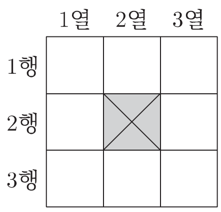
52

2013학년도 수능 수리 나형 29번

다음 좌석표에서 2행 2열 좌석을 제외한 8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 1명씩 임의로 배정할 때, 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정될 확률은 p이다. $70p$의 값을 구하시오. (단, 2명이 같은 행의 바로 옆이나 같은 열의 바로 앞뒤에 있을 때 이웃한 것으로 본다.) [4점]



풀이 1) 여사건 이용 (1)

8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 1명씩 임의로 배정하는 사건을 표본공간 S, 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되는 사건을 A로 두면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ 입니다.

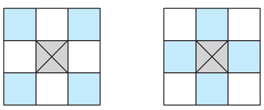
(1) $n(S)$

8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 1명씩 배정하는 경우의 수는 $8!$ 입니다.

(2) $n(A)$

'적어도' 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되는 경우의 수입니다. 따라서 '적어도'라는 문구를 통해 여사건을 생각해볼 수 있습니다.

여사건 A^C는 남학생 4명이 서로 이웃하지 않도록 배정되는 사건입니다.



남학생 4명이 서로 이웃하지 않도록 좌석을 선택하는 경우는 위 그림과 같이 두 가지만 존재합니다. 이때 선택한 4개의 좌석에 남학생 4명을 배정하는 경우의 수는 $4!$, 남은 4개의 좌석에 여학생 4명을 배정하는 경우의 수는 $4!$이므로 $n\left(A^C\right)=2\times4!\times4!$ 입니다.

따라서 $n(A)=n(S)-n\left(A^C\right)=34\times8\times6\times4!$ 입니다.

정리하면 구하는 확률은

$p=\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{34\times8\times6\times4!}{8!}=\dfrac{34}{35}$ 이고,

$70p=68$ 입니다.

풀이 2) 여사건 이용 (2)

풀이 1에서는 남학생 4명의 좌석을 선택하는 경우의 수에 남학생 4명과 여학생 4명을 배정하는 $4!\times4!$을 곱하여 경우의 수를 구했습니다. 그런데 사실 남학생 4명의 좌석만 조건에 맞게 선택하면, 어떤 남학생이 이웃하는지는 관심이 없기 때문에 학생들의 좌석을 굳이 배정할 필요는 없습니다.

따라서 이번에는 남학생 4명이 앉는 좌석 4개를 선택하는 사건을 표본공간 S, 적어도 선택한 2개의 좌석이 서로 이웃하는 사건을 B로 두겠습니다. 그러면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}$ 입니다.

(1) $n(S)$

남학생 4명의 좌석을 선택하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_4=70$ 입니다.

(2) $n(B)$

풀이 1과 마찬가지로 여사건을 이용하면, 선택한 4개의 좌석이 모두 이웃하지 않는 경우의 수는 2입니다.[20] 따라서

$n(B)=n(S)-n(B^C)=70-2=68$ 입니다.

정리하면 구하는 확률은 $p=\mathrm{P}(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{68}{70}$ 이고,

$70p=68$ 입니다.

여사건으로 풀 때 주의할 점과 실수 예방 요령

풀이 1, 풀이 2와 같이 여사건을 이용해 문제를 푸는 경우 학생들이 자주 하는 실수는 여사건의 값을 잘 구해놓고도 이를 답으로 써서 틀리는 것입니다. 따라서 여사건을 이용하여 풀이할 때에는 자신이 여사건을 구하고 있다는 것을 머릿속에 상기시키며 문제를 풀어야 합니다. 또한 마지막에 답을 적을 때,

[20] 풀이 1의 그림을 생각해보면 쉽게 알 수 있습니다.

구한 값이 문제에서 요구하는 값인지를 꼭 확인해야 실수하지 않을 수 있습니다. 이 점을 유의합시다. 이를 구체적인 행동으로 예방할 수 있는 요령을 소개합니다. 확률을 구하기 전에 '$p=$?, 답 $=1-p=$'이라 적어두는 것입니다. 그러면 p를 구하고 나서 자신이 적어둔 '답 $=1-p=$'을 보고 올바른 답을 적을 수 있을 것입니다.

표본공간 설정의 중요성

풀이 1과 풀이 2를 비교하면, 표본공간을 어떻게 설정하느냐에 따라서 풀이의 효율성이 달라진다는 것을 알 수 있습니다. 따라서 문제 상황에서 굳이 고려하지 않아도 되는 부분은 배제하고, 필요한 값만 정확하게 찾을 수 있는 적절한 표본공간을 설정하는 것을 많이 연습해둡시다.

풀이 3) 직접 구하기

여사건을 이용하는 것에 비해 비효율적이지만 직접 경우의 수를 구할 수도 있습니다. 전사건의 경우의 수는 쉽게 구할 수 있으므로, 해당 사건의 경우의 수만 계산해봅시다.

적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되는 경우는 다음과 같이 분류할 수 있습니다.

(1) 2명이 이웃하고, 나머지는 서로 이웃하지 않는 경우

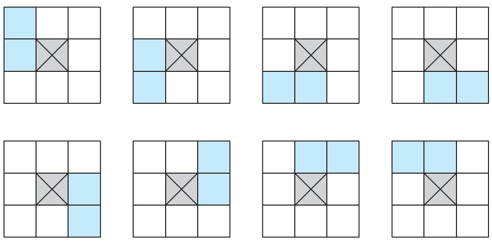
(2) 2명씩 짝지어 각각 이웃하는 경우

(3) 3명이 이웃하고, 1명은 이웃하지 않는 경우

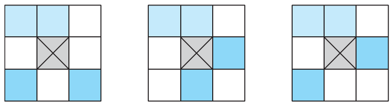
(4) 4명이 이웃하는 경우

이때 각각의 경우의 수를 구하면 다음과 같습니다.

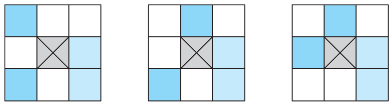
(1) 2명이 이웃하고, 나머지는 서로 이웃하지 않는 경우



서로 이웃하는 2개의 좌석을 선택하는 경우의 수는 그림과 같이 8입니다.

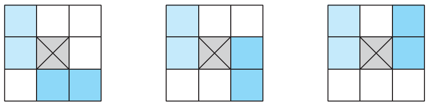


서로 이웃하는 2개의 좌석이 1행 1열과 1행 2열일 때, 서로 이웃하지 않는 나머지 2개의 좌석을 선택하는 경우의 수는 그림과 같이 3입니다.

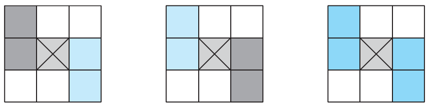


이때 좌석표의 대칭성에 의해 서로 이웃하는 2개의 좌석이 어느 것이든 관계없이 서로 이웃하지 않는 나머지 2개의 좌석을 선택하는 경우의 수는 항상 3입니다.[21] 따라서 경우의 수는 $8\times3=24$입니다.

(2) 2명씩 짝지어 각각 이웃하는 경우



(1)에서 구했던 것과 마찬가지로, 서로 이웃하는 2개의 좌석을 선택하는 경우의 수는 8입니다. 이때 또 다른 2명이 서로 이웃하는 좌석을 선택하는 경우의 수는 항상 3입니다. 따라서 경우의 수는 $8\times3=24$이라고 생각하기 쉽지만, 사실은 24가 아니라 12입니다. 왜 이런 오류가 생겼는지 알아봅시다.



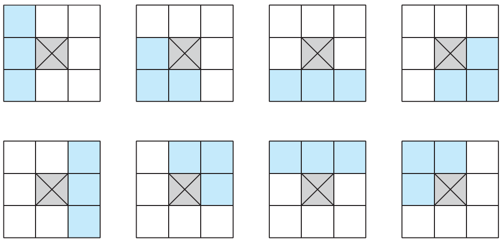
처음 고른 2개의 좌석을 회색으로 칠하고, 다음으로 고른 2개의 좌석을 색칠한다고 생각해봅시다. 24가지라고 세면 위의 두 경우는 서로 다른 경우로 세어집니다. 그런데 우리는 '8개의 좌석 중에서 남학생이 앉을 4개의 자리를 선택'하고 있으므로, 두 경우는 사실 같은 경우입니다.

이는 '좌석을 선택할 때'는 순서가 반영되면 안 되는데, 우리가 좌석을 선택하는 과정에서 순서를 부여했기 때문에 생긴 오류입니다. 따라서 24개의 경우는 본래 우리가 구하려던 값의 2배이므로, 2로

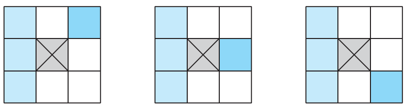
[21] 수형도의 뒤가 같으므로, 상황을 고정시킨 다음 생각해도 같은 결과를 얻을 수 있습니다.

나누어주어야 합니다. 따라서 경우의 수는 $\frac{24}{2} = 12$ 입니다.

(3) 3명이 이웃하고, 1명은 서로 이웃하지 않는 경우

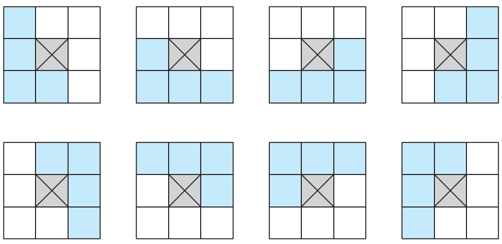


서로 이웃하는 3개의 좌석을 선택하는 경우의 수는 그림과 같이 8입니다.



남은 한 자리를 선택하는 경우의 수는 3입니다. 따라서 경우의 수는 $8 \times 3 = 24$ 입니다.

(4) 4명이 이웃하는 경우의 수



서로 이웃하는 4개의 좌석을 선택하는 경우의 수는 그림과 같이 8입니다.

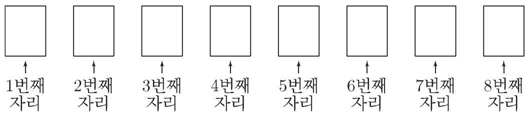
정리하면 해당 사건의 경우의 수는 $24 + 12 + 24 + 8 = 68$ 입니다. 따라서 구하는 확률은 $p = \frac{68}{{}_8\mathrm{C}_4} = \frac{34}{35}$ 이고, $70p = 68$ 입니다.

정답 : 68

53

2020학년도 6월 평가원 수학 가형 17번

1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 8개의 자리에 각각 한 장씩 임의로 놓을 때, 8 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 k 이하인 사건을 A_k라 하자.



다음은 두 자연수 m, n $(1 \le m < n \le 8)$에 대하여 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하는 과정이다.

> A_k는 k번째 자리에 k 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, k번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드가 놓여 있는 사건이므로
>
> $$\mathrm{P}(A_k) = \boxed{(가)}$$
>
> 이다.
>
> $A_m \cap A_n$ $(m < n)$은 m번째 자리에 m 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, n번째 자리에 n 이하의 자연수 중 m번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 자연수가 적힌 카드가 놓여 있고, m번째와 n번째 자리를 제외한 6개의 자리에 나머지 6장의 카드가 놓여 있는 사건이므로
>
> $$\mathrm{P}(A_m \cap A_n) = \boxed{(나)}$$
>
> 이다.
>
> 한편, 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이기 위해서는
>
> $$\mathrm{P}(A_m \cap A_n) = \mathrm{P}(A_m)\mathrm{P}(A_n)$$
>
> 을 만족시켜야 한다.
>
> 따라서 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $k = 4$를 대입한 값을 p, (나)에 알맞은 식에 $m = 3$, $n = 5$를 대입한 값을 q, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $p \times q \times r$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

풀이 1) 경우의 수로 풀기

A_k는 k번째 자리에 k 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, k번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드가 놓여 있는 사건입니다. k번째 자리에 들어갈 k 이하의 자연수 중 하나를 선택하는 경우의 수는 k이고, k번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드를 놓는 경우의 수는 $7!$입니다. 따라서

$$\mathrm{P}(A_k) = \frac{k \times 7!}{8!} = \frac{k}{8}$$

이고, $\boxed{(가)} = \frac{k}{8}$ 입니다.

이제 $A_m \cap A_n$ $(m < n)$도 같은 방법으로 계산하면 m번째 자리에 들어갈 m 이하의 자연수 중 하나를 선택하는 경우의 수는 m, n번째 자리에 들어갈 n 이하의 자연수 중 m번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 하나를 선택하는 경우의 수는 $n-1$, m번째와 n번째 자리를 제외한 6개의 자리에 나머지 6장의 카드를 놓는 경우의 수는 $6!$입니다. 따라서

$$\mathrm{P}(A_m \cap A_n) = \frac{m \times (n-1) \times 6!}{8!} = \frac{m \times (n-1)}{56}$$

이고, $\boxed{(나)} = \frac{m \times (n-1)}{56}$ 입니다.

한편, 두 사건이 독립이기 위해서는 $\mathrm{P}(A_m \cap A_n) = \mathrm{P}(A_m)\mathrm{P}(A_n)$을 만족시켜야 합니다. 이때

$$\mathrm{P}(A_m \cap A_n) = \frac{m \times (n-1)}{56},\ \mathrm{P}(A_m) = \frac{m}{8},\ \mathrm{P}(A_n) = \frac{n}{8}$$

이므로

$$\frac{n-1}{7} = \frac{n}{8}$$

입니다. 그러므로 $n = 8$이고, m은 7 이하의 자연수이므로 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 7입니다. 따라서 $\boxed{(다)} = 4$ 입니다.

정리하면 $p \times q \times r = \frac{1}{2} \times \frac{3}{14} \times 7 = \frac{3}{4}$ 입니다.

풀이 2) 곱셈정리로 풀기

A_k는 k번째 자리에 k 이하의 자연수 중 하나가 오면 되므로 $\mathrm{P}(A_k) = \frac{k}{8}$ 입니다. 따라서 $\boxed{(가)} = \frac{k}{8}$ 입니다.

$A_m \cap A_n$ $(m < n)$은 m번째 자리에 m 이하의 자연수 중 하나가 오고, n번째 자리에 n 이하의 자연수 중 m번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 하나가 오면 됩니다. m

번째 자리에 m 이하의 자연수 중 하나가 올 확률은 $\frac{m}{8}$, n번째 자리에 n 이하의 자연수 중 m번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 하나가 올 확률은 $\frac{n-1}{7}$이므로

$\mathrm{P}(A_m \cap A_n) = \frac{m}{8} \times \frac{n-1}{7}$입니다. 따라서

$\boxed{(나)} = \frac{m \times (n-1)}{56}$입니다.

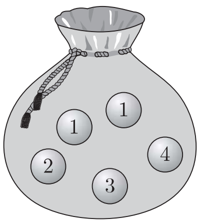
이후 과정은 풀이 1과 동일하므로 생략하겠습니다.

정답 : ④

54

2016학년도 9월 평가원 수학 B형 15번

주머니에 1, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b, c, d라 할 때, $a \le b \le c \le d$일 확률은? [4점]



① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

풀이 1) 곱셈정리로 풀기 1

5개의 공 중 1이 적힌 공이 2개이므로, 1이 적힌 공은 한 개 이상 포함됩니다. 따라서 1이 적힌 공의 개수를 기준으로 경우를 나누어 계산해봅시다.

(1) 1이 적힌 공이 한 개 선택되는 경우

가능한 순서쌍은 $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4)$뿐입니다. 따라서 곱셈정리를 이용해 계산하면 확률은

$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{60}$입니다.

(2) 1이 적힌 공이 두 개 선택되는 경우

가능한 순서쌍 (a, b, c, d)은

$$(1, 1, 2, 3), (1, 1, 2, 4), (1, 1, 3, 4)$$

이고, 각 순서쌍의 확률은 모두 $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$로 같습니다. 따라서 확률은 $3 \times \frac{1}{60} = \frac{1}{20}$입니다.

정리하면 구하는 확률은 $\frac{1}{60} + \frac{1}{20} = \frac{1}{15}$입니다.

풀이 2) 곱셈정리로 풀기 2

5개의 공 중 1이 적힌 공이 2개이므로, 1이 적힌 공은 한 개 이상 포함됩니다. 그러므로 반드시 $a = 1$이어야 하고, b, c, d는 각각 1, 2, 3, 4 중 하나의 수입니다. 따라서 $a = 1$일 확률은 $\frac{2}{5}$, $b \le c \le d$일 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{4 \times 3 \times 2} = \frac{1}{6}$이므로 구하는 확률은 $\frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$입니다.

풀이 3) 경우의 수로 풀기

주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_4 \times 4! = 120$입니다. 이제 $a \le b \le c \le d$를 만족시키는 경우의 수를 구해봅시다.

1이 적힌 공이 하나만 선택된다면 문제가 없지만, 두 개의 공이 모두 선택된다면 자기들끼리 서로 순서를 바꾸는 경우도 고려해야 합니다. 따라서 두 경우에서 수형도의 뒤가 다르므로, 1이 적힌 공의 개수를 기준으로 경우를 나누어 계산해봅시다.

(1) 1이 적힌 공이 한 개 선택되는 경우

1이 적힌 공 2개 중 하나를 선택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$이고, 나머지 공은 2, 3, 4이므로 순서는 정해져 있습니다. 따라서 경우의 수는 2입니다.

(2) 1이 적힌 공이 두 개 선택되는 경우

2, 3, 4가 적힌 공 3개 중 두 개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$이고, 1이 적힌 공 두 개의 자리를 정하는 경우의 수는 $2!$입니다. 따라서 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$입니다.

정리하면 $a \le b \le c \le d$를 만족시키는 경우의 수는 $2 + 6 = 8$이므로, 구하는 확률은 $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$입니다.

풀이 4) 금기시되는 풀이

확률에서는 같은 것도 서로 다르게 보아야 한다고 이야기했지만, 이 문제의 경우에는 같은 것으로 보고 계산해도 됩니다. 이를 확인해봅시다.

1이 적힌 공을 한 개 선택하면 4개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$, 1이 적힌 공을 두 개 선택하면 4

개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2 \times \frac{4!}{2!}$ 입니다.
한편, $a \le b \le c \le d$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)은 풀이 1에서 언급한 4가지뿐입니다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{24+36} = \frac{1}{15}$ 입니다.

같있순을 사용해도 되는 이유

일반적으로 확률에서 같은 것끼리 구별하지 않는 것은 근원사건의 확률이 달라질 수 있는 위험이 있어 금기시됩니다. 그러나 풀이 1에서 순서쌍의 확률을 구하면서 확인할 수 있었듯이, 이 문제에서 각 근원사건의 확률은 모두 $\frac{1}{60}$으로 동일합니다. 따라서 같있순을 사용해서 계산해도 된다는 것을 알 수 있습니다.

정답 : ①

55

2014학년도 예비시행 수학 A형 29번

한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

(가) 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상이면 나온 눈의 수를 점수로 한다.
(나) 한 번 던져 나온 눈의 수가 5보다 작으면 한 번 더 던져 나온 눈의 수를 점수로 한다.

시행의 결과로 얻은 점수가 5점 이상일 때, 주사위를 한 번만 던졌을 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

풀이 1) 확률로 풀기

시행의 결과로 얻은 점수가 5점 이상인 사건을 A, 주사위를 한 번 던지는 사건을 B로 두면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ 입니다. 각각의 확률을 구해봅시다.

(1) $\mathrm{P}(A)$

시행의 규칙에 따르면 5점 이상의 점수를 얻는 경우는 다음의 두 가지입니다.

① 처음 주사위를 던져 나온 눈의 수가 5 이상인 경우
② 처음 주사위를 던져 나온 눈의 수가 4 이하이고, 한 번 더 던져 나온 눈의 수가 5 이상인 경우

이때 ①의 확률은 $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$이고, ②의 확률은 $\mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ 입니다. 따라서

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

입니다.

(2) $\mathrm{P}(A \cap B)$

앞에서 이미 ①의 확률이 $\mathrm{P}(A \cap B)$이고, $\frac{1}{3}$임을 구했습니다.

정리하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$ 이고, $p^2+q^2=34$ 입니다.

풀이 2) 경우의 수로 풀기

한 번의 시행을 하는 사건을 표본공간 S로 두면, 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 입니다. 각각의 경우의 수를 구해봅시다.

(1) $n(A)$

시행의 규칙에 따르면 5점 이상의 점수를 얻는 경우는 다음의 두 가지입니다.

① 처음 주사위를 던져 나온 눈의 수가 5 이상인 경우

② 처음 주사위를 던져 나온 눈의 수가 4 이하이고, 한 번 더 던져 나온 눈의 수가 5 이상인 경우

이때 ①의 경우의 수는 $2 \times 6 = 12$,[22] ②의 경우의 수는 $4 \times 2 = 8$이므로, $n(A) = 12 + 8 = 20$입니다.

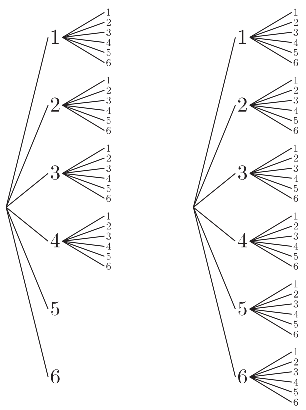
(2) $n(A \cap B)$

앞에서 구한 ①의 경우와 동일합니다. 따라서 경우의 수는 12입니다.

정리하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$이고, $p^2 + q^2 = 34$입니다.

각주의 부연 설명

만약 ①의 경우의 수를 2로 계산했다면, 확률에서 표본공간의 각 근원사건이 기대될 확률이 같아야 한다는 것을 제대로 이해하지 못한 것입니다.



왼쪽 그림을 보면 시행의 결과로 얻은 점수가 5점 이상인 경우의 수는 $4 \times 2 + 2 \times 1 = 10$, 이때 주사위를 한 번만 던진 경우의 수는 2이므로 확률은 $\dfrac{1}{5}$ 입니다.

하지만 이는 근원사건의 확률이 동일하지 않으므로, 잘못된 풀이임을 알 수 있습니다.[a] 따라서 오른쪽 그림과 같이 수형도의 뒤가 같게 그린 후 계산하면 5점 이상인 경우의 수는 $4 \times 2 + 2 \times 6 = 20$, 주사위를 한 번 던진 경우의 수는 12이므로 확률은 $\dfrac{3}{5}$ 입니다.

[a]주사위를 한 번 던져 5가 나올 확률과, 주사위를 한 번 던져 1이 나오고, 그 다음에 5가 나올 확률은 각각 $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{36}$으로 서로 다르기 때문입니다.

정답 : 34

[22]표본공간은 근원사건의 확률이 동일, 즉 경우의 수에서 수형도의 뒤가 같아야 하기 때문입니다.

67

2020학년도 9월 평가원 수학 가형 18번

빨간색 공 6개, 파란색 공 3개, 노란색 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 하여, 다음 규칙에 따라 세 사람 A, B, C가 점수를 얻는다. (단, 한 번 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)

- 빨간색 공이 나오면 A는 3점, B는 1점, C는 1점을 얻는다.
- 파란색 공이 나오면 A는 2점, B는 6점, C는 2점을 얻는다.
- 노란색 공이 나오면 A는 2점, B는 2점, C는 6점을 얻는다.

이 시행을 계속하여 얻은 점수의 합이 처음으로 24점 이상인 사람이 나오면 시행을 멈춘다. 다음은 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A뿐일 확률을 구하는 과정이다.

> 꺼낸 빨간색 공의 개수를 x, 파란색 공의 개수를 y, 노란색 공의 개수를 z라 할 때, 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A뿐이기 위해서는 x, y, z가 다음 조건을 만족시켜야 한다.
>
> $$x = 6,\ 0 < y < 3,\ 0 < z < 3,\ y + z \geq 3$$
>
> 이 조건을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$는
>
> $$(6,\ 1,\ 2),\ (6,\ 2,\ 1),\ (6,\ 2,\ 2)$$
>
> 이다.
>
> (i) $(x,\ y,\ z) = (6,\ 1,\ 2)$인 경우의 확률은 $\boxed{(가)}$이다.
>
> (ii) $(x,\ y,\ z) = (6,\ 2,\ 1)$인 경우의 확률은 $\boxed{(가)}$이다.
>
> (iii) $(x,\ y,\ z) = (6,\ 2,\ 2)$인 경우는 10번째 시행에서 빨간색 공이 나와야 하므로 그 확률은 $\boxed{(나)}$이다.
>
> (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은 $2 \times \boxed{(가)} + \boxed{(나)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p + q$의 값은? [4점]

① $\frac{13}{110}$ ② $\frac{27}{220}$ ③ $\frac{7}{55}$ ④ $\frac{29}{220}$ ⑤ $\frac{3}{22}$

$(x,\ y,\ z) = (6,\ 1,\ 2)$일 확률은 12개의 공 중 9개의 공을 꺼낼 때 빨간색 공 6개, 파란색 공 1개, 노란색 공 2개를 꺼낼 확률입니다. 이는

$$\frac{{}_6C_6 \times {}_3C_1 \times {}_3C_2}{{}_{12}C_9} = \frac{9}{{}_{12}C_3} = \frac{9}{220}$$

입니다. 따라서 $\boxed{(가)} = \frac{9}{220}$ 입니다.

한편, $(x,\ y,\ z) = (6,\ 2,\ 2)$인 확률은 10번째 시행에서 빨간색 공이 나와야 하므로, 12개의 공 중 9개의 공을 꺼낼 때 빨간색 공 5개, 파란색 공 2개, 노란색 공 2개를 꺼낸 후, 빨간색 공 1개를 꺼낼 확률입니다. 이는

$$\frac{{}_6C_5 \times {}_3C_2 \times {}_3C_2}{{}_{12}C_9} \times \frac{1}{3} = \frac{54}{{}_{12}C_3} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{110}$$

입니다. 따라서 $\boxed{(나)} = \frac{9}{110}$ 입니다.

정리하면 $p + q = \frac{9}{220} + \frac{9}{110} = \frac{27}{220}$ 입니다.

왜 꺼낸 공의 순서를 고려하지 않는가?

결론부터 이야기하면 확률 계산에서 분모와 분자에 같은 연산을 취하면 서로 약분되므로, 이를 무시하고 계산할 수 있기 때문입니다. (가)의 계산에서 이를 확인해봅시다.
(가)의 분모와 분자는 모두 9번의 시행에서 9개의 공을 꺼내야 하므로, 꺼낸 9개의 공을 9개의 시행에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 9!으로 같습니다. 따라서 (가)의 분모와 분자에 각각 9!을 곱한 값이 곧 시행의 순서를 고려해 계산한 확률이지만, 9!은 결국 약분되어 사라질 것입니다. 따라서 순서를 무시하고 꺼낸 9개의 공의 결과만 생각한 확률과 순서를 고려한 확률의 값이 서로 같으므로, 빈칸의 내용처럼 계산할 수 있습니다.

정답 : ②

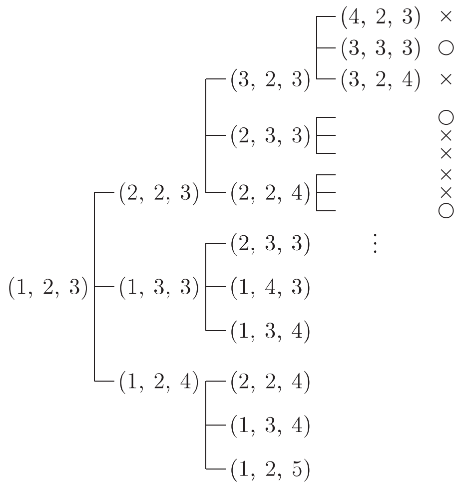
70

2011학년도 9월 평가원 수리 가형 24번

주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 시행을 6번 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

풀이 1) 수형도로 상황 파악하기

솔직히 문제를 아무리 읽어도 뭔 소리인지 하나도 모르겠으니, 수형도부터 그려보고 생각해봅시다.



수형도를 무작정 그려보면, 1회의 시행에선 무조건 사건 A가 일어나지 않습니다. 2회의 시행에서도 사건 A가 일어나지 않습니다. 한편, 3회의 시행에서는 모든 마디의 끝에서 $\frac{1}{3}$의 확률로 사건 A가 일어나고, $\frac{2}{3}$의 확률로 사건 A가 일어나지 않음을 알 수 있습니다.

그리고 3회의 시행까지 끝났을 때 사건 A가 일어나지 않는다면, 모두 처음의 상황, 즉 세 수의 나머지가 모두 다른 상황이 되어버립니다. 따라서 처음 3회의 시행(1회, 2회, 3회)에서는 사건 A가 일어나지 않고, 두 번째 3회의 시행(4회, 5회, 6회)에서는 사건 A가 일어날 확률을 구하면 됩니다. 이는 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$이므로, $p+q=11$입니다.

수형도를 그릴 때 나머지에 주목하기

풀이 1에서는 수형도를 그릴 때 순서쌍에 스티커가 붙은 숫자를 직접 썼지만, 문제에서 중요한 것은 각 수보다는 각 수를 3으로 나눈 나머지입니다. 따라서 이를 파악했다면 순서쌍을 기재할 때, 처음부터 나머지를 기재하여 문제의 상황을 좀 더 빠르게 이해할 수 있습니다. 직접 수형도를 그려보고, 확인해보시길 바랍니다.

풀이 2) 나머지를 적극적으로 활용하기

풀이 1의 박스 내용을 조금만 더 생각해봅시다. 처음 상황은 $(1,\ 2,\ 0)$이므로, 나머지의 합은 3의 배수입니다. 한편, 3으로 나눈 나머지가 모두 같은 경우에서도 나머지의 합은 3의 배수입니다. 그러면 시행을 1번이나 2번 했을 때 사건 A는 절대로 일어날 수 없고, 시행을 3번 했을 때, 사건 A가 일어날 수 있음을 알 수 있습니다.[44] 따라서 3회의 시행 후 사건 A가 일어날 수 있는 경우를 나누어 확률을 계산해봅시다.

(1) 3회의 시행 후 나머지가 $(0,\ 0,\ 0)$인 경우
스티커가 1개 붙어 있는 카드에 스티커 2개, 스티커가 2개 붙어 있는 카드에 스티커 1개를 붙이면 되므로, 확률은 $\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{3^3} = \frac{1}{9}$입니다.

(2) 3회의 시행 후 나머지가 $(1,\ 1,\ 1)$인 경우
스티커가 2개 붙어 있는 카드에 스티커 2개, 스티커가 3개 붙어 있는 카드에 스티커 1개를 붙이면 되므로, 확률은 $\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{3^3} = \frac{1}{9}$입니다.

(3) 3회의 시행 후 나머지가 $(2,\ 2,\ 2)$인 경우
스티커가 1개 붙어 있는 카드에 스티커 1개, 스티커가 3개 붙어 있는 카드에 스티커 2개를 붙이면 되므로, 확률은 $\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{3^3} = \frac{1}{9}$입니다.

정리하면 3회의 시행 후, 사건 A가 일어날 확률은 $3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$입니다. 따라서 처음 3회의 시행에서는 사건 A가 일어나지 않고, 두 번째 3회의 시행에서는 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$이고, $p+q=11$입니다.

정답 : 11

[44] 3의 배수에 3의 배수를 더해야 3의 배수가 되겠죠? 그러므로 시행의 횟수가 3의 배수일 때 사건 A가 일어날 수 있다는 것입니다!