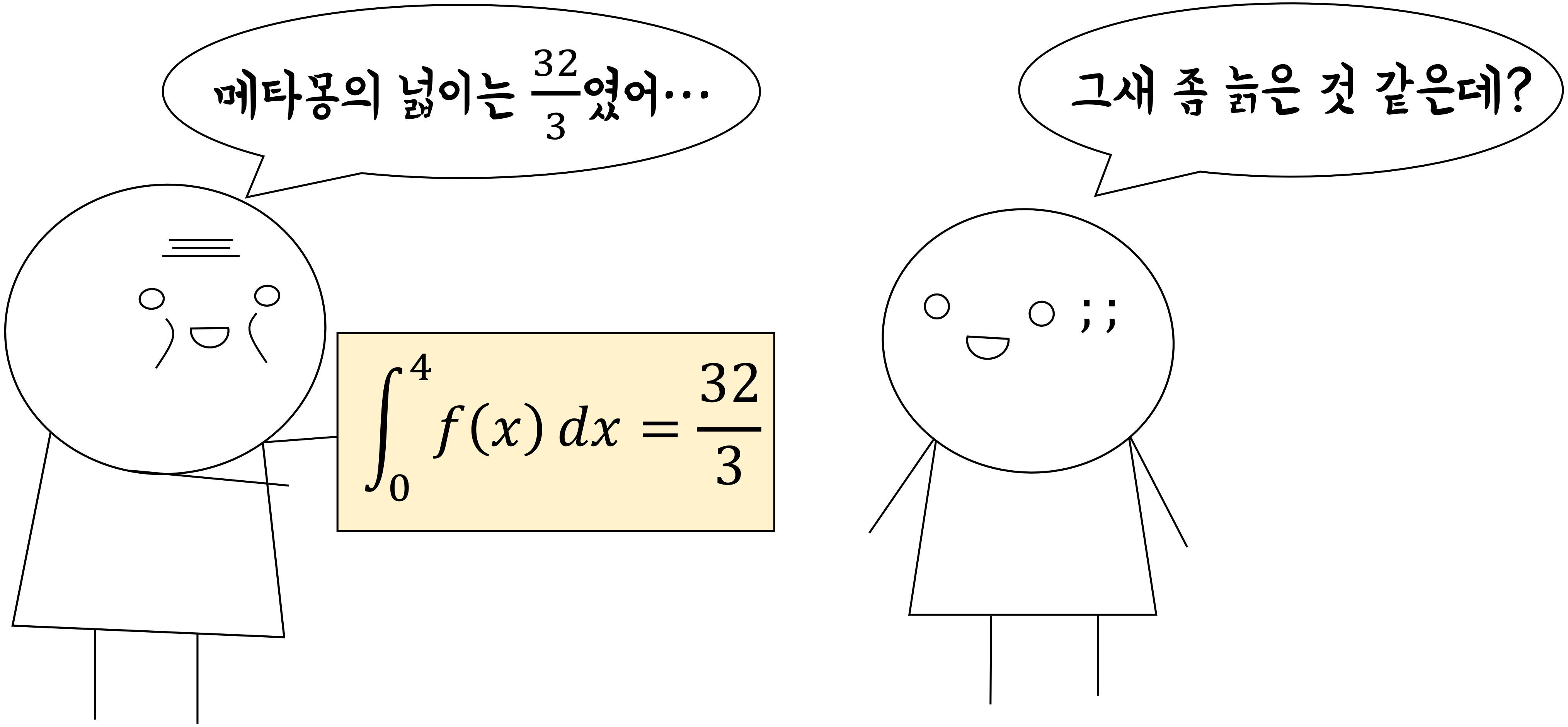




$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{256}{3n^4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{128}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}+\frac{48}{n^2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}+8\right]$$

$$\frac{256}{12} \qquad \frac{256}{6} \qquad \frac{48}{2}$$

$$=\frac{64}{3}-\frac{128}{3}+32=\frac{32}{3}$$



메타몽의 넓이는 $\frac{32}{3}$였어…
$\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{32}{3}$
그새 좀 늙은 것 같은데?

자, 이렇게 해서 우리는 정적분의 의미와 그 계산방법을 알게 되었습니다.

$$\text{정적분} \int_a^b f(x)\,dx$$

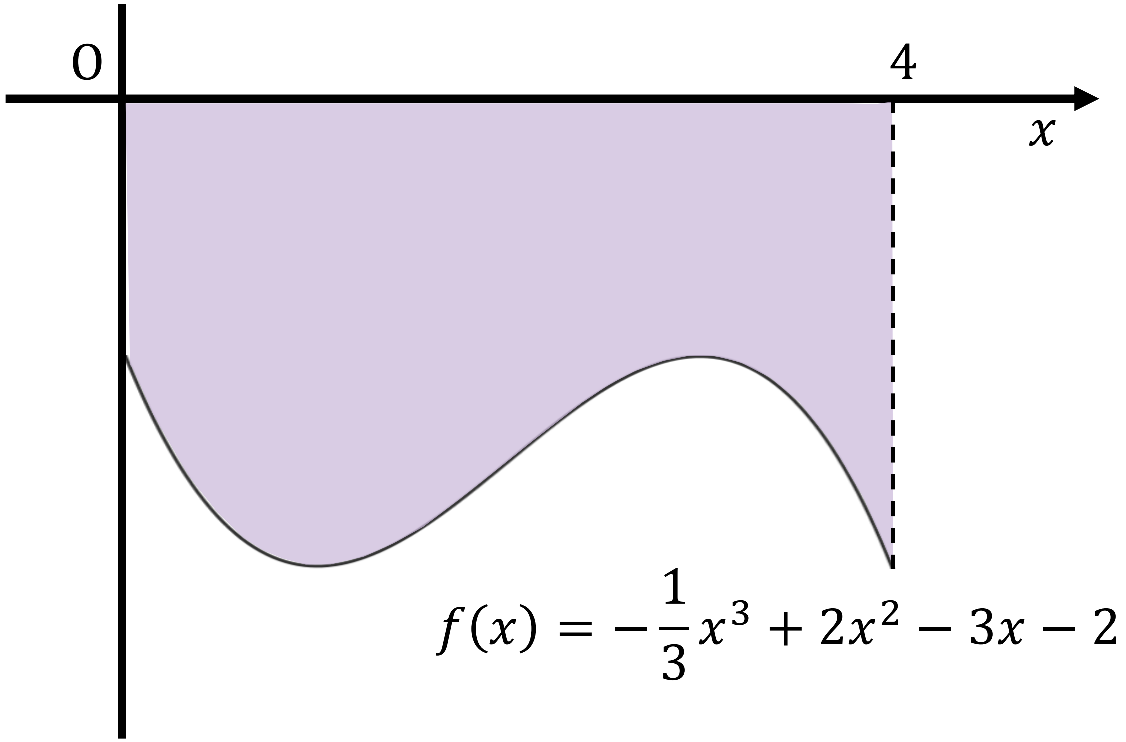
의미: 구간 $\underbrace{[a,b]}_{\text{(적분구간)}}$에서 함수 $f(x)$와 x축 사이의 넓이

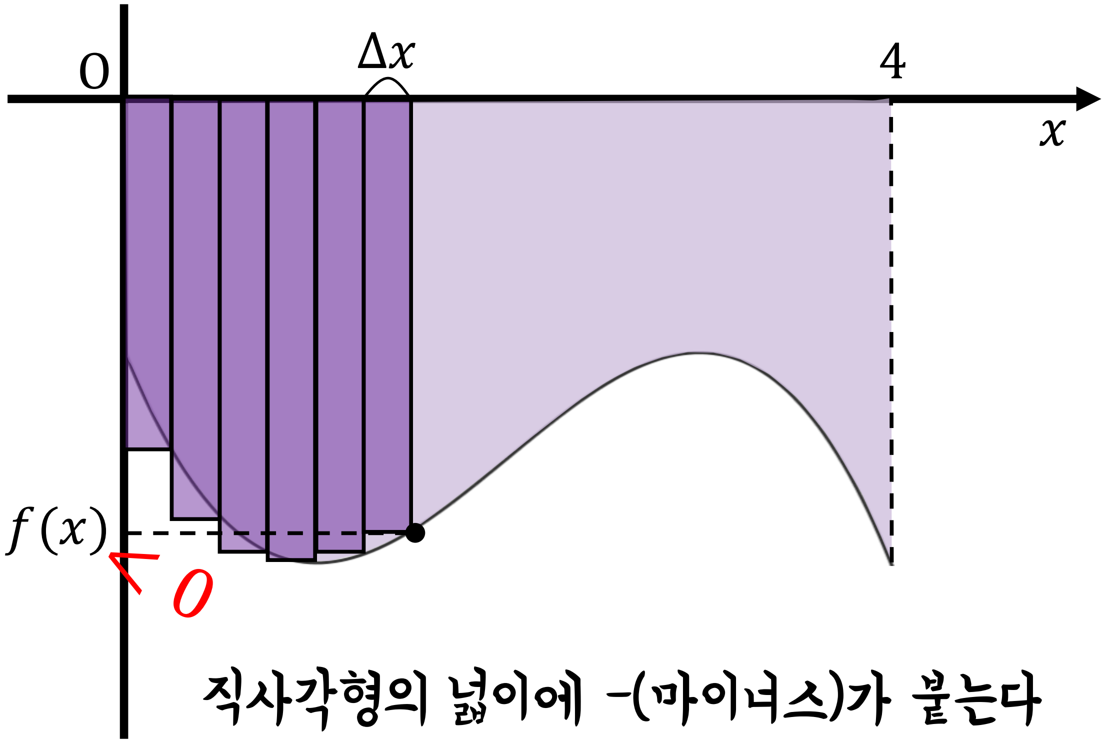
계산방법: 구간을 n개의 직사각형들로 나누어 직사각형 넓이의 총합을 구한 뒤

n이 무한대로 갈 때(구간을 무한히 잘게 나누었을 때) 총합의 극한값을 구한다.

(적분구간 $[a,b]$의 양 끝값 a와 b를 각각 아래끝, 위끝이라 합니다)

여기서 한 가지 주의할 점은 적분구간에서 $f(x) < 0$인 경우(구간에서 $f(x)$의 그래프가 x축 밑에 그려질 경우) 정적분 값은 음수가 나온다는 점입니다.





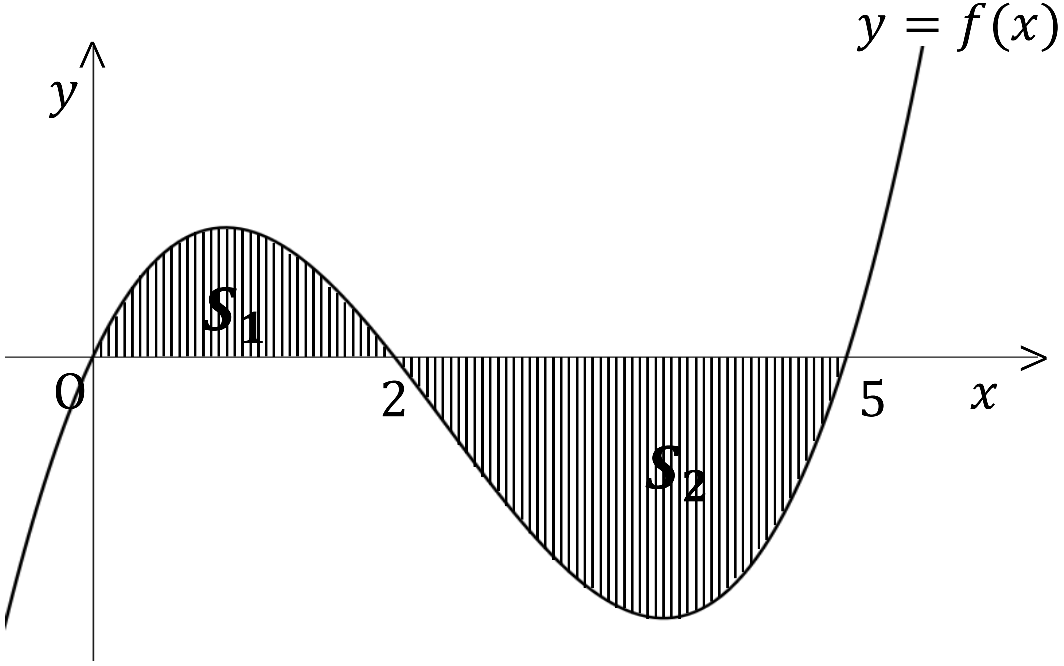
$$\int_0^4 f(x)\,dx = -\frac{32}{3}$$

결론적으로 정적분이란 '부호가 붙은 넓이' 라고 말할 수 있겠지요.

$$\text{정적분} \int_a^b f(x)\,dx$$

의미: 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$와 x축 사이의 "부호를 고려한 넓이"

ex)



$S_1 = 3, S_2 = 7$ 이면

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 3$$

$$\int_2^5 f(x)\,dx = -7$$

다음 시간에 계속……