ANSWERS AND EXPLANATION

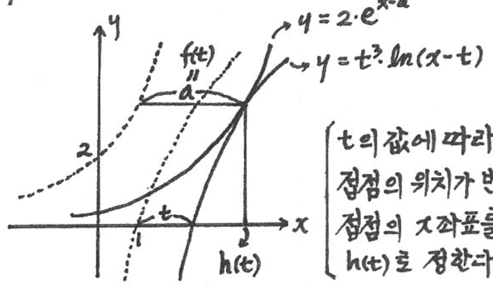
정답과 해설

08

2019 - 11 - (가) 30

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

$\begin{cases} y = t^3\cdot\ln(x-t) \\ y = 2\cdot e^{x-a} \end{cases}$ 서로 접할때의 $a = f(t)$



[t의 값에 따라 접점의 위치가 변하므로 접점의 x좌표를 h(t)로 정한다.]

서로 접할때;

$\begin{cases} t^3\ln(x-t) = 2e^{x-a} \\ \dfrac{t^3}{x-t} = 2e^{x-a} \end{cases}$, $\left[\begin{matrix}\text{이때의} \\ a = f(t) \\ x = h(t)\end{matrix}\right]$

$\therefore \begin{cases} t^3\cdot\ln(h(t)-t) = 2e^{h(t)-f(t)} \\ t^3\times\dfrac{1}{h(t)-t} = 2e^{h(t)-f(t)} \end{cases}$

양변 ln 처리

$3\ln t - \ln(h(t)-t)$
$= \ln 2 + h(t) - f(t)$

$\therefore f(t) = \ln 2 + h(t) - 3\ln t + \ln(h(t)-t)$

$\ln(h(t)-t) = \dfrac{1}{h(t)-t}$

양변을 미분하면

$\dfrac{h'(t)-1}{h(t)-t} = -\dfrac{h'(t)-1}{(h(t)-t)^2}$

진수 $h(t)-t>0$

$\therefore h'(t) = 1$

$\therefore f'(t) = h'(t) - \dfrac{3}{t} + \dfrac{h'(t)-1}{h(t)-t} = 1 - \dfrac{3}{t} + 0$

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 1-9 = -8$

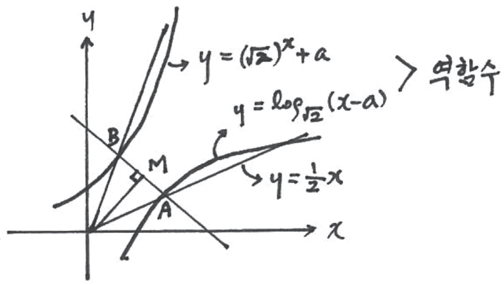
$\therefore \left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2 = 64.$

09

2019 - 10 - (가) 14

곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점 중 한 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=(\sqrt{2})^x+a$와 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 6일 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<4$이고, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$



$A=(\alpha, \frac{1}{2}\alpha) \rightarrow B=(\frac{1}{2}\alpha, \alpha)$

$\triangle AOB = \frac{1}{2}\left|\alpha^2 - \frac{1}{4}\alpha^2\right| = 6$ (사선식)

$\frac{3}{4}\alpha^2 = 12$

$\alpha = 4 \rightarrow A=(4,2)$

$A(4,2) \rightarrow y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$에 대입

$2 = \log_{\sqrt{2}}(4-a)$

$\sqrt{2}^2 = 4-a \rightarrow \therefore a=2.$

<다른풀이>

$A=(2t,t)$, $B=(t,2t)$, $M=(\frac{3}{2}t, \frac{3}{2}t)$

$\overline{OM} = \frac{3}{2}\sqrt{2}t$, $\overline{AB} = \sqrt{2}t$

$\triangle OAB = \frac{1}{2}\times\sqrt{2}t\times\frac{3}{2}\sqrt{2}t = 6 \rightarrow t=2$

$\therefore A=(4,2) \rightarrow$ 이하 동일

26

2019 - 07 - (가) 20

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\underbrace{f(1+x)=f(1-x)}_{x=1\text{에 대칭}},\ \underbrace{f(2+x)=f(2-x)}_{x=2\text{에 대칭}}$$

를 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 $f'(x)$가 연속이고, $\underbrace{\int_2^5 f'(x)dx=4}_{f(5)-f(2)=4}$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.
ㄴ. $f(1)-f(0)=4$
ㄷ. $\int_0^1 f(f(x))f'(x)dx=6$일 때, $\int_1^{10} f(x)dx=\frac{27}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(x+2) = f(2-x)$
$= f(1+(1-x))$
$= f(1-(1-x)) = f(x)$. 주기가 2. ㄱ(참)

ㄴ. $\int_2^5 f'(x)dx = f(5)-f(2) = 4$ 인데
주기가 2 → $f(5)=f(1)$, $f(2)=f(0)$
$\therefore f(1)-f(0)=4$ → ㄴ(참)

ㄷ. $\int_0^1 f(f(x))f'(x)dx$ → $\left[\begin{array}{l} f(x)=t \rightarrow f'(x)dx=dt \\ x=0 \rightarrow t=f(0),\ x=1 \rightarrow t=f(1) \end{array}\right]$

$= \int_{f(0)}^{f(1)} f(t)dt = 6$ ($f(0)=a$ 이면 $f(1)=a+4$)

$\therefore \int_a^{a+4} f(x)dx = 2\int_a^{a+2} f(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx = 6$

$f(x)$는 $x=1$에 대칭이므로 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$

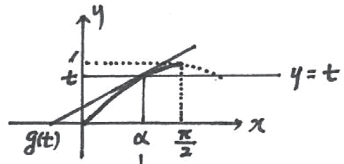
$\int_1^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$
$= 5\times\int_0^2 f(x)dx - \frac{3}{2}$
$= 5\times 3 - \frac{3}{2} = \frac{27}{2}$ → ㄷ(참)

27

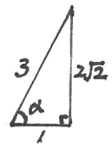
2019 - 07 - (가) 21

$0<t<1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $f(x)=\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프가 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 그은 접선의 x절편을 $g(t)$라 하자. $g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$의 값은? [4점]

① -28 ② -24 ③ -20 ④ -16 ⑤ -12



$\sin\alpha = t$ ($t=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 일때



)

$f'(\alpha) = \cos\alpha$ 이므로

접선 ; $y = \cos\alpha(x-\alpha)+t$

x절편 $g(t) = -t\times\sec\alpha + \alpha$

여기서 t와 α는 모두 변수 이므로,

$g'(t) = -\sec\alpha - t\cdot\sec\alpha\cdot\tan\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}$.

$\left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\sin\alpha = t) \text{ 에서} \\ \cos\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt}=1 \text{ 이므로 } \frac{d\alpha}{dt}=\sec\alpha \end{array}\right]$

$\therefore g'(t) = -t\cdot\sec\alpha\cdot\tan\alpha\cdot\sec\alpha$
$= -\sin\alpha\cdot\sec^2\alpha\cdot\tan\alpha$. ($\because t=\sin\alpha$)

$g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\times 9\times 2\sqrt{2} = -24$.

33

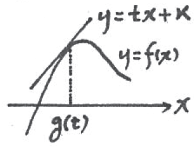
2019 - 06 - (가) 21

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은? [4점]

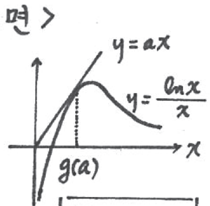
① $-\dfrac{\sqrt{e}}{3}$　　② $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$　　③ $-\dfrac{\sqrt{e}}{5}$

④ $-\dfrac{\sqrt{e}}{6}$　　⑤ $-\dfrac{\sqrt{e}}{7}$

<조건을 그림으로 정리 해 보면>



$\boxed{f'(g(t))=t}$



$\boxed{f'(g(a))=a}$

<a의 값을 구해본다>

$y=ax$ 와 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 가 $x=g(a)$에서 접한다.

$$\begin{cases} ax=\dfrac{\ln x}{x} \\ a=f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2} \end{cases} \quad ax^2=\ln x=1-\ln x$$

$2\ln x=1$

$x=\sqrt{e}$

$$\boxed{\therefore a=\frac{1-\ln\sqrt{e}}{e}=\frac{1}{2e}\ ,\quad g(a)=\sqrt{e}}$$

<$g'(a)$를 구하기 위해 $f'(g(t))=t$를 미분 ;>

$f''(g(t))g'(t)=1$　　$\therefore f''(g(a))g'(a)=1$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$f''(g(a))=f''(\sqrt{e})=\dfrac{2\ln\sqrt{e}-3}{e\sqrt{e}}=\dfrac{-2}{e\sqrt{e}}$ 이므로

$\therefore \dfrac{-2}{e\sqrt{e}}g'(a)=1 \rightarrow g'(a)=\dfrac{e\sqrt{e}}{-2}$

$\therefore a\times g'(a)=\dfrac{1}{2e}\times\dfrac{e\sqrt{e}}{-2}=-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$

34

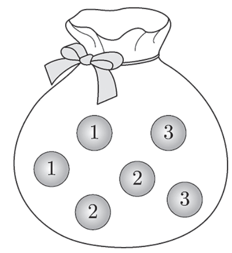
2019 - 06 - (가) 27

숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 6번 반복할 때, $k(1\le k\le 6)$번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k라 하자. 두 자연수 m, n을

$$m=a_1\times 100+a_2\times 10+a_3,$$

$$n=a_4\times 100+a_5\times 10+a_6$$

이라 할 때, $m>n$일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$$m\Rightarrow \boxed{a_1\ a_2\ a_3} > \boxed{a_4\ a_5\ a_6} \Leftarrow n$$

6개 공의 배열 가지수

$=\dfrac{6!}{2!\,2!\,2!}=90$

대칭성을 이용하면;

$P(m>n)=\{1-P(m=n)\}\times\frac{1}{2}$.

$m=n$ 이 되려면
1, 2, 3을 m 자리에,
남은 1, 2, 3은 n 자리에 (m과 똑같이)
배열하는 가지수는 $3!\times 1=6$
$\therefore P(m=n)=\dfrac{6}{90}$

$\therefore P(m>n)=(1-\frac{6}{90})\times\frac{1}{2}=\frac{7}{15}$

$\therefore p+q=22$.

100

2017 - 11 - (가) 30

실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}1-|x-t| & (|x-t|\le 1)\\ 0 & (|x-t|>1)\end{cases}$$

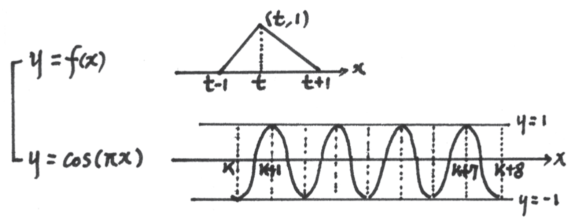
이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

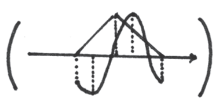
> 함수 $\boxed{g(t)\text{가 } t=\alpha\text{에서 극소}}$이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\boxed{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m}$
> (m은 자연수)라 할 때, $\boxed{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45}$이다.

$\boxed{k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)\text{의 값을}}$ 구하시오. [4점]



i) t가 구간 $(K+1,\ K+7)$에 있을때

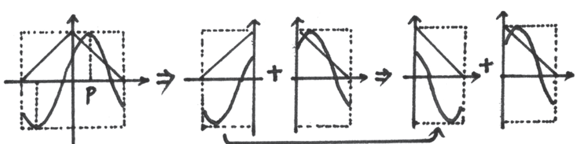
$g(t)=\int_K^{K+8} f(x)\cdot\cos(\pi x)\,dx$는,



t를 원점으로 평행이동시키고, 같이 이동한

$y=\cos(\pi x)$의 극대점이 $x=p$에 있을때를 구해보면,

$g(t)$는 p의 위치에 따라 달라지는 함수이므로 $g(p)$가 되고,



$\begin{cases}y=x+1\\ y=\cos\pi(x-p)\end{cases} \xrightarrow{y\text{축대칭}} \begin{cases}y=-x+1\\ y=\cos\pi(-x-p)\end{cases}$

$$g(p)=\int_{-1}^{0}(x+1)\cdot\cos\pi(x-p)\,dx+\int_0^1(-x+1)\cdot\cos\pi(x-p)\,dx$$

$$=\int_0^1(-x+1)\cos\pi(-x-p)\,dx+\int_0^1(-x+1)\cos\pi(x-p)\,dx$$

$$=\int_0^1(-x+1)\{\cos(\pi x+\pi p)+\cos(\pi x-\pi p)\}\,dx$$

$$=\int_0^1(-x+1)\cdot 2\cos(\pi x)\cos(\pi p)\,dx$$

$$=2\cdot\cos(\pi p)\left\{\left[(-x+1)\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\,dx\right\}$$

$$=2\cos(\pi p)\cdot\left\{0-\frac{1}{\pi^2}\left[\cos(\pi x)\right]_0^1\right\}$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\cos(\pi p).$$

$\therefore\ y=g(p)$는 $\cos(\pi p)$의 함수값에 $\frac{4}{\pi^2}$를 곱한 그래프가 된다.

ii) $t=K$ 또는 $K+8$ 일때는

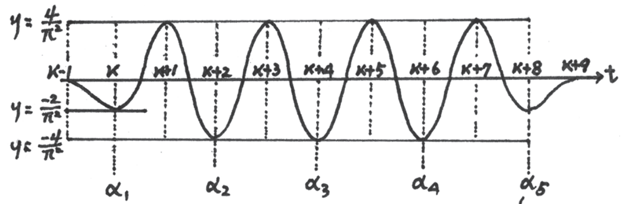
$[t-1,\ t]$ 구간이나 $[t,\ t+1]$ 구간은 적분값이 0 이므로

$y=g(t)$는 $t=K$ 또는 $K+8$ 일때는

$g(t)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t)$ 이고,

iii) $t\le K-1$ 또는 $t\ge K+9$ 에서는 $g(t)=0$ 이다.

$\therefore\ y=g(t)$ 그래프 개형은 ;



$\therefore\ m=5$

$\sum_{i=1}^{5}\alpha_i=K+(K+2)+(K+4)+(K+6)+(K+8)=45$

$5K+20=45\qquad\therefore\ K=5$

$K-\pi^2\sum_{i=1}^{5}g(\alpha_i)=5-\pi^2\cdot\left(-\frac{2}{\pi^2}\times 2-\frac{4}{\pi^2}\times 3\right)=21.$

139 2016 - 11 - (가) 30

$x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a는 상수이다.)

> (가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

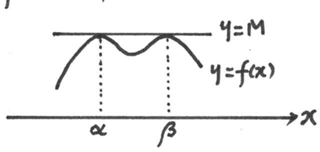
(가) $f(x)=\frac{g(x)}{x-a}$ ($g(x)$는 최고차항 계수가 -1인 사차함수)

(나) $\begin{cases} f'(\alpha)=0,\ f'(\beta)=0 \text{ 이고} \\ f(\alpha)=M,\ f(\beta)=M \text{ 이므로} \end{cases}$

$$f(x)-M=\frac{-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{(x-a)}$$

$$\therefore (x-a)f(x)=\boxed{-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+M(x-a)=g(x)}$$

(다) $y=f(x)$ 그래프의 개형은



∴ $f(x)$의 극대와 극소가 3개 이상이므로
$g(x)$의 극대와 극소는 2개 이하이다.

$\boxed{\therefore g'(x)=0 \text{ 는 실근이 2개 이하.}}$

$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M=0$$

방정식 의 실근이 2개 이하.

$\therefore \left\{ \begin{array}{l} y=4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ y=M \ .\ (M>0) \end{array} \right\}$ 교점이 2개 이하.

그래프를 x축으로 $-\frac{\alpha+\beta}{2}$ 만큼 평행이동 시켜서
α, β의 중점이 원점에 오도록 하면

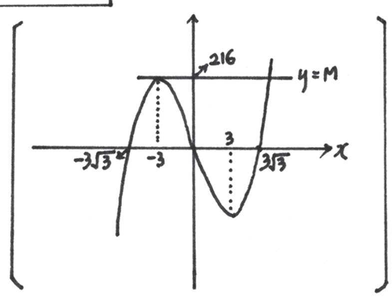
$y=4(x+3\sqrt{3})\cdot x\cdot(x-3\sqrt{3})$, $(\because \beta-\alpha=6\sqrt{3})$

$y'=12(x+3)(x-3)$

극대값 $=y(-3)=216$ 이므로

$y=M$ $(M>0)$과 교점이 2개 이하일때

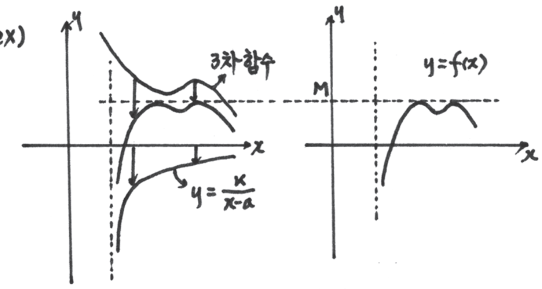
$\boxed{M\text{의 최소값} = 216.}$



<참고>

(가) → $f(x)=\frac{g(x)}{x-a}$ → $\frac{4\text{차}}{1\text{차}}$ = 3차함수 + $\frac{K}{x-a}$

(ex)



440

2008 - 06 - (가) 24

집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$, $Z=\{0, 1\}$에 대하여 조건 (가)를 만족시키는 모든 함수 $f: X \to Y$ 중에서 임의로 하나를 선택하고, 조건 (나)를 만족시키는 모든 함수 $g: Y \to Z$ 중에서 임의로 하나를 선택하여 합성함수 $g \circ f : X \to Z$를 만들 때, 이 합성함수의 치역이 Z일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다. (나) g의 치역은 Z이다.

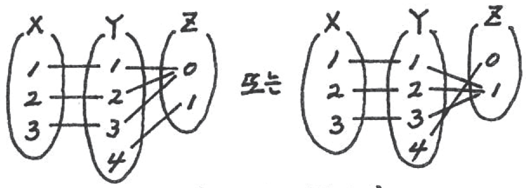
(가) $f(x)$는 일대일 함수 → ${}_4P_3$ 가지

(나) $g(x)$의 치역이 $\{0, 1\}$ → $2^4 - 2$ 가지

$g(x)$의 치역이 $\{0\}$ 또는 $\{1\}$.

(가), (나)를 만족하면서도

$g \circ f : X \to Z$의 치역이 Z가 아닌 경우의 예는,



${}_4P_3 \times 2 = 48$ 가지

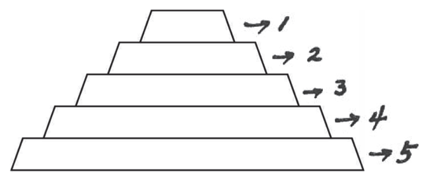
$\therefore 1 - \frac{48}{{}_4P_3 \times (2^4 - 2)} = \frac{288}{336} = \frac{6}{7}$

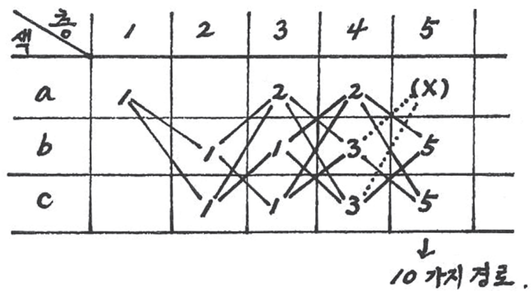
$\therefore p+q = 13.$

441

2008 - 06 - (가) 25

그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오. [4점]





a 색의 종류 선택이 3가지

$\therefore 3 \times 10 = 30$ 가지.