규토
수학라이트

orbi.kr

CONTENTS

3. 해설편

2021
수학라이트

규토 수학 라이트 N제 수2 오리엔테이션

Chapter 1

1.1 책 소개

개념과 기출을 이어주는 bridge 역할의 교재

규토 수학 라이트 N제는 기출문제와 개념 간의 격차를 최소화하고 1등급으로 도약하기 위한 탄탄한 base를 만들어 주기 위해 기획한 교재입니다. 학생들이 처음 개념을 학습한 뒤 막상 기출문제를 풀면 그 방대한 양과 난이도에 압도당하기 쉽습니다. 이를 최소화하기 위해 4단계로 구성하였고 책에 적혀 있는 규토 수학 라이트 N제 100% 공부법으로 꾸준히 학습하다보면 역으로 기출문제를 압도하실 수 있습니다.

유형과 기출을 한 권으로

Gyu To Math (규토 수학)에서 첫 글자를 따서 총 4단계로 구성하였습니다.

1. **G**uide step (개념 익히기편)

교과개념, 실전개념, 예제, 개념 확인문제, '규토의 Tip'을 모두 담았습니다. 단순히 문제만 푸는 것이 아니라 개념도 함께 복습하실 수 있습니다.
교과서에 직접적인 서술이 없더라도 수능에서 자주 출제되는 포인트들을 녹여내려고 노력하였습니다.

2. **T**raining – 1 step (필수 유형편)

기출문제를 풀기 전의 Warming up 단계로 수능에서 자주 출제되는 유형들을 분석하여 수능최적화 자작으로 구성하였습니다.
기초적인 문제뿐만 아니라 학생들이 어렵게 느낄 수 있는 문제들도 다수 수록하였습니다.
단시간 내에 최신 빈출 테마들을 Compact하게 정리하실 수 있습니다.

3. **T**raining – 2 step (기출 적용편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 3~4점 문제를 선별하여 구성하였습니다.
필수 유형편에서 배운 내용을 바탕으로 실제 기출문제를 풀어보면서 사고력과 논리력을 증진시킬 수 있습니다.
실제 기출 적용연습을 위하여 유형 순이 아니라 전반적으로 난이도 순으로 배열했습니다.

4. **M**aster step (심화 문제편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 난이도 있는 문제를 선별하여 준킬러 자작문제와 함께 구성하였습니다.
과하게 어려운 킬러문제는 최대한 지양하였고 킬러 또는 준킬러 문제 중에서도 1등급을 목표로 하는 학생이 반드시 정복해야하는 문제들로 구성하였습니다.

교과서 개념유제부터 어려운 기출 4점까지 모두 수록

교과서 개념유제부터 수능에서 킬러로 출제된 문제까지 모두 수록하였습니다.
규토 수학 라이트 N제 수2의 경우 총 644제이고 (유제의 경우 3문제짜리도 있어 대략 700문제)
문제집의 취지에 맞게 중 ~ 중상 난이도 문제들이 제일 많이 분포되어 있습니다.

규토 수학 라이트 N제의 추천 등급은?

가형은 2~5등급, 나형은 1~3등급입니다.

(단, 옆에서 이끌어주는 사람이 있다는 가정 하에 나형 4등급도 가능합니다.)

1.2 검토후기

김주은 / 울산대학교 의학과

안녕하세요, 규토 라이트 N제 수2 검토를 맡은 김주은입니다. 규토선생님께서 라이트N제 수1보다 수2가 훨씬 더 퀄리티가 좋을 거라고 하셨는데 정말 그렇습니다. 수2에서 배우는 내용들은 고등학교에 들어와서 처음 배우는 내용들이라 저도 고등학생 때 어려워했던 기억이 있습니다(특히 미분과 적분. 처음 개념설명 듣고 이게 뭔 소린가 했어요). 그런 만큼 개념에 대한 정확한 이해와 놓치기 쉬운 부분들을 잘 챙기는 것이 중요하다고 생각합니다. 수능 킬러 대비나 수리논술 준비하실 때 아마 그 중요함을 더 느끼실 겁니다. 저 같은 경우에는 개념을 간단하게 대충 배우기만 하고 이 문제 저 문제 풀어보고 틀려 보면서 미적분의 정확한 기초를 다졌었는데, 규토 라이트 N제 수2는 개념설명에서부터 정말 많은 것을 챙겨 줍니다. 실질적으로 와닿는 개념 설명과 함께 수많은 Tip들과 예시들을 보여주는데 이게 여러분들께 많은 도움이 될 것 같아요. 그리고 개념설명에서 다뤘던 내용을 실제로 잘 적용할 수 있게끔 적절한 문제들이 잘 선별되어 있고, 문제를 푸는 데 있어 알아두면 좋을 또다른 Tip들이 해설편 곳곳에 있습니다. 진작에 이런 문제집이 있었다면 저도 미적분에 대한 이해를 훨씬 더 수월하게 할 수 있었을 것 같네요ㅎㅎ
문제집에서 다뤄지는 것들 하나하나를 꼼꼼히 잘 챙기신다면 수2 진짜 잘하실 수 있습니다.
모두들 화이팅하세요~!

박도현 / 성균관대학교 자연과학

안녕하세요, 규토 라이트 N제 수2의 검토를 맡은 박도현입니다.
지난 라이트 수1에 이어 라이트 수2를 검토했는데 감탄이 끊이질 않습니다. ‘진짜, 이것만 제대로 하면 수능수학 정복하겠는데?’. 라이트 수1에서도 언급했듯이 라이트 N제는 개념부터 시작해 준킬러, 함정 문제들까지 모두 정복할 수 있는 문제집입니다. 수학 〈나형〉에서의 고난이도 유형 〈다항함수의 그래프 추론〉 문제를 철저하게 다룰 뿐만 아니라 고난이도 자작문제들을 풀면서 한 문제 안에 얼마나 많은 내공을 담았는지 볼 수 있었습니다. 시간절약 Tip, 틀리기 쉬운 함정 문제, 그리고 고퀄리티 자작 문제들을 함께 학습한다면, 〈나형〉의 준킬러와 쉬운 킬러들은 쉽게 정복할 수 있습니다. 〈가형〉을 응시하는 수험생들도 라이트 수2를 풀면서 참신하고 새롭고 어려운 문제들을 경험해보시길 바랍니다.
모든 수험생 여러분들이 규토 라이트 N제를 풀고 수능에서 좋은 성적을 거두길 바랍니다!

송지훈 / 인하대학교 수학과

많은 학생들이 개념에서 기출로 나아가는 과정을 힘겨워합니다. 그 이유는 개념서와 기출의 문제 난이도의 괴리 때문이라고 생각합니다. 규토 라이트 N제는 이 부분에 충실하여 개념서와 기출 사이의 간극을 메워주고 개념서만으로는 혼자서 깨닫기에 어려운 내용들을 친절히 설명해준 책입니다. 기출문제가 너무 어려워 풀기 버겁거나 개념서는 봤지만 기출문제에 적용이 안 되는 학생들에게 다른 문제 기본서와 이 책을 병행하길 강력히 추천합니다. 마지막으로 이 책을 보는 수험생분들 모두 등급 상승을 이뤄내시길 기원합니다.

최영길 / 충남대학교 의예과

규토 라이트 N제는 개념부터 문제풀이, 그리고 기출문제까지 한 권으로 끝낼 수 있는 책입니다. 상세한 개념 설명은 물론이고, 수험생들이 간과할만한 내용까지 날카롭게 꼬집으며 여러분의 튼튼한 수학적 기반을 다지는 데 큰 도움을 줍니다. 또한, 기존 개념서에서는 보기 어려운 다양한 문제풀이 스킬들이 수록되어 있으며, 이를 높은 퀄리티의 자작문제와 기출문제 풀이에 직접 적용해보는 과정을 통해 여러분의 문제 해결력은 자연스럽게 향상될 겁니다. 해당 교재 공부가 마무리 될 때 쯤, 눈에 띄게 성장한 여러분의 모습을 기대합니다.

2021
수학라이트

규토 수학 라이트 N제 수2
문제편

Chapter 2

[개념 확인문제 4]

함수 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x>1) \\ x^2-2x & (x \le 1) \end{cases}$ 에서 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to 1+} f(x)$

(2) $\lim_{x \to 1-} f(x)$

[예제 4]

극한 $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ 를 조사하시오.

풀이

$x=1$에서 우극한과 좌극한을 구하면

$$\lim_{x \to 1+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

따라서 우극한과 좌극한이 다르므로 극한 $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ 는 존재하지 않는다.

Tip 1 절댓값을 포함한 극한은 절댓값을 벗겨내야 극한값을 계산할 수 있다.
$x \to 1+$ 는 1보다 큰 쪽에서 1로 가까이 가는 것이므로 $x>1$에 해당한다.
$x>1$에서 $x-1$이 양수이므로 $|x-1|=x-1$이다.

$x \to 1-$ 는 1보다 작은 쪽에서 1로 가까이 가는 것이므로 $x<1$에 해당한다.
$x<1$에서 $x-1$이 음수이므로 $|x-1|=-(x-1)$이다.

Tip 2 $\lim_{x \to 0} \frac{|x-1|}{x-1}$ 의 경우는 $x \to 0+$ or $x \to 0-$ 모두 $x<1$에 해당한다.
$x<1$에서 $x-1$이 음수이므로 $|x-1|=-(x-1)$이다.
따라서 $\lim_{x \to 0} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \to 0} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$이다.

[개념 확인문제 5]

다음 극한을 조사하시오.

(1) $\lim_{x \to -2} \frac{|x+2|}{x+2}$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{|x|}$

Training_2 step
기출 적용편

❶ 함수의 극한

052 2010학년도 고3 9월 평가원 가형

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+ax-b}{x^3-1}=3$이 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

053 2018학년도 수능 나형

함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 1}(x+1)f(x)=1$을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1}(2x^2+1)f(x)=a$이다. $20a$의 값을 구하시오. [3점]

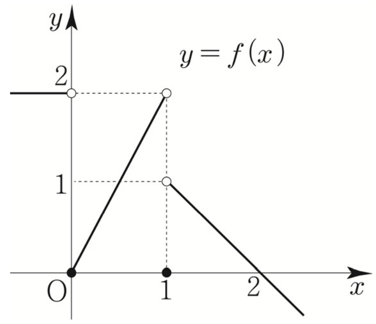
054 2012학년도 고3 6월 평가원 나형

함수 $f(x)=x^2+ax$가 $\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x}=4$를 만족시킬 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

055 2020학년도 수능 나형

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

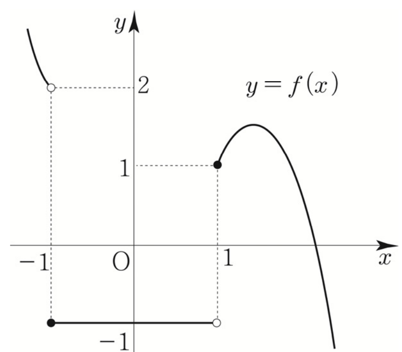


$\lim_{x \to 0+}f(x)-\lim_{x \to 1-}f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

056 2019학년도 수능 나형

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

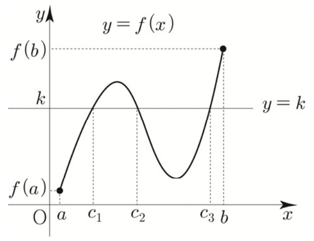


$\lim_{x \to -1-}f(x)-\lim_{x \to 1+}f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

개념 파악하기 - (6) 사잇값의 정리

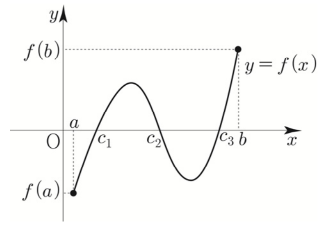
※ 사잇값의 정리



함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면
$f(a)$와 $f(b)$사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인
c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

Tip 연속이라는 전제조건에 유의하자.

※ 사잇값의 정리의 활용



함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면
사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인
c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

Tip 1 실전적으로 볼 때, 사잇값의 정리보다는 사잇값의 정리의 활용을 기억하는 편을 추천한다.

Tip 2 사잇값의 정리의 활용에서 $f(a)f(b)<0$라는 말은 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 다르다는 뜻이다.
만약 $f(a)f(b)>0$ 즉, $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 같다면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(a,\ b)$에서
실근이 존재하지 않을 수도 있다.

Tip 3 사잇값의 정리는 c가 정확히 무엇인지 혹은 c가 몇 개 존재하는지가 궁금한 것이 아니라
전제조건을 만족시키기만 하면 Simple하게
“c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.”라는 말을 하고 싶은 것이다.

Tip 4 구간을 쪼개서 사잇값의 정리를 사용하는 문제가 출제될 수도 있다.
예를 들어 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 $f(1)>0$, $f(2)<0$, $f(3)>0$이라 할 때,
방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 몇 개의 실근을 가지는지 판단해보자.
관성적으로 접근하면 $f(1)f(3)<0$이 아니라서 난감할 수 있는데
이 때, 닫힌구간 $[1,\ 3]$을 $[1,\ 2]$와 $[2,\ 3]$로 쪼개서 생각해볼 수 있다.
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이므로 닫힌구간 $[1,\ 2]$, $[2,\ 3]$에서도 모두 연속이다.
$f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해서 $f(c_1)=0$인
c_1가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재하고
마찬가지로 $f(2)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해서 $f(c_2)=0$인
c_2가 열린구간 $(2,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 두 개의 실근을 갖는다.

Tip 5 만약 방정식이 $f(x)=0$꼴이 아니라면 방정식을 변형하여 $f(x)=0$꼴로 만들자.
예를 들어 방정식 $g(x)=1$를 방정식 $g(x)-1=0$로 변형한 뒤
$g(x)-1=f(x)$라 치환하면 $f(x)=0$꼴로 만들 수 있다.
그 다음 사잇값의 정리의 활용을 사용하면 된다.

Master step
심화 문제편

❶ 미분계수와 도함수

073

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(2x+1)=f(x)+3x^2-ax$이다.
(나) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 $-\frac{1}{2}$에서 3까지 변할 때의 평균변화율은 b이다.

$10(b-a)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

074 2015년 고3 3월 교육청 B형

삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-9x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x < k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

075

함수 $f(x)=x^3-3x$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ f(x-a)+b & (x < 0) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 실수 t에 대하여 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때,
$\lim_{t \to c+} h(t)+h(c)=\lim_{t \to c-} h(t)$이다.

$a+2b+3c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

Guide step
개념 익히기편

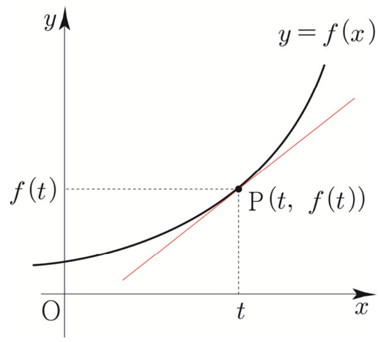
❷ 도함수의 활용

개념 파악하기 - (1) 접선의 방정식 유형 ① 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

※ 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

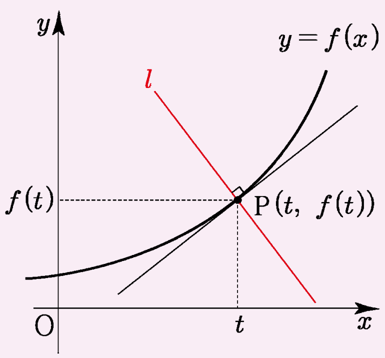
함수 $f(x)$가 $x=t$에서 미분가능할 때,
곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의
접선의 기울기는 $x=t$에서의 미분계수 $f'(t)$와 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접하는 접선은
점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 $f'(t)$인 직선이므로
접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.



Tip 1 점 $(a,\ b)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y=m(x-a)+b$이다.

Tip 2 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이므로
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$를 지나고
이 점에서의 접선에 수직인 직선 l의 방정식은
$y=-\dfrac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$ (단, $f'(t)\neq 0$) 이다.



[예제 1]

다음 물음에 답하시오.

(1) 곡선 $y=x^2+x+2$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 곡선 $y=2x^2-x$ 위의 점 $(-1,\ 3)$를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

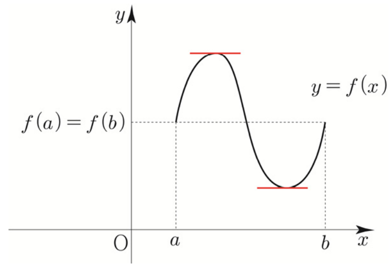
✍ 풀이

(1) $f(x)=x^2+x+2$라 하면 $f'(x)=2x+1$ 점 $(1,\ 4)$에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이다.
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3(x-1)+4$이므로 $y=3x+1$이다.

(2) $f(x)=2x^2-x$라 하면 $f'(x)=4x-1$
점 $(-1,\ 3)$에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(-1)=-5$
이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면 $f'(-1)\times m=-1$ 이므로 $m=-\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{5}$
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{5}(x+1)+3$이므로 $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{16}{5}$이다.

개념 파악하기 - (5) 롤의 정리

※ 롤의 정리란?

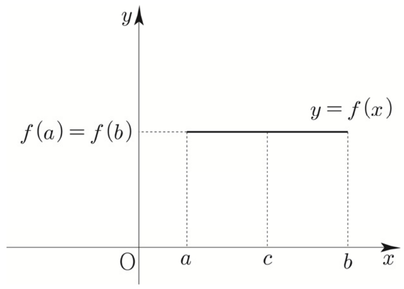


함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,
$f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

Tip 1 롤의 정리는 열린구간 $(a,\ b)$에서 기울기가 0인 곡선 $y=f(x)$의 접선이 적어도 하나 존재함을 의미한다.

Tip 2 롤의 정리에서 함수 $f(x)$가 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하지 않으면 $f'(c)=0$인 c가 존재하지 않을 수도 있다.
예를 들어 함수 $f(x)=|x|$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고
$f(-1)=f(1)$이지만 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 존재하지 않는다.

※ 롤의 정리를 증명해보자.



① 함수 $f(x)$가 상수함수인 경우
열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 c에 대하여 $f'(c)=0$이다.

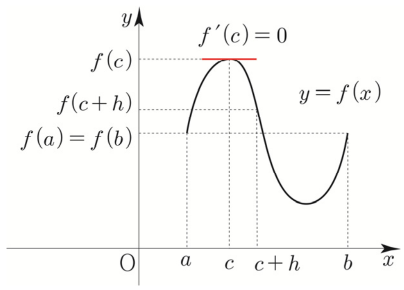
② 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닌 경우
$f(a)=f(b)$이므로 함수 $f(x)$가 최댓값 또는 최솟값을 갖는 어떤 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 존재한다.

(ⅰ) $x=c$에서 최댓값 $f(c)$를 가질 때, $a<c+h<b$인 임의의 h에 대하여
$f(c+h)-f(c)\le 0$이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0$$

이고, 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하므로
우극한과 좌극한이 같아야한다.



따라서 $0\le\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0$ 이므로 다음이 성립한다.

$$f'(c)=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$$

(ⅱ) $x=c$ 에서 최솟값 $f(c)$를 가질 때, (ⅰ)와 같은 방법으로 $f'(c)=0$이 성립한다.

Tip 1 (ⅰ)에서 $h>0$ 이면 $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0$이고 $h<0$이면 $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0$이다.

Tip 2 롤의 정리는 함수의 그래프를 이용하여 직관적으로 이해하면 되고 만약 1회독 중인 학생이라면 증명과정은 넘어가도 된다.

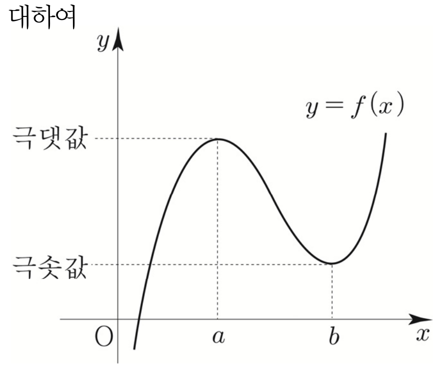
개념 파악하기 - (9) 함수의 극대와 극소

※ 함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

① $f(x) \le f(a)$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**가 된다고 하고,
그 때의 함숫값 $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.

② $f(x) \ge f(a)$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**가 된다고 하고,
그 때의 함숫값 $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다.

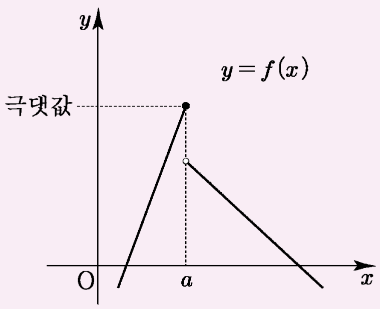
극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.

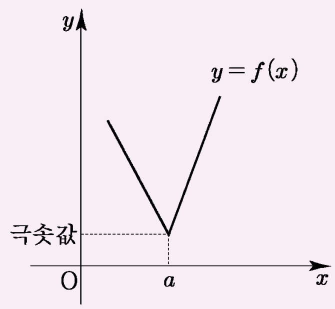


Tip 1 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간이라는 뜻은 $x=a$를 포함하는 아주 작은 열린구간이라고 생각하면 된다.

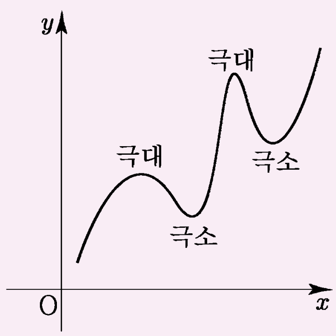
Tip 2 극대 극소의 정의를 보면 $f(x)$가 연속이나 미분가능해야 한다는 전제조건이 없다.
따라서 불연속 혹은 미분가능하지 않아도 함숫값만 존재한다면 극대와 극소가 존재할 수 있다.

ex) $x=a$에서 불연속해도 $x=a$에서 극대 ex) $x=a$에서 미분가능하지 않아도 $x=a$에서 극소

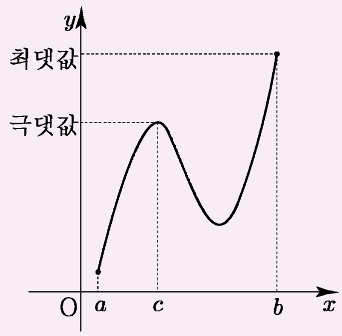




Tip 3 극대와 극소는 여러 개 존재할 수 있고
극댓값이 극솟값보다 항상 큰 것은 아니다.



Tip 4 극댓값(극솟값)이 꼭 최댓값(최솟값)은 아니다.



Tip 5 $f(x)$가 상수함수라면 $x=a$에서 극값을 갖는 a는 무수히 많다.
이 때 함숫값 $f(a)$는 극댓값도 되고 극솟값도 된다.

개념 파악하기 - (12) 함수의 그래프

※ 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 과정으로 그릴 수 있다.

① 도함수 $f'(x)$를 그린다.

② $f'(x)$의 부호를 판단하여 증감을 고려한 대략적인 $f(x)$를 그린다.

③ 극댓값 or 극솟값 or x절편 or y절편 등을 고려하여 디테일하게 함숫값을 표시한다.

④ 최종적으로 ②+③를 고려하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

Tip 1 ①에서 $f'(x)$의 부호만 판단하면 되므로 $f'(x)$를 그릴 때, y축은 생략가능하다.

Tip 2 $f'(x)$의 부호만 판단하면 되므로 $f'(x)$에서 항상 양수인 부분은 고려하지 않아도 된다.
ex 1) $f'(x)=10x(x-1)$이라면 $f'(x)=x(x-1)$라 두고 판단해도 된다.
ex 2) $f'(x)=(x^2+1)x$이라면 $f'(x)=x$라 두고 판단해도 된다.
이 때, 두 번째 $f'(x)$를 Semi 도함수라고 하자. (소통을 위한 필자와의 약속)

Tip 3 위와 같은 방식 즉, 증감표를 그리지 않고 $f'(x)$를 그려서 $f'(x)$의 부호를 판단하려면 x절편을 바탕으로 3차 이상의 다항함수를 빨리 그릴 수 있어야한다. (방법은 아래와 같다.)

※ x절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 1 단계 – **시작 방향 정하기**

① 홀수차 함수 ex) 일차함수, 삼차함수....

(i) 최고차항의 계수가 양수일 때, 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

(ii) 최고차항의 계수가 음수일 때, 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

Tip 일차함수를 생각하면 된다.

② 짝수차 함수 ex) 이차함수, 사차함수....

(i) 최고차항의 계수가 양수일 때, 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

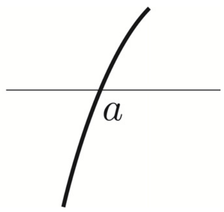
(ii) 최고차항의 계수가 음수일 때, 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

Tip 이차함수를 생각하면 된다.

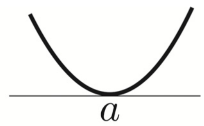
※ x절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 2 단계 - **x절편 이용하기**

$f(x)$가 $(x-a)^n$을 인수로 가질 때, n에 따라 case분류할 수 있다.

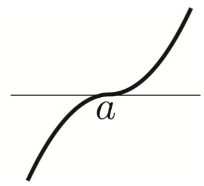
① $n=1 \Rightarrow (x-a)$



② $n=2 \Rightarrow (x-a)^2$ ($n \geq 2$인 짝수)



③ $n=3 \Rightarrow (x-a)^3$ ($n \geq 3$인 홀수)



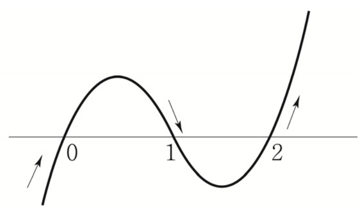
Tip ②은 스치는 접선형태(스접)를 갖고, ③은 뚫는 접선형태(뚫접)를 갖는다.
쉽게 말해서 ②은 $y=x^2$같은 느낌이고, ③은 $y=x^3$같은 느낌이다.

※ x절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 3 단계 - **실전연습**

ex 1) $y=x(x-1)(x-2)$

① 삼차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

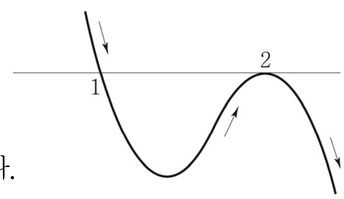
② x절편이 0, 1, 2이고 x, $(x-1)$, $(x-2)$를 인수로 가지므로
$x=0$, 1, 2을 통과해서 그려주면 된다.



ex 2) $y=-(x-1)(x-2)^2$

① 삼차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

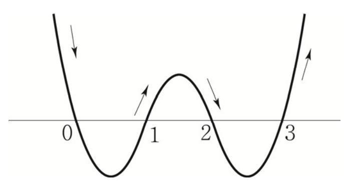
② x절편이 1, 2이고 $(x-1)$, $(x-2)^2$를 인수로 가지므로
$x=1$를 통과하고 $x=2$에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



ex 3) $y=x(x-1)(x-2)(x-3)$

① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

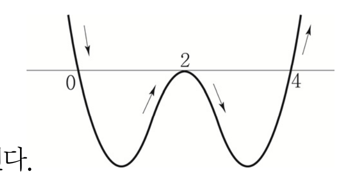
② x절편이 0, 1, 2, 3이고
x, $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$를 인수로 가지므로
$x=0$, 1, 2, 3을 통과해서 그려주면 된다.



ex 4) $y=x(x-2)^2(x-4)$

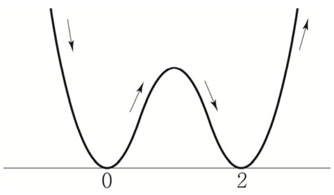
① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

② x절편이 0, 2, 4이고 x, $(x-2)^2$, $(x-4)$를 인수로 가지므로
$x=0$, 4를 통과하고 $x=2$에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



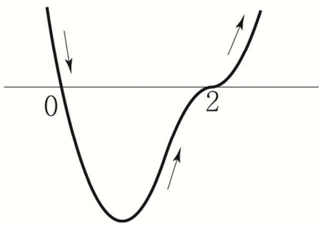
ex 5) $y=x^2(x-2)^2$

① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.
② x절편이 0, 2이고 x^2, $(x-2)^2$를 인수로 가지므로
$x=0$, 2에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



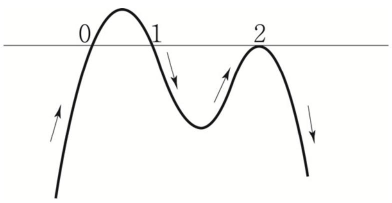
ex 6) $y=x(x-2)^3$

① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로
위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.
② x절편이 0, 2이고 x, $(x-2)^3$를 인수로 가지므로
$x=0$를 통과하고 $x=2$에서 뚫는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



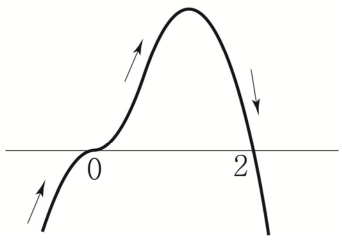
ex 7) $y=-x(x-1)(x-2)^2$

① 사차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로
아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.
② x절편이 0, 1, 2이고 x, $(x-1)$, $(x-2)^2$를 인수로 가지므로
$x=0$, 1를 통과하고 $x=2$에서 스치는 접선을
갖도록 그려주면 된다.



ex 8) $y=-x^3(x-2)$

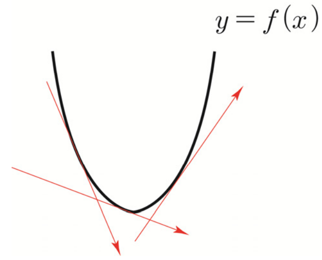
① 사차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로
아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.
② x절편이 0, 2이고 x^3, $(x-2)$를 인수로 가지므로
$x=2$를 통과하고 $x=0$에서 뚫는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



개념 파악하기 - (16) 함수의 그래프 심화특강

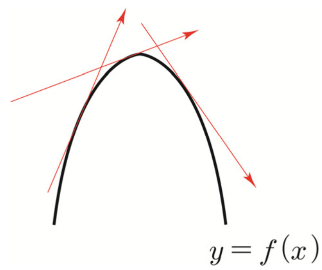
※ 함수 $f'(x)$의 도함수를 함수 $y=f(x)$의 **이계도함수**라 하고 기호로 $f''(x)$와 같이 나타낸다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서



① $f''(x)>0$이면 $f'(x)$는 증가하므로 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기도 증가한다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

ex) $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x \Rightarrow f''(x)=2>0$



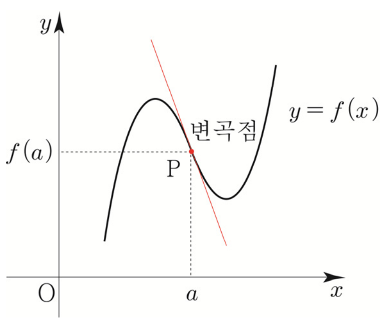
② $f''(x)<0$이면 $f'(x)$는 감소하므로 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기도 감소한다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 이 구간에서 위로 볼록하다.

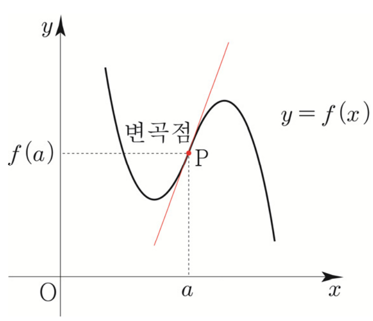
ex) $f(x)=-x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x \Rightarrow f''(x)=-2<0$

Tip 1 $f''(x)$는 $f'(x)$의 도함수이므로 $f''(x)$의 부호로 $f'(x)$의 증감을 파악할 수 있다.

Tip 2 사실 이계도함수는 수2가 아닌 미적분에서 배우는 내용이다. 하지만 이계도함수를 학습하고 나면 삼차함수와 사차함수를 가볍게 위에서 내려다 볼 수 있다. (우쭈쭈쭈 같은 느낌?) 그렇게 어려운 개념도 아니고 학습하는 것을 추천한다.

※ 곡선의 모양이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$를 경계로 하여 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀌거나 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀔 때, 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 **변곡점**이라 한다.
즉, 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 **부호가 바뀌면**
점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.



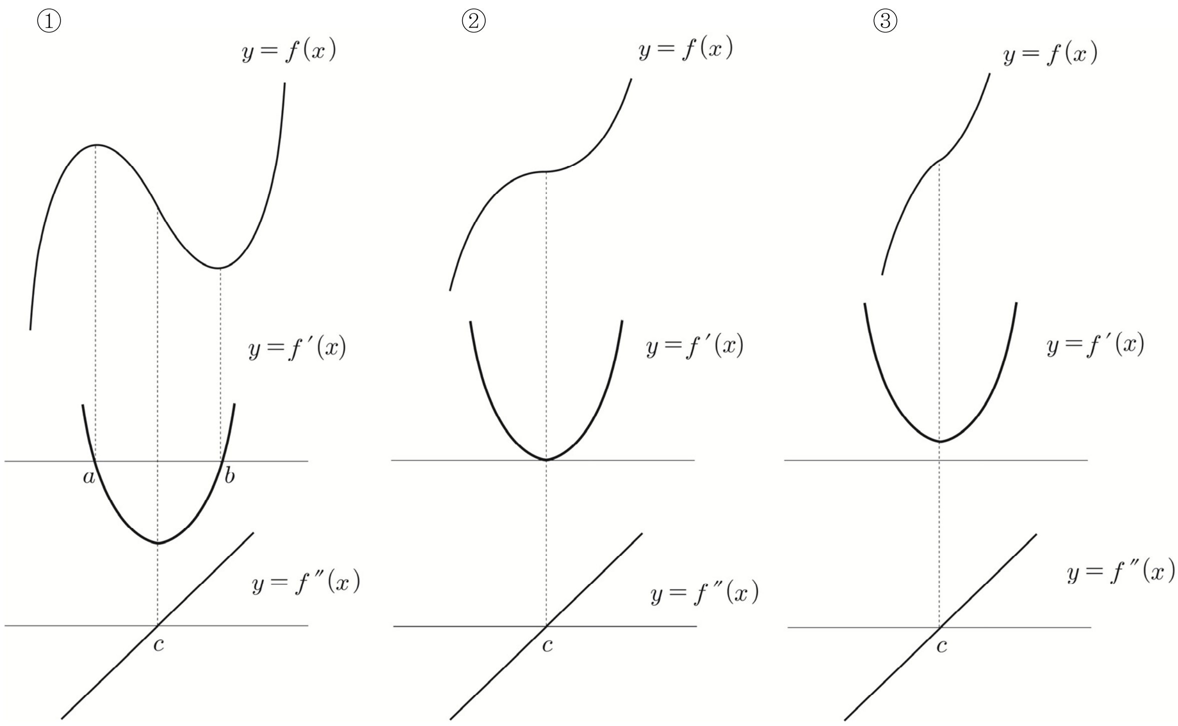


Tip 1 $f''(a)=0$이면 항상 변곡점일까? 답은 "아니다."이다. 예를 들어 $f(x)=x^4$는 $f''(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)>0$이므로 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 아니다.

Tip 2 특별히 변곡점에서의 접선을 **변곡접선**이라 부른다. 특히 삼차함수에서의 변곡접선은 접선들 중 기울기가 ($f(x)$의 최고차항의 계수 부호에 따라) 제일 크거나 작으므로 출제하기 아주 좋은 포인트이다. ($f'(x)$의 그래프를 그려보면 아주 자명하다.)
참고로 나형에서도 변곡접선을 출제하기 시작했으니 이번 기회에 확실히 알아두자.

개념 파악하기 - (17) 삼차함수의 그래프 심화특강

※ 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 실근의 개수에 따라 case분류할 수 있다.



Tip 1 위의 세 유형은 머릿속에 완벽히 각인 시켜야한다. 삼차함수 개형은 몇 가지? 3가지!

Tip 2 ①에서 $(c,\ f(c))$가 $y=f(x)$의 변곡점이다. $y=f''(x)$를 그리지 않고도 $y=f(x)$의 변곡점을 찾을 수 있다. $x=c$에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로 $x=c$에서 $f'(x)$는 극값을 갖는다.
즉, $f'(x)$가 극값을 갖는 점의 x값이 $y=f(x)$의 변곡점의 x값이 된다.

Tip 3 증가함수, 감소함수(최고차항의 계수가 음수일 때), 일대일 대응, 역함수 존재, 극값 존재 X
⇒ ②, ③ 개형
⇒ 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 해로 갖는다. (판별식 $D \le 0$)

Tip 4 ③에서 $y=f'(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 c이므로 $(c,\ f(c))$은 $y=f(x)$의 변곡점이다.

Tip 5 삼차함수를 두 번 미분하면 일차함수이므로 $f''(x)=Ax+B$는 반드시 x축과 만나고,
x축과 만나는 점을 경계로 부호가 변하므로 모든 삼차함수는 변곡점을 갖는다.

Tip 6 모든 삼차함수는 변곡점에 대하여 대칭되어 있다.

※ 삼차함수의 변곡점임을 알려주는 식

(i) $f(x)+f(2a-x)=2b$

위의 식은 $f(x)$는 점$(a,\ b)$에 대칭되어 있다는 뜻이다. 모든 3차 함수는 변곡점에 대하여 대칭되어 있으므로 $(a,\ b)$는 $y=f(x)$의 변곡점이다.

(ii) $f(x)$가 삼차함수 일 때, $f'(x)$는 $x=a$에서 음수인 최솟값을 갖는다.

$f'(x)$가 $x=a$에서 최솟값, 최댓값을 갖는다는 의미는 $f'(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 a라는 의미이므로 $(a,\ f(a))$가 $y=f(x)$의 변곡점임을 알려주지만 굳이 음수라고 한 이유는 극대와 극소를 모두 가지고 있는 삼차함수의 개형(①개형)임을 알려주기 위함이다.

(iii) $f(x)$가 삼차함수 일 때, $f'(x)=f'(2a-x) \Leftrightarrow f'(a-x)=f'(a+x)$

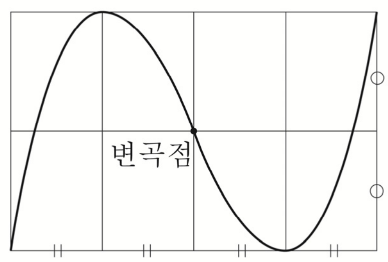
$f'(x)$가 $x=a$에 대하여 대칭되어 있다는 의미이다. 즉, $f'(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 a이므로 $(a,\ f(a))$는 $y=f(x)$의 변곡점이다.

(iv) $f(x)$가 삼차함수 일 때, $f'(1)=0,\ f'(3)=0$

$f'(x)$는 이차함수이므로 꼭짓점의 x좌표는 $x=1$과 $x=3$의 중점인 $x=2$이다.

따라서 $(2,\ f(2))$는 $y=f(x)$의 변곡점이다.

※ 모든 삼차함수는 오른쪽 BOX에 넣을 수 있다.



Tip 작은 사각형은 직사각형이 될 수도 있고 정사각형이 될 수도 있다. 즉, 문제조건에 따라 달라진다.
위 BOX를 통해 자연스럽게 삼차함수의 비율관계를 알 수 있다.

※ 극값차 공식

$f'(x)$가 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}|f'(x)|dx = S$ (표현형)

$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}-f'(x)\,dx = f(\alpha)-f(\beta)$ 이므로 넓이 S는 극값차이다.

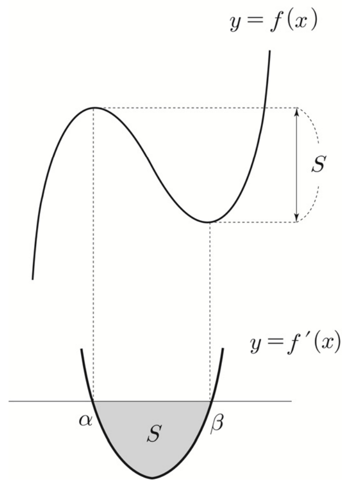
여기서 넓이 S를 구할 때 우리가 자주 쓰는 적분 공식을 적용시켜보자.

$f'(x)$의 최고차항의 계수를 A라고 하면 $S=\dfrac{|A|}{6}(\beta-\alpha)^3$

여기서 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a라 하면 $3a=A$이므로

즉, $S=\dfrac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$ 이다.

따라서 극값차 $=\dfrac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$이다.



Tip 적분을 배우지 않은 학생은 우선 공식만이라도 외워두도록 하자.
계산과정을 현격하게 줄여줄 수 있으니 외우는 것을 추천한다.

ex) 삼차함수 $f(x)=4x^3+ax^2+bx+c$가 $x=1$, $x=2$에서 극값을 가지고 $f(1)=10$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

$f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, $x=2$에서 극소이므로

$f(1)-f(2)=\frac{|4|}{2}(2-1)^3 \Rightarrow f(2)=10-2=8$

Tip 물론 $f'(1)=0$, $f'(2)=0$, $f(1)=10$을 이용하여 상수 a, b, c를 찾아서 $f(2)$를 구해도 된다.

※ **식 세우기 Technic**

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1일 때,

① $f(1)=f(2)=f(3)$

$f(1)=f(2)=f(3)=k$ 라 두면 $f(1)-k=0$, $f(2)-k=0$, $f(3)-k=0$
$f(x)-k=g(x)$라 하면 $g(1)=0$, $g(2)=0$, $g(3)=0$을 만족하므로
$g(x)$는 $(x-1)(x-2)(x-3)$를 인수로 갖는다.
$-k$는 $f(x)$의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지 않으므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.
따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x)-k=(x-1)(x-2)(x-3)$이다.

② $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$

$f(1)-1=0$, $f(2)-2=0$, $f(3)-3=0$
$f(x)-x=g(x)$라 하면 $g(1)=0$, $g(2)=0$, $g(3)=0$을 만족하므로
$g(x)$는 $(x-1)(x-2)(x-3)$를 인수로 갖는다.
$-x$는 $f(x)$의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지 않으므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.
따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-3)$이다.

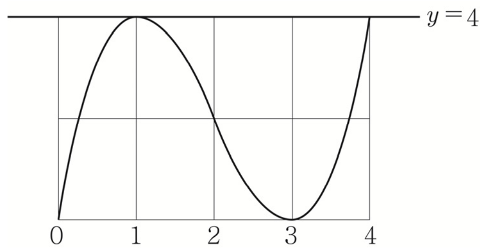
③ 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$

기함수이므로 x^n(n은 홀수)만 존재해야 한다. 즉, $f(x)=x^3-ax$이다.

Tip 만약 $f(x)=x^3+ax$라 두면 $f'(x)=3x^2+a$이므로
방정식 $f'(x)=3x^2+a=0$의 해가 $x=\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}$ 이 된다. 물론 $a<0$라는 전제 조건을
사용하여 식을 전개해도 되지만 루트 안에 $-$가 있어 실수하기 쉽다.
따라서 처음부터 $f(x)=x^3-ax$라 두면 방정식 $f'(x)=0$의 해가 $x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$ $(a>0)$이므로
실수할 여지를 줄일 수 있다.
물론 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$일 때는 $f(x)=x^3+ax$라 두는 편이 좋긴 하지만
빈도수면에서($\because$ 극값을 갖는 개형의 빈도가 더 多) $f(x)=x^3-ax$가 유리하다.

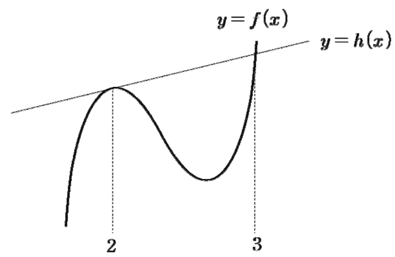
④ $f(x)$는 $x=1$일 때, 극댓값 4를 갖고, $x=3$일 때, 극솟값을 갖는다.

박스를 그리면 다음과 같다.



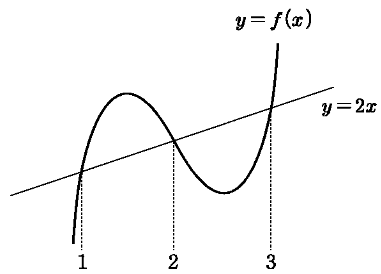
방정식 $f(x)=4$ 는 $x=1$에서 중근과 $x=4$에서 하나의 실근을 갖는다.
$f(x)-4=g(x)$라 하면 방정식 $g(x)=0$ 은 $x=1$에서 중근과 $x=4$에서 하나의 실근을 가지므로 $g(x)$는 $(x-1)^2(x-4)$를 인수로 갖는다.
따라서 $g(x)=(x-1)^2(x-4) \Rightarrow f(x)-4=(x-1)^2(x-4)$이다.

⑤ 직선 $h(x)$가 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $x=2$에서 접하고 $x=3$에서 $f(x)$와 만난다.



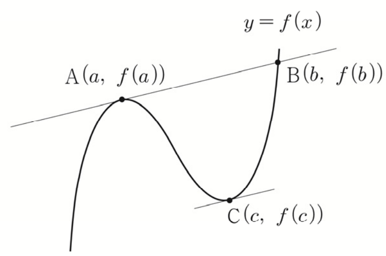
방정식 $f(x)=h(x)$는 $x=2$에서 중근 $x=3$에서 실근을 갖는다.
$f(x)-h(x)=g(x)$라 하면 방정식 $g(x)=0$은 $x=2$에서 중근과 $x=3$에서 하나의 실근을 가지므로 $g(x)$는 $(x-2)^2(x-3)$를 인수로 갖는다.
따라서 $g(x)=(x-2)^2(x-3) \Rightarrow f(x)-h(x)=(x-2)^2(x-3)$이다.

⑥ $y=2x$와 삼차함수 $f(x)$가 $x=1,\ 2,\ 3$에서 만난다.



$g(x)=f(x)-2x$ 라 하면 $g(1)=0,\ g(2)=0,\ g(3)=0$이므로
$g(x)$는 $(x-1)(x-2)(x-3)$를 인수로 갖는다.
따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$
$\Rightarrow f(x)-2x=(x-1)(x-2)(x-3)$이다.

※ 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중 접점이 아닌 점을 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$라 하자. 함수 $f(x)$의 구간 $[a,\ b]$에서의 평균변화율과 $x=c$에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, c를 $a,\ b$로 표현해보자.



$f'(a)=f'(c)=m$
접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)=g(x)$
최고차항의 계수 k라 두고 식을 세우면 $f(x)-g(x)=k(x-a)^2(x-b)$

양변을 미분하면
$f'(x)-g'(x)=2k(x-a)(x-b)+k(x-a)^2 \Rightarrow \ f'(x)-m=2k(x-a)(x-b)+k(x-a)^2$
$x=c$ 대입하면 $f'(c)-m=2k(c-a)(c-b)+k(c-a)^2$
$0=k(c-a)(2(c-b)+c-a) \Rightarrow 0=k(c-a)(3c-2b-a)$
$a \neq c$ 이므로 $c=\dfrac{a+2b}{3}$ 이다. 즉, c는 선분 AB의 2:1내분점의 x좌표와 같다.

Tip 위에서 배운 박스를 이용하면 $c=\dfrac{a+2b}{3}$ 임이 자명하다.

Training_1 step
필수 유형편

❷ 도함수의 활용

Theme ① 접선의 기울기

001

곡선 $y=2x^3-ax^2+3x+b$가 점 $(1, 2)$를 지나고 이 점에서의 접선의 기울기가 -1일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

002

곡선 $y=-x^3+ax^2+bx+c$ 위의 두 점 $(-1, 4)$, $(1, -2)$에서의 접선이 서로 평행할 때, $a-3b+4c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

003

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=4$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, a)$에서의 기울기는 m이다. $a+m$의 값을 구하시오. (단, a, m은 상수이다.)

004

곡선 $y=x^3-3x^2+5x+2$의 접선의 기울기의 최솟값을 m, 이때 접점의 좌표는 (a, b)이다. $m+2a+3b$의 값을 구하시오. (단, m, a, b는 상수이다.)

005

곡선 $y=-\frac{1}{3}x^3+ax^2+x+1$의 접선의 기울기의 최댓값이 $2a$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

006

곡선 $y=x^3-3x+2$에 접하는 직선의 기울기를 m라 할 때, 접점의 개수를 $f(m)$이라 하자. $f(-3)+f(-1)+f(1)$의 값을 구하시오.

Theme ② 접선의 방정식-곡선 위의 점이 주어질 때

007

곡선 $y=x^3-6x+5$위의 점 $(-1,\ 10)$에서의 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, $m+3n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.)

008

곡선 $y=-2x^3+4x$위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선이 점 $(-5,\ b)$를 지날 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

009

곡선 $y=x^3-3x^2+2$ 위의 두 점 $(-1,\ -2)$, $(1,\ 0)$에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 할 때, 두 직선 l_1, l_2의 교점은 $(a,\ b)$이다. $3a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

010

함수 $f(x)=x^3-ax^2+4x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(0,\ f(0))$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{17}$ 일 때, 점 Q의 y좌표를 구하시오. (단, a는 양의 상수이다.)

011

곡선 $y=x^3-2x^2+1$위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

012

곡선 $y=-2x^3+4x$ 위의 점 $(1,\ 2)$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $4ab$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

013

곡선 $y=x^3+ax+b$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{7}$일 때, $b-2a$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

014

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-3}{x^2-4}=-4$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ f(-2))$에서의 접선의 방정식은 $y=mx+n$ 이다. $m+2n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.)

063

함수 $f(x)=x^3-3x^2+k$의 극댓값과 극솟값의 곱이 12이하가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

064

최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이다.
> (나) 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 0을 갖는다.

$f(x)$의 극댓값을 구하시오.

065

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(4-x)$이다.
> (나) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$f(1)=10$일 때, $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

066

함수 $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^3+ax$이 극솟값을 갖도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

067

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+kx+1$이 열린구간 $(0,\ 2)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 실수 k의 범위는 $a<k<b$이다. $16(a+b)$의 값을 구하시오.

068

함수 $f(x)=-x^4+2x^3+kx^2$이 극솟값을 갖도록 하는 10이하의 정수 k의 개수를 구하시오.

069

함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{(a+1)}{2}x^2+ax+2$가 극댓값을 갖지 않도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오.

070

상수 $a(a>0)$에 대하여

$$\text{함수 } f(x)=\begin{cases} -x^3(x+4a) & (x<0) \\ x^2(x-3a) & (x\ge 0) \end{cases}$$

의 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때, $81a$의 값을 구하시오.

071

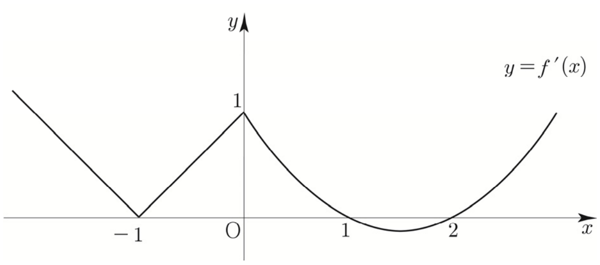
함수 $f(x)$의 도함수

$$f'(x)=\begin{cases} |x+1| & (x<0) \\ \frac{1}{2}(x-1)(x-2) & (x\ge 0) \end{cases}$$

에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

〈보기〉

ㄱ. 열린구간 $(-2,\ 3)$에서 $f'(x)$는 3개의 극값을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 증가한다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
ㄹ. 열린구간 $(-2,\ 3)$에서 함수 $f(x)$는 2개의 극값을 갖는다.
ㅁ. 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(1)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만난다.



Theme ⑫ 함수의 극대, 극소의 활용

072

함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x$는 $x=a$에서 극댓값 b를 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선을 l이라 할 때, 점 $(a,\ b)$와 직선 l사이의 거리는 d이다. $10d^2$의 값을 구하시오.

073

다항함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$
(나) $x=0$과 $x=2$에서 극값을 갖는다.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1-2h)}{h}$의 값을 구하시오.

074

최고차항의 계수가 자연수인 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $(x^2+2)f(x)$는 $x=0$에서 극값 6을 갖는다.
(나) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.
(다) $\frac{12}{f'(2)}$는 자연수이다.

$f(4)$의 값을 구하시오.

109

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $(t>0)$에서의 위치 x가 $x=\frac{1}{4}t^4-t^3-\frac{9}{2}t^2$ 이다.

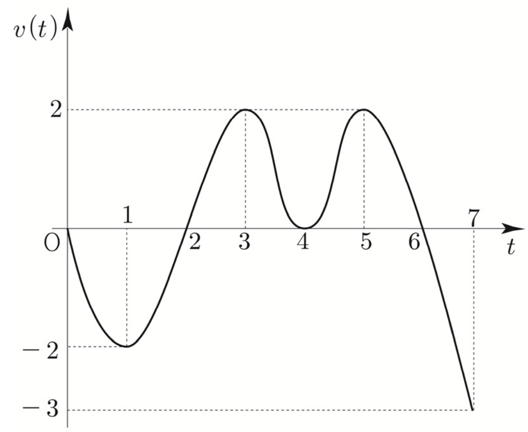
$0<t\le 4$에서 점 P의 속도를 v라 할 때, $|v|$의 최댓값을 구하시오.

110

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $(t>0)$에서의 위치 x가 $x=t^3+at+b$ 이다. 점 P가 원점을 지날 때의 속도와 가속도가 각각 13, 12일 때, $a-b$의 값을 구하시오.

111

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같을 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.



〈보기〉

ㄱ. $t=1$일 때와 $t=3$일 때, 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.
ㄴ. $0<t<7$일 때, 점 P의 가속도가 0이 되는 순간은 4번이다.
ㄷ. $5<t<7$일 때, 점 P의 속도는 감소한다.
ㄹ. $t=6$일 때, 점 P의 가속도는 음의 값이다.
ㅁ. $t=2$일 때, 점 P는 원점을 지난다.
ㅂ. 점 P는 7초 동안 운동 방향을 2번 바꾼다.
ㅅ. $t=3$일 때, 점 P는 정지한다.
ㅇ. $t=3$일 때와 $t=5$일 때, 점 P의 위치는 서로 같다.

Theme ④ 부정적분과 미분의 관계의 활용

015

다항함수 $f(x)$가 $\int f(x)\,dx+2x^3=xf(x)$ 를 만족시킨다. $f(0)=2$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

016

다항함수 $f(x)$가
$\int xf(x)\,dx+f(x)=x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+x$ 를
만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

017

다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가
$\int (x-1)f'(x)\,dx=(x-1)^3(x-3)$ 이고 $f(0)=0$
일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

018

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$이고,
$F(x)+xf(x)=4x^3-6x+2$ 이다.
함수 $g(x)=\int F(x)\,dx$의 극솟값이 0일 때,
$g(2)$의 값을 구하시오.

Theme ⑤ 부정적분과 함수의 연속성

019

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가
$f'(x)=\begin{cases} 4x+1 & (x<0) \\ k & (x\geq 0) \end{cases}$ 이고 $f(-1)=0$, $f(1)=1$
일 때, $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는
상수 k의 값을 구하시오.

020

연속함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가
$f'(x)=|x-1|+x$이고 $f(0)=3$일 때,
$f(-2)+f(2)$의 값을 구하시오.

021

연속함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가
$f'(x)=\begin{cases} -3x^2 & (|x|<1) \\ 2 & (|x|>1) \end{cases}$ 이고 $f(-2)=3$일 때,
$f(-2)f(0)f(2)$의 값을 구하시오.

Theme ⑫ 정적분으로 정의된 함수 – New 함수

054

함수 $f(x)=\int_{\sqrt{2}}^{x}\{3|t|-t\}dt$에 대하여

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 때,

접점을 A라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}^2$의 값을 구하시오.

(단, 점 O는 원점이다.)

055

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)=\int_{-1}^{1}|t-x|dt$의

최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

056

함수 $f(x)=\begin{cases}-2x-2 & (x<0)\\ x^2-x-2 & (x\ge 0)\end{cases}$ 에 대하여

방정식 $\int_{a}^{x}f(t)\,dt=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록

하는 상수 a의 개수를 구하시오.

057

함수 $f(x)=x^3-3x^2$에 대하여 함수 $g(x)$가

$g(x)=\int_{0}^{x}|f'(t)|dt$ 일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을

있는 대로 고르시오.

〈보기〉

ㄱ. $g(0)=0$

ㄴ. $0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)+f'(x)=0$이다.

ㄷ. 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$ 이다.

ㄹ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

ㅁ. $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $g(x_1)<g(x_2)$이다.

ㅂ. 함수 $g(x)$의 역함수는 존재하지 않는다.

ㅅ. 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.

ㅇ. 함수 $|g(x)-g(2)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

ㅈ. $g(-1)+g(1)+g(4)=22$

Training_2 step
기출 적용편

❶ 부정적분과 정적분

058 2020학년도 고3 9월 평가원 나형

$\int_0^2 (3x^2+6x)dx$의 값은? [3점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

059 2018학년도 고3 9월 평가원 나형

함수 $f(x)=\int_1^x (t-2)(t-3)dt$에 대하여

$f'(4)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

060 2013년 고3 7월 교육청 A형

함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2-2x+\int_0^1 tf(t)\,dt$를

만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{17}{6}$ ④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

061 2014학년도 수능 A형

실수 a에 대하여 $\int_{-a}^a (3x^2+2x)dx=\frac{1}{4}$일 때,

$50a$의 값을 구하시오. [3점]

062 2016학년도 고3 9월 평가원 A형

함수 $f(x)$가 $f(x)=\int_0^x (2at+1)dt$이고

$f'(2)=17$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

063 2012년 고3 7월 교육청 나형

실수 전체에서 정의된 연속함수 $f(x)$가

$f(x)=f(x+4)$ 를 만족하고

$$f(x)=\begin{cases} -4x+2 & (0 \le x < 2) \\ x^2-2x+a & (2 \le x \le 4) \end{cases}$$

일 때, $\int_9^{11} f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① -8 ② $-\frac{26}{3}$ ③ $-\frac{28}{3}$ ④ -10 ⑤ $-\frac{32}{3}$

064 2013학년도 수능 나형

함수 $f(x)=x+1$에 대하여

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx = k\left(\int_{-1}^1 f(x)dx\right)^2$$

일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

079 2018년 고3 7월 교육청 나형

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=f(5)$
(나) 방정식 $f(x)-p=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되게 하는 실수 p의 최댓값은 $f(2)$이다.

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

① 25 ② 28 ③ 31 ④ 34 ⑤ 37

080 2016학년도 수능 A형

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$
를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$ 일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

081 2016년 고3 7월 교육청 나형

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\int xg(x)dx,\quad \frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$$

를 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

082 2014년 고3 7월 교육청 A형

양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\int_0^x (t-a)(t-b)dt$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극값을 갖는다.
(나) $f(a)-f(b)=\frac{1}{6}$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

083 2019학년도 사관학교 나형

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x\to -2}\frac{1}{x+2}\int_{-2}^{x} f(t)dt=12$
(나) $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x}=1$

084 2016학년도 수능 A형

이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 |f(x)|dx=-\int_0^2 f(x)dx=4$
(나) $\int_2^3 |f(x)|dx=\int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

085 2018년 고3 7월 교육청 나형

함수 $f(x)=(x-1)|x-a|$의 극댓값이 1일 때, $\int_0^4 f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{11}{6}$ ⑤ 2

086 2013학년도 수능 나형

삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여

함수 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록

하는 양수 a의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

087 2008년 고3 10월 교육청 가형

모든 실수 x에 대하여 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)g(x)=x^3+3x^2-x-3$
(나) $f'(x)=1$
(다) $g(x)=2\int_1^x f(t)dt$

$\int_0^3 3g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

088 2020학년도 수능 나형

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$\int_1^x f(t)dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.
(나) $\int_0^2 f(x)dx=5\int_{-1}^1 xf(x)dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

089 2009학년도 고3 9월 평가원 가형

함수 $f(x)=\begin{cases} -1 & (x<1) \\ -x+2 & (x\ge 1)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\int_{-1}^x (t-1)f(t)dt$라 하자.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $g(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 증가한다.
ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념 파악하기 - (2) 곡선과 x축 사이의 넓이

※ 곡선과 x축 사이의 관계

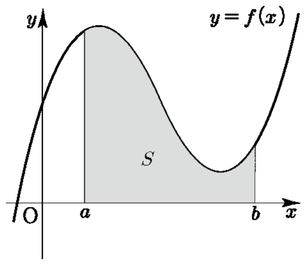
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $S=\int_a^b |f(x)|dx$이다.

※ 위의 명제를 증명해보자.

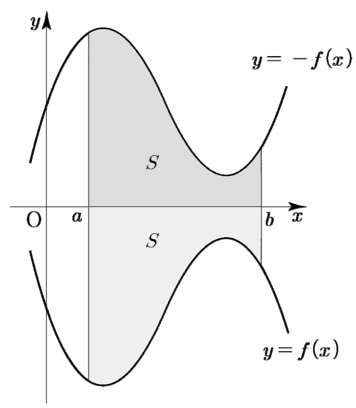
① 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때, 정적분과 넓이의 관계에 따라 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\int_a^b f(x)dx$이다.



② 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때,
곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=-f(x)$와 x축에 대하여 대칭이고 $-f(x)\geq 0$이므로
곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

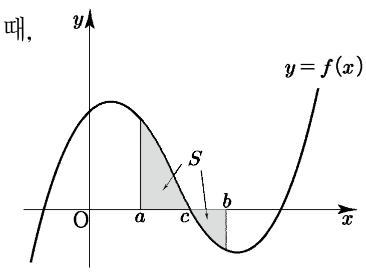
$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\int_a^b |f(x)|dx$이다.



③ 닫힌구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\geq 0$이고, 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때,
곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx$

$=\int_a^b |f(x)|dx$ 이다.



Tip 1 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$가 양의 값과 음의 값을 모두 가질 때는 $f(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 구한다.

Tip 2 $\int_a^b |f(x)|dx$는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 나타내는 표현형이다. 즉, 보자마자 x축으로 둘러싸인 넓이라고 Reading할 수 있어야한다.
실제 계산할 때는 절댓값을 벗긴 후 계산하고 이때 절댓값을 벗긴 적분형태인

① $\int_a^b f(x)dx$, ② $\int_a^b \{-f(x)\}dx$, ③ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx$는

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 나타내는 계산형이다.

Tip 3 $\int_a^b |f(x)|dx$는 함수 $|f(x)|$($y=f(x)$에서 x축 아래에 있는 부분을 x축 위로 접어올린 형태)를 a에서 b까지 적분했다고 볼 수도 있다.

[예제 2]

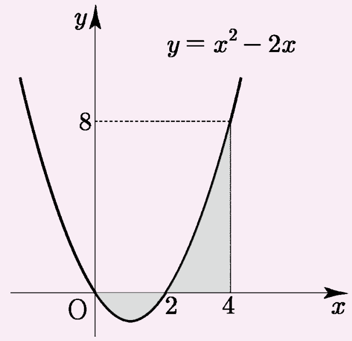
곡선 $y=x^2-2x$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

✍ 풀이

곡선 $y=x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x=0$, $x=2$
닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $y\le 0$, 닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 $y\ge 0$이므로
구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^2(-x^2+2x)dx+\int_2^4(x^2-2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^4$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=8$$



[개념 확인문제 2]

다음 곡선과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(1) $y=-x^2+3x-2$

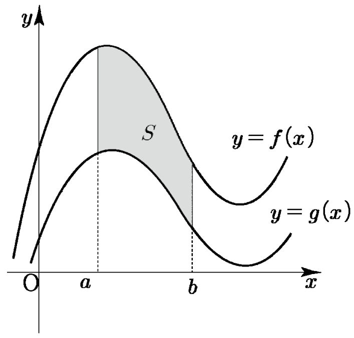
(2) $y=x^3-x$

개념 파악하기 - (3) 두 곡선 사이의 넓이

※ 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

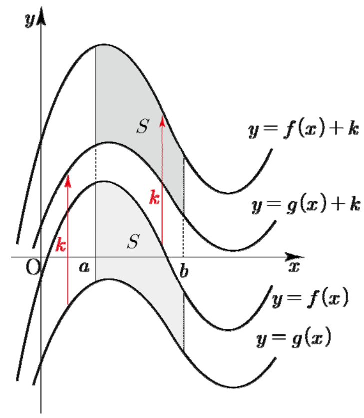
$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$이다.



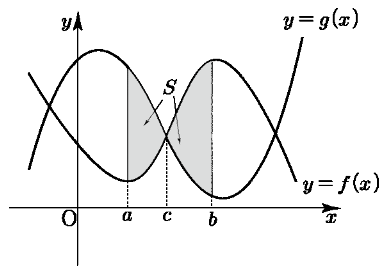
※ 위의 명제를 증명해보자.

① 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \geq g(x) \geq 0$일 때,
$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$이다.

② 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \geq g(x)$이고 $g(x)$의 값이 음수인 경우가 있을 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여 $f(x)+k \geq g(x)+k \geq 0$이 되도록 할 수 있다.
이때 평행이동한 도형의 넓이는 변하지 않으므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는
$S=\int_a^b \{f(x)+k\}dx-\int_a^b \{g(x)+k\}dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$이다.



③ 닫힌구간 $[a,\ c]$에서 $f(x) \geq g(x)$이고, 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 $f(x) \leq g(x)$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는
$$S=\int_a^c \{g(x)-f(x)\}dx+\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_a^c |f(x)-g(x)|dx+\int_c^b |f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\text{이다.}$$



Tip 1 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 대소가 바뀔 때는 $f(x)-g(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 구한다.

Tip 2 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 나타내는 **표현형**이다. 즉, 보자마자 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$으로 둘러싸인 넓이라고 Reading할 수 있어야한다.
실제 계산할 때는 절댓값을 벗긴 후 계산하고 이때 절댓값을 벗긴 적분형태인
① $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$, ② $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$, ③ $\int_a^c \{g(x)-f(x)\}dx+\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx$는
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 나타내는 **계산형**이다.

[예제 3]

두 곡선 $y=x^2-x$, $y=-x^2+3x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

✍ 풀이

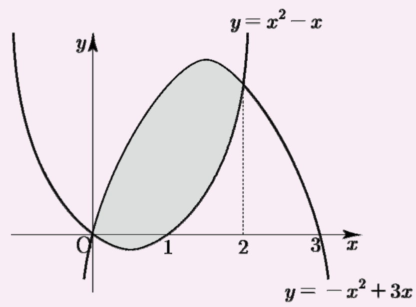
$x^2-x=-x^2+3x \Rightarrow 2x^2-4x=2x(x-2)=0$

두 곡선의 교점의 x좌표는 $x=0$, $x=2$

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $x^2-x \le -x^2+3x$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^2 \{(-x^2+3x)-(x^2-x)\}dx=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$



Tip 위에 있는 그래프에서 아래에 있는 그래프를 뺀 후 적분한다.

[개념 확인문제 3]

곡선 $y=-x^2+2$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

[예제 4]

곡선 $y=x^2+2x$와 세 직선 $y=x$, $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

✍ 풀이

$x^2+2x=x \ \Rightarrow \ x^2+x=x(x+1)=0$

곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x=-1$, $x=0$

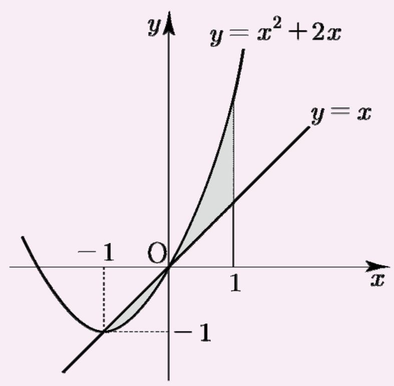
닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $x^2+2x \le x$, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서

$x^2+2x \ge x$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^0 \{x-(x^2+2x)\}dx+\int_0^1 \{(x^2+2x)-x\}dx$$

$$=\int_{-1}^0(-x^2-x)dx+\int_0^1(x^2+x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$

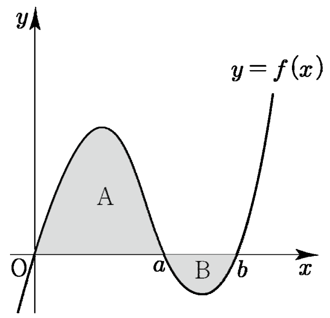


[개념 확인문제 4]

두 곡선 $y=-x^2$, $y=x^2-2x$와 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

개념 파악하기 - (4) 두 곡선 사이의 넓이의 활용

※ 오른쪽 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자.



① A의 표현형은 $\int_0^a |f(x)|dx$이고 계산형은 $\int_0^a f(x)dx$이다.

B의 표현형은 $\int_a^b |f(x)|dx$이고 계산형은 $\int_a^b \{-f(x)\}dx$이다.

Tip 여기서 $\int_a^b f(x)dx=-\mathrm{B}$인 것을 쉽게 알 수 있다.

즉, $f(x)\le 0$일 때(x축 아래에 있을 때) 정적분을 하면 넓이에 마이너스가 붙는다.

② $\int_0^b f(x)dx=\mathrm{A}-\mathrm{B}$

$$\int_0^b f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^b f(x)dx=\int_0^a f(x)dx-\int_a^b \{-f(x)\}dx=\mathrm{A}-\mathrm{B}$$

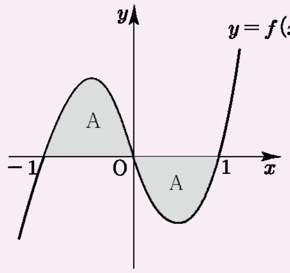
Tip 위와 같이 식으로 접근할 수도 있지만 자연스럽게 곡선 $y=f(x)$가 $a\le x\le b$에서 x축 아래에 있으므로 $\int_a^b f(x)dx=-\mathrm{B}$(넓이에 마이너스)이니 A에서 B를 빼면 $\int_0^b f(x)dx=\mathrm{A}-\mathrm{B}$가 된다. 라는 사고과정으로 접근하는 것을 추천한다.

즉, A에서 B만큼의 넓이가 상쇄된다고 생각하면 된다.

③ A가 B보다 크니 $\int_0^b f(x)dx>0$ 이다.

Tip 부정적분과 정적분 단원에서 $f(x)=x^3-x$라 할 때, $f(x)=x^3-x$가 기함수이므로 식 계산에 의해 $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$임을 보였다.

이와 달리 위에서 배운 개념을 바탕으로 넓이로 접근해보자.

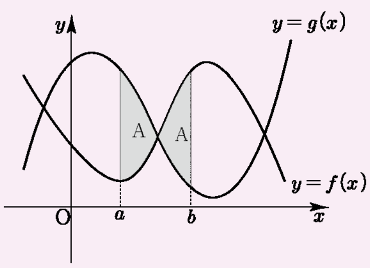


곡선 $y=f(x)$는 기함수이므로 $\int_{-1}^0 f(x)dx=\mathrm{A}$라 하면

$\int_0^1 f(x)dx=-\mathrm{A}$이므로 $\int_{-1}^1 f(x)dx=\mathrm{A}-\mathrm{A}=0$이라고 볼 수도 있다. 즉, A에서 A만큼의 넓이가 상쇄되니 0이 된다.

이와 마찬가지로 만약 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$으로 이루어진 두 부분의 넓이가 서로 같을 때,

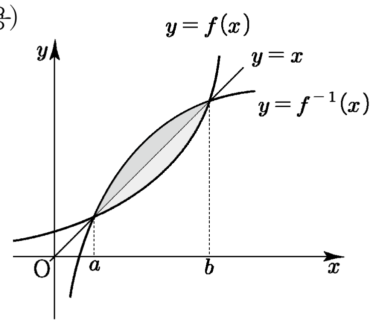
$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\mathrm{A}-\mathrm{A}=0$이다.



개념 파악하기 - (5) 역함수의 그래프와 넓이

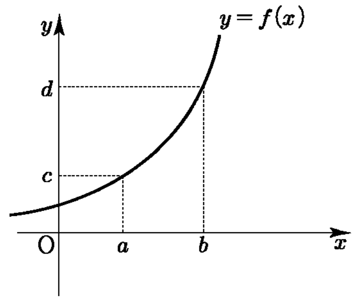
※ 함수 $y=f(x)$와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이 S는
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$사이의 넓이의 2배이다. (대칭성 활용)

$$S=\int_a^b |f(x)-f^{-1}(x)|dx=2\int_a^b |x-f(x)|dx$$

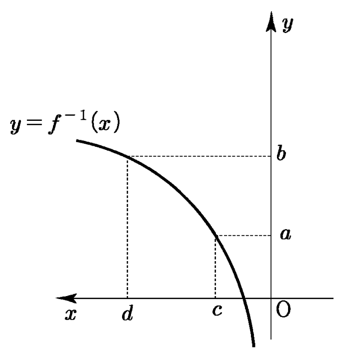


※ $y=f(x)$의 그래프로 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 해석하기

오른쪽 그림과 같이 증가함수 $y=f(x)$가
$f(a)=c$, $f(b)=d$일 때, a, b를 역함수로 표현하면?
단순히 x좌표와 y좌표를 서로 바꾸어 일차원적으로
$f^{-1}(c)=a$, $f^{-1}(d)=b$라고 할 수도 있다.

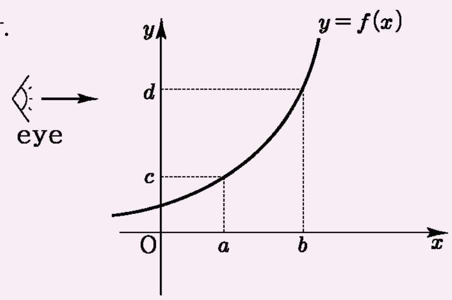


이와 달리 그래프로 접근하는 방법을 알아보자.
$y=f(x)$를 $y=x$에 대하여 대칭시키면
$y=f^{-1}(x)$가 되는 것을 알고 있다.
즉, x대신 y를 넣고 y대신 x를 넣어서 역함수를 구할 수 있다.
여기서 아이디어를 얻어 x축을 y축으로 보고
y축을 x축으로 보자는 것이다.
이를 이행하려면 시계반대방향으로 90° 회전을 시켜주기만 하면 된다.
즉, 너무나 자명하게 $y=f^{-1}(x)$에 $x=c$, $x=d$를 대입하면 함숫값이
$f^{-1}(c)=a$, $f^{-1}(d)=b$가 된다는 것을 바로 알 수 있다.



Tip 1 실제 $y=x$에 대하여 대칭시켜서 역함수를 구하면 오른쪽 그림에서
좌우 반전된 그림이 나온다. 90°로 회전시켰기 때문에 x축이 오른쪽에서 왼쪽으로
증가하기 때문이다. 정확한 그래프 개형이 중요한 것이 아니라 $y=f^{-1}(x)$에 $x=c$, $x=d$를
대입하면 함숫값이 $f^{-1}(c)=a$, $f^{-1}(d)=b$가 된다는 사실이 중요하다.

Tip 2 실전에서는 아래와 같이 옆에서 바라본다고 생각하면 된다.



[예제 5]

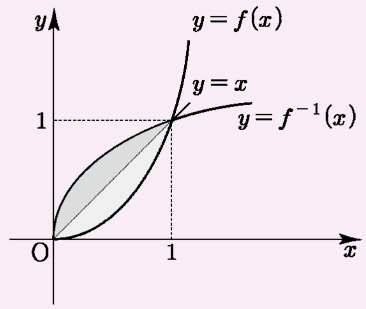
함수 $f(x)=x^2(x\geq 0)$의 그래프와 그 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

✍ 풀이

$x^2=x \Rightarrow x=0,\ x=1$

$y=x^2$와 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x=0,\ x=1$

$2\int_0^1 (x-x^2)dx=\frac{1}{3}$



[예제 6]

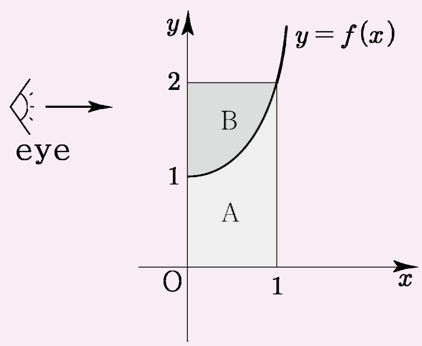
함수 $f(x)=x^2+1\ (x\geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 정적분 $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$의 값을 구하시오.

✍ 풀이

$\int_0^1 f(x)dx=\mathrm{A}$이고 옆에서 바라보면 $\int_1^2 g(x)dx=\mathrm{B}$이므로

$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 g(x)dx=\mathrm{A}+\mathrm{B}$이다.

즉, 직사각형 넓이이므로 $1\times 2=2$이다.



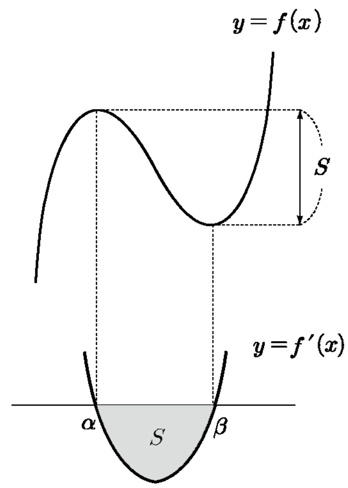
Tip 역함수 $g(x)$의 그래프를 직접 그리는 것이 아니라 $f(x)$의 그래프를 가지고 $\int_1^2 g(x)dx$를 해석하는 것이 핵심이다.

개념 파악하기 - (6) $f'(x)$의 넓이와 $f(x)$의 함숫값의 차이

※ $y=f'(x)$와 x축과 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}|f'(x)|dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{-f'(x)\}dx=[-f(x)]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=-f(\beta)-(-f(\alpha))=f(\alpha)-f(\beta)$$

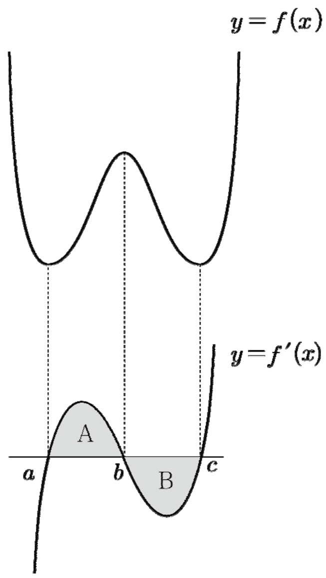
즉, 극값차가 S이다. $f'(x)$의 넓이는 $f(x)$의 함숫값의 차이와 같다.
$f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 감소한다.
이때 얼마만큼 감소할까? 넓이S만큼 감소한다.



※ $f'(x)$의 넓이 차이에 따라 $f(x)$의 그래프 개형이 달라진다.

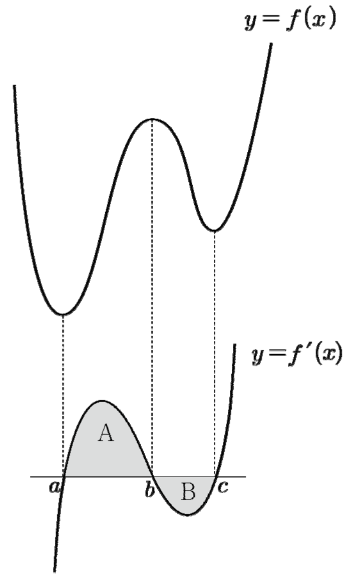
① A = B

$$\int_{a}^{c}f'(x)dx=f(c)-f(a)=0 \Rightarrow f(a)=f(c)$$



② A > B

$$\int_{a}^{c}f'(x)dx=f(c)-f(a)>0 \Rightarrow f(c)>f(a)$$



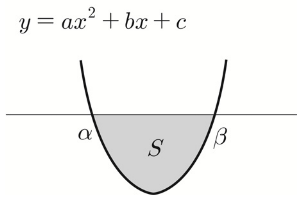
개념 파악하기 - (7) 넓이 공식

※ **이차함수와 넓이 공식**

① **이차함수와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이**

곡선 $y=ax^2+bx+c$와 x축이 서로 다른 두 점 $x=\alpha$, $x=\beta\,(\alpha<\beta)$에서 만날 때, 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left|ax^2+bx+c\right|dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left|a(x-\alpha)(x-\beta)\right|dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$



ex) $y=x^2-4x+3$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

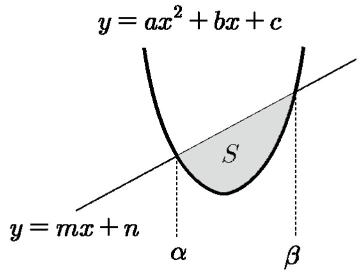
$y=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$이므로 $S=\frac{|1|}{6}(3-1)^3=\frac{4}{3}$이다.

② **이차함수와 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이**

곡선 $y=ax^2+bx+c$와 직선 $y=mx+n$이 서로 다른 두 점 $x=\alpha$, $x=\beta\,(\alpha<\beta)$에서 만날 때, 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left|ax^2+bx+c-(mx+n)\right|dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left|a(x-\alpha)(x-\beta)\right|dx$$

$$=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$



ex) $y=-x^2+3x$ 과 $y=-x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

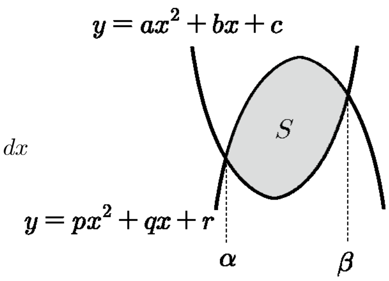
$-x^2+3x=-x \Rightarrow x^2-4x=x(x-4)=0$이므로 $S=\frac{|-1|}{6}(4-0)^3=\frac{32}{3}$이다.

③ **이차함수와 이차함수로 둘러싸인 부분의 넓이**

곡선 $y=ax^2+bx+c$와 $y=px^2+qx+r$이 서로 다른 두 점 $x=\alpha$, $x=\beta\,(\alpha<\beta)$에서 만날 때,
두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left|ax^2+bx+c-(px^2+qx+r)\right|dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left|(a-p)(x-\alpha)(x-\beta)\right|dx$$

$$=\frac{|a-p|}{6}(\beta-\alpha)^3$$



ex) $y=x^2-3x$ 과 $y=-x^2+x+6$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

$x^2-3x=-x^2+x+6 \Rightarrow 2x^2-4x-6=2(x+1)(x-3)=0$이므로

$S=\frac{|1-(-1)|}{6}\{3-(-1)\}^3=\frac{64}{3}$이다.

Tip 어차피 수능에서는 구간을 나눠서 직접 정적분하는 문제가 나올 것이다. 그렇지만 위에서 언급한 3가지 공식(평가원에서 출제된 적 있음)정도는 기억하는 편이 좋다. 이것 말고도 정말 다양한 넓이 공식이 있지만 외우지 않아도 된다. 다른 넓이 공식 외울 시간에 영어단어 하나를 더 외우도록 하자.

[예제 7]

좌표가 1인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서 속도가 $v(t)=2-t$일 때, 다음을 구하시오.

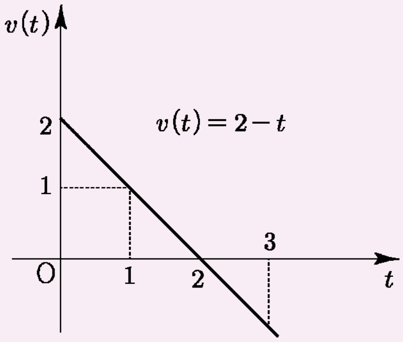
(1) 시각 $t=3$에서 점 P의 위치

(2) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리

✍ 풀이

풀이1) $v(t)$를 활용하는 방법



(1) $1+\int_0^3 (2-t)dt = 1+\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^3 = \frac{5}{2}$

(2) $\int_1^3 (2-t)dt = \left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^3 = 0$

(3) $\int_1^3 |2-t|\,dt = \int_1^2 (2-t)dt + \int_2^3 (-2+t)dt$

$= \left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^2 + \left[-2t+\frac{1}{2}t^2\right]_2^3 = 1$

Tip 무조건 공식을 외우지 말고 $v(t)=2-t$의 그래프를 그려서 판단하는 편이 좋다. 즉, 이해를 하자!
괜히 적분단원에 있을 리가 없다! 앞에서 배운 것과 완벽하게 똑같다.
얼마만큼 증가하나? 도함수의 넓이만큼 증가한다! 얼마만큼 감소하나? 도함수의 넓이만큼 감소한다!

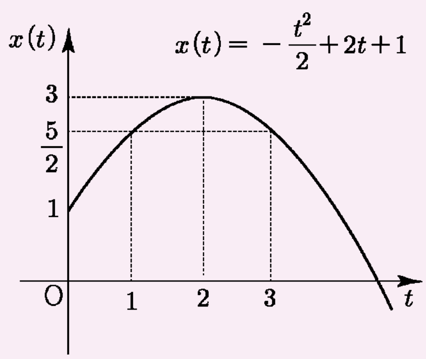
(1) 처음 좌표가 1이라고 했다. 0에서 2초까지 위치는 $\int_0^2 v(t)dt$만큼 증가하고 2에서 3초까지 위치는 $\int_2^3 -v(t)\,dt$만큼 감소한다. 즉, $1+\int_0^2 v(t)dt - \int_2^3 -v(t)\,dt = 1+\int_0^3 v(t)dt$와 같다.

(2) $v(t)$그래프를 보면 $\int_1^2 |v(t)|\,dt = \int_2^3 |v(t)|\,dt$가 같으므로 위치의 증가와 감소량이 서로 같다. 따라서 0이다.

(3) 움직인 거리이므로 감소량과 증가량을 모두 더해야 하므로 $\int_1^3 |v(t)|\,dt$를 계산하면 된다.

풀이2) $x(t)$를 활용하는 방법

공식을 쓰지 않고 적분상수 C를 찾고 $x(t)$를 직접 구해도 된다.



(1) $v(t)$의 부정적분 $x(t)=2t-\frac{t^2}{2}+C$, $x(0)=1$

$\Rightarrow x(t) = -\frac{t^2}{2}+2t+1 \Rightarrow x(3) = \frac{5}{2}$

(2) $x(t) = -\frac{t^2}{2}+2t+1 \Rightarrow \quad x(1) = x(3) = \frac{5}{2}$ 이므로

$x(3)-x(1)=0$

(3) $x(t) = -\frac{t^2}{2}+2t+1$이므로

$x(2)-x(1) = 3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$, $x(2)-x(3) = 3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로

이동거리는 $\{x(2)-x(1)\}+\{x(2)-x(3)\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$이다.

Training_1 step
필수 유형편

❷ 정적분의 활용

Theme ① 곡선과 x축 사이의 넓이

001

함수 $y=12x^3-12x^2-24x$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

002

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=3x^2-4$이고 $f(0)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

003

곡선 $y=8x^3$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이가 34일 때, 양의 상수 a의 값을 구하시오.

004

곡선 $y=n(x-2)^2(x-3)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 자연수가 되도록 하는 50이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

005

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(0)=f'(4)=0$
> (나) 곡선 $y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 6이다.

$f(0)=10$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

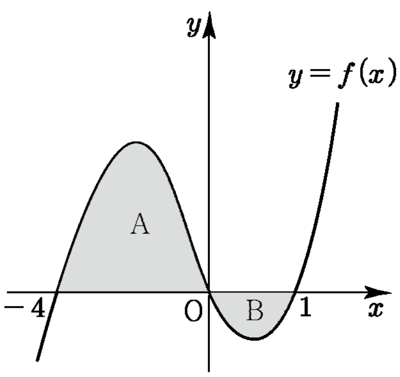
006

곡선 $y=(x-1)|x-2|$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 k이다. $12k$의 값을 구하시오.

007

아래 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 A, B라 하자.

A$=10$, B$=2$일 때, $\int_{-4}^{1}\{2f(x)+|f(x)|-3\}dx$의 값을 구하시오.



032

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P는 점 A(2)를 출발하여 시각 t에서의 속도가 $3t^2-4$이고, 점 Q는 점 B(n)를 출발하여 시각 t에서의 속도가 8이다. 두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 2번 만나도록 하는 정수 n의 개수를 구하시오. (단, $n \neq 2$)

033

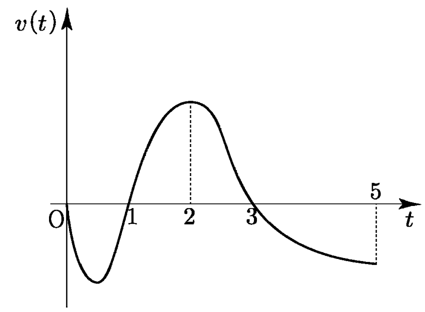
원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가

$$v(t)=\begin{cases} 3t^2-4 & (0 \le t < 1) \\ a(t-1)-1 & (t \ge 1) \end{cases}$$

일 때, 점 P가 출발한 후 시각 $t=7$일 때, 다시 원점을 지난다. $10a$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

034

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0 \le t \le 5)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다.



$\int_0^2 v(t)\,dt=0$, $\int_2^5 |v(t)|\,dt=5$, $\int_0^5 v(t)\,dt=1$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

〈보기〉

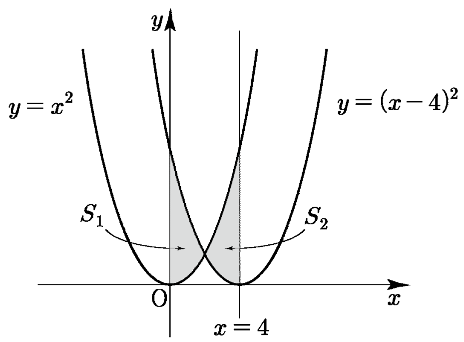
ㄱ. $t=5$에서의 점 P의 위치는 1이다.
ㄴ. $t=2$에서 점 P는 운동방향을 바꾼다.
ㄷ. $t=3$에서의 점 P의 위치는 3이다.
ㄹ. $\int_1^5 v(t)\,dt=5$이면 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는 13이다.
ㅁ. 출발 후 5초 동안 점 P의 위치가 2인 시점이 두 번 존재한다.

Training_2 step
기출 적용편

❷ 정적분의 활용

035 2020학년도 사관학교 나형

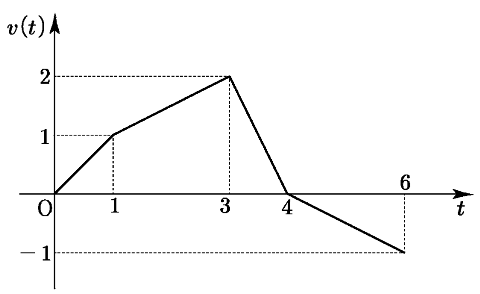
두 곡선 $y=x^2$, $y=(x-4)^2$과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 곡선 $y=x^2$, $y=(x-4)^2$과 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때,
S_1+S_2의 값은? [3점]



① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

036 2014학년도 수능예비시행 A형

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0\le t\le 6)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다.
점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=6$까지 움직인 거리는? [3점]



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

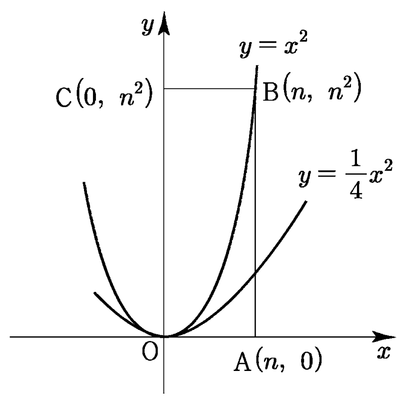
037 2018년 고3 10월 교육청 나형

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 위치 x가 $x=t^4+at^3$ (a는 상수) 이다.
$t=2$에서 점 P의 속도가 0일 때, $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 8 ④ $\frac{28}{3}$ ⑤ $\frac{32}{3}$

038 2014학년도 고3 9월 평가원 A형

그림은 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$과 꼭짓점의 좌표가 O(0, 0), A(n, 0), B(n, n^2), C(0, n^2)인 직사각형 OABC를 나타낸 것이다. (단, n은 자연수이다.)

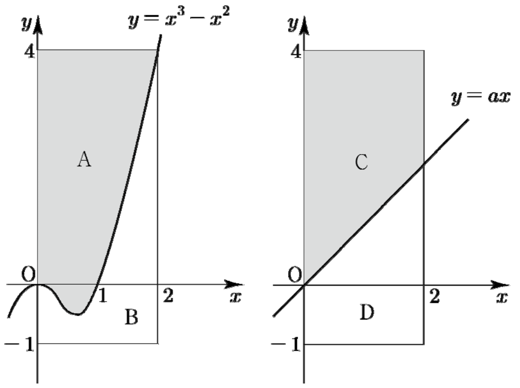


$n=4$일 때, 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

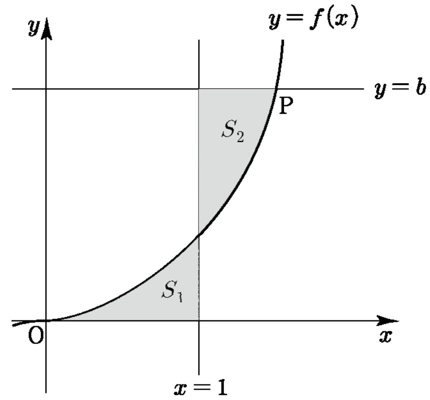
042 2011년 고3 7월 교육청 나형

그림과 같이 네 점 $(0,\ -1)$, $(2,\ -1)$, $(2,\ 4)$, $(0,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 내부가 곡선 $y=x^3-x^2$에 의하여 나누어지는 두 부분을 A, B, 직선 $y=ax$에 의하여 나누어지는 두 부분을 C, D라 하자.
영역 A의 넓이와 영역 C의 넓이가 같을 때, $300a$의 값을 구하시오. [4점]



044 2019년 고3 7월 교육청 나형

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=1$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=S_2$일 때, $30a$의 값을 구하시오. (단, $a>1$) [4점]



043 2020학년도 수능 나형

두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(4-x)$, $g(x)=|x-1|-1$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. [4점]

045 2020학년도 고3 9월 평가원 나형

함수 $f(x)=x^2-2x$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

3.1 빠른정답

함수의 극한 Guide step

1	(1) 2 (2) 5
2	(1) 0 (2) 4
3	(1) ∞ (2) $-\infty$ (3) ∞
4	(1) 0 (2) -1
5	(1) 존재하지 않는다. (2) 존재하지 않는다.
6	(1) 1 (2) 0 (3) 12 (4) 3 (5) 0 (6) 2
7	(1) 3 (2) $\frac{1}{4}$
8	(1) 2 (2) $\frac{3}{4}$
9	(1) $a=6$, $b=5$ (2) $a=7$, $b=3$
10	(1) 3 (2) 5
11	$a=8$, $b=12$
12	2
13	(1) 2 (2) 1

함수의 극한 training ~ master step

1	5	31	9
2	3	32	5
3	17	33	8
4	2	34	80
5	12	35	6
6	②	36	36
7	④	37	3
8	①	38	7
9	②	39	9
10	4	40	5
11	8	41	3
12	9	42	10
13	20	43	4
14	26	44	1
15	13	45	5
16	ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ	46	15
17	6	47	50
18	3	48	2
19	8	49	3
20	10	50	①
21	16	51	3
22	2	52	④
23	4	53	30
24	12	54	①
25	5	55	①
26	2	56	④
27	3	57	①
28	6	58	⑤
29	2	59	21
30	4	60	③

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\{x^2+(a-1)x+1-a+b\}}{x+1}$$

$$\equiv \lim_{x \to -1} \frac{x^2+(a-1)x+1-a+b}{1} = 1-a+1+1-a+b$$

$= 3-2a+b=2 \Rightarrow b=2a-1$

$b=2a-1,\ c=a$ 이므로

$f(x)=x^3+ax^2+(2a-1)x+a$

$f(1)=1+a+2a-1+a=4a$

$f(1) \le 12$이므로 $4a \le 12 \Rightarrow a \le 3$이다.

$f(2)=8+4a+4a-2+a=9a+6$이고 $a \le 3$이므로

$f(2)$의 최댓값은 33이다.

답은 33

로피탈 정리로도 풀어보자.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+ax^2+bx+1-a+b}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{3x^2+2ax+b}{1} = 3-2a+b=2 \Rightarrow b=2a-1$$

Tip 문자가 3개인 방정식은 식이 3개여야 풀 수 있다.
다만 식이 2개면 한 문자로 다른 문자들을 나타낼 수 있다는 사실을 반드시 기억하고 있어야 한다.

ex) $-1+a-b+c=0$, $b=2a-1$
문제에서 주어진 식은 2개이고 문자가 3개이므로 b와 c를 a로 나타낼 수 있다.

어느 정도 레벨에 도달하면 아래와 같은 사고과정을 느낄 수 있게 된다.

① 식이 두 개고 문자가 3개니까 a로 나머지 문자들을 표현할 수 있겠군
② $f(1) \le 12$로 a의 범위를 알 수 있겠군
③ a의 범위를 아니까 $f(2)$의 최댓값을 구할 수 있겠군

이는 사실 문제를 만들 때, 출제자가 느끼는 사고과정과 유사하다.
① $f(x)$를 그냥 주면 너무 쉬우니까 교과개념을 사용해서 직접 구하게 만들어야겠다.

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1, \quad \lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$$

② $f(2)$의 최댓값을 구하게 하고 싶군.
그렇게 하려면 범위가 필요한데?
③ $f(1) \le 12$ 너로 정했다!

066

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{3}{5}$$

만약 $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$이면

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{f(a)}{f(a)} = 1$$이므로

$\lim_{x \to a} f(x)=0$이다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고
$f(a)=0$이므로 $f(x)=(x-a)(x-b)$라 둘 수 있다.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)+(x-a)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x-b-1}{x-b+1} = \frac{a-b-1}{a-b+1} = \frac{3}{5}$$

$5(a-b)-5=3(a-b)+3 \Rightarrow (a-b)=4$

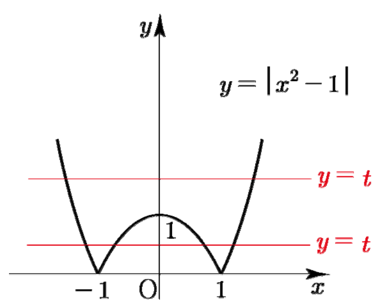
$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 했으므로
$a,\ b$는 각각 $\alpha,\ \beta$이거나 $\beta,\ \alpha$이다.
따라서 $|\alpha-\beta|=4$이다.

답은 ④

067

실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$

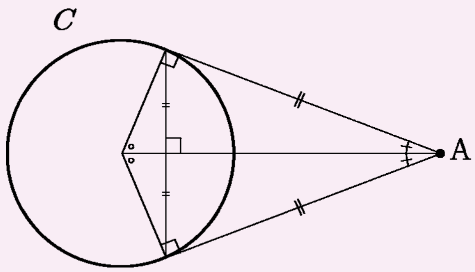
$y=|x^2-1|$을 그려서 판단해보자.



$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2 & (t=0) \\ 4 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \\ 2 & (t>1) \end{cases}$$

Tip 원의 중심과 접점을 이은 수직 보조선은
문제를 풀어나가는 key point일 때가 많다.
즉, 반드시 그어야 하는 보조선 중 하나이다.

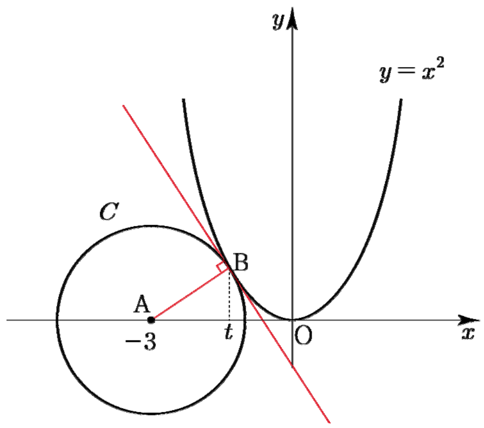
아래 그림과 같이 점 A에서 원 C에 접선을
그었을 때, 그어야하는 보조선은 다음과 같다.



자주 출제되는 도형이니 반드시 기억하자.

038

반지름의 길이가 r이고 중심의 좌표가 $A(-3,\ 0)$인
원 C와 곡선 $y=x^2$가 점 B에서 접한다.
점 B의 x좌표를 t라 하자.



두 점 $A(-3,\ 0)$, $B(t,\ t^2)$를 지나는 직선의 기울기와
$B(t,\ t^2)$에서의 접선의 기울기는 서로 수직이다.

$$\frac{t^2}{t+3}\times 2t=-1 \Rightarrow 2t^3+t+3=0$$

$$\Rightarrow (t+1)(2t^2-2t+3)=0 \Rightarrow t=-1$$

$$B(t,\ t^2) \Rightarrow B(-1,\ 1)$$

$r=\overline{AB}=\sqrt{5}$

삼각형 OAB의 넓이 $S=\frac{1}{2}\times 3\times 1=\frac{3}{2}$

따라서 $r^2+20S=5+30=35$이다.

답은 35

039

$\overline{PA}=\overline{PB}=\sqrt{5}$, $\cos(\angle APB)=\frac{3}{5}$

$\overline{AB}=x$라 하자.
삼각형 ABP에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos(\angle APB)=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-x^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}=\frac{10-x^2}{10} \Rightarrow 30=50-5x^2 \Rightarrow x=2\ (\because x>0)$$

$\overline{AB}=2$이고 삼각형 ABP는 이등변삼각형이므로
$A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 0)$이다.
$\overline{OP}=\sqrt{\overline{PB}^2-\overline{OB}^2}=\sqrt{5-1}=2$
즉, $P(0,\ 2)$

직선 BP의 기울기는 -2이므로
점 C에서의 접선의 기울기는 -2이다.

$f(x)=-4x^4+k$라 하면
$f'(x)=-16x^3$

점 C의 x좌표를 t라 하면

$f'(t)=-2 \Rightarrow -16t^3=-2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$

직선 BP의 방정식은 $y=-2x+2$이고,
점 C은 직선 BP위의 점이므로 C의 y좌표는 1이다.
$C\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$은 곡선 $y=f(x)$위의 점이기도 하므로
$f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \Rightarrow -\frac{1}{4}+k=1 \Rightarrow k=\frac{5}{4}$

$C\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$이므로 대칭성에 의해서 $D\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$

사각형 ABCD는 등변사다리꼴이므로
넓이 $s=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{DC})\times h=\frac{1}{2}\times(2+1)\times 1=\frac{3}{2}$

따라서 $20(k+s)=20\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\right)=25+30=55$이다.

답은 55

049

$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 3$

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$

$f'(1) = f'(3) = 0$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해서

$1 + 3 = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow a = 6$

$1 \times 3 = -\dfrac{b}{3} \Rightarrow b = -9$

따라서 $a - b = 6 + 9 = 15$이다.

답은 15

050

$f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 16x - 2$

$f'(x) = -x^2 + 16 = -(x-4)(x+4)$

$-a < x < a$에서 $f'(x) \geq 0$이어야하므로

양수 a의 최댓값은 4이다.

답은 4

051

$f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - ax^2 + 4ax$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2ax + 4a$

실수 전체의 집합에서 증가하려면

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.

$\dfrac{1}{2}x^2 - 2ax + 4a = 0$

판별식을 사용하면

$\dfrac{D}{4} \leq 0 \Rightarrow a^2 - 2a \leq 0 \Rightarrow a(a-2) \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq a \leq 2$

$M = 2,\ m = 0$이므로 $M + m = 2$이다.

답은 2

Tip 왜 판별식을 쓸까?

<생략된 사고과정>

① 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$

② $= y$를 붙여서 함수로 해석하면 $y = f'(x)$는 x축과 접하거나 x축 위에 있어야 한다.

③ 판별식 $D \leq 0$이므로 이차방정식 $f'(x) = 0$은 중근을 갖거나 서로 다른 두 개의 허근을 갖는다.
즉, $y = f'(x)$와 x축이 접하거나 만나지 않아야 한다.

④ $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수 $\dfrac{1}{2}$이므로

$y = f'(x)$가 x축과 접하면
모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이다.

$y = f'(x)$가 x축과 만나지 않으려면
x축 위에 있어야 하므로
모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이다.

052

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3a^2x$

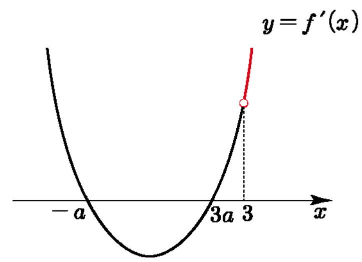
$f'(x) = x^2 - 2ax - 3a^2 = (x-3a)(x+a)$

$3 < x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$f(x_1) < f(x_2)$이므로 $x > 3$에서 $f(x)$가 증가한다.

즉, $x > 3$에서 $f'(x) \geq 0$

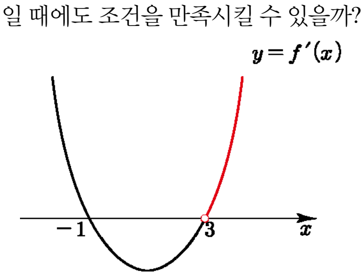
$a > 0$이므로 $f'(x)$를 그리면



조건을 만족하려면 $3a < 3$이어야 하므로 $a < 1$이다.

위와 같은 그림은 직관적으로 당연하게 받아들일 수 있지만

만약 $3a = 3$일 때에도 조건을 만족시킬 수 있을까?



$3a = 3 \Rightarrow a = 1$이어도 조건을 만족시킨다.

$0 < a \leq 1$이므로 a의 최댓값은 1이다.

답은 1

080

$f(x)=(2\sin x)^3-6\sin x+5$

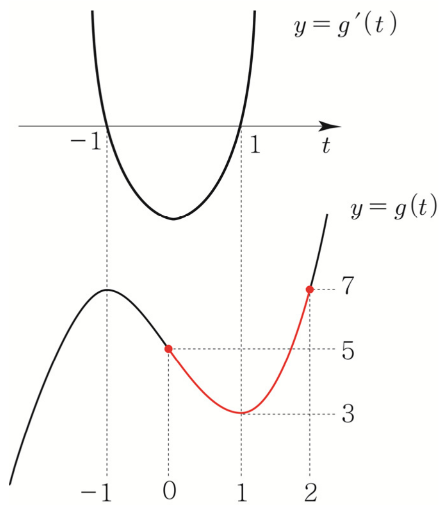
$2\sin x=t$라 치환하면 $0\le x\le\pi$에서 t의 범위는 $0\le t\le 2$이다.

즉, $0\le t\le 2$에서 $g(t)=t^3-3t+5$ 의 최댓값과 최솟값을 구하는 것과 동일하다.

$g'(t)=3t^2-3=3(t-1)(t+1)$

$g(0)=5,\ g(1)=3,\ g(2)=7$

$g'(t)$를 바탕으로 $g(t)$를 그리면



$0\le t\le 2$에서 $g(t)$의 최댓값 $M=7$, 최솟값 $m=3$ 이므로 $Mm=21$이다.

답은 21

081

$\mathrm{P}\left(x,\ \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)$

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)^2}=\sqrt{\frac{x^4}{2}+x^2-4x+4}$

$f(x)=\frac{x^4}{2}+x^2-4x+4$라 하면

$f'(x)=2x^3+2x-4=2(x^3+x-2)$

$\qquad=2(x-1)(x^2+x+2)$

모든 실수 t에 대하여 $t^2+t+2>0$이므로 Semi도함수는 $(x-1)$이다.

(실질적으로 부호에 영향을 주는 도함수를 Semi도함수라 하기로 Guide step에서 약속함)

$f(x)$는 $x=1$에서 최소이고 최솟값은 $f(1)=\frac{3}{2}$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}$의 최솟값은 $\sqrt{\frac{3}{2}}=m$이다.

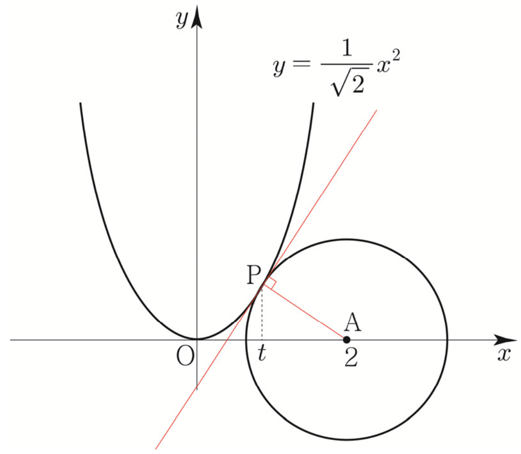
따라서 $10m^2=15$이다.

답은 15

다르게 풀어보자.

한 점에서 거리가 같은 점들의 집합은 원이다.

즉, 점 A$(2,\ 0)$을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 점점 키웠을 때, 곡선 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x^2$에 접하는 순간 $\overline{\mathrm{AP}}$는 최소이다.



P의 x좌표를 t라 하면 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}t^2\right)$

직선 AP의 기울기는 점 P에서의 접선의 기울기와 수직이므로

$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}t^2}{t-2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}t=-1 \Rightarrow t^3+t-2=0$

$\Rightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0 \Rightarrow t=1$

따라서 $\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$일 때,

$\overline{\mathrm{AP}}$은 최솟값은 $\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ 이다.

Tip 원은 거리를 나타내는 틀이다.

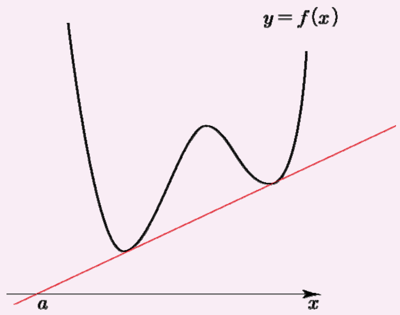
082

$y=\frac{1}{4}x^4-x^3+2\ \ (x>0)$

$y'=x^3-3x^2\ \ (x>0)$

Tip 접선의 개수 = 접점의 개수?

접선의 개수와 접점의 개수가 반드시 같은 것은 아니다.
예를 들어 $f(x)$가 사차함수일 때, 아래와 같은 경우가 가능하다.



즉, 접점이 2개여도 접선이 1개일 수 있다.

하지만 $f(x)$가 삼차함수라면 위와 같은 경우가 발생하지 않으므로 접선의 개수와 접점의 개수는 같다.
(이때, 접점의 개수는 접점의 x좌표의 개수로 판단할 수 있다.)

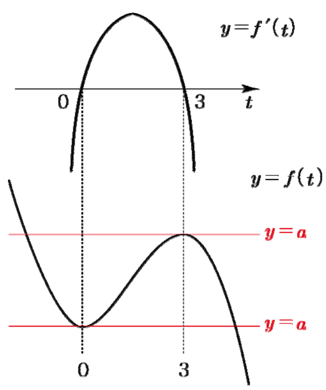
그렇기 때문에 보통 접선의 개수를 물어보는 문제는 $f(x)$가 삼차함수인 경우가 대부분이다.

접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은
$y=3t^2(x-t)+t^3-4$

접선이 점$(3,\ a)$을 지나므로
$a=3t^2(3-t)+t^3-4=-2t^3+9t^2-4$

$f(t)=-2t^3+9t^2-4$라 하면
$f'(t)=-6t^2+18t=-6t(t-3)$

$f'(t)$를 바탕으로 $f(t)$를 그리면



$a=f(0)=-4$ or $a=f(3)=23$
a는 양수이므로 23이다.

답은 23

098

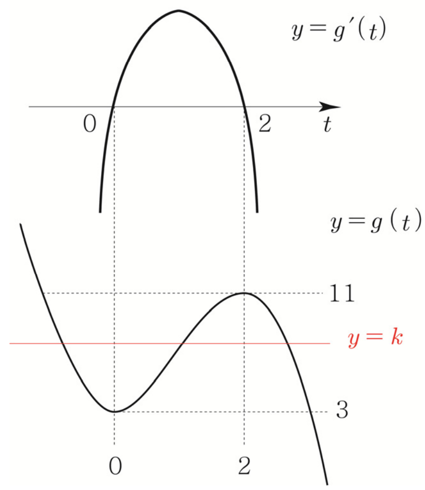
097번에서 배웠듯이 삼차함수이므로
접점의 개수와 접선의 개수는 동일하다.

접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은
$y=(3t^2-12t+3)(x-t)+t^3-6t^2+3t+3$

접선이 $(0,\ k)$를 지나므로
$k=-2t^3+6t^2+3$

$g(t)=-2t^3+6t^2+3$라 하면
$g'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$
$g(0)=3,\ g(2)=11$

$g'(t)$를 바탕으로 $g(t)$를 그리면



$k<3$ or $k>11 \Rightarrow f(k)=1$
$f(3)=f(11)=2$
$3<k<11 \Rightarrow f(k)=3$

따라서 $\sum_{k=1}^{15} f(k)=1\times6+2\times2+3\times7=31$이다.

답은 31

099

$x^4-4x^3+x+30 \geq x+k$
$x^4-4x^3+30 \geq k$

$h(x)=x^4-4x^3+30$라 하면
$h'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$h'(x)$를 바탕으로 $h(x)$를 그리면

$v'(3)=0$이므로 $t=3$일 때, 점P의 가속도가 0이다.
$x(3)=40 \Rightarrow -9+27+k=40 \Rightarrow k=22$

답은 22

134

$f(t)=2t^2-2t,\ g(t)=t^2-8t$
$f'(t)=4t-2,\ g'(t)=2t-8$

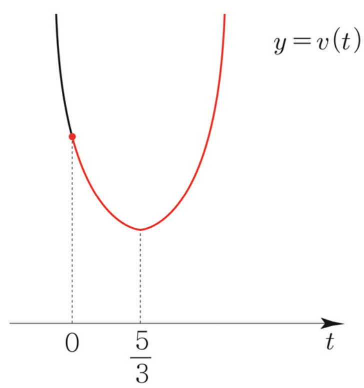
두 점 P와 Q가 서로 반대방향으로 움직이려면
$f'(t)$와 $g'(t)$의 부호가 달라야 하므로
$f'(t)g'(t)<0$를 만족시키면 된다.
$(4t-2)(2t-8)<0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}<t<4$

답은 ①

135

$x(t)=t^3-5t^2+at+5$
$v(t)=3t^2-10t+a$

점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면
$t\ge 0$에서 $v(t)$의 부호가 변하지 않아야 한다.
$v'(t)=6t-10$이므로 $v(t)$는 $t=\dfrac{5}{3}$에서 극소이다.



$t\ge 0$인 모든 실수 t에 대하여 $v(t)\ge 0$가 성립하려면
$v\left(\dfrac{5}{3}\right)\ge 0 \Rightarrow -\dfrac{25}{3}+a\ge 0 \Rightarrow a\ge \dfrac{25}{3}$이므로
조건을 만족시키는 자연수 a의 최솟값은 9이다.

답은 ①

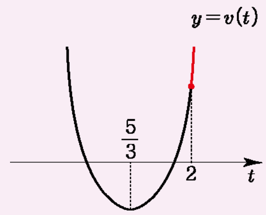
Tip <범위가 있을 때, 판별식 유의사항>

아마 판별식 $D<0$이라고 푼 학생이 있을 수 있다.
이 문제에는 범위가 $t\ge 0$이기 때문에
$t=\dfrac{5}{3}$를 포함하므로 판별식 $D<0$을 써도 맞지만
만약 범위가 $t\ge 2$라면 판별식을 쓸 수 없다.

도대체 왜 그럴까?

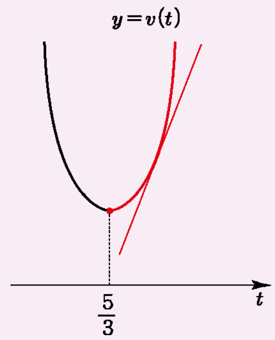
판별식은 단순 무식해서 정의역이 실수 전체라고
가정하고 서로 다른 실근의 개수를 알려주기 때문이다.
즉, 위 문제에서 판별식 $D<0$을 써도 괜찮은 이유는
$t\ge 0$인 경우 정의역이 실수전체일 때와 마찬가지로
t축과 만나지 않으려면 t축 위로 붕 떠야하기 때문이다.

예를 들어 범위를 $t\ge 2$라 해보자.



위와 같은 그림일 때, 판별식을 쓰면 방정식 $v(t)=0$
이 서로 다른 두 실근을 갖는다고 알려주지만
실제로는 정의역이 $t\ge 2$이므로 실근을 갖지 않는다.

위에서 배운 내용을 적용시켜보자.
만약 $v(t)$의 정의역이 $t\ge \dfrac{5}{3}$이고 기울기가 1인
직선 $f(t)$와 접한다고 했을 때,
방정식 $v(t)=f(t) \Rightarrow v(t)-f(t)=0$에서
판별식을 쓸 수 있을까?



정답은 "쓸 수 있다" 이다. $t\ge \dfrac{5}{3}$이지만 정의역이
실수전체일 때와 상황이 동일하기 때문이다.

<**요약**>
1. **범위가 있을 때는 판별식 사용에 각별히 유의해야하고 함수의 그래프를 그려 접근하도록 하자.**
2. **범위가 있어도 정의역이 실수전체일 때와 상황이 같다면 판별식을 쓸 수 있다.**

Tip <$f(x)$는 $x=2a$에서 미분가능 해야 할까?>

$x=2a$에서 미분가능해야 $f(x)$가 증가하는 것은 아니다.

Guide step에서 배운 내용을 다시 상기시켜보자.
(개념 파악하기 - (7) 함수의 증가와 감소)
함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수
$x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$이면
$f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 학습하였다.

즉, 미분가능해야 증가하는 것이 아니라 위 조건만
만족시키면 그 구간에서 증가한다고 볼 수 있다.

다만 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때,
그 구간의 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이면
$f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 학습하였고

만약 $f(x)$가 상수함수가 아닌 다항함수라면
$f(x)$가 어떤 열린구간에서 증가하기 위한 필요충분조건은
이 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$
라고 학습하였다.

141

.$x(t)=t^3-12t+k$
$v(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

$v(2)=0$이고 $t=2$에서 $v(t)$의 부호가 변하므로
점 P는 $t=2$에서 운동 방향이 바뀐다.

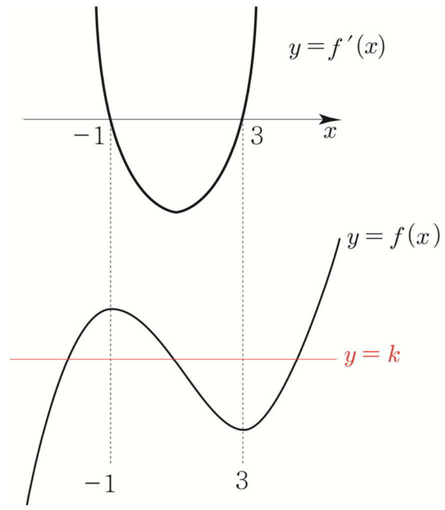
$x(2)=8-24+k=0 \Rightarrow k=16$

답은 ④

142

$x^3-3x^2-9x-k=0$
$x^3-3x^2-9x=k$
$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$f(3) < k < f(-1) \Rightarrow -27 < k < 5$
따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 최댓값은 4이다.

답은 ②

143

$f(x)=x^3-5x$라 하면
$f'(x)=3x^2-5$

A$(1,\ -4)$에서의 접선의 방정식은
$y=-2(x-1)-4 \Rightarrow y=-2x-2$

$x^3-5x=-2x-2 \Rightarrow x^3-3x+2=0$

$\Rightarrow (x-1)^2(x+2)=0 \Rightarrow x=-2\ (x \neq 1)$
B$(-2,\ 2)$이므로 선분 AB의 길이는
$\sqrt{(1+2)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$이다.

답은 ④

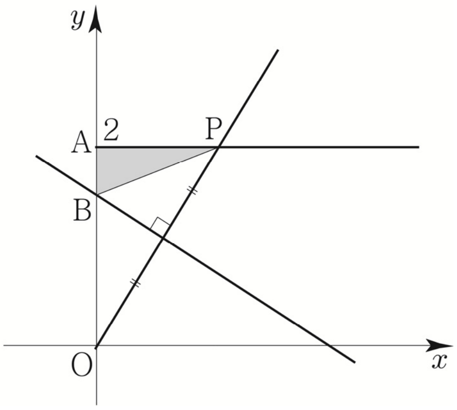
근과 계수의 관계 technic을 사용해서 풀어보자.
$x^3-3x+2=0$
(x^2의 계수가 0이므로 근과 계수의 관계 technic을 쓰면
유리하다.)

점 A가 접점이므로 $x=1$을 중근으로 갖는다.
점 B의 x좌표를 t라 하면
$1+1+t=0$ (세 실근의 합 0)이므로 $t=-2$이다.

151

$0 < t < 2$

$A(0,\ 2)$, $P(t,\ 2)$



직선 OP의 기울기는 $\frac{2}{t}$, 선분 OP의 중점 $\left(\frac{t}{2},\ 1\right)$

선분 OP의 수직이등분선은

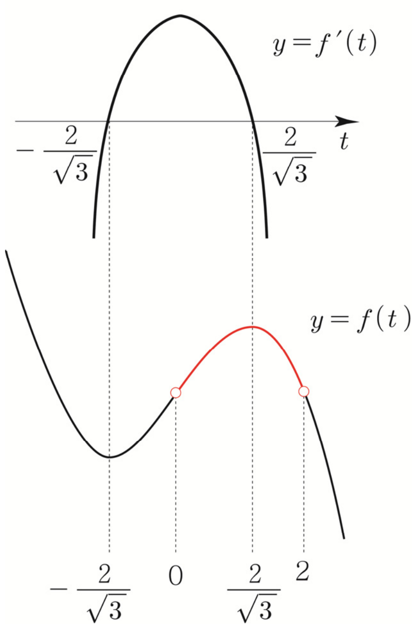
$$y = -\frac{t}{2}\left(x - \frac{t}{2}\right) + 1 \Rightarrow y = -\frac{t}{2}x + \frac{t^2}{4} + 1$$

$B\left(0,\ \frac{t^2}{4} + 1\right)$이므로

$$f(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AP} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) \times t = \frac{1}{8}(4t - t^3)$$

$$f'(t) = \frac{1}{8}(4 - 3t^2) = -\frac{3}{8}\left(t - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$f'(t)$를 바탕으로 $f(t)$를 그리면



$0 < t < 2$에서 $f(t)$의 최댓값은

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{b}{a}\sqrt{3}$$

따라서 $a + b = 11$이다.

답은 11

Tip <만약 $t > 2$이면 어떻게 될까?>

점 B의 y좌표는 $\frac{t^2}{4} + 1$이므로 $t = 2$일 때, 2이고

$t > 2$일 때, y좌표는 2보다 크다.

B의 y좌표가 A의 y좌표보다 크기 때문에

$\overline{AB} = \frac{t^2}{4} - 1$이다.

따라서 만약 $t > 0$라고 조건을 변경하면

선분 AB는 길이는 양수이므로 절댓값을 취해서

$\overline{AB} = \left|1 - \frac{t^2}{4}\right|$라고 해야한다.

길이는 양수이므로 **절댓값**을 취해줘야 한다.

이를 항상 유의하도록 하자.

152

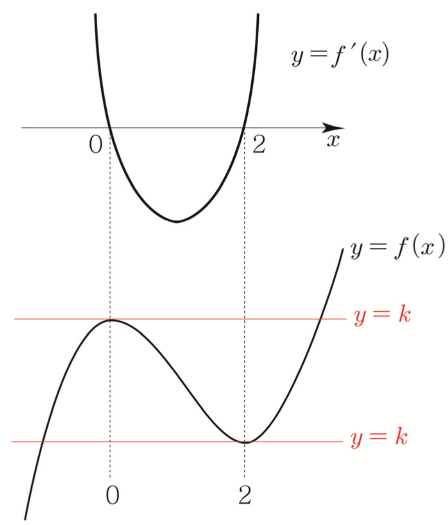
$x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 2x + k$

$x^3 - 3x^2 - 3 = k$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3$라 하면

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$f'(x)$를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



$k = f(0) = -3$ or $k = f(2) = -7$ 이므로

조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 곱은 21이다.

답은 21

도함수의 활용 Master step

[빠른 정답]

174	31	186	④
175	108	187	32
176	④	188	⑤
177	10	189	243
178	⑤	190	⑤
179	③	191	42
180	④	192	③
181	④	193	51
182	①	194	④
183	⑤	195	147
184	②	196	5
185	④		

[해설]

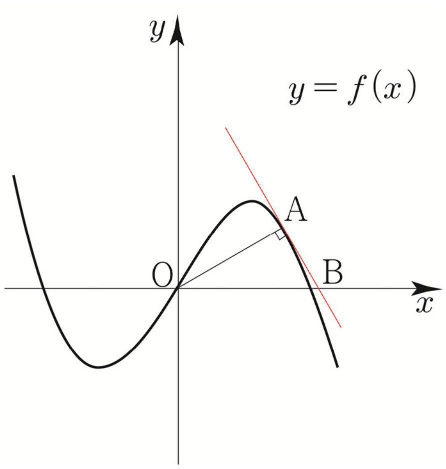
174

$f(x) = -\sqrt{3}x^3 + \sqrt{3}x$

$f'(x) = -3\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3} = -3\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선을 l

원점 O와 직선 l 사이의 거리가 직선 OA의 길이와 같으려면 직선 OA의 기울기와 직선 l의 기울기가 수직이어야 한다.



$\frac{f(a)}{a} \times f'(a) = -1$

$\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}a^3 + \sqrt{3}a}{a} \times (-3\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}) = -1$

$\Rightarrow 3(a^2-1)(3a^2-1) = -1 \Rightarrow 9a^4 - 12a^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow (3a^2-2)^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ or $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$f(x)$는 기함수이므로 원점에 대하여 대칭되어 있다.

$a = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$일 때와 $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$일 때 삼각형 OAB의 넓이는 서로 같다.

$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$라 하면

$\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$에서의 접선 l의 방정식은

$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}$이므로

$y = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow y = -\sqrt{3}x + \frac{4}{3}\sqrt{2}$

접선 l의 x절편은 $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$이므로

$\mathrm{B}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},\ 0\right)$

삼각형 OAB의 넓이는

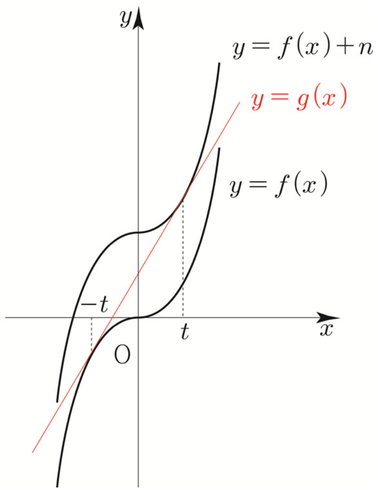
$\frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{9\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{27} = \frac{q}{p}\sqrt{3}$이므로

$p + q = 31$이다.

답은 31

175

함수 $f(x)=x^3$와 자연수 n에 대하여 두 함수
$y=f(x)$, $y=f(x)+n$의 그래프와 모두 접하는
직선 $y=g(x)$



곡선 $y=f(x)+n$과 직선 $y=g(x)$가 접하는
접점의 x좌표를 t라 하면
접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접하는
접점의 x좌표를 T라 하면
접선의 기울기는 $f'(T)=3T^2$이다.

두 접선이 동일하므로 접선의 기울기가 서로 같다.
$f'(t)=f'(T) \Rightarrow 3t^2=3T^2 \Rightarrow T=-t\ (T\neq t)$

함수 $y=f(x)+n$ 위의 점 $(t,\ t^3+n)$에서의
접선의 방정식은
$y=3t^2(x-t)+t^3+n \Rightarrow y=3t^2x-2t^3+n$
함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(-t,\ -t^3)$에서의
접선의 방정식은
$y=3t^2(x+t)-t^3 \Rightarrow y=3t^2x+2t^3$

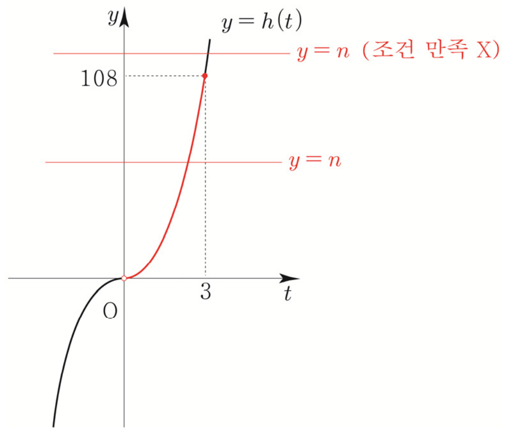
두 접선이 동일하므로 접선의 y절편이 서로 같다.
$-2t^3+n=2t^3 \Rightarrow 4t^3=n$

모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\leq 27$이 되려면
$g'(x)=3t^2$이므로
$3t^2\leq 27 \Rightarrow t^2\leq 9 \Rightarrow (t-3)(t+3)\leq 0$

$\Rightarrow 0<t\leq 3\ (\because t>0)$
이면 된다.

즉, t에 대한 방정식 $4t^3=n$에서 실근 t가
$0<t\leq 3$이 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하면 된다.

$h(t)=4t^3$라 하고 $y=h(t)$를 그리면



만약 $n>180$이라면 $4t^3=n$의 실근 t가 $t>3$이므로
$0<t\leq 3$를 만족시키지 않는다.

조건을 만족시키는 n의 범위는 $1\leq n\leq 108$ 이므로
모든 자연수 n의 개수는 108이다.

답은 108

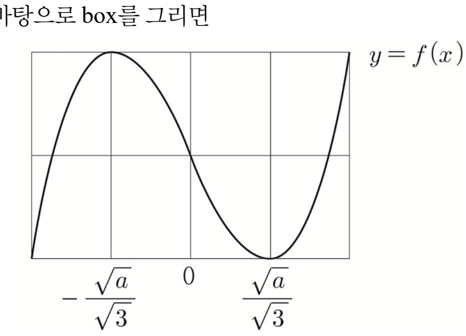
176

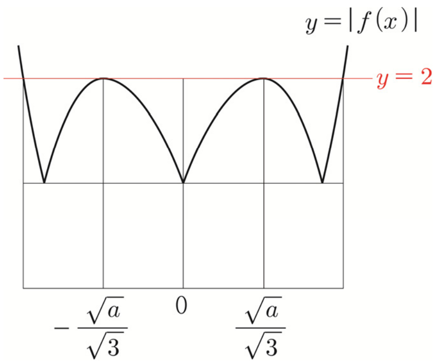
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

$f(x)$는 기함수이고 원점에 대하여 대칭이므로
$f(x)=x^3-ax$
$f'(x)=3x^2-a=3\left(x^2-\frac{a}{3}\right)=3\left(x-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\right)$
(Guide step에서 x^3+ax 보다 x^3-ax를 추천한 이유에 대하여 학습하였다.)

방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4이려면
삼차함수 $f(x)$는 극값이 존재하는 ①번 개형이어야 한다.

이를 바탕으로 box를 그리면





곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=2$가 서로 다른 네 점에서 만나려면 극댓값이 2이면 된다.

$\Rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\right)=2 \Rightarrow \frac{2a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}=2$

$\Rightarrow a\sqrt{a}=3\sqrt{3} \Rightarrow a=3$

$f(x)=x^3-3x$이므로 $f(3)=27-9=18$이다.

답은 ④

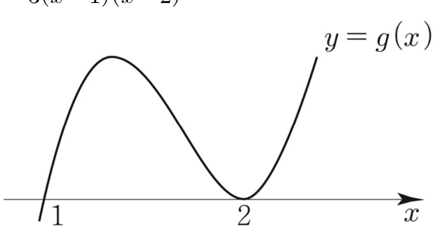
177

두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$
$g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고,
$g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가진다.

$g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $g'(2)=0$
$g(x)=3(x-a)(x-b)^2$꼴이어야 하므로
$g'(2)=0$를 만족시키려면 $g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 가져야한다.

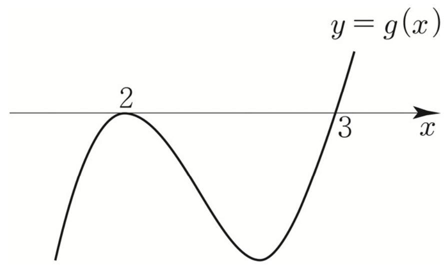
즉, $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$ or $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$

① $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$



$g(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$



$g(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 조건을 만족시킨다.

즉, $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$

$f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)(x-3)+\frac{1}{3}(x-1)^2$

$f'(0)=\frac{7}{3}=\frac{q}{p}$이므로 $p+q=10$이다.

답은 10

Tip <숨겨진 조건 해석>

"$g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가진다."
로 알려주고자 하는 조건은 다음과 같다.
① $g'(2)=0$ ② $x=2$에서 **극댓값**
즉, 두 조건 모두 사용되어야한다.

출제자 입장에서 $g'(2)=0$만 알려주고자 했다면 극댓값보다는 극값을 갖는다고 했을 것이다.

이렇게 평가원은 한 조건($x=2$에서 극댓값)에 다른 조건($g'(2)=0$)을 숨겨서 제시하는 것을 좋아한다.

ex) 함수 $g(x)=\int_0^x tf(t)dt$ 라는 조건은
① $g(0)=0$ ② $g'(x)=xf(x)$
위 두 조건 말고도 ③ $g'(0)=0$ 이라는 숨겨진 조건도 내포하고 있다.

즉, 모든 조건은 이유가 있으니 조건을 꼼꼼히 해석하자.

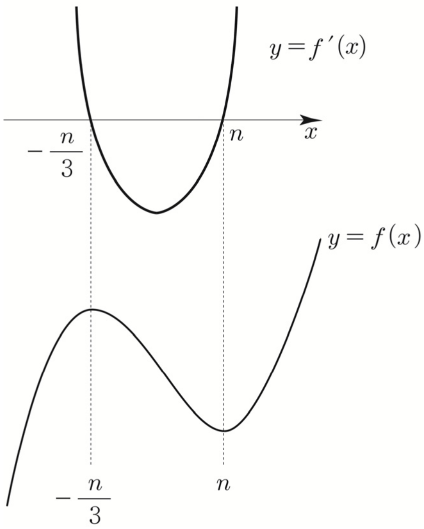
178

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x \ge 0) \end{cases}$$

a를 모르기 때문에 $f(x)$를 그리기 곤란하므로
a의 범위에 따라 case분류하면

$f(x)=(x+n)(x-n)^2$

$f'(x)=(x-n)^2+2(x+n)(x-n)=3(x-n)\left(x+\frac{n}{3}\right)$



$f(x)$는 $x=-\frac{n}{3}$에서 극댓값을 가지므로

$f\left(-\frac{n}{3}\right)=\frac{2}{3}n\times\frac{16}{9}n^2=\frac{32}{27}n^3=a_n$

따라서 a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은 3이다.

답은 ③

180

$f(x)=x^3+ax^2+bx$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=(3t^2+2at+b)(x-t)+t^3+at^2+bt$

점선이 y축과 만나는 점을 P

$\mathrm{P}(0,\ -2t^3-at^2)$이므로

$g(t)=\sqrt{(-2t^3-at^2)^2}=|-2t^3-at^2|=|2t^3+at^2|$

(가) $f(1)=2$

$f(1)=2 \Rightarrow 1+a+b=2 \Rightarrow a+b=1$

(나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

Tip <함수 $|h(x)|$의 미분가능성>

Q. 미분가능한 함수 $h(x)$에 대하여 함수 $|h(x)|$가 $x=k$에서 미분이 가능한지 가능하지 않은지 확인하려면 어떻게 해야 할까?

$h(k)$의 함숫값에 따라 크게 2가지 case가 존재한다.

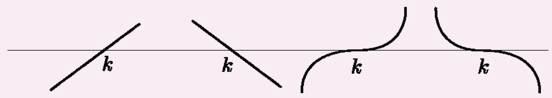
① $h(k)\neq 0$

$h(k)\neq 0$인 경우에는 미분 가능한 함수를 x축 아래 부분을 접어 올리기만 하는 것이므로 실수 전체에서 미분 가능하면 $h'(k)$도 당연히 존재한다.

② $h(k)=0$

문제는 ② case인데 $h(k)=0$일 때에는 case분류를 해줘야한다.

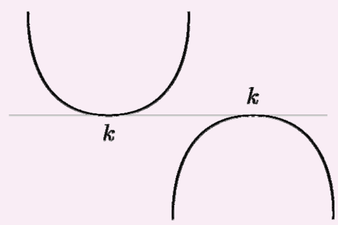
ⅰ) $x=k$를 경계로 부호가 바뀔 때는 총 4가지의 개형이 가능하다.



첫 번째와 두 번째 개형은 $h'(k)\neq 0$이므로 접어 올렸을 때 좌미분계수와 우미분계수가 같아질 수 없다. ($h'(k)=-h'(k) \Rightarrow h'(k)=0$ 모순!)

결국 미분가능하려면 세 번째와 네 번째 개형과 같이 $h'(k)=0$이어야 한다.
즉, $x=k$에서 뚫는 접선이 나와야 한다.

ⅱ) $x=k$를 경계로 부호가 바뀌지 않을 때는 총 2가지 개형이 가능하다.



(애초에 $h(x)$가 실수 전체에서 미분가능하다고 했기 때문에 첨점(뾰족점)은 나올 수가 없다.)

결국 ② case에서 미분 가능하려면
ⅰ), ⅱ) 모두 $h'(k)=0$ 이어야 한다.

$g(t)=\left|2t^2\left(t+\frac{a}{2}\right)\right|$

$h(t)=2t^2\left(t+\frac{a}{2}\right)$라 하면

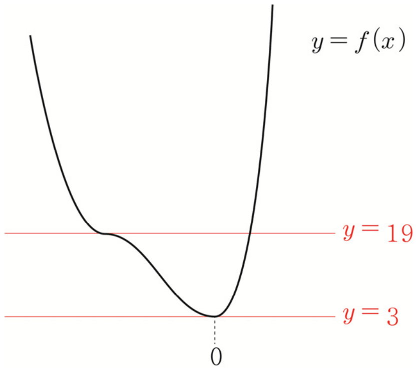
$h'(t)=4t\left(t+\frac{a}{2}\right)+2t^2$

$h\left(-\frac{a}{2}\right)=0$이고 $x=-\frac{a}{2}$에서 미분가능해야 하므로

①-iii), ②- i), ②- ii)이다.

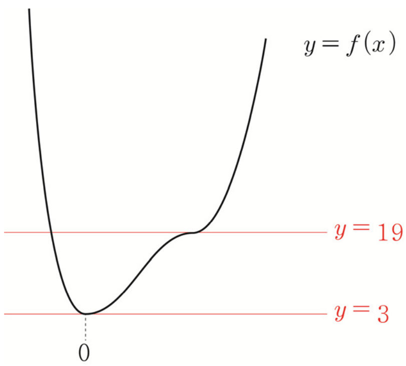
$g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속이므로
$y=f(x)$는 $y=3$과 $y=19$에서 각각 접해야한다.

②- i)
$f(0)=3$이므로 아래 그림과 같다.



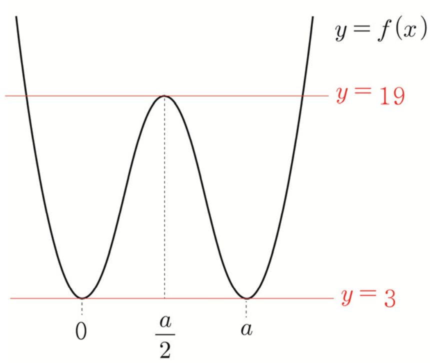
$f'(3)>0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

②- ii)
$f(0)=3$이므로 아래 그림과 같다.



$f'(3)<0$일 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

①-iii)
$f(0)=3$이고 $f'(3)<0$이므로 $f(a)=3$라 할 때,
아래 그림처럼 $a>0$이어야한다.
(만약 $a<0$이면 $f'(3)>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.)



$f(x)-3=x^2(x-a)^2$ (식 세우기 technic !)

$f(x)$는 $x=\dfrac{a}{2}$에서 극댓값 19를 가지므로

$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=19 \Rightarrow \left(\dfrac{a}{2}\right)^4+3=19 \Rightarrow a^4=4^4$

$\Rightarrow a=4$ $(\because a>0)$

Tip <사차함수의 대칭성>

대칭성을 활용하면 굳이 미분하지 않고도 $f(x)$가 $x=\dfrac{a}{2}$에서 극댓값을 갖는다는 것을 손쉽게 파악할 수 있다.

$f(x)=x^2(x-4)^2+3$이므로 $f(-2)=144+3=147$이다.

답은 147

196

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$
최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선은 모두 x축이다.

$f(0)=f'(0)=0$이므로 $f(x)$는 x^2을 인수로 가져야하므로
$f(x)=x^2(x+c)$

$g(2)=g'(2)=0$이므로 $g(x)=-(x-2)^2$

(나) 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.

$f(x)$는 삼차함수이므로 접점의 개수와 접선의 개수는 같다.

$f(x)=x^2(x+c)=x^3+cx^2$
$f'(x)=3x^2+2cx$
접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 방정식은
$y=(3t^2+2ct)(x-t)+t^3+ct^2$
접선이 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=(3t^2+2ct)(2-t)+t^3+ct^2$

$\Rightarrow\ 2t^3+(c-6)t^2-4ct=0$

$\Rightarrow\ t\{2t^2+(c-6)t-4c\}=0$

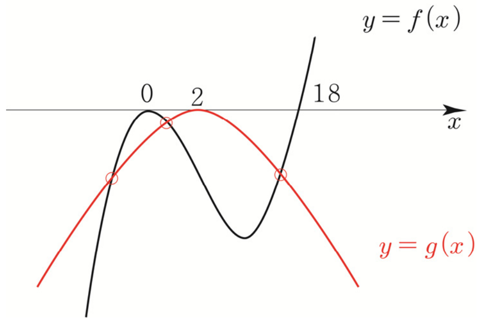
방정식 $t\{2t^2+(c-6)t-4c\}=0$이 서로 다른 두 개의 실근을 가져야하므로 두 가지 case가 존재한다.

① 방정식 $2t^2+(c-6)t-4c=0$이 0이 아닌 중근을 갖는 경우

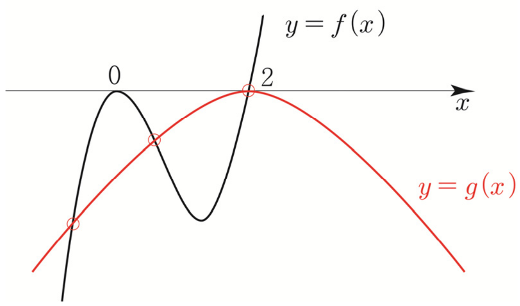
판별식을 사용하면
$D=(c-6)^2+32c=0\ \Rightarrow\ c^2+20c+36=0$

$\Rightarrow\ (c+18)(c+2)=0\ \Rightarrow\ c=-18$ or $c=-2$

①-ⅰ) $c=-18$
$f(x)=x^2(x-18)$



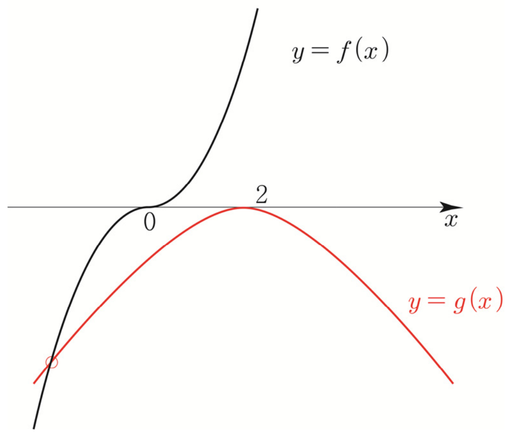
①-ⅱ) $c=-2$
$f(x)=x^2(x-2)$



(다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.
①-ⅰ), ①-ⅱ)의 경우 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나므로 (다)조건을 만족시키지 않는다.

② 방정식 $2t^2+(c-6)t-4c=0$이 0과 0이 아닌 하나의 실근을 갖는 경우

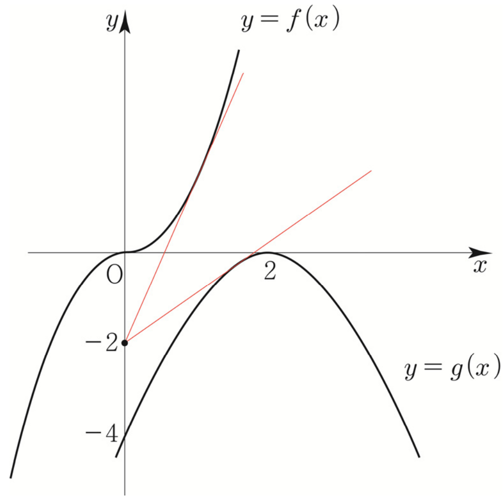
방정식에 $t=0$을 대입하면 $c=0$이므로 $f(x)=x^3$



$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 한 점에서 만나므로 (다)조건을 만족시킨다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le kx-2\le f(x)$

직선 $y=kx-2$는 k와 관계없이 항상 지나는 점이 $(0,\ -2)$이다. 즉, k를 "정점 $(0,\ -2)$을 지나는 직선의 기울기"로 해석할 수 있다. (정점 technic !)



따라서 직선 $y=kx-2$가 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때 k의 값이 최대이고, $y=g(x)$의 그래프에 접할 때 k의 값이 최소이다.

❶ 직선 $y=kx-2$가 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때, 접점의 x좌표를 p라 하면

$f(x)=x^3$
$f'(x)=3x^2$

$f'(p)=k\ \Rightarrow\ 3p^2=k$

$f(p)=kp-2\ \Rightarrow\ p^3=kp-2$

위 두식을 연립하면

$p^3=3p^3-2 \Rightarrow p=1$

$k=3$이므로 $\alpha=3$

❷ 직선 $y=kx-2$가 $y=g(x)$의 그래프에 접할 때, 접점의 x좌표를 q라 하면

$g(x)=-(x-2)^2$

$g'(x)=-2(x-2)$

$g'(q)=k \Rightarrow -2q+4=k$

$g(q)=kq-2 \Rightarrow -(q-2)^2=kq-2$

위 두식을 연립하면

$-q^2+4q-4=-2q^2+4q-2$

$\Rightarrow q^2=2 \Rightarrow q=\sqrt{2}\ (\because q>0)$

$k=-2\sqrt{2}+4$이므로 $\beta=4-2\sqrt{2}$

$\alpha-\beta=3-(4-2\sqrt{2})=-1+2\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$이므로

$a^2+b^2=5$이다.

답은 5

답은 나왔지만 여기서 한 가지 의문점이 든다.

과연 ①-ⅰ) $c=-18$ ($f(x)=x^2(x-18)$) 일 때,

점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2일까?

한번 확인해보자.

$t\{2t^2+(c-6)t-4c\}=0$에 $c=-18$을 대입하면

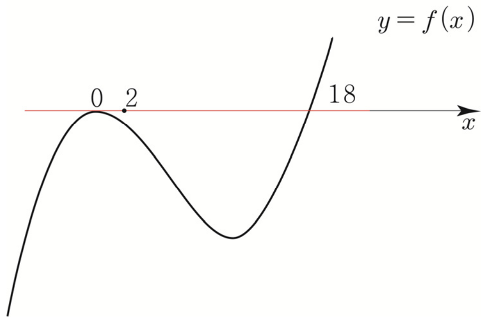
$t(2t^2-24t+72)=0 \Rightarrow t(t-6)^2=0$ 이므로

접점 x좌표는 $t=0$ or $t=6$이다.

$t=0$일 때,

$y=(3t^2-36t)(x-t)+t^3-18t^2 \Rightarrow y=0$이므로

다음 그림과 같이 $y=0$이 접선이 된다.



$t=6$일 때,

$y=(3t^2-36t)(x-t)+t^3-18t^2 \Rightarrow y=-108x+216$

$f(x)=x^3-18x^2$

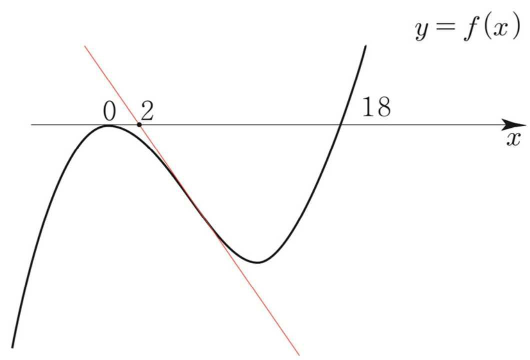
$f'(x)=3x^2-36x$

$f''(x)=6x-36$

$f''(6)=0$

$f(x)$의 변곡점은 $(6,\ f(6))$이므로 접점이 변곡점이고

다음 그림과 같이 $y=-108x+216$은 변곡접선이 된다.



따라서 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=x^3(x-18)$에 그은 접선의 개수는 2이다.

$\frac{1}{6} = \frac{1}{3}(1-m)^3$

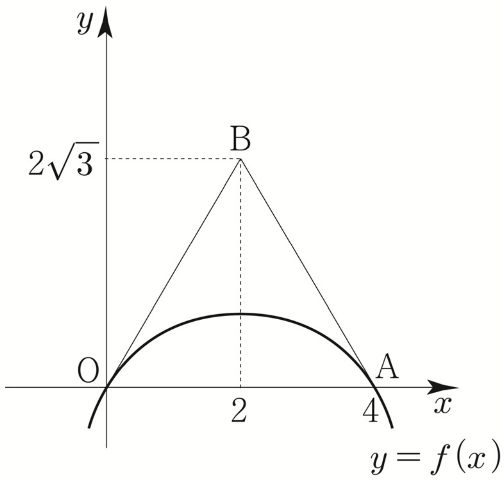
$\frac{1}{2} = (1-m)^3$

따라서 $4(1-m)^3 = 2$

답은 2

025

$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 2\sqrt{3})$
삼각형 OAB의 넓이가 두 점 O, A를 지나는
이차함수 $y = f(x)$의 그래프에 의하여 이등분된다.
($f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.)



삼각형 OAB(정삼각형)의 넓이 S는

$\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$f(x) = ax(x-4)$ $(a<0)$

$\int_0^4 f(x)dx = \frac{|a|}{6}(4-0)^3 = \frac{32|a|}{3} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow a = -\frac{3}{16}\sqrt{3}$

$f(x) = -\frac{3}{16}\sqrt{3}\,x(x-4)$이므로

$64f(1)f(2) = 81$이다.

답은 81

Tip <접선의 기울기를 이용한 위치관계 판단>

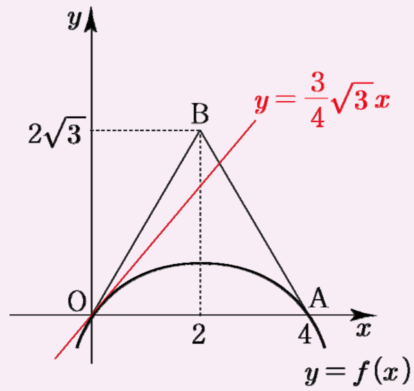
Q. 곡선 $y = f(x)$와 직선 OB는 $0 < x < 2$에서 교점이 존재할까?

물론 직선 OB는 $y = \sqrt{3}\,x$이므로

방정식 $f(x) = \sqrt{3}\,x$을 풀어서 확인할 수도 있지만
$x = 0$에서의 접선의 기울기를 이용하면 된다.

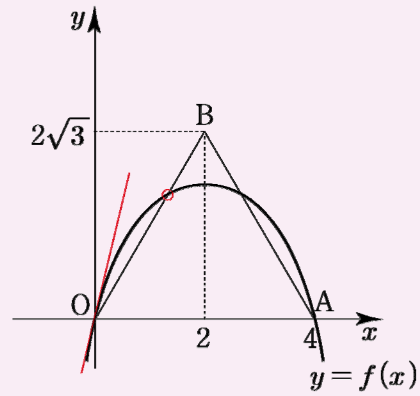
$f'(x) = -\frac{3}{16}\sqrt{3}(2x-4)$ 이므로

$f'(0) = \frac{3}{4}\sqrt{3} < \sqrt{3}$이다.

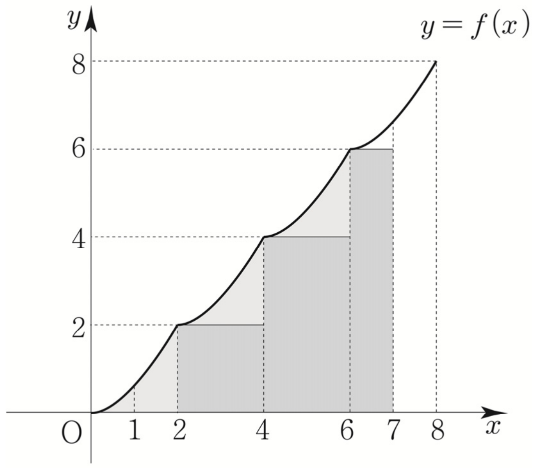


따라서 $0 < x < 2$에서 교점이 생기지 않는다.

만약 $f'(0) > \sqrt{3}$이면 아래 그림과 같이
교점이 존재한다.



즉, 접선의 기울기는 함수의 위치관계를 판단하는
유용한 도구로 사용될 수 있다.



위 색칠한 영역의 넓이를 S라 하면

$$S=3\int_0^2 \frac{1}{2}x^2dx+(2\times 2)+(2\times 4)+(1\times 6)$$

$$=3\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2+18=22$$

따라서 $\int_1^7 f(x)dx=22$이다.

답은 ③

052

$f(t)=t^2-t,\ g(t)=-3t^2+6t$

ㄱ. 점 P는 출발 후 운동방향을 1번 바꾼다.

$f(t)=t(t-1)$

$t=1$를 경계로 $f(t)$의부호가 변하므로

점 P는 $t=1$에서만 운동방향을 1번 바꾼다.

따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $t=2$에서 두 점 P, Q의 가속도를 각각 $p,\ q$라 할 때, $pq<0$이다.

$f'(t)=2t-1 \Rightarrow f'(2)=3=p$

$g'(t)=-6t+6 \Rightarrow g'(2)=-6=q$

$pq=-18<0$

따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $t=0$부터 $t=3$까지 점 Q가 움직인 거리는 8이다.

$$\int_0^3|g(t)|dt=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt$$

$$=[-t^3+3t^2]_0^2+[t^3-3t^2]_2^3=8$$

따라서 ㄷ은 참이다.

답은 ⑤

053

$S_1,\ S_2,\ S_3$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

등차중항에 의해 $2S_2=S_1+S_3$이다.

$$3S_2=S_1+S_2+S_3=\int_{-1}^2 f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^2(-x^2+x+2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$$

$$=\frac{9}{2}$$

따라서 $S_2=\frac{3}{2}$이다.

답은 ④

공식을 사용하면

$$3S_2=\frac{|-1|}{6}\{2-(-1)\}^3=\frac{9}{2} \Rightarrow S_2=\frac{3}{2}$$

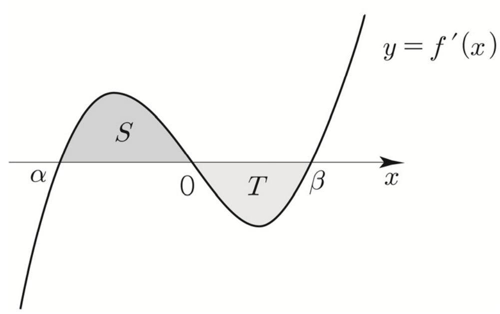
054

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$

$f'(\alpha)=f'(0)=f'(\beta)=0$

$f'(x)=ax(x-\alpha)(x-\beta)\ (a>0,\ \alpha<0<\beta)$

$S=\int_\alpha^0|f'(x)|dx,\ \ T=\int_0^\beta|f'(x)|dx$



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$f'(x)$가 $x=0$을 경계로 $+ \to -$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $\alpha+\beta=0$이면 $S=T$이다.

$\alpha+\beta=0$이면 $\alpha=-\beta$

$f'(x)=ax(x-\beta)(x+\beta)\ \ (a>0)$는 원점에 대하여 점대칭이므로 (기함수) $S=T$이다.

따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $S<T$이고 $f(\alpha)=0$이면 방정식 $f(x)=0$의 양의 실근의 개수는 2이다.

반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OA}=2$

$\angle AOF = 60^\circ$ 이므로

$A(2\cos 60^\circ,\ 2\sin 60^\circ) \Rightarrow A(1,\ \sqrt{3})$

점 A는 $f(x)$위의 점이므로

$f(1)=\sqrt{3} \Rightarrow a+b=\sqrt{3}$

직선 OA의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$

점 A 에서의 접선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이므로

$f'(1)=\sqrt{3} \Rightarrow 2a=\sqrt{3} \Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sqrt{3}x$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 k라 하고, 6개의 포물선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

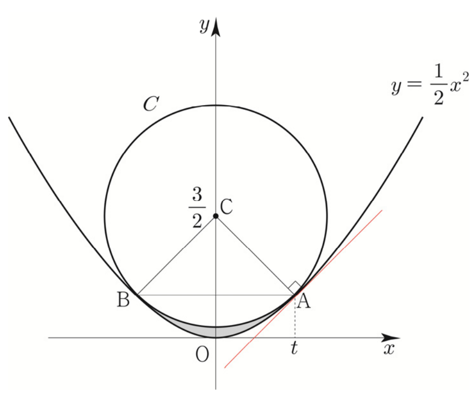
대칭성에 의해서

$S=12k=12\displaystyle\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}x\right)dx$

$=12\left[\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right]_0^1=2\sqrt{3}$

답은 ①

057



$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

$f'(x)=x$

접점 A의 x좌표를 t라 하면

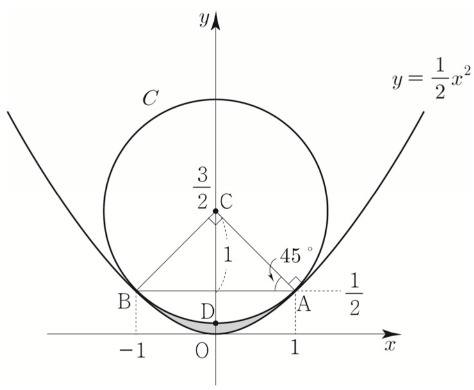
직선 AC의 기울기$=\dfrac{\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}}{t-0}$

직선 AC와 점 $A\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$에서의 접선은 서로 수직하므로

$\dfrac{\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}}{t-0}\times f'(t)=-1 \Rightarrow \dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{3}{2}=-1$

$\Rightarrow t=1\ (\because t>0)$

$A\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$이므로 대칭성에 의해서 $B\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$



원 C의 반지름의 길이 $=\overline{AC}=\sqrt{2}$

부채꼴 ACD 의 넓이 $=\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$

$(\because \angle ACD=45^\circ)$

직선 AC의 방정식은 $y=-x+\dfrac{3}{2}$

원 C와 함수 $y=\dfrac{1}{2}x^2$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=2\left\{\displaystyle\int_0^1\left(-x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\frac{\pi}{4}\right\}$

$=2\left[-\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x\right]_0^1-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

$a=\dfrac{5}{3},\ b=-\dfrac{1}{2}$이므로

$120(a+b)=120\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{2}\right)=140$이다.

답은 140