4

도함수의 활용 Ⅰ - 접선의 방정식

4 도함수의 활용 I - 접선의 방정식

곡선 $y = f(x)$ 위의 한 점에서 접하는 접선의 방정식을 구하는

논제의 유형은 다음 두 가지 유형이 있다.

i) 논제조건으로 접점이 주어지는 유형

ii) 논제조건으로 접점이 주어지지 않는 유형

논제의 유형과 관계없이 접선의 방정식을 구할 때는

접선의 방정식의 재료가 되는

① 접점 $(a,\ f(a))$

② 접선의 기울기 $f'(a)$

를 구해준 뒤 접선의 방정식을 구하면 된다.

i) 논제조건으로 접점이 주어지는 유형

접선의 방정식의 재료인 ① 접점 $(a,\ f(a))$는 주어져 있으므로

② 접선의 기울기 $f'(a)$를 구해준 뒤 접선의 방정식을 구하면 된다.

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

곡선 $y = f(x)$의 접점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이므로

접선의 방정식을 구하면

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

이다.

ii) 논제조건으로 접점이 주어지지 않는 유형

접점 대신 a) 접선의 기울기 m 이나
b) 접선이 지나는 외부의 한 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$가 주어지는데

접선의 방정식의 재료인 접점이 주어지지 않았으므로
변수를 도입하여[5] **접점을 $(t,\ f(t))$라 둔 뒤,**
접선의 기울기를 t에 관한 식 $f'(t)$로 나타내자.
주어진 논제조건인 접선의 기울기 m 이나 접선이 지나는 외부의 한 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$를
이용하면 t에 관한 방정식을 세워 t의 값을 구할 수 있다.

구한 t의 값을 이용하여
① 접점 $(a,\ f(a))$와 **② 접선의 기울기** $f'(a)$를 찾은 뒤
접선의 방정식을 구하면 된다.

a) 접점 대신 접선의 기울기 m이 주어진 경우

변수 t를 도입하여 **접점을** $(t,\ f(t))$라 둔 뒤,
접선의 기울기를 t에 관한 식 $f'(t)$로 나타낸다.
접선의 기울기는 m으로 주어져 있으므로
방정식 $f'(t)=m$을 통해 t의 값을 구하여
① 접점 $(a,\ f(a))$를 찾고 **② 접선의 기울기** $f'(a)$를 구해준 뒤
접선의 방정식을 구하면 된다.

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

접선의 기울기가 m인 접점을 $(t,\ f(t))$라 두면

$$f'(t)=m$$

이 성립하고 이를 풀면 $t=a$이다. 따라서 접선의 방정식은

$$y=m(x-a)+f(a)$$

이다.

5) 논제에서 주어지지 않은 변수를 도입하여 논리전개를 할 때는

어떤 값을 변수로 둘 것인지 설명한 뒤,

[확실하게 성립하는 조건 또는 논제조건]을 이용하여 변수가 만족하는 관계식을 찾아 주어야 한다.

b) 접점 대신 접선이 지나는 외부의 한 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$가 주어진 경우

변수 t를 도입하여 **접점을** $(t,\ f(t))$라 두고,

접선의 기울기를 t에 관한 식 $f'(t)$로 나타내면

접선의 방정식을 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$로 나타낼 수 있다.

나타낸 접선의 방정식에 접선이 지나는 외부의 한 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$를 대입해 주면

방정식 $q=f'(t)(p-t)+f(t)$를 통해 t의 값을 구할 수 있으므로

① 접점 $(a,\ f(a))$를 찾고 **② 접선의 기울기** $f'(a)$를 구해준 뒤

접선의 방정식을 구하면 된다.

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

점 $\mathrm{P}(p,\ q)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 $(t,\ f(t))$라 두자.

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이므로 접선의 방정식은

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)\ \cdots\cdots ㉠$$

이다. 이 접선의 방정식이 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$를 지나므로

$$q=f'(t)(p-t)+f(t)$$

이고 이를 t로 정리하면 $t=$ $\boxed{\text{도출된 식}}$ 이다.

이를 ㉠에 대입하여 정리하면 접선의 방정식은

$y=$ $\boxed{\text{도출된 식}}$

이다.

논제 24 2017학년도 서강대학교 수시논술

함수 $f(x)=x^n$ (단, n은 1보다 큰 자연수)라 하자. 임의의 $a>0$에 대해 $f(x)=x^n$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^n)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서의 접선에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 R이라 하자.

삼각형 PQR의 넓이를 $A(a)$, 삼각형 PQR에 내접하는 원의 둘레의 길이를 $B(a)$라 할 때, 극한값 $\lim_{a\to 0+}\frac{A(a)}{a\cdot B(a)}$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

논리적인 답안작성을 위해 먼저

논제 안에서 **[논제조건]** 과 **[논제의 결론]** 을 파악하면 다음과 같다.

논제 24 2017학년도 서강대학교 수시논술

함수 $f(x)=x^n$ (단, n은 1보다 큰 자연수)라 하자. 임의의 $a>0$에 대해 $f(x)=x^n$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^n)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서의 접선에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 삼각형 PQR의 넓이를 $A(a)$, 삼각형 PQR에 내접하는 원의 둘레의 길이를 $B(a)$라 할 때, **[논제의 결론]** 극한값 $\lim_{a\to0+}\dfrac{A(a)}{a\cdot B(a)}$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

[논제의 결론] 이 극한값 $\lim_{a\to0+}\dfrac{A(a)}{a\cdot B(a)}$를 n에 대한 식으로 나타내는 것이므로

$A(a)$와 $B(a)$를 구하기 위해

함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 방정식과

점 P에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구해야 한다.

[논제조건] 으로 **① 접점 $(a,\ a^n)$이 주어진 경우**이므로

② 접선의 기울기 na^{n-1}을 구해 준 뒤 접선의 방정식을 구하면 되고

지나는 한 점 $(a,\ a^n)$과 접선에 수직인 기울기 $-\dfrac{1}{na_{n-1}}$을 통해

점 P를 지나고 접선에 수직인 직선을 구하면 된다.

각각의 직선의 x절편인 점 Q와 점 R을 구한 뒤

삼각형 PQR의 넓이 $A(a)$와

삼각형 PQR에 내접하는 원의 둘레의 길이 $B(a)$를 계산하여

극한값 $\lim_{a\to0+}\dfrac{A(a)}{a\cdot B(a)}$를 구하면 된다.

해설은 다음과 같다.

함수 $f(x)=x^n$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^n)$에서의 접선의 기울기는 na^{n-1}이므로

접선의 방정식은

$$y=na^{n-1}x-(n-1)a^n$$

이다.

점 P를 지나고 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{na^{n-1}}$이므로

점 P에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{na^{n-1}}x+\frac{1}{na^{n-2}}+a^n$$

이다.

위에서 구한 두 직선의 x절편을 각각 구하면

$$\mathrm{Q}\left(\frac{n-1}{n}a,\ 0\right),\ \mathrm{R}(a+na^{2n-1},\ 0)$$

이다.

삼각형 PQR에 내접하는 원의 반지름을 $r(a)$라 하자.

삼각형 PQR의 넓이와 원의 둘레의 길이는

$$A(a)=\frac{1}{2}\times r(a)\times(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP}})$$

$$B(a)=2r(a)\pi$$

이다. 이를 이용하여 논제의 극한을 계산하면

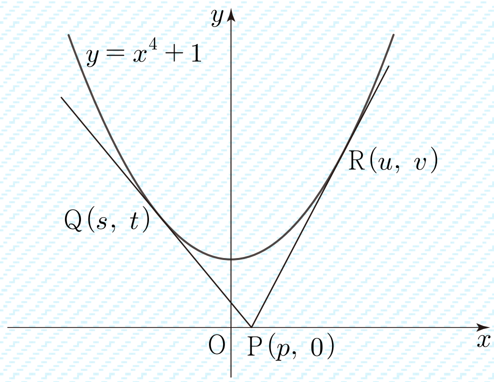
$$\begin{aligned}\lim_{a\to0+}\frac{A(a)}{a\cdot B(a)}&=\lim_{a\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP}}}{4\pi a}\\&=\lim_{a\to0+}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}a^2+a^{2n}}+na^{2n-1}+\frac{a}{n}+\sqrt{n^2a^{4n-2}+a^{2n}}}{4\pi a}\\&=\lim_{a\to0+}\frac{1}{4\pi}\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+a^{2n-2}}+na^{2n-2}+\frac{1}{n}+\sqrt{n^2a^{4n-4}+a^{2n-2}}\right)\\&=\frac{1}{2n\pi}\end{aligned}$$

이다.

논제 25

2015학년도 고려대학교 모의논술

그림과 같이 x축 위의 점 $\mathrm{P}(p,\ 0)$에서 곡선 $y=x^4+1$에 그은 두 접선의 접점을 $\mathrm{Q}(s,\ t)$와 $\mathrm{R}(u,\ v)$라 하자.



(1) 제시문에서 p를 s의 함수로 나타내시오.

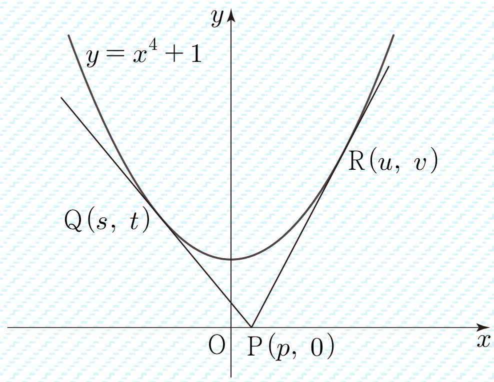
(2) 제시문에서 극한 $\lim_{s \to 0} s^4 \dfrac{du}{ds}$를 구하시오.

논리적인 답안작성을 위해 먼저

논제 안에서 **[논제조건]** 과 **[논제의 결론]** 을 파악하면 다음과 같다.

논제 25 2015학년도 고려대학교 모의논술

그림과 같이 x축 위의 점 **[논제조건]** $\mathrm{P}(p,\ 0)$에서 곡선 $y=x^4+1$에 그은 두 접선의 접점을 $\mathrm{Q}(s,\ t)$와 $\mathrm{R}(u,\ v)$라 하자.



(1) 제시문에서 **[논제의 결론]** p를 s의 함수로 나타내시오.

(2) 제시문에서 극한 $\lim_{s\to 0} s^4 \dfrac{du}{ds}$ 를 구하시오.

논제 (1)의 경우 **[논제의 결론]** 이 p를 s의 함수로 나타내는 것이므로

먼저 점 $\mathrm{Q}(s,\ t)$에서의 접선의 방정식을 구해야 한다.

[논제조건] 으로 ① 접점 $(s,\ s^4+1)$이 주어진 경우이므로

② 접선의 기울기 $4s^3$을 구해 준 뒤 접선의 방정식을 구하면 되고

접선이 지나는 한 점 $\mathrm{P}(p,\ 0)$을 접선의 방정식에 대입하여

p로 정리하면 된다.

해설은 다음과 같다.

(1) 점 $\mathrm{Q}(s,\ t)$는 곡선 $y=x^4+1$ 위의 점이므로

$$t=s^4+1$$

을 만족한다. 점 $\mathrm{Q}(s,\ s^4+1)$에서의 접선의 기울기는 $4s^3$이므로 접선의 방정식은

$$y=4s^3(x-s)+s^4+1$$

이다. 이 접선이 점 $\mathrm{P}(p,\ 0)$을 지나므로 접선의 방정식에 대입하여 p로 정리하면

$$p=\frac{3s^4-1}{4s^3}$$

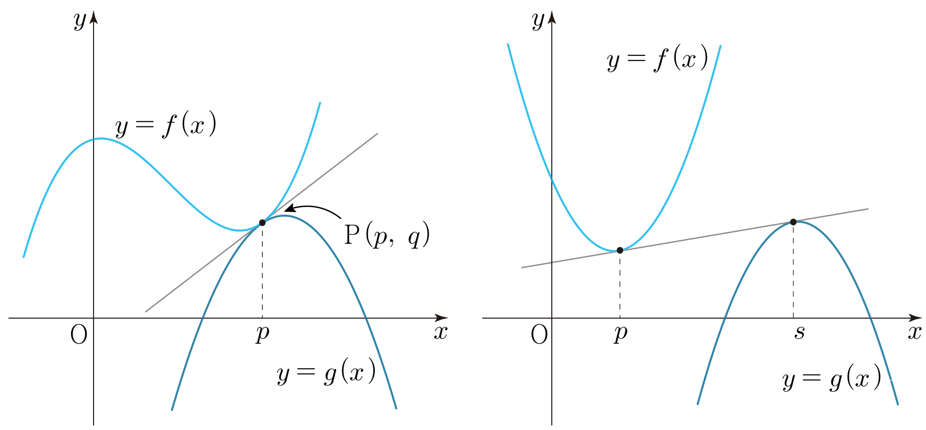
이다.

※ 두 곡선의 공통 접선

두 곡선의 공통 접선은 다음 두 가지 유형이 존재한다.

i) 한 점에서 공통 접선을 가지는 경우

ii) 접점이 서로 다를 때 공통 접선을 가지는 경우



위의 두 가지 유형 모두

앞서 배웠던 곡선 위의 한 점에서 접하는 접선의 방정식과는 달리

두 개의 곡선에 동시에 접하는 접선이다.

두 개의 곡선에 동시에 접하는 접선의 방정식을 구할 때는

먼저 곡선 $y = f(x)$에 접하는 접선과

곡선 $y = g(x)$에 접하는 접선의 상황을 각각 분석한 뒤

두 접선이 서로 일치함을 이용하여 연립방정식을 세워야 한다.

세운 연립방정식을 풀어 구한 값들을 이용하여

공통 접선의 방정식을 구하면 된다.

ⅰ) 한 점에서 공통 접선을 가지는 경우

먼저 곡선 $y=f(x)$ 위의 ① **접점** $\mathrm{P}(p,\ f(p))$와 ② **접선의 기울기** $f'(p)$를 구하고
곡선 $y=g(x)$ 위의 ① **접점** $\mathrm{P}(p,\ g(p))$와 ② **접선의 기울기** $g'(p)$를 구한 뒤
두 접선이 서로 일치함을 이용하여 연립방정식을 세워야 한다.

세운 연립방정식을 풀어 구한 값들을 이용하여
공통 접선의 방정식을 구하면 된다.

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$에서의 접선의 기울기는 $f'(p)$이고
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(p,\ g(p))$에서의 접선의 기울기는 $g'(p)$이다.

두 접선의 방정식이 일치하고 접점이 일치하므로

$$\begin{cases} f'(p)=g'(p) \\ f(p)=g(p) \end{cases}$$

이다.

이 식을 연립하면

$$p=\boxed{\text{도출된 식}}$$

이고 이를 이용하여 접선의 방정식을 구하면

$$y=\boxed{\text{도출된 식}}$$

이다.

ii) 접점이 서로 다를 때 공통 접선을 가지는 경우

먼저 접선과 곡선 $y=f(x)$가 접하는 **접점을 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$라 두고**
접선과 곡선 $y=g(x)$가 접하는 **접점을 $\mathrm{Q}(s,\ g(s))$라 둔 다음**
두 접점에서의 접선의 방정식을 각각 구해준 뒤
두 접선이 서로 일치함을 이용하여 연립방정식을 세워야 한다.

세운 연립방정식을 풀어 구한 값들을 이용하여
공통 접선의 방정식을 구하면 된다.

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

접선과 곡선 $y=f(x)$가 접하는 접점을 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$라 두자.
점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(p)$이고 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=f'(p)(x-p)+f(p)$$

접선과 곡선 $y=g(x)$가 접하는 접점을 $\mathrm{Q}(s,\ g(s))$라 두자.
점 Q에서의 접선의 기울기는 $g'(s)$이고 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=g'(s)(x-s)+g(s)$$

두 접선의 방정식이 일치하므로 두 접선의 기울기와 y절편이 같다. 따라서

$$\begin{cases} f'(p)=g'(s) \\ -pf'(p)+f(p)=-sg'(s)+g(s) \end{cases}$$

이다.

이 식을 연립하면

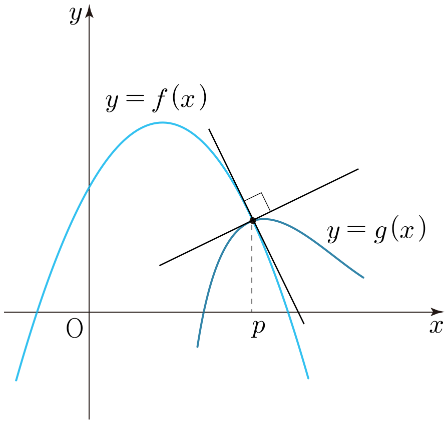
$$p=\boxed{\text{도출된 식}},\ s=\boxed{\text{도출된 식}}$$

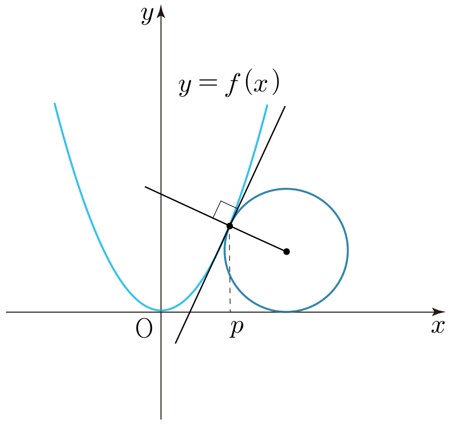
이고 이를 이용하여 접선의 방정식을 구하면

$$y=\boxed{\text{도출된 식}}$$

이다.

※ 두 곡선이 한 점에서 수직으로 만날 때





두 곡선이 한 점에서 수직으로 만난다는 것은
두 곡선의 교점을 $\mathrm{P}(p,\ q)$라 할 때
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선이
서로 수직인 경우를 의미한다.

이처럼 두 곡선 $y=f(x)$과 $y=g(x)$이
한 점 P에서 수직으로 만날 때
점 P에서의 접선의 방정식을 구하려면

먼저 곡선 $y=f(x)$ 위의 ① 접점 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$와 ② 접선의 기울기 $f'(p)$를 구하고
곡선 $y=g(x)$ 위의 ① 접점 $\mathrm{P}(p,\ g(p))$와 ② 접선의 기울기 $g'(p)$를 구한 뒤
접점이 일치하고 두 접선이 서로 수직임을 이용하여 연립방정식을 세워야 한다.

세운 연립방정식을 풀어 구한 값들을 이용하여
점 P에서의 접선의 방정식을 구하면 된다.

논제 26

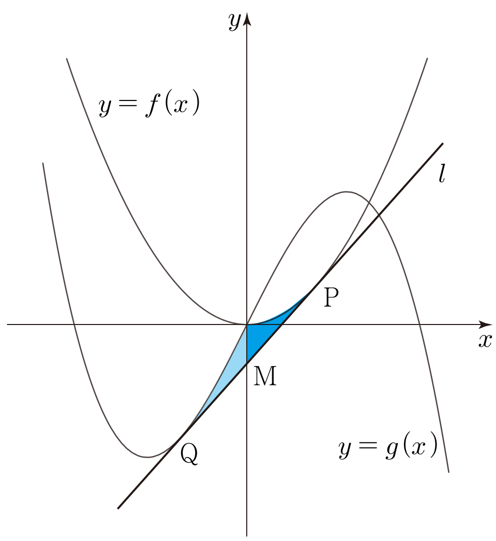
(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

(나) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

다음 그림과 같이 양수 a에 대하여 이차함수 $f(x)=ax^2$의 그래프와 점 P에서 접하고 삼차함수 $g(x)=-x^3+2x$의 그래프와 점 Q에서 접하는 직선을 l이라 하자. (단, P는 제1사분면의 점이고 Q는 제3사분면의 점이다.)



직선 l의 y절편을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{QM}}=\dfrac{5}{4}\overline{\mathrm{PM}}$이다.

(가)와 (나)를 이용하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 상수 a의 값과 점 P의 x좌표를 구하시오.

(2) 직선 l의 방정식을 구하시오.

(3) 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 $x=0$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1,
곡선 $y=g(x)$와 직선 l 및 $x=0$으로 둘러싸인 영역 중 $x \le 0$인 부분의
넓이를 S_2라 할 때, $\dfrac{S_2}{S_1}$의 값을 구하시오.

논리적인 답안작성을 위해 먼저

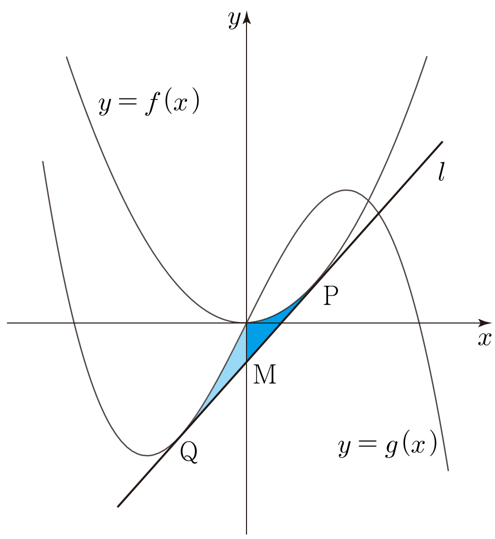
논제 안에서 **[논제조건]** 과 **[논제의 결론]** 을 파악하면 다음과 같다.

논제 26 2017학년도 경북대학교 자연 I 수시논술

(제시문 생략)

다음 그림과 같이 양수 a에 대하여 **[논제조건 ①]** 이차함수 $f(x)=ax^2$의 그래프와 점 P에서 접하고 **[논제조건 ②]** 삼차함수 $g(x)=-x^3+2x$의 그래프와 점 Q에서 접하는 직선을 l이라 하자.

(단, **[논제조건 ③]** P는 제 1사분면의 점이고 Q는 제 3사분면의 점이다.)



직선 l의 y절편을 M이라 할 때, **[논제조건 ④]** $\overline{\mathrm{QM}}=\frac{5}{4}\overline{\mathrm{PM}}$이다.

(가)와 (나)를 이용하여 다음 물음에 답하시오.

(1) **[논제의 결론]** 상수 a의 값과 점 P의 x좌표를 구하시오.

(2) **[논제의 결론]** 직선 l의 방정식을 구하시오.

논제 (1)의 경우 **[논제의 결론]** 이 상수 a의 값과 점 P의 x좌표를 구하는 것이므로

제시문의 내용에 따라

[논제조건 ①] 이차함수 $f(x)$의 그래프와 **점 P에서 접하는 접선의 방정식**을 구하고

[논제조건 ②] 삼차함수 $g(x)$의 그래프와 **점 Q에서 접하는 접선의 방정식**을 구한 뒤

두 접선이 서로 일치함을 이용하여 연립방정식을 세워야 한다.

세운 연립방정식을 풀어 구한 값들과 **[논제조건 ③]**, **[논제조건 ④]** 를 이용하여

[논제의 결론] 을 도출하면 된다.

논제 (2)의 경우 **[논제의 결론]** 이 직선 l의 방정식을 구하는 것이므로

논제 (1)에서 구한 상수 a의 값과 점 P의 x좌표인 t를 이용하여

직선 l이 지나는 점 P와 **직선 l의 기울기**를 구해준 뒤

직선 l의 방정식을 구하면 된다.

해설은 다음과 같다.

(1) 점 P의 좌표를 $(t,\ at^2)$ (단, $t>0$)이라 두고,

점 Q의 좌표를 $(s,\ -s^3+2s)$ (단, $s<0$)라 두자.

점 P에서의 접선의 기울기는 $2at$이고

점 Q에서의 접선의 기울기는 $-3s^2+2$이므로

두 점에서의 접선의 방정식을 각각 구하면

$$y=(2at)x-at^2$$

$$y=(-3s^2+2)x+2s^3$$

이다.

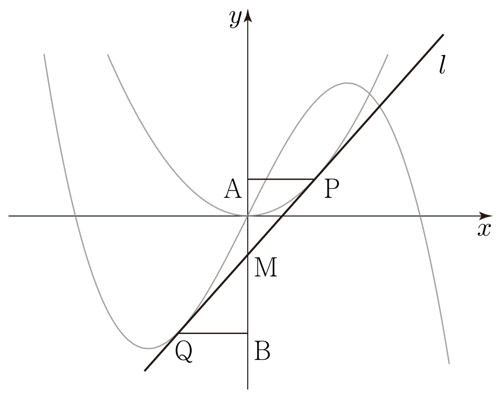
두 접선의 방정식이 일치하므로

$$2at = -3s^2 + 2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$-at^2 = 2s^3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

을 만족한다.

한편, 두 점 P와 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 두자.



삼각형 PAM과 삼각형 QBM은 닮음이고 $\overline{\mathrm{QM}} = \frac{5}{4}\overline{\mathrm{PM}}$이므로 닮음비는

$$\overline{\mathrm{QM}} : \overline{\mathrm{PM}} = 5 : 4$$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{QB}} : \overline{\mathrm{PA}} = -s : t = 5 : 4$이므로

$$t = -\frac{4}{5}s \qquad \cdots\cdots ㉢$$

를 만족한다. ㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 상수 a의 값과 점 P의 x좌표인 t를 구하면

$$a = \frac{25}{16},\ t = \frac{2}{5}$$

이다.

(2) 논제 (1)에서 구한 a, t를 이용하여 직선 l이 지나는 점 P를 구하면

$$\mathrm{P}\left(\frac{2}{5},\ \frac{1}{4}\right)$$

이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{5}{4}$이므로 직선 l의 방정식은

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$$

이다.

논제 27 : 실전논제 10min

곡선 $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 곡선 $f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$ (단, $s \neq 0$)에서 다시 접한다.
이때 s의 값을 구하시오.

논제 28 : 실전논제 20min　　2019학년도 경희대학교 자연 일요일 수시논술

(가) 좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 다음과 같다.

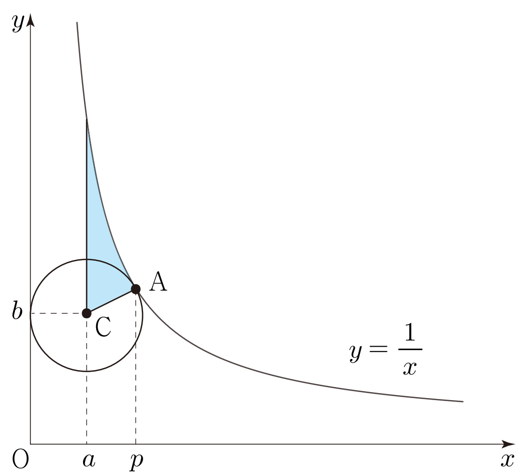
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

(나) 중심이 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$0<p\le 1$일 때, 점 $\mathrm{A}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$은 곡선 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ 위의 점이다. 이때, 점 A에서 $y=\dfrac{1}{x}$과 접하는 원 중에서 y축에도 접하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ b)$라 하자.

$0<a<p$일 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) $p=1$일 때, 직선 $x=1$에 의하여 나누어지는 원의 두 부분 중에서 작은 부분의 넓이를 구하고, 그 근거를 논술하시오.

(2) a와 b를 p에 관한 함수 $a=f(p)$와 $b=g(p)$로 나타내고, 그 근거를 논술하시오.

논제 29 : 실전논제 20min

2018학년도 서울가톨릭대학교 의학계열 모의논술

(가) 자연수 n에 대하여 포물선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{A}(n,\ n^2)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_n이라고 하자.

(나) 제시문 (가)의 점 $\mathrm{A}(n,\ n^2)$과 접선 l에 대하여 점 A에서 l에 접하고 동시에 x축과 접하는 원의 중심을 $\mathrm{B}(x_n,\ y_n)$이라고 하자. (단, $x_n > a_n$)

(1) 제시문 (가)와 (나)에 주어진 a_n과 x_n을 각각 n에 관한 식으로 각각 나타내고 그 근거를 논술하시오.

(2) 제시문 (가)와 (나)에 주어진 a_n과 x_n에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-4a_n^2}{a_n}$을 구하고 그 근거를 논술하시오.