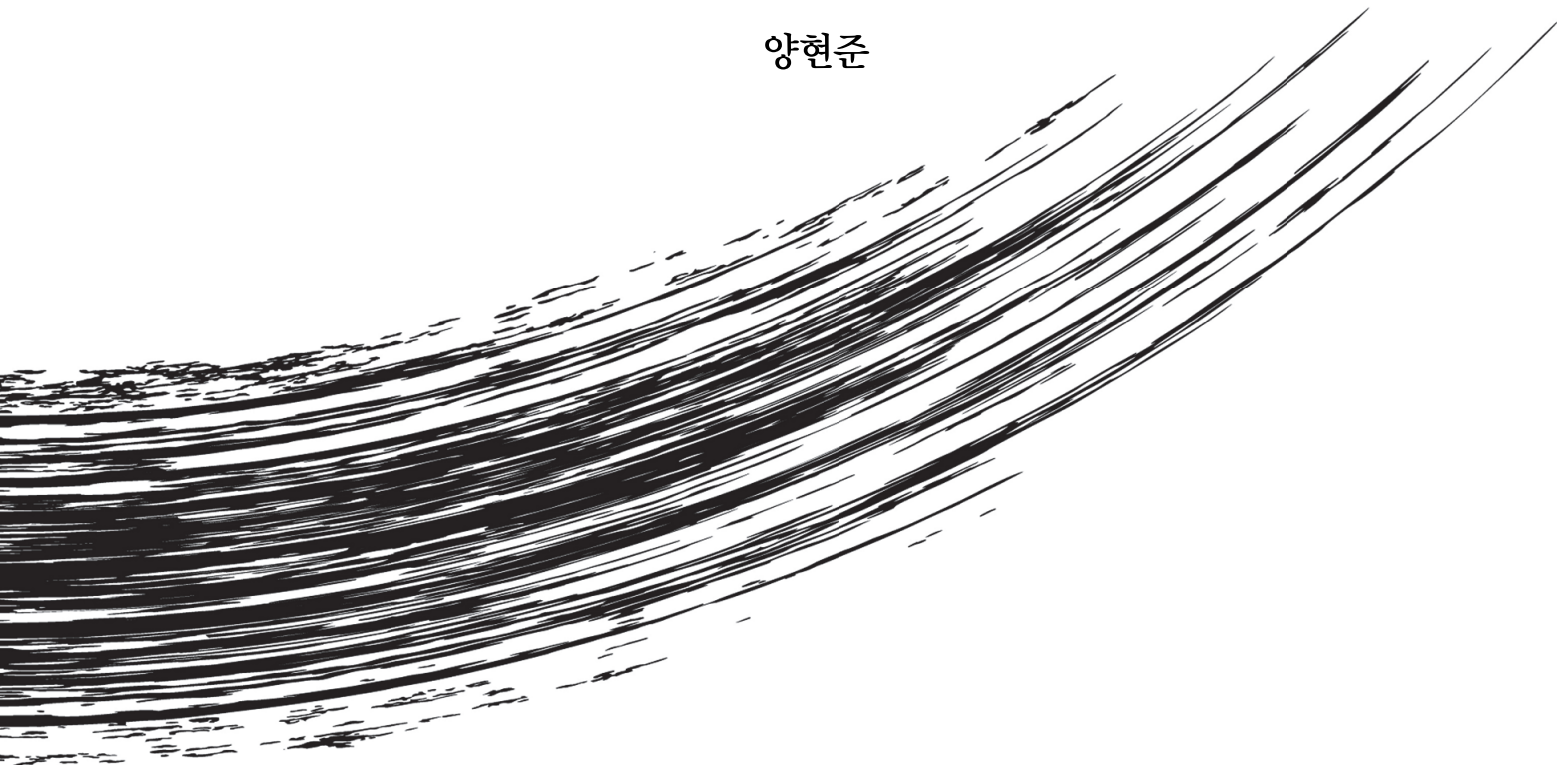
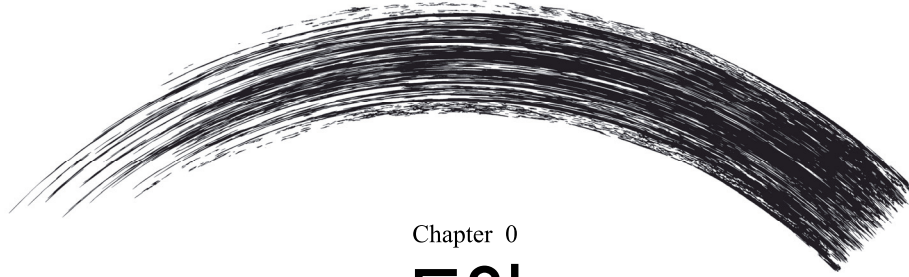


내가 그린 그래프 그림

양현준





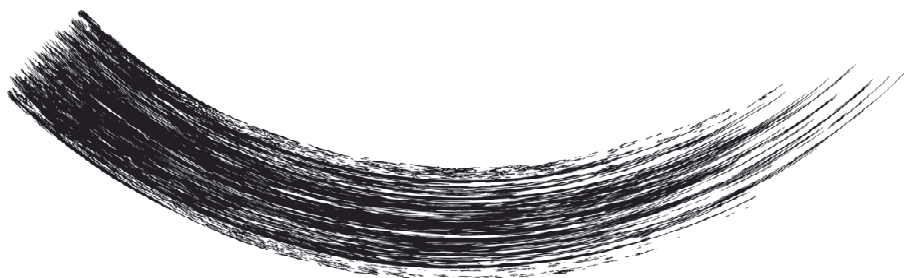
Chapter 0

도입

: 그래프란?

그래프에 대해서 공부하기 위해
그래프가 무엇인지 정확하게 인지해야 합니다.

그래프의 정의와
그래프의 개형과 위치의 의미차이에 대해서
짚어봅시다.



그래프란?

DEFINITION - 함수의 그래프

함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 집합

$$\{(x, f(x)) | x \in X\}$$

을 함수 f 의 그래프라고 한다.

대체로 그래프는 곡선 또는 직선 등으로 나타나는 “그림”이라고 생각합니다. 기본적으로 함수의 그래프는 순서쌍의 집합이기도 하고 그 모든 순서쌍을 좌표평면에 올려서 나타낸다면 여러 형태의 그래프처럼 곡선 또는 직선 등으로 표현될 수 있는 것입니다. 정리하면 그래프는

1. 정의역의 원소와 이에 대응하는 함수값의 순서쌍의 집합
2. 직선 또는 곡선 등으로 시각적인 표현 가능한 것

여기서 정의를 통해 다음의 의미를 파악할 수 있어야 합니다. 그래프는 함수 $f(x)$ 에 대하여 순서쌍 $(x, f(x))$ 의 집합이므로 좌표평면에서 점의 위치를 나타내는 “좌표”의 집합이라고 할 수 있습니다. 따라서 그래프라는 용어 속에는 다음 두 의미가 존재하게 됩니다.

1. 좌표평면에서 “위치”가 존재
2. 직선 또는 곡선 등으로 형성된 “개형”이 존재

여기서 개형이란 사전적 의미로는 “대체로 본 형상이나 모양”을 뜻합니다. 따라서 개형은 좌표평면에서 위치는 의미하지 않고 개형에 좌표평면상 위치가 입혀지면 그것이 바로 그래프가 되는 것입니다. 그러므로 **그래프 = 위치 + 개형**입니다. 그래프에서 위치와 개형의 존재를 명확히 인식해주어야 하고 그래프를 그린다라는 것은 구체적으로 전반적인 곡선 또는 직선의 형태에 그 위치를 파악해주는 행위라는 것을 인지해야 합니다.

그런데 위치를 엄밀하게 결정해주는 것에는 한계가 있습니다. 그래프 위의 모든 점의 위치를 정확하게 좌표평면에 표시할 수가 없기 때문입니다. 따라서 좌표평면상에서 그래프의 위치를 결정하는 것은 **좌표평면상에서 그래프의 위치를 결정하는 것은 그래프가 몇 사분면을 지나는지 확인하는 것으로 간소화**시킵니다. 최종적으로 그래프를 그리는 행위는 다음 순서로 진행 됩니다.

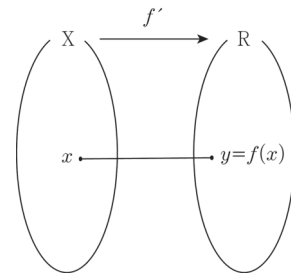
1. 개형파악
2. 대입, 값 조사 등을 통한 사분면 상 위치파악

DEFINITION: 도함수

함수 $y = f(x)$ 가 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여 미분가능할 때 모든 x 에 미분계수 $f'(x)$ 를 대응시킨 함수

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

를 도함수라 한다.



도함수는 미분계수의 정의에 따라 임의의 x 값에 대한 미분계수를 표현해줍니다.

즉, 한 번 도함수를 극한계산을 통해 구해놓으면 그 이후엔 적절한 x 값을 대입하여 원하는 미분계수를 모두 얻을 수 있다는 것입니다. **편리함이 이점**입니다. 또한 도함수 역시 극한계산을 하지 않아도 미분법을 통해 구할 수 있습니다.

이러한 이유로 도함수를 구하는 것인 미분을 할 때, 우선적으로 원함수의 미분계수, 즉 **도함수의 함숫값**에 집중을 해야 합니다. 또한 그 값들의 **부호**가 가장 중요한 것입니다.

원함수의 증가와 감소를 결정하고 전반적인 개형을 형성하기 때문입니다. 따라서 미분계수의 변화추이를 도함수의 그래프를 통해 본다면, 함수의 부호에 집중해야 합니다.

MANUAL1: 기본적으로 도함수는 증감그래프를 통해 부호를 관찰한다.

- ① 함수의 증가, 감소에 대해서 도함수의 부호가 결정적인 역할을 하므로 우선적으로 도함수는 **부호**를 확인한다.
- ② 증감표를 그리기보단, 도함수의 그래프를 그려서 부호변화를 한 눈에 확인하고 좌표평면상에 부호를 간단히 표시한 **증감그래프**를 그린다.

EXPLAIN

1. 시각적 편리함

삼차함수 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) \text{ 이고}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값을 구해보면 $x = 1$ 또는 $x = -1$

$f'(x) = 0$ 인 x 값을 기준으로 함수 $f(x)$ 의 증감표를

나타내면 그림과 같습니다,

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

이렇게 증감표를 작성할 수 있지만 기호들이 많기 때문에 도함수의

전체적인 함숫값 변화 추이가 한눈에 들어오지 않습니다. 또한

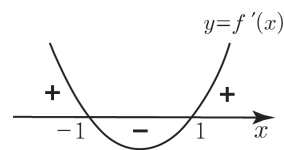
표를 그리기 번거롭습니다.

도함수 $f'(x) = 3(x+1)(x-1)$ 의 그래프를 한번 그려봅시다.

$x = 1$, $x = -1$ 에서 x 축과 만나며, 최고차항의 계수가 양수인

아래로 볼록한 그래프입니다. 또한 부호까지 표시하면

다음 그림과 같습니다.



위와 같이 도함수의 그래프와 함께 좌표평면상에 도함수의 부호를 표시한 것을

이 책에서는 **증감그래프**라고 합니다. 좌표평면상의 그래프는 부호를 x 축의

위쪽, 아래쪽과 관련지어 볼 수 있기 때문에, 부호에 관한 영역이 한 눈에

들어온다는 특성이 있습니다.

2. 도함수와 이계도함수의 관련성

앞서 배운 내용을 확장하여 보면

도함수의 도함수는 이계도함수이기 때문에 도함수의 증감은 이계도함수가 결정합니다.

그러므로 도함수는 원함수를 위한 함수일 뿐만 아니라 이계도함수와도 관련이 있기 때문에

증감표를 그리는 것 보다 도함수를 그려놓는 것이 이계도함수를 파악해야 하는 문제 상황에서

도움이 될 수 있습니다.

3. 행동 전제

위의 삼차함수 예시는 도함수의 그래프를 쉽게 알 수 있는 꼴입니다.

다항함수를 비롯해 $y = \ln x$, $y = e^x$ 등의 기본 꼴과 그 기본 형태에서 x 축, y 축 방향으로

평행이동 된 꼴들은 그 그래프를 교과서에서 배우고, 또 기억해 알고 있는 것들입니다.

예를 들어, $f(x) = e^x + 2x^2$ 의 도함수인 $f'(x) = e^x + 4x$ 의 그래프는 (지수함수 + 다항함수)의

결합 형태이기 때문에 그래프를 바로 떠올리기 쉽지 않습니다. 따라서 MANUAL 1은

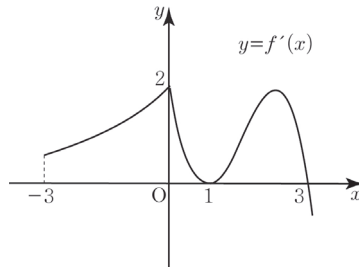
도함수의 그래프를 바로 알 수 있을 때 선택하기 쉬운 행동이라는 것이 행동 전제입니다.

EXAMPLE

No. 2

도함수 그래프 해석

정의역이 $\{x \mid x > -3\}$ 인 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 다음 그림과 같다.



다음 중 알맞은 것을 고르시오.

- ① 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, 3]$ 에서 증가한다.
- ② 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-3, 0]$ 에서 감소한다.
- ③ 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극값을 갖는다.
- ④ 함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 최댓값을 갖는다.
- ⑤ 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다.
- ⑥ 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분계수가 2 이다.
- ⑦ 함수 $f'(x)$ 는 $x > 3$ 에서 감소한다.
- ⑧ 함수 $f(x)$ 는 $x > 3$ 에서 위로 볼록하다.

4점

No. 17

개수함수의 불연속 발생

함수 $f(x) = ax^2 - e^{ax}$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = t$ 의 교점의 개수를 함수 $F(t)$ 라 할 때, 함수 $F(t)$ 는 아래와 같다.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t > f(\beta)) \\ 1 & (t = f(\beta)) \\ 2 & (t < f(\beta)) \end{cases}$$

$2\beta = \left(\frac{1}{2}\right)^\beta$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$ 에서 접선의 방정식은 $y = px + q$ 이다.

$p \times q$ 의 값을 구하시오. [4점]

No. 24

정답: 70

함수 $f(x)$ 는 $f(x) = f(-x)$ 을 만족시키고

함수 $f'(x)$ 는 $f'(x) + f'(-x) = 0$ 을 만족시킨다.

$f(x) = \ln|x| + ax^2$ 에서 미분하면

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax \text{ 이고 다시 미분하면}$$

$$f''(x) = 2a - \frac{1}{x^2} \text{ 이다.}$$

함수 $f(x)$ 의 그래프가 $x = b$ 에서 변곡점을 가지므로

$$f''(b) = 2a - \frac{1}{b^2} = 0 \text{ 이고 } 2ab^2 = 1 \text{ 이다.}$$

함수 $f'(x)$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 모두

원점에 대하여 대칭이므로 함수 $f'(x)$ 의 그래프의

두 극점을 직선 $y = kx$ 가 모두 지난다. 이때

함수 $f'(x)$ 의 그래프의 극점의 x 좌표는

$$x = \sqrt{\frac{1}{2a}}, x = -\sqrt{\frac{1}{2a}} \text{ 이므로}$$

$$f'\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = k\sqrt{\frac{1}{2a}} \text{ 이고}$$

$$2\sqrt{2a} = k\sqrt{\frac{1}{2a}} \text{ 이므로 } k = 4a$$

$$\{f'(1) - g(1)\}\{f'(-1) - g(-1)\} \geq 0 \text{ 은}$$

$$\{f'(1) - g(1)\}\{-f'(1) + g(1)\} \geq 0 \text{ 이고}$$

$$\{f'(1) - g(1)\}^2 \leq 0 \text{ 이다. 따라서 } f'(1) = g(1)$$

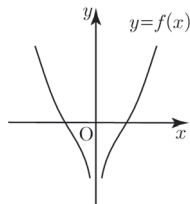
$$f'(1) = 1 + 2a, g(1) = k \text{ 이므로 } 1 + 2a = k$$

$$k = 4a \text{ 와 } 1 + 2a = k \text{ 을 연립하면 } a = \frac{1}{2}, k = 2$$

$$2ab^2 = 1 \text{ 이므로 } b = 1 \text{ 이다. 그러므로}$$

$$20(a + b + k) = 20 \times \frac{7}{2} = 70$$

<함수 $f(x)$ 의 그래프>



No. 25

정답: ⑤

집합 A 는

$t > a$ 일 때 $f(t) > a$ 인 실수 t 또는

$t < a$ 일 때 $f(t) < a$ 인 실수 t 의 집합이다.

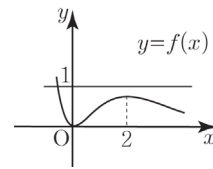
$f(x) = x^2 e^{-x}$ 에서 미분하면

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} \text{ 이다.}$$

$f(x)$ 의 극댓값은 $f(2) = 4e^{-2}$ 이므로 1보다 작고

$f(x)$ 의 극솟값은 $f(0) = 0$ 이다. 따라서

$f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$a < 0$ 이면 항상 $f(t) > a$ 이다. 그러므로

집합 A 는 $t > a$ 인 실수 t 의 집합과 같다. (ㄱ): 참

$a = 1$ 이면 $t > 1$ 에서 항상 $f(t) < 1$ 이므로

집합 A 에는 $t > 1$ 인 실수 t 가 존재하지 않는다.

따라서 $A \cap \{t | t > a\} = \emptyset$ 이다. (ㄴ): 참

$a = k$ 일 때 $A \cap \{t | t > a\} = \emptyset$ 이면

$t > k$ 에서 $f(t) > k$ 인 실수 k 가 존재하지 않는다.

$k < 0$ 이면 항상 $f(t) > k$ 이므로 $k < 0$ 이 아니다.

$k = 0$ 이면 항상 $f(t) \geq k$ 이므로 $k \neq 0$ 이 아니다.

$k > 0$ 이면 $f(t) > k$ 이기 위해서 $k \geq f(2)$ 이어야 한다.

따라서 k 의 최솟값은 $f(2)$ (ㄷ): 참