ANSWERS AND EXPLANATION

정답과 해설

06

2019 - 11 - (나) 21

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n}=a_n-1$
> (나) $a_{2n+1}=2a_n+1$

$a_{20}=1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

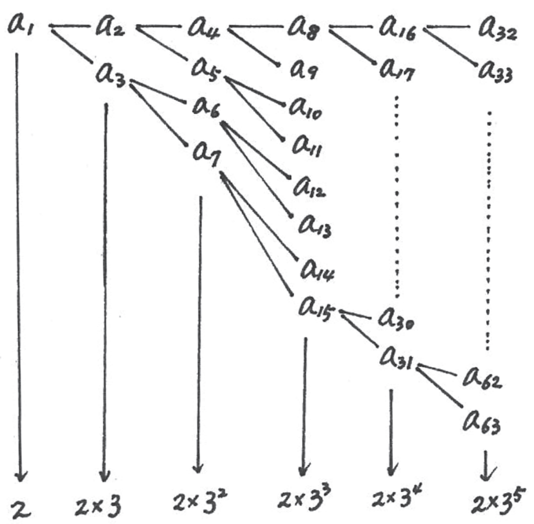
① 704 ② 712 ③ 720 ~~④~~ 728 ⑤ 736

$$a_{20}=1 \xrightarrow{(가)} a_{10}=2 \xrightarrow{(가)} a_5=3$$

$$\xrightarrow{(나)} a_2=1 \xrightarrow{(가)} \boxed{a_1=2}$$

(가)+(나) ; $\boxed{a_{2n}+a_{2n+1}=3a_n}$

$$\therefore \begin{bmatrix} a_1\times 3 = a_2+a_3 \\ a_2\times 3 = a_4+a_5 \\ a_3\times 3 = a_6+a_7 \\ \vdots \end{bmatrix}$$



$$\therefore \sum_{n=1}^{63} a_n = \frac{2(3^6-1)}{3-1} = 728.$$

07

2019 - 11 - (나) 28

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $\int_1^x f(t)\,dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.
> (나) $\int_0^2 f(x)\,dx = 5\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가); $f(x)=ax^n+\cdots$ (내림차순). 이라하면,

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{a}{n+1}x^{n+1}+\cdots$$

$$\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\} = \frac{a}{2}x^{n+1}+\cdots$$

$$\therefore \frac{a}{n+1}=\frac{a}{2} \quad \therefore n=1$$

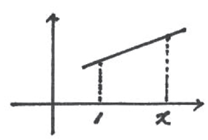
$f(x)=ax+1$. (일차식, $f(0)=1$)

<or> (가)의 양변 미분;

$$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(1)\}+\frac{x-1}{2}f'(x)$$

$$2f(x)=f(x)+f(1)+(x-1)f'(x)$$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(x) \rightarrow$$



구간 $(1,x)$의 평균변화율과 $(x,f(x))$ 에서의 접선 기울기가 항상 같으므로

$f(x)=ax+1$ (일차식. $f(0)=1$)

(나); $\int_0^2(ax+1)dx = 5\int_{-1}^{1}x(ax+1)dx$

$$\left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2 = 5\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1}$$

$$2a+2=5\left(\frac{2}{3}a+0\right) \rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x+1$$

$$\therefore f(4)=7.$$

26

2019 - 06 - (나) 20

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$인 자연수 n이 존재한다.

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$ 이므로 $f(x)$의 최저차항 $=4x^n$.

[∵ $f(x)$가 n차보다 차수가 작은 항을 가지면 $\lim_{x\to 0}\frac{x^{n-1}}{x^n}=\pm\infty$ 이므로.]

<$n=1$ 일때>

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$

$f(x)=4x^3+3x^2+4x \longrightarrow f(1)=11$

<$n=2$ 일때>

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=4$

$f(x)=10x^3+4x^2 \longrightarrow f(1)=14$

<$n=3$ 일때>

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^4+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=4$

$f(x)=6x^4+4x^3 \longrightarrow f(1)=10$

<$n\geq 4$ 일때>

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$

$f(x)=6x^{n+1}+4x^n \longrightarrow f(1)=10$

∴ $f(1)$의 최대값 $=14$.

27

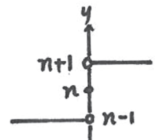
2019 - 06 - (나) 21

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=\begin{cases}2 & (0\leq x<2)\\ -2x+6 & (2\leq x<3)\\ 0 & (3\leq x\leq 4)\end{cases}$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이고 $f(x)=f(x-8)$이다. → [y축 대칭 / 주기 = 8]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}+n & (x\neq 0)\\ n & (x=0)\end{cases}$$

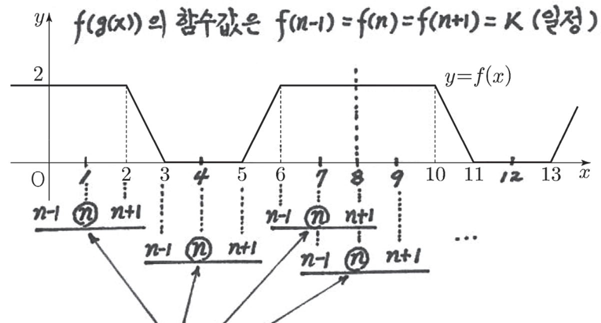


에 대하여 $\boxed{\text{함수 } (f\circ g)(x)\text{가 상수함수가 되도록}}$ 하는 60 이하의 자연수 n의 개수는? [4점]

① 30　② 32　③ 34　④ 36　⑤ 38

$g(x)$의 함수값은 $n-1$, n, $n+1$ 세가지 이므로

$f(g(x))$의 함수값은 $f(n-1)=f(n)=f(n+1)=K$ (일정).



한 주기 내에서 $f(g(x))$가 상수함수가 되는 n의 위치를 살펴보면,

∴ 적당한 n의 값은 ;

1	4	7	8
9	12	15	16
⋮	⋮	⋮	24
⋮	⋮	⋮	32
⋮	⋮	55	56
57	60		

∴ n의 갯수 $=7\times 4+2=30$.

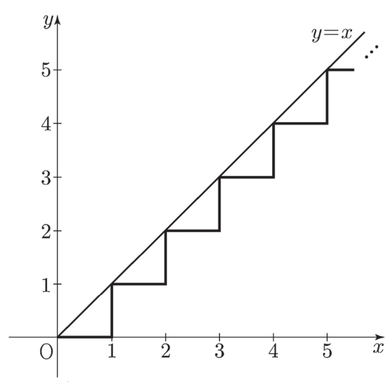
41

2018 - 09 - (나) 29

좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1 인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P 의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (ⅰ) A_0은 원점이다.
>
> (ⅱ) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P 가 경로를 따라 $\frac{2n-1}{25}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\frac{4}{25},\ 0\right)$, $\left(1,\ \frac{11}{25}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오. [4점]



A_n이 $y=x$ 위의 점 이려면 $\mathrm{A}_n=(m,m)$

∴ A_0 에서 A_n 까지의

이동 거리 $= 2m = \sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25} = \frac{n^2}{25}$

∴ $n^2 = 25\times 2m$ → n=자연수 → $m = 2l^2$

∴ $n^2 = 25\times 2\times(2l^2)$, (l은 자연수)

∴ 두번째 점 일때 $l=2$. → $m=8$.

$n^2 = 25\times 16 = 20^2$ 이고

두번째 점 $= \mathrm{A}_{20} = (8,8)$

↓

∴ $a=8$

[$* \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n = n^2$]

42

2018 - 09 - (나) 30

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f\circ f)(x)=x$$

의 모든 실근이 $0,\ 1,\ a,\ 2,\ b$이다.

$$f'(1)<0,\ f'(2)<0,\ f'(0)-f'(1)=6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1<a<2<b$) [4점]

$f(f(x))=x$ 인 모든실근이 $f(x)=x$ 이면

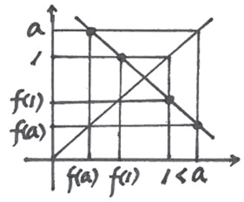
3차곡선과 $y=x$가 5개의 교점 → 불가능.

$f'(1)<0$, $f'(2)<0$ 이므로

실근 $1, a, 2$ 중 두개는 $y=-x+K$ $(x\neq y)$

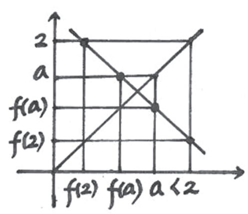
위에 존재하고, 나머지는 $y=x$ 에 존재.

$f(1)\neq 1$, $f(a)\neq a$ 일때;



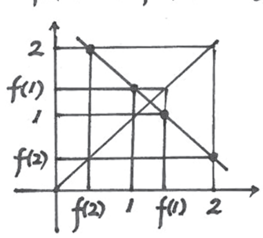
$a\neq 1$ 이므로
$f(x)$와 직선이
4개의 교점
→ 불가능

$f(a)\neq a$, $f(2)\neq 2$ 일때;



$a\neq 2$ 이므로
$f(x)$와 직선이
4개의 교점
→ 불가능

$f(1)\neq 1$, $f(2)\neq 2$ 일때;



$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=1 \end{cases}$ 이면

$f(x)$와 직선 $y=-x+K$가
3개 이하의 교점
→ 가능.

∴ $f(1)=2$, $f(2)=1$.

60

2017 - 09 - (나) 14

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 등식을 만족시킨다.

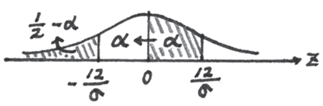
$$\mathrm{P}(m \le X \le m+12) - \mathrm{P}(X \le m-12) = 0.3664$$

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 σ의 값을 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 4　　② 6　　③ 8
④ 10　　⑤ 12

$P(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}) - P(Z \le \frac{-12}{\sigma}) = 0.3664$



$\alpha - (\frac{1}{2} - \alpha) = 0.3664$

$2\alpha = 0.8664$　　$\alpha = 0.4332$

$\therefore \frac{12}{\sigma} = 1.5$

$\sigma = 12 \times \frac{2}{3} = 8$

61

2017 - 09 - (나) 16

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [4점]

> (가) $x+y+z=10$
> (나) $0<y+z<10$

① 39　　② 44　　③ 49　　④ 54　　⑤ 59

$y+z = 10-x$

$0 < 10-x < 10$

$\therefore 0 < x < 10$

(가)를 만족하는 모든 경우에서
$x=0$ 또는 $x=10$ 인 경우를 뺀다.

${}_3H_{10} - {}_2H_{10} - 1$

$= {}_{12}C_2 - {}_{11}C_1 - 1 = 54$

151

2014 - 09 - (나) 29

구간 $[0, 3]$의 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(x \le X \le 3) = a(3-x) \quad (0 \le x \le 3)$$

이 성립할 때, $\mathrm{P}(0 \le X < a) = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

전체구간이 $[0, 3]$ 이므로

$x=0$ 대입 → $P(0 \le X \le 3) = 3a = 1$

$\therefore a = \frac{1}{3}$

$P(0 \le X \le \frac{1}{3})$

$= 1 - P(\frac{1}{3} \le X \le 3)$

$= 1 - \frac{1}{3}(3 - \frac{1}{3}) = 1 - 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$

$\therefore p+q = 10.$

152

2014 - 09 - (나) 30

다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

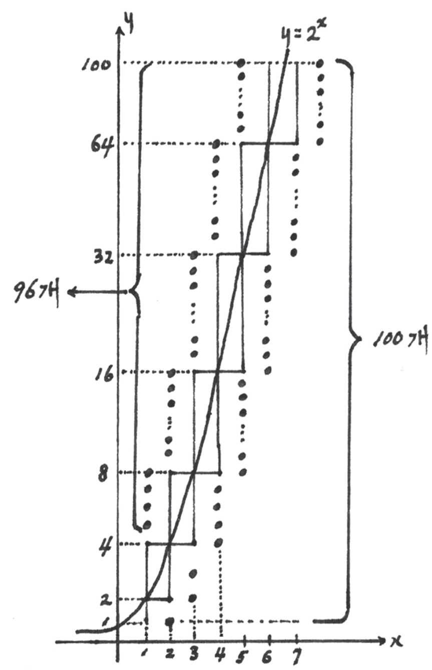
(가) $1 \le a \le 10$, $1 \le b \le 100$

(나) 곡선 $y = 2^x$이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$과 만나지 않는다.

(다) 곡선 $y = 2^x$이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$와 적어도 한 점에서 만난다.

(a,b)에서 $y=2^x$ 위의 점 (x,y)까지의 거리 d가 $1 < d \le 2$를 유지해야 한다.

(a,b)를 그래프에 나타내 보면

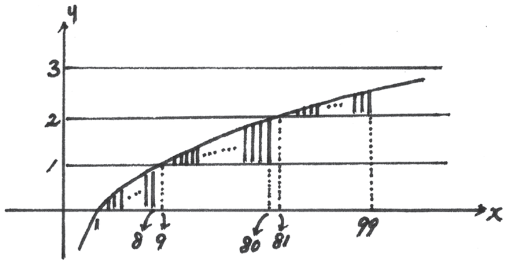


$\therefore$ 전체는 196개.

346

2008 - 06 - (나) 22

두 자리의 자연수 n에 대하여
$\log_9 n - [\log_9 n]$이 최대가 되는 n의 값을 구하시오.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]



i) $1 \le n < 9 \rightarrow \log_9 n - [\log_9 n] = \log_9 n$

$\therefore$ 최대일때 $n=8$

ii) $9 \le n < 81 \rightarrow \log_9 n - [\log_9 n]$

$= \log_9 n - 1 = \log_9 \left(\frac{n}{9}\right)$

$\therefore$ 최대일때 $n=80$

iii) $81 \le n \le 99 \rightarrow \log_9 n - [\log_9 n]$

$= \log_9 n - 2 = \log_9 \left(\frac{n}{81}\right)$

$\therefore$ 최대일때 $n=99$

$\therefore \log_9 8$, $\log_9 \left(\frac{80}{9}\right)$, $\log_9 \left(\frac{99}{81}\right)$를 비교하면

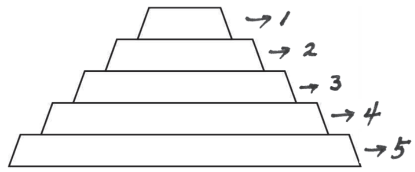
$8 < \frac{80}{9}$, $\frac{80}{9} > \frac{99}{81}$ 이므로

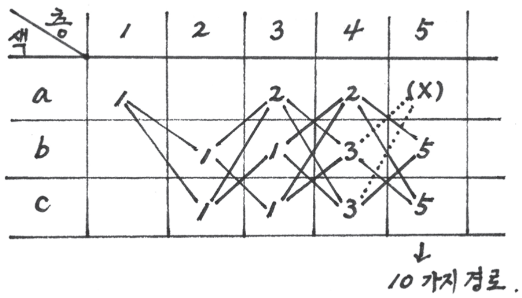
$\therefore$ 최대일때의 $n = 80$.

347

2008 - 06 - (나) 25

그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오. [4점]





a 색의 종류 선택이 3가지

$\therefore 3 \times 10 = 30$ 가지.