질문하고 생각하는 수학

prologue

원엽

교과서의 가장 큰 단점이라 한다면, 수업용 교재라는 것입니다.
그러나, 교과서의 가장 큰 장점이라 한다면, 가장 평균적인 텍스트라는 점입니다.

공부에 자질이 있는 학생만을 위한 텍스트가 아닌, 최대한 많은 학생들에게 이해될 수 있는
가장 본질적인 텍스트라는 점이며, 이것이 교과서가 기준이 되는 이유라 할 수 있겠습니다.

교과서를 공부하는 이유는 여러분의 시험에 있어 기준을 확실하게 세우기 위해서입니다.
가장 일반적인 텍스트로 이루어진 교과서는, 여러분에게 중요하고 꼭 알아야할 개념들의 범위를 알려줍니다.

그러나 교과서의 가장 큰 단점인 수업용 교재라는 점은 꽤 큰 단점입니다.
이 때문에, 교과서를 이해하고 교과서를 전달할 수 있는 선생님이 있어야만 교과서 강의가 유의미하게 진행될 수 있습니다.
이에 대하여 제가 항상 생각하고 고민해왔던 책의 모습은 교과서를 공부할 수 있게 하는 책,
수업을 대체할 수 있는 책이었습니다.
수많은 질문을 던져 고민하게 하고, 수많은 생각거리를 적어서 생각하게 하는 책을 계속 생각해왔습니다.

그래서 탄생한 이 책은, 교과서를 대체하는 책이 아닙니다.
교과서를 학습하는 하나의 방향이 되는 책입니다.

저는 돈이 많지 않아, 제가 돈을 벌면서 교과서와 기출을 혼자서 독학하였습니다.
그 중간에 수학책 저자이신 포카칩님의 책을 얻게 되어 더욱 확신을 갖게 되었죠.
어쩌면 그 경험의 일부를 이 책에 녹여낸 것 같기도 합니다.
그때 고민하고 생각했던 내용을 충분히 이 책에 담았습니다만 하나의 이해방식일 뿐입니다.

이 책은 교과서를 대체하지 않으며, 여러분의 생각과 질문을 대체하지 못합니다.
여러분이 공부하면서 떠오른 생각과 질문이 이 책에 담긴 것보다 더 중요함을 잊지마세요.

이 책을 공부하면서 반드시 교과서의 내용을 참고하셔야 합니다.
저자의 설명이 온전히 맞으리라 생각하진 않습니다. 학생의 이해방식 또한 옳을 수 있습니다.
저자의 설명을 그대로 받아들이지 마십시오. 저자의 설명과 자신의 설명을 비교하고, 왜 저자는 이렇게 생각했을까를 고민하십시오. 자신이 이렇게 생각한 근거는 무엇인지 다시 생각해보십시오. 그 이후에 택하시면 충분하실 것으로 생각합니다.

이 책은 하나의 교과서를 설명한 텍스트일 뿐 교과서를 참고하셔야 하는 것은 변함없습니다.

다시 한 번 언급하자면, 이 책에 수록되어있는 질문은 저자가 생각해볼만한 질문으로 정하여 수록한 것입니다.
이 책에 수록되어있는 질문보다, 학생 스스로 질문하면서 공부하는 것이 훨씬 좋으리라 생각합니다.
그러므로, 교과서로 먼저 시작하십시오. 질문이 떠오르지 않을 때 참고해보십시오.
교과서와 같이 병행해야하는 책이라는 사실을 잊지 마시길 바랍니다.

마지막으로, 저와 같이 여러 밤을 새면서 책의 세세한 부분을 기획하며 만들어주신 임태형 선생님 다시 한 번 감사드립니다.
선생님처럼 교과서를 분석하신 분의 도움이 아니었다면 이 책은 만들어지지 못했을 것입니다.

- 단국대학교 치과대학 치의학과 재학
- 공부의 신 온라인 1기 멘토
- 공부의 신 스토리펀딩 강연, 강의, 아프리카 방송
- 닉네임 [일반청의미]로 활동
- 세상에서 가장 쉬운 수학 확률과 통계 단독저자
- 대학생 정책제안활동 참여 : 연구교사제 제작&제안

태형

이 책은 교과서를 공부하며, 해석되지 않는 부분이 있을 때, 찾아보는 '사전'처럼 활용되었으면 합니다.
세상에 없는 최고의 개념서를 만드는 것보다는, 세상 어디에나 있는 최고의 개념서 '교과서'를 제대로 볼 수 있는 가이드북을 만들고 싶었습니다.

이 책의 풀이는 논리적인 비약을 최대한 줄였습니다.
어떤 문제를 풀어보고, 왜 이렇게 풀이했는지에 대해서 논리적인 비약이 없이 설명할 수 있어야 합니다.
그런데 그런 풀이의 기준이 교과서입니다. 교과서의 표현을 가지고 빈틈없이 설명하려고 노력했습니다.

이 책은 당신이 본 수학책 중 가장 재미있는 책이 될 것입니다.
단원명을 읽고, '왜 이런 순서로 공부를 해나갈까?', '도함수의 활용은 수학2에서도 있었는데 왜 또 배우지?', '여러 가지 미분법이라는 것은 미분하는 방법이 여러 가지라는 것인가? 내가배운 미분법은 곱합수의 미분법이었는데 다른 형태의 미분법도 배우나?' 이 정도로 시작할 수 있습니다. 항상 생각하고 질문하고, 답해보고 공부하고, 또 생각하고 질문하고 답해보고 공부하고, 그리고 또 질문하십시오. 그렇게 한다면 가장 재미있는 수학 공부를 하고 있을 겁니다.

이 책을 구매했다면, 당신은 의도했든 하지 않았든 불우한 이웃을 돕고 있습니다.
항상 소액 기부문화를 창조하려고 노력했습니다. 책으로 인한 모든 수익은 모두 불우한 환경의 학생이 공부지원금으로 활용됩니다. 모두가 우연히, 행복해지면 좋겠습니다.
함께 해주신 모든 분께 감사드리며, 모든 의견을 함께해준 동행자 이원엽 선생님 감사드립니다.

추신1. 이런 학생들이 이 책을 보면 좋습니다.

1. 개념 공부를 정확하게 했다고 생각이 들지 않는, 그래서 개념이 꽉 차 있다는 느낌을 느껴보지 못한 학생.
2. 많은 유형의 문제를 풀었고 또 기출 문제도 다 풀어보았는데, 3~4등급을 벗어나지 못하는 학생.
3. 문제를 풀어서 정답을 맞추고 있는데 찜찜한 느낌이 드는 학생.
4. 여러 가지 공식을 외우고는 있는데, 문제 풀이를 하면서 그 공식을 왜, 언제, 어떻게 사용해야 하는지 모르는 학생.
5. 1단원부터 5단원까지 있는 과목을 공부하는데 5단원쯤 공부할 때 1단원, 2단원의 내용이 생각이 나지 않는 학생.
6. 문제를 풀 때마다 풀이를 정리하여 외우려고 하는 학생.

추신2. 수학 공부를 제대로 하는 방법.

- 시작하기 전에

1. 단원의 목차는 외울 것.
2. 목차를 보며 그 단원에서 무엇을 배우게 될지 추론해볼 것.
3. 모르는 단어가 있다면 사전이나 인터넷을 활용하여 먼저 찾아볼 것.

- 내용공부를 할 때

4. 학습 목표를 확인하고 공부를 하며 항상 생각할 것.
5. 왜인지 모르면 넘어가지 말고, 충분한 고민을 할 것.
6. 고민이 없는 질문은 의미가 없음을 항상 생각할 것.
7. 단원을 넘어갈 때, 이전 단원과 다음 단원의 연관 관계를 생각해볼 것.
8. '왜'에 대한 물음을 사소하게 던질 것.
9. 물음이 해소가 되지 않을 때 해결해줄 수 있는 무언가를 마련해둘 것.(책 혹은 선생님)

- 문제를 풀 때

10. 한 문제를 풀이하여 답을 맞추고 그 문제를 소비하는 것이 아니라 일반화 하여 공부할 것.
11. 그 문제를 풀어 맞추는 것만을 목표로 하지 않을 것.
12. '시행착오=이득'의 마인드를 가질 것.
13. 논리적 비약 없이 정확하게 답을 맞추었다면 해설을 확인하고 비교할 것.
14. 틀렸다면 다시 시도할 것. 다섯 번 이상 시도하지 않고선 해설을 보지 말 것.
15. 답을 보기 전, 세 번 이상의 시도 후엔 해결의 실마리에 대한 도움을 구할 것. 이때 절대 풀이를 해달라고 하지 말 것.
16. 내가 모르는 것이 무엇인지 정확하게 파악하고, 가장 처음 해야 할 것은 고향(교과서)으로 돌아갈 것.
17. 새로운 표현을 보았다면 교과서의 어떤 내용을 말하는 것인지 찾아보고, [말, 글]-[그림, 그래프, 표]-[식]의 표현을 모두 해볼 것.

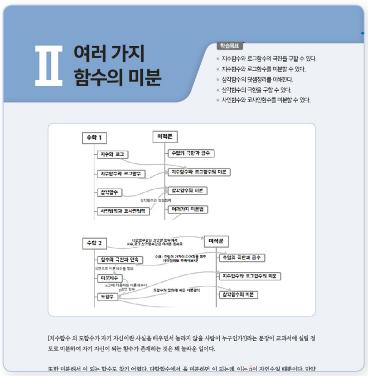
- 고난도 문제를 풀 때

18. ‘내가 아는 것 외에는 나오지 않는다.’라는 마인드를 가질 것.
19. ‘내가 아는 말로 구성이 되어 있다면 다 풀 수 있다.’는 마인드를 가질 것.
20. 막막할 땐 ‘무엇을 구해야 하는가?, 단서는 무엇인가?, 해석을 어떻게 할 것인가?, 연산을 정확하게 했고, 역연산으로 검산을 해보았는가?’에 대한 답을 구해볼 것.
21. 기본적으로 15~20분을 생각해보고 실마리가 전혀 떠오르지 않을 땐 시간을 두고, 다시 시도해 볼 것.
22. 풀이 중간에 막힌다면 다시 한 번 15~20분 정도 생각해보고 앞으로 나아가지 못할 땐, 알아낸 정보를 정리한 후 간격을 두고 다시 시도해 볼 것.

- 연세대학교 교육대학원 재학
- 평촌비상에듀 재수종합
- 양수리비상에듀(이과전문기숙)
- 대치교신학원
- 잠실 유레카 학원
- 평촌 유클리드 학원
- 생각하는방법1관 학원 원장
- 생각하는방법2관 고등관 원장
- 생각하는방법3관 재수학원 원장

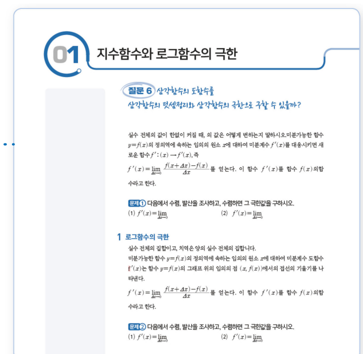
책의 구성

이 책의 구성은 교과서와 기출을 충분히 이해할 수 있도록 제작되었습니다.
그러나 교과서와 기출을 대체하는 책은 아닙니다.
책은 교과서 개념에 대한 질문과 생각들을 서술한 부분과 기출문제를 대하는 시각을 서술한 부분으로 나누었습니다.
이 두 부분을 교과서의 본문과 예제, 문제들로 연결할 수 있습니다.
교과서가 반드시 학습에 필요할 것입니다. 참고하여 학습하시길 바랍니다.



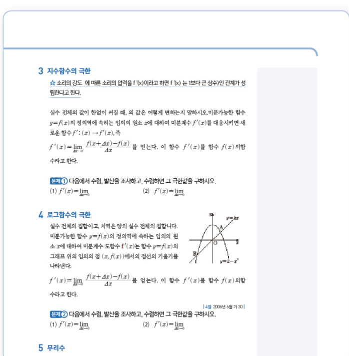
대단원 도입

대단원에서 다룰 내용을 마인드맵으로, 여러 질문으로 설명하였습니다.
현재 배울 단원의 내용과 이전 단원의 내용 사이의 관계를 설명하였습니다.
또한 단원별 학습 목표를 제시하여, 학습목표에 맞는 학습을 할 수 있도록 하였습니다.



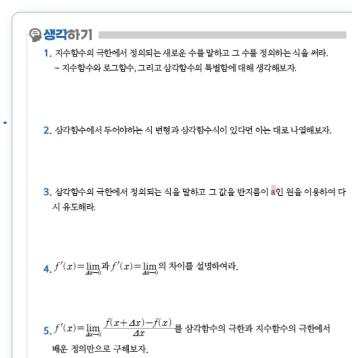
질문하기

교과서의 본문을 읽으면서 생각할 수 있을만한 질문을 수록하였습니다.
질문에 대한 답을 써보고, 해설의 답과 비교해볼 수 있도록 하였습니다.
질문에 대한 답은 저자가 생각한 답으로써, 학생이 생각한 답과 다를 수 있습니다.
이 경우는 교과서를 참고하여, 올바른 서술이 어떤 것인지 다시 고민하시길 바랍니다.



본문

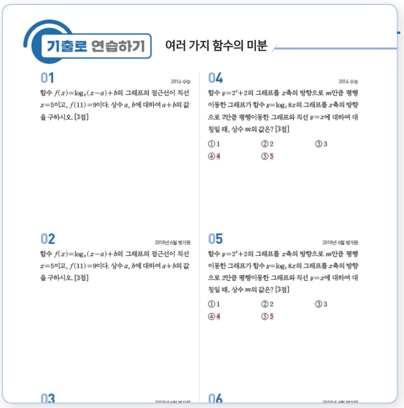
개념설명에서 추가로 서술하고 싶은 말들을 comment로 담았습니다.
본문의 내용과 관계된 문제들은 힌트를 달아, 수월하게 접근할 수 있도록 하였습니다.
모범적인 풀이가 필요하다면 교과서의 예제를 참고하여 같이 보시길 바랍니다.



생각하기

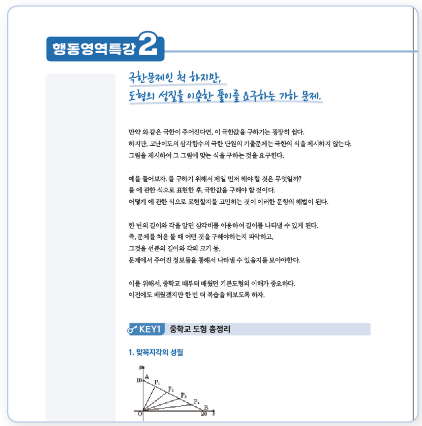
단원의 내용을 모두 배운 후 생각해볼 만한 질문을 수록하였습니다.
이에 대한 설명은 해설에 수록되어 있으므로, 해설과 병행하여 보시면 좋습니다.
생각에 대한 답은 저자가 생각한 답으로써, 학생이 생각한 답과 다를 수 있습니다.
이 경우는 교과서를 참고하여, 올바른 서술이 어떤 것인지 다시 고민하시길 바랍니다.

이 부분에 들어가기 전에, 앞 부분과 교과서의 학습을 충분히 해야 합니다.
교과서의 수준 이상의 내용을 포함하고 있습니다.



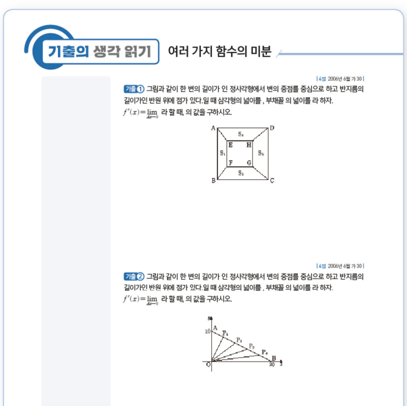
기출로 연습하기

적절한 난이도의 기출문제를 수록하여 개념을 연습할 수 있도록 하였습니다.
일부 문제에 대해서는 단원 끝에 힌트를 수록하였습니다.
기출보다 조금 쉬운 문제를 풀고 싶다면, 교과서의 유제와 연습문제로 돌아가길 바랍니다.



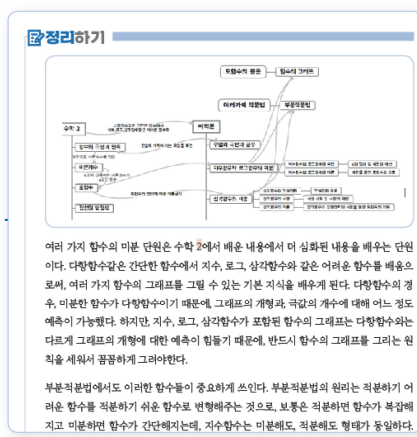
행동영역 특강

교과서에서 암시하는 문제풀이의 행동영역을 소개하였습니다.
기출문제와 함께 문제풀이의 행동영역을 교과서적으로 해석하였습니다.



기출의 생각읽기

난이도 있는 기출문제를 수록하였습니다.
해설에는 생각해야할 것들을 도식화하여 나타냈습니다.
공부를 할 때, 도식을 떠올려가면서 직접 해설을 써보시는 것을 추천합니다.



정리하기

대단원을 정리하는 내용을 수록하였습니다.
대단원 도입에서 보였던 도식에 배운 내용을 추가하여 정리하였습니다.

02 수열의 극한값의 계산

☆두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 각각 $a_n=1+\frac{3}{n}, b_n=2-\frac{5}{n}$일 때

1. $\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$과 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$의 값은 서로 같을까?
2. $3\lim_{n\to\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}3a_n$의 값은 서로 같을까?
3. 두 수열 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$의 일반항이 각각 $c_n=1+2n, d_n=2-2n$일 때,
   $\lim_{n\to\infty}c_n+\lim_{n\to\infty}d_n$과 $\lim_{n\to\infty}(c_n+d_n)$이 같다고 할 수 있을까?
4. $\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$와 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 같다고 말할 수 있을까?
   아니라면 어떨 때 같을 수 있을까?

1 수열의 극한값에 대한 성질

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$, $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=1+2=3$이고,

$a_n+b_n=3-\frac{2}{n}$이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$이다.

또 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$이므로 $3\lim_{n\to\infty}a_n=3\times1=3$이고,

$3a_n=3+\frac{9}{n}$이므로 $\lim_{n\to\infty}3a_n=3$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}3a_n=3\lim_{n\to\infty}a_n$이다.

일반적으로 수렴하는 수열의 극한에 대한 다음과 같은 성질이 성립한다.

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$($\alpha$, β는 실수)일 때

① $\lim_{n\to\infty}ka_n=k\lim_{n\to\infty}a_n=k\alpha$(단, k는 상수)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta$

③ $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha-\beta$

④ $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$(단, $b_n\neq0, \beta\neq0$)

이며, 수열의 극한의 계산 성질은 두 수열이 수렴할 때에만 성립한다.

comment.

가장 중요한 것은, 수열은 수렴할 때에만 극한의 계산을 할 수 있다는 점이야.
앞으로 수렴하는 수열로 어떻게 만들까에 대해서 고민을 많이 하게 될거야.

문제 1 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=8$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=7$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)^2$의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 36 ⑤ 64

Hint

① 극한값을 구할 때는 수렴하는 수열만을 이용할 수 있다는 것을 기억해야해.

② 수렴하는 수열이 무엇인지, 그것을 이용해서 주어진 수열의 극한 식을 만들 수 있는지 생각해봐.

문제 2 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}b_n=-2$일 때, 다음 중 극한값이 옳지 않은 것은?

① $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)=0$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n}{a_n}=2$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{4b_n+2a_n}{b_n}=1$

④ $\lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=-6$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{9}{a_n}=3$

문제 3 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-2}{n^2+n}=a$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+2}=b$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

Hint

① 극한 식에서, 분모와 분자의 식이 수렴하도록 변형해야해.

문제 4 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

Hint

① $\sqrt{4n^2+n}$과 $2n$은 수렴하지 않는 수열이야.

② 수렴하는 수열로 변형하기 위해서는 어떻게 해야 할까?

문제 5 $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n-\sqrt{n^2-n}}$의 값은?

① 1 ② 5 ③ 10

④ 15 ⑤ 20

문제 6 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+1}$의 정수부분을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n\left(\sqrt{n^2+2}-a_n\right)$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

Hint

① a_n을 대입했을 때, 어떻게 수렴하는 수열로 변형할 수 있을까?

문제 7 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_n = 2n - 3\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 일 때,
$\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} - \sqrt{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}\right)$ 의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

Hint

① $\sqrt{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}$ 와, $\sqrt{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}$ 를 n에 관한 식으로 표현해야해.
② 두 수열 모두 수렴하지 않을 것 같아. 수렴하는 수열로 변형하기 위해서는 어떻게 해야 할까?

질문 1 왜 분모의 최고차항으로 나눠서 극한을 계산해야할까?
왜 분자의 유리화를 할까?

질문 2 수열 $\left\{\frac{-n^2+1}{2n+1}\right\}$, $\{n^2-n+1\}$의 극한은 어떻게 조사할까?

2 수열의 극한의 대소 관계

수렴하는 수열의 극한의 대소 관계에 대한 다음과 같은 성질이 성립한다.

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β는 실수)일 때

① 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n, \text{ 즉 } \alpha \le \beta$$

② 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

| 2010년 4월 나03 |

문제 8 수열 $\{a_n\}$이 $3n-1 < na_n < 3n+2$ 를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

Hint

① 양쪽의 식이 모두 수렴해야 수열의 극한의 대소 관계에 대한 성질이 성립하겠지?

문제 9 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $3n^2+2n < a_n < 3n^2+3n$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{5a_n}{n^2+2n}$의 값을 구하시오.

03 등비수열의 극한

☆ 무학 대사는 이성계가 어떤 인물인지 알아보기 위하여 명주실 한 타래를 가지고 와서 다음과 같은 질문을 하였다.

“명주실 한 가닥을 반으로 접어 두 겹이 되게 하고, 접은 것을 다시 반으로 접어 네 겹이 되게 하고 이와 같이 계속 반으로 접어 가기를 30번을 계속하면 마지막의 굵기가 얼마나 되겠습니까?”
이 질문에 이성계는 절의 굵고 둥근 기둥을 가리키면서
“그 굵기는 저 기둥정도가 될 것 같습니다.”

명주실의 굵기가 0.1mm이고, 한번 접을 때마다 두께가 정확히 2배가 된다고 하자.

1. 명주실을 1번, 2번, 3번, 4번, 5번 접었을 때의 접은 명주실의 두께를 구하여라.
2. 명주실을 30번 접었을 때의 두께를 $\log 2 \fallingdotseq 0.3$ 임을 이용하여 대략 추정하고, 명주실을 n번 접을 때, n이 한없이 커지면 두께가 어떻게 변할지 예측하라.

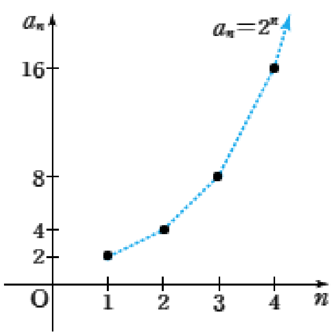
1 등비수열의 수렴과 발산

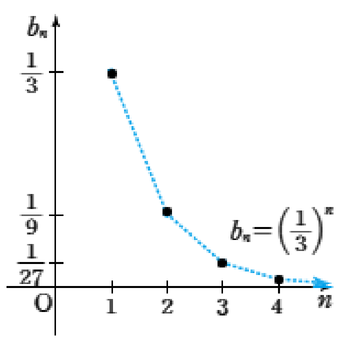
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은

$$\{a_n\}: 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n, \cdots$$

$$\{b_n\}: \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \cdots, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \cdots$$

과 같이 등비수열을 이룬다.
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 다음과 같다.





따라서 n의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산하고, 수열 $\{b_n\}$은 0에 수렴함을 알 수 있다.

즉, $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$이다.

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산을 공비 r의 값에 따라 알아보자.

① $r>1$일 때

$r=1+h\,(h>0)$로 놓으면 $r^n=(1+h)^n>1+nh\,(n\geq 2)$

($\because$ $(1+h)^n$을 전개하면 $1+nh+{}_n\mathrm{C}_2h^2+\cdots+h^n$가 성립한다.

이 사항은 확률과 통계에서 이항정리를 배우면 이해할 수 있다.)

이때 $\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$

② $r=1$일 때

수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 1이므로

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}1=1$$

③ $|r|<1$일 때

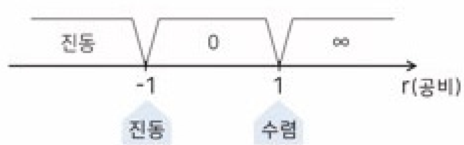
$r=0$이면 수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 0이므로

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}0=0$$

$r\neq 0$이면 $\frac{1}{|r|}>1$이므로 ①에 따라

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|r^n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n=\infty$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$



④ $r\leq -1$일 때

$r=-1$이면 수열 $\{r^n\}$은 $-1, 1, -1, 1, \cdots$이므로 진동한다.

$r<-1$이면 $|r|>1$이므로 ①에 따라

$$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=\infty$$

이때 수열 $\{r^n\}$은 각 항의 부호가 교대로 변하면서 그 절댓값은 한없이 커지므로 진동한다.

문제 1 수열 $\left\{\frac{3^{n+2}}{4^n+3}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오.

문제 ② 무한등비수열 $\{(2x+1)^{2n-3}\}$이 수렴하기 위한 실수 x의 값의 범위는?

① $-2 < x < -1$ ② $-1 < x \leqq 0$

③ $0 < x \leqq 1$ ④ $1 < x \leqq 2$

⑤ $2 < x \leqq 3$

질문 2 등비수열의 극한에서 왜 분모에 있는 항으로 나눠야할까?

생각하기

1. 수열의 뜻을 말하고, 수열의 극한과 함수의 극한이 어떻게 다른지 말하여라.

2. 수열의 극한이 '발산'한다의 뜻을 말하여라.

3. 급수의 뜻을 말하여라.

4. 어떤 수열의 급수가 수렴한다면, 극한값은 0이 된다. 그 이유를 설명해라.

5. 수열의 극한값이 0이라고 해서 항상 그 수열의 급수가 수렴하지는 않는다. 그 예를 들어 보자.

6. 등비수열의 극한의 수렴조건과 등비급수의 수렴조건이 다른 이유를 설명하라.

7. 등비급수가 수렴한다면 $\frac{a}{1-r}$가 성립한다. 왜 이런 식이 성립하게 되는지 등비수열의 합 공식에서 유도해 보자.

8. 수열의 극한을 배우며 식을 변형하는 방법 중 외워야 할 것이 무엇이 있는지 쓰고 외워보자.

수학을 배우는 유일한 방법은 수학을 하는 것이다.

- Halmos Pál, 할모시 팔 -

다음 장부터는 적당한 난이도의 기출문제가 수록되어 있습니다.
이전의 내용과 난이도 차이가 있으므로,
교과서로 충분히 공부한 후 학습을 진행하길 바랍니다.]

기출로 연습하기 수열의 극한과 급수

01

2015년 수능

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6}{n^2+3n}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

02

2016년 09월 평가원

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2+2nx-4n=0$$

의 양의 실근을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.

03

2016년 09월 평가원

양수 a와 실수 b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\right)=\frac{1}{5}$$

일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

04

2014년 04월 교육청

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$1+2\log_3 n<\log_3 a_n<1+2\log_3(n+1)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

05

2016년 수능

수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선

$y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선

$y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$

④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

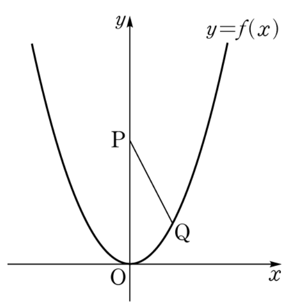
06

2016년 수능

자연수 n에 대하여 좌표가 $(0,\ 2n+1)$인 점을 P라 하고, 함수 $f(x)=nx^2$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 1이고 제1사분면에 있는 점을 Q라 하자. 점 R$(0,\ 1)$에 대하여 삼각형 PRQ의 넓이를 S_n, 선분 PQ의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{{S_n}^2}{l_n}$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 1

④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$



07

2018년 수능

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3}{5^{n+1}}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

08

2016년 수능

$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times9^n-13}{9^n}$의 값을 구하시오.

✎ 안 풀린다면 마지막 문제 뒤의 힌트를 참고하세요.

09

2015년 06월 평가원

첫째항이 3이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-7}{a_n}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

10

2016년 수능

첫째항이 1이고 공비가 $r\,(r>1)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\frac{3}{4}$이다. r의 값을 구하시오.

11

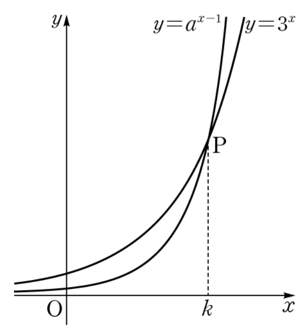
2015년 수능

$a>3$인 상수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{x-1}$과 $y=3^x$이 점 P에서 만난다. 점 P의 x좌표를 k라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}+1}$$

의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5



12

2015년 수능

자연수 k에 대하여

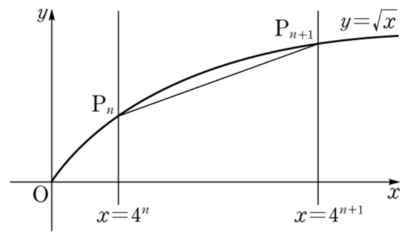
$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$$

이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}ka_k$의 값을 구하시오.

13

2017년 수능

자연수 n에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 P_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 L_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구하시오.



14

2016년 09월 평가원

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=4$, $a_4-a_2=4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na_n}$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

15

2015년 09월 평가원

자연수 n에 대하여 $3^n \cdot 5^{n+1}$의 모든 양의 약수의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

16

2015년 06월 평가원

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

17

2016년 06월 평가원

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+9n}{n}$의 값을 구하시오.

18

2015년 수능

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 10$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 5b_n)$의 값을 구하시오.

19

2015년 수능

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3$, $a_2=1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$의 값은?

① $\frac{81}{8}$ ② $\frac{83}{8}$ ③ $\frac{85}{8}$

④ $\frac{87}{8}$ ⑤ $\frac{89}{8}$

20

2015년 06월 평가원

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1+a_2=20,\ \sum_{n=3}^{\infty}a_n=\frac{4}{3}$$

를 만족시킬 때, a_1의 값을 구하시오.

21

2015년 03월 교육청

모든 항이 양의 실수인 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=k,\ a_na_{n+1}+a_{n+1}=ka_n{}^2+ka_n\ (n\geq 1)$$

을 만족시키고 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$일 때, 실수 k의 값은?

(단, $0<k<1$)

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

22

2012년 09월 평가원

첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

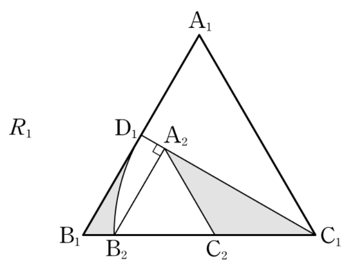
$$a_n < a_{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$

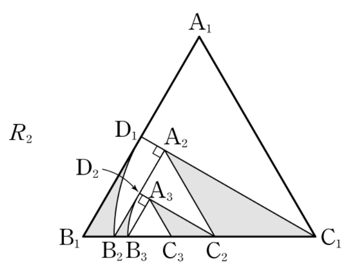
을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

23

2018년 수능

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 A_1B_1의 중점을 D_1이라 하고, 선분 B_1C_1 위의 $\overline{C_1D_1}=\overline{C_1B_2}$인 점 B_2에 대하여 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1D_1B_2$를 그린다. 점 B_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 A_2, 선분 C_1B_2의 중점을 C_2라 하자. 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_1A_2C_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 A_2B_2의 중점을 D_2라 하고, 선분 B_2C_2 위의 $\overline{C_2D_2}=\overline{C_2B_3}$인 점 B_3에 대하여 중심이 C_2인 부채꼴 $C_2D_2B_3$을 그린다. 점 B_3에서 선분 C_2D_2에 내린 수선의 발을 A_3, 선분 C_2B_3의 중점을 C_3이라 하자. 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 D_2B_3으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_2A_3C_3$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?





⋮

① $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{56}$ ② $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$

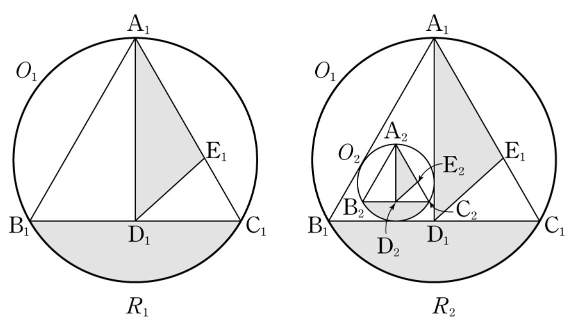
③ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{56}$ ④ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{52}$

⑤ $\dfrac{15\sqrt{3}-4\pi}{52}$

24

2018년 09월 평가원

그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. 점 $\mathrm{A_1}$에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 선분 $\mathrm{A_1C_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_1}$이라 하자. 점 $\mathrm{A_1}$을 포함하지 않는 호 $\mathrm{B_1C_1}$과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $\mathrm{A_1D_1E_1}$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 삼각형 $\mathrm{A_1B_1D_1}$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$를 그리고, 점 $\mathrm{A_2}$에서 선분 $\mathrm{B_2C_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{D_2}$, 선분 $\mathrm{A_2C_2}$를 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_2}$라 하자. 점 $\mathrm{A_2}$를 포함하지 않는 호 $\mathrm{B_2C_2}$와 선분 $\mathrm{B_2C_2}$로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $\mathrm{A_2D_2E_2}$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\dfrac{16(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$　② $\dfrac{16(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$

③ $\dfrac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$　④ $\dfrac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{69}$

⑤ $\dfrac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$

04 Hint
양변의 형태를 $\log_3 f(n)$의 형태로 만들어보자.

05 Hint
판별식을 이용하자.

06 Hint
Q의 좌표를 먼저 구하자.

11 Hint
$a^{k-1}=3^k$임을 이용하자.

12 Hint
k를 대입해보자. 극한값이 항상 일정할까?

15 Hint
서로 다른 소수 a, b에 대하여 $a^m b^n$의 양의 약수의 개수는 $(m+1)\times(n+1)$개지? 왜 인지도 알고 있을테고?

21 Hint
$a_n a_{n+1} + a_{n+1} = ka_n{}^2 + ka_n\ (n \ge 1)$은
$a_{n+1}(a_n+1) = ka_n(a_n+1)\ (n \ge 1)$이다.

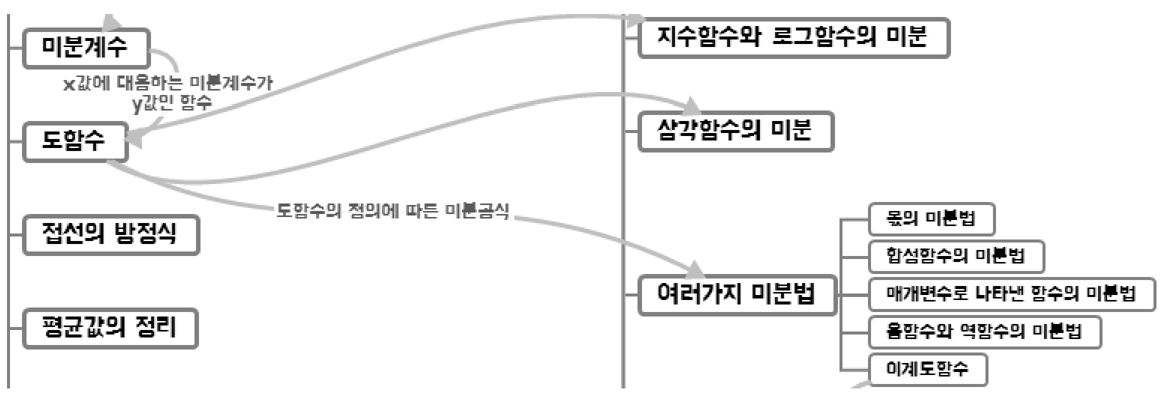
22 Hint
$a_n = S_n - S_{n-1}$을 이용하면 되겠네.

23 Hint
$\angle \mathrm{B_1C_1D_1} = 30^\circ$이다. 그러므로 부채꼴의 넓이도, 삼각형 $\mathrm{B_1C_1D_1}$의 넓이도, 정삼각형의 한 변의 길이도 구할 수 있겠지?

III-1 여러 가지 미분법

학습목표

- 함수의 몫을 미분할 수 있다.
- 합성함수를 미분할 수 있다.
- 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
- 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
- 이계도함수를 구할 수 있다.



이 단원에서는 여러 가지 미분법에 대해서 배운다. 수학2에서 곱의 미분법(곱해져있는 함수의 미분방법)을 배웠던 것처럼, 미적분에서는 몫의 미분법(분수함수의 미분방법), 합성함수 미분법, 매개변수로 나타낸 함수의 미분법, 음함수라는 것을 정의하고 이런 형태의 함수를 미분하는 음함수 미분법 그리고 마지막으로 역함수 미분법을 배운다. 그리고 미분한 함수를 한 번 더 미분하는 이계도함수에 대해서도 배우게 된다. 물론 우리가 배운 도함수의 정의를 이용하여 충분히 유도할 수 있다.

몫의 미분법, 합성함수의 미분법을 도함수의 정의를 통하여 유도할 수 있을까? $y=f(x)$꼴로 함수를 구하지 않아도 음함수, 역함수, 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있을까?

01 몫의 미분법

(이 단원의 목적은 도함수를 극한으로 유도하는 것이다.
아래의 질문을 보면서 스스로 도함수를 유도해보자.)

질문 7 함수의 몫을 미분할 수 있는가?
그것으로 $y=\tan x$ 함수의 도함수를 구할 수 있는가?

1 $\dfrac{1}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0)$의 도함수

7-(1) 함수 $f(x)$가 미분 가능할 때, 함수 $\dfrac{1}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0)$의 도함수를 구해 보자.

2 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0)$의 도함수

7-(2) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분 가능할 때, 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0)$의 도함수를 구해 보자.

3 $y=\tan x$의 도함수

7-(3) $y=\tan x$ 함수의 도함수를 구해 보자.

문제 ① 도함수의 정의에 따라 다음 함수의 도함수를 구하고, $x=1$에서의 미분계수를 구하여라.

$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

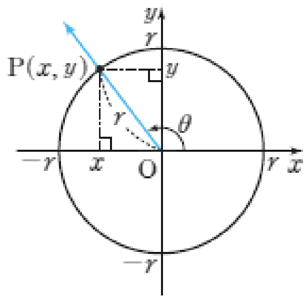
Hint

① 한번쯤은 도함수의 정의에 따라 구해봐!

문제 ② 다음 함수의 도함수를 구하여라.

$$y=\frac{x^3+x-1}{x^2}$$

4 $y=\sec x, y=\csc x, y=\cot x$의 도함수



그림과 같이 좌표평면의 원점 O에서 x축의 양의 방향으로 시초선을 잡을 때, 일반각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 교점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면

$$\frac{r}{y}\,(y \neq 0),\ \frac{r}{x}\,(x \neq 0),\ \frac{x}{y}\,(y \neq 0)$$

의 값은 r의 값에 관계없이 θ의 값에 따라 각각 하나씩 정해진다.

따라서

$$\theta \to \frac{r}{y}\,(y \neq 0),\ \theta \to \frac{r}{x}\,(x \neq 0),\ \theta \to \frac{x}{y}\,(y \neq 0)$$

와 같은 대응은 θ에 대한 함수이다.

이 함수를 각각 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수라 하고, 기호로

$$\csc\theta = \frac{r}{y}\,(y \neq 0),\quad \sec\theta = \frac{r}{x}\,(x \neq 0),\quad \cot\theta = \frac{x}{y}\,(y \neq 0)$$

와 같이 나타낸다.

각각은 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 역수의 형태이며

즉,

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

이다.

문제 3 $y=\sec x$, $y=\cot x$, $y=\csc x$의 도함수를 구하여라.

Hint

① 몫의 미분법을 이용하면 도함수를 쉽게 유도할 수 있을 거야!

02 합성함수 미분법

☆ 오르골에 있는 세 톱니바퀴 A, B, C에서 A가 4회전 할 때 B는 1회전 하고, B가 1회전 할 때 C는 2회전 한다. A, B, C의 회전수를 각각 x, u, y라 하고, $y=f(u), u=g(x)$라고 하자.

1. y를 x의 함수로 나타내시오.

2. $\dfrac{dy}{dx}$와 $\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$를 구하여 비교하시오.

1 합성함수의 미분법

함수 $u=g(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 u의 증분을 Δu, 함수 $y=f(u)$에서 u의 증분 Δu에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면 다음이 성립한다.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\text{단, } \Delta u \neq 0)$$

이때 두 함수 $y=f(u), u=g(x)$는 미분 가능하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du},\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$$

미분 가능한 함수 $u=g(x)$는 연속이고, 이때 $\Delta x\to 0$이면 $\Delta u\to 0$이므로

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

질문 8 두 함수 $y=f(u), u=g(x)$가 미분 가능할 때,
합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수를 도함수의 정의에 따라 구해 보자.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=$$

질문 9-(1) 과연 $\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}$로 분수처럼 계산해도 될까?

행동영역특강 4 그래프의 방부등식

방정식을 적절하게 분리하고, 6가지 분석을 통해 그래프를 정확하게 그리기

방부등식 문제는 도함수활용 마지막에 등장한다.
함수의 그래프를 정확히 그려야만 방부등식을 다룰 수 있는데,
방부등식 자체를 어떻게 변형하느냐에 따라 그려야하는 그래프가 달라진다.
그렇다면 방정식을 적절하게 분리하고
기본적인 6가지 분석을 통해 정확한 그래프를 그릴 수 있어야한다.

KEY1 6가지 분석법

1)

2)

3)

4)

5)

6)

KEY2 방정식과 부등식의 분리(적절하게)

1) $f(x)-kg(x)=0$의 실근 찾기

2) $f(x)-kg(x)\geq 0$의 해, 존재 범위 찾기

(빈칸에 대한 정답이 뒤에 바로 공개됩니다. 꼭 먼저 생각해보세요.)

빈칸정답

KEY1 6가지 분석법

1) 정의역
2) x, y절편
3) 주기성과 대칭성
4) $f'(x)$의 부호를 통한 증감 분석
5) $f''(x)$의 부호를 통한 개형 분석
6) 극한값 분석

KEY2 방정식과 부등식의 분리(적절하게)

1 $f(x)-kg(x)=0$의 실근 찾기

- $f(x)=kg(x)$ → 사용할 수 있으나, 극값에 $y=k$가 접하는 성질을 쓸 수 없다.
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ $(g(x)\neq 0)$ → 그래프를 그릴 때 찾은 극값에서 $y=k$가 접한다!

2 $f(x)-kg(x)\geq 0$의 해, 존재 범위 찾기

- $f(x)-kg(x)\geq 0$ 그대로 이용 → k의 값에 따라 그래프의 개형이 변하면 불편하다.
- $f(x)\geq kg(x)$ → 어디에서 접하는지 정확하게 확인해보아야 한다.
- $\begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)}\geq k & (g(x)>0) \\ \dfrac{f(x)}{g(x)}\leq k & (g(x)<0) \end{cases}$ → 그래프를 그릴 수 있다면, 극값에 $y=k$가 접한다.

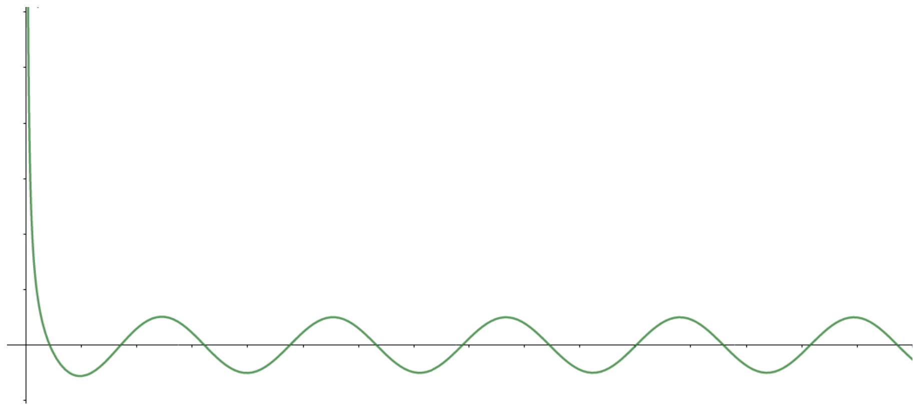
Q1 $x>0$일 때, x에 대한 방정식 $\frac{\cos x}{x}=\sin x+\frac{a}{77\pi}x$가 서로 다른 다섯 개의 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 개수는?

1) $f(x)=kg(x)$의 방식으로 해보자.

상수는 $\frac{a}{77\pi}$이므로 $\sin x$를 이항하고 싶다. 그렇게 되면 다음과 같다.

$$\frac{\cos x}{x}-\sin x=\frac{a}{77\pi}x$$

좌변의 함수를 $y=f(x)$라 하면, $f(x)=\frac{\cos x}{x}-\sin x$ 함수의 그래프는 다음과 같다.



교과서의 그래프 그리기 방식을 완전히 무시하고 그래프 그리기를 시도해보면

$y=\frac{\cos x}{x}$의 그래프와 $y=-\sin x$를 더한다고 생각하면 된다.

$y=\frac{\cos x}{x}$에서 x가 0보다 큰 쪽에서 0에 가까워지면 무한대로 발산하는 것과

x가 무한히 커질 때 함숫값이 거의 0에 가까워진다는 것을 이해하면 x값이 0에 가까울

때는 $y=\frac{\cos x}{x}$을 따라, x가 조금씩 커질 때 $y=-\sin x$을 따라서 그래프가 그려지는 것을

유추할 수 있다.

그러나, 이 함수를 미분했을 때는 다음과 같다.

$$f'(x)=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}-\cos x=\frac{-x\sin x-(x^2+1)\cos x}{x^2}$$

이 식으로는 도저히 극값을 찾을 수 없다. (물론 문제가 의도한 점이긴 하다..)
이제 그래프 그리는 방식은 교과서적이 아닌, 교과서 범위를 벗어난 것이다.

게다가 $y=\frac{a}{77\pi}x$를 a를 움직여가면서 생각할 수 있을까?

그래프를 그리기도 어려운 함수에 대해서 일차함수의 기울기를 변화시켜가며 실근의 개수를 조사하는 것은 거의 묘기수준에 가깝다.

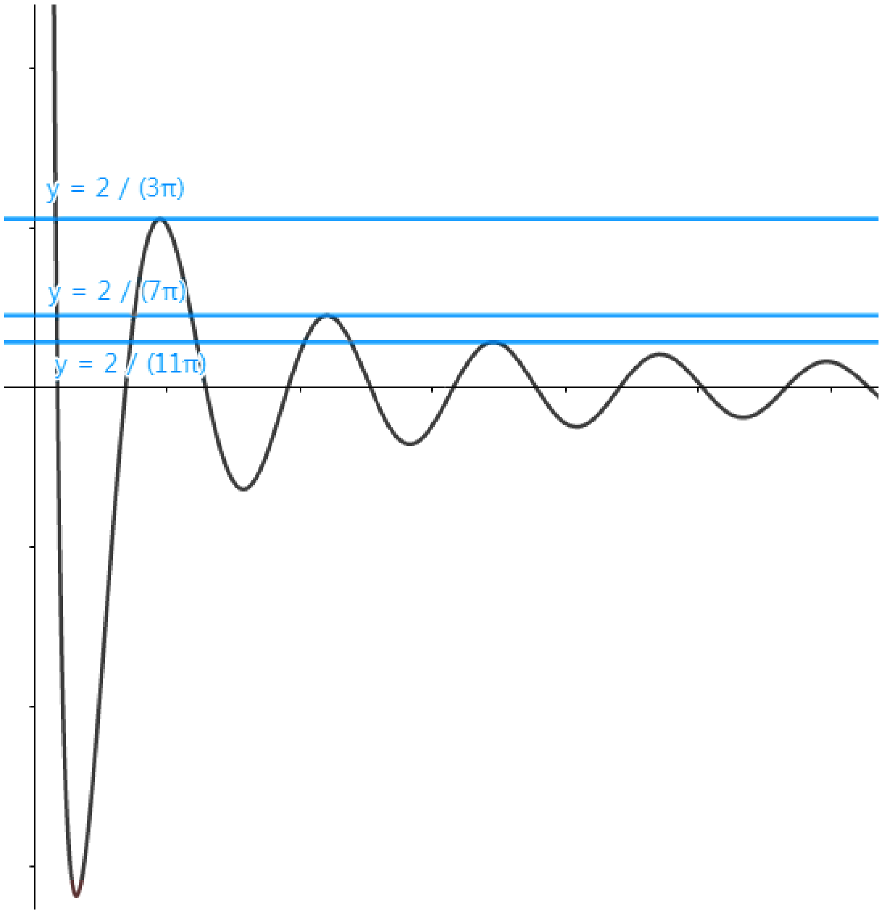
이 때문에, 웬만하면 상수만 남기고 이항하는 것이 기본이 된다.

2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ $(g(x)\neq 0)$으로 변형해보자.

$\dfrac{\cos x - x\sin x}{x^2}=\dfrac{a}{77\pi}$으로, $\dfrac{f(x)}{g(x)}=h(x)$로 생각하여 $h(x)=\dfrac{\cos x - x\sin x}{x^2}$의 도함수는

$h'(x)=-\dfrac{(x^2+2)\cos x}{x^3}$으로, $x>0$에서 항상 $-\dfrac{(x^2+2)}{x^3}<0$이다.

즉, $\cos x$가 처음으로 0이 되는 순간 극소이다. 그 다음은 극대.. 이런 식이 된다.
그래프를 그리면 다음과 같다.



$\cos x=0$일 때 함수 $h(x)=\dfrac{\cos x - x\sin x}{x^2}$의 값은

$\sin x=\pm 1$이므로, 표현하자면 $\mp\dfrac{1}{x}$가 될 것이다.

예를 들어, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $h(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{2}{\pi}$이고, $x=\dfrac{3\pi}{2}$일 때, $h(\dfrac{3\pi}{2})=\dfrac{2}{3\pi}$

$x=\dfrac{5\pi}{2}$일 때 $h(\dfrac{5\pi}{2})=-\dfrac{2}{5\pi}$이고, $x=\dfrac{7\pi}{2}$일 때, $h(\dfrac{7\pi}{2})=\dfrac{2}{7\pi}\cdots\cdot$

이런 식이다.

$y=\dfrac{2}{7\pi}$일 때, 실근의 개수는 4개, $y=\dfrac{2}{11\pi}$일 때, 실근의 개수는 6개이므로

$\dfrac{2}{11\pi}<\dfrac{a}{77\pi}<\dfrac{2}{7\pi}$이며, 정리하면, $14<a<22$이며 자연수의 개수는 7개이다.

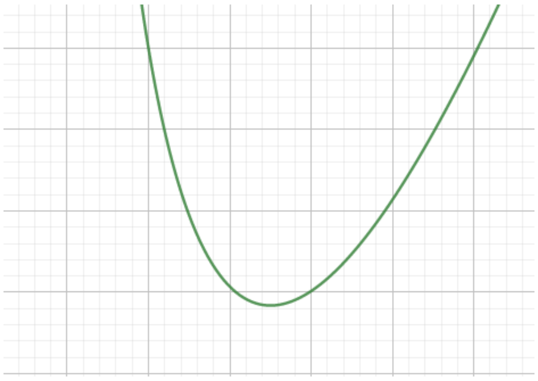
Q2 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식

$$4(x+2)-k\ln(x+2) \geq 0$$

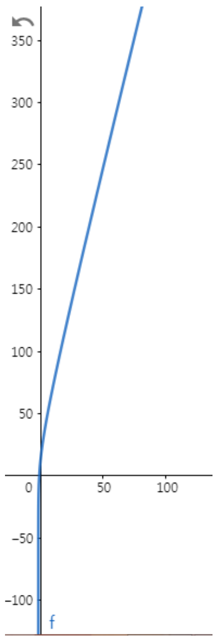
이 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은?

1) $4(x+2)-k\ln(x+2)\geq 0$ 그대로 해석하기.

그래프 개형을 k값을 적당히 정하여 그리면 아래와 같다.
이때 극솟값이 0일 때 k는 최대가 된다.



하지만 이 설명에는 문제가 있다. 다음의 경우를 보자.



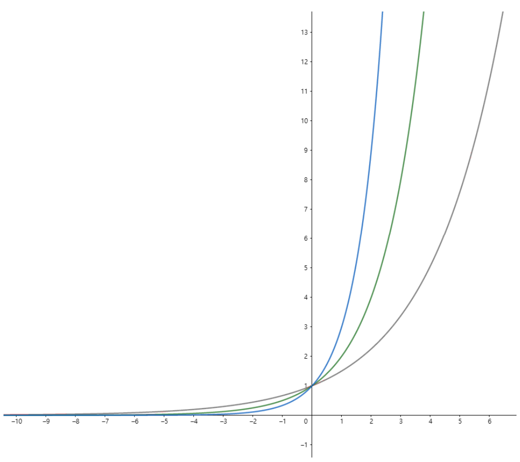
이런 식으로 k값이 달라짐에 따라서 그래프가 달라질 수 있기 때문에 적절하지 못하다.
k값이 음수라면, 반드시 도함수의 값이 양수가 되기 때문에 극값을 가지지 않는다.
물론, 이 경우 x의 값이 −2에 한없이 가까워지면 함숫값이 $-\infty$이 된다.
0보다 항상 커야하는 문제의 상황과는 다르므로, k가 양수일 때만 고려할 수 있기는 하다.
하지만, 먼저 생각해보아야할 것이 하나가 늘어버린 것은 사실이다.

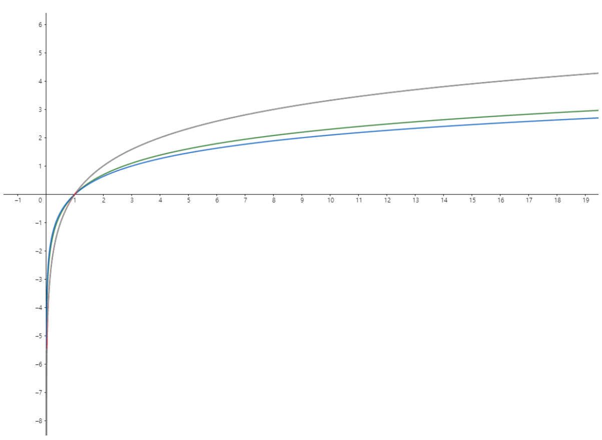
만약, 이 방법을 쓰고 싶다면,
k값에 따라 그래프의 개형이 바뀔 수 있을지, 어떻게 바뀔지 고려한 후 쓰도록 하자.

2) $4(x+2) \geq k\ln(x+2)$로 변형. ($\frac{4}{k}(x+2) \geq \ln(x+2)$ 변형해서 볼 수도 있다.)

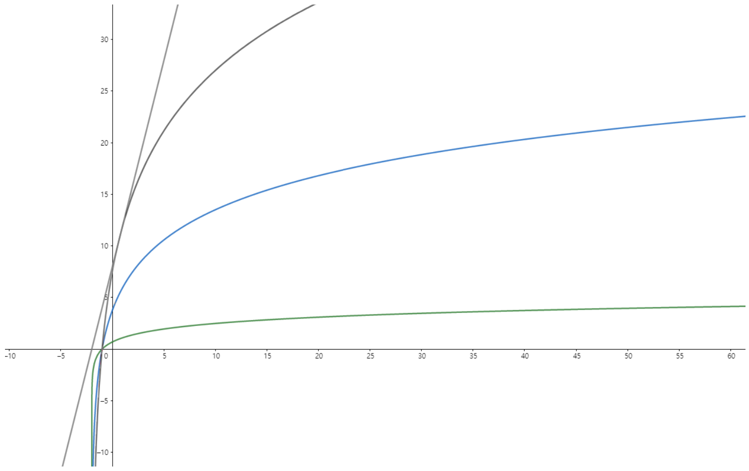
$y=4(x+2)$와 $y=k\ln(x+2)$그래프 개형을 따로따로 그리면 아래와 같으므로, k값이 커져서 직선과 처음 만나는 점은 접할 때이다. 즉, $y=k\ln(x+2)$의 미분계수가 4이면서 그 때 직선 $y=4(x+2)$와 만나야한다.

그러나 이 설명에도 약간 주의할 점이 있다.
k의 값을 늘려가면서 관찰했을 때, 그래프가 어떻게 변하는지 확실하게 알아야한다는 점이다.
우리는 지수함수와 로그함수를 다음과 같이 크기를 늘려가면서 그려본 적이 있다.





이제, $y=k\ln(x+2)$를 k의 값의 변화에 따라 그려보도록 하자.



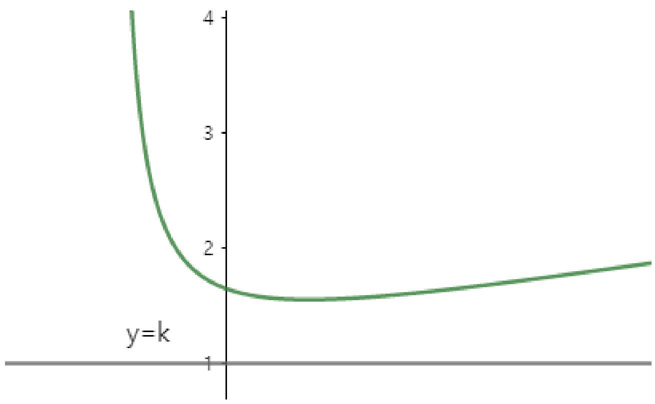
이렇게 k값의 변화에 따라 그래프를 상상할 수 있다면 이 풀이도 이해할 수 있다.
이러한 생각은, 일차함수와 이차함수, 유리함수와 무리함수를 배울 때 주로 했었다.
중학교 수학과 고등학교 수학 상에서 그래프의 변화를 관찰할 수 있었다.

즉, 일차함수와 이차함수, 유리함수, 무리함수에 대해서는 이 방법을 주로 써도 괜찮다.

만약, 이 방법을 쓰고 싶다면,
k값에 따라 어떻게 그래프가 변하는지가 머릿속으로 그려질 때 쓰도록 하자.

3) $\frac{4(x+2)}{\ln(x+2)} \geq k$ 로 변형. (k가 음수일 때는 항상 성립하므로 생략)

아래와 같은 그림이 등장한다. 따라서 $y=\frac{4(x+2)}{\ln(x+2)}$의 최솟값이 k의 최대가 된다는 것을 알 수 있다.



이 때 함수를 미분하면 $y'=\frac{4\ln(x+2)-4}{\{\ln(x+2)\}^2}$이다.
방금의 경우처럼 미분이 쉽지는 않으나, $x=e-2$일 때 극값이 나온다.
그리고 $y=k$는 극값에 접한다. 그 때의 k값이 문제에서 요구하는 최대가 되는 값이다.
즉 실수 k의 최댓값은 $k=4e$가 된다.

모든 풀이가 가능하나, $y=k$를 활용한 풀이가 제일 교과서적으로 이해하기 쉽다.
다른 풀이를 하고 싶다면, 각 경우에서 특별하게 그래프가 변하는지를 반드시 체크해야만 한다.
아무런 이상이 없다면 다른 관점으로 관찰해보아도 괜찮지만, 문제가 생겼다면 위 사항에 대한 체크가 덜 되었을 가능성이 높다.

| 2020학년도 수능 가형 30번 |

Q3 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오.

앞의 문항과는 다르게 이 문항에서는 방정식의 실근을 찾기 위해 t만 남기고 정리하는 방법이 잘 보이지 않는다.

$y=t^3\ln(x-t)$에서 무엇을 넘기던, t만 남기고 정리할 수는 없다. 두 식 모두에 t가 포함되어있고, $\ln(x-t)$에서 x를 빼낼 수도 없기에, $y=t$를 평행이동하는 풀이는 가능하지 않다.
마찬가지로 $y=a$로 변형하는 풀이도 쉽지 않다. 이렇게 변형하기 위해서는, 두 곡선의 식인, $y=t^3\ln(x-t)$과 $y=2e^{x-a}$이 같을 때인 $t^3\ln(x-t)=2e^{x-a}$에서 양변에 로그를 취하고 정리하면 $\ln t^3+\ln\{\ln(x-t)\}=x-a$이며 정리하면 $a=-3\ln t-\ln\{\ln(x-t)\}+x$인데, 이 경우, 그래프의 개형이 t에 따라 달라지며, $\ln\{\ln(x-t)\}$의 그래프를 어떻게 해석할지 난감해지게 된다.

이 문제를 풀기 위해선, t값을 먼저 정해두고 분석해야한다. 두 곡선은 엄연히 x에 대한 함수이지 t에 대한 함수가 아니다. 즉, $y=t^3\ln(x-t)$도, t의 값이 정해진다면 $y=k\ln(x-t)$, 즉 로그함수의 개형을 따를 것이며, $y=2e^{x-a}$는 $y=2e^x$의 그래프를 평행이동 한 것이다. 또한 t는 양의 실수이기 때문에 $y=t^3\ln(x-t)$는 그래프의 개형이 크게 달라지지 않을 것이다.

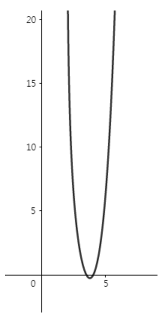
이 때에는 $2e^{x-a}-t^3\ln(x-t)=0$으로 푸는 방법과 $y=t^3\ln(x-t)$와 $y=2e^{x-a}$의 그래프로 해석하는 두 가지 방식이 모두 가능하다.

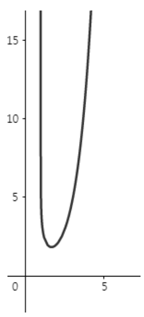
풀이 1) 먼저 $2e^{x-a}-t^3\ln(x-t)=0$으로 푸는 방법을 생각해보자.

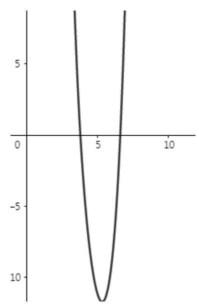
만약, 이 방법을 쓰고 싶다면,
t값에 따라 그래프의 개형이 바뀔 수 있을지, 어떻게 바뀔지 고려한 후 쓰도록 해야 한다.

라고 말한 적이 있었다. t값에 따라 그래프의 개형이 바뀔 수 있는지 먼저 검증해보도록 하자.

이 때에는 t값이 정해져있을 때, $y=2e^x$ 그래프를 평행이동 시키면서 오직 한 점에서 만나도록 하는 때를 살펴보아야한다.







이 그래프 모두 $2e^{x-a}-t^3\ln(x-t)=0$을 임의로 대입하여 나온 값이다.
그래프는 극솟값을 항상 가지고, 정의역 끝으로의 극한이 ∞로 발산함을 알 수 있다.

여러분은 만약 $y=2e^{x-a}-t^3\ln(x-t)$의 그래프를 그려야한다면 어떻게 그릴 것인가?
질문 13에서 그래프 그리기의 원칙에 대해서 물어본 적이 있다.
당연히, 원함수의 정보와 도함수의 정보, 필요하다면 이계도함수의 정보까지 얻어야한다.

정확한 함숫값을 구할 수는 없으나, 정의역 양 끝으로의 극한을 구함으로써 원함수의 정보를 일부 알 수 있다.

이 함수의 정의역은 (t,∞)이므로, $x\to t+0$일 때 $\lim_{x\to t+0} 2e^{x-a}-t^3\ln(x-t)$의 극한은 $\ln(x-t)\to-\infty$이기 때문에 ∞로 발산한다.

$x\to\infty$일 때는 $2e^{x-a}$가 기하급수적으로 커지기 때문에 ∞로 발산한다.

미분을 해서, $y'=2e^{x-a}-\dfrac{t^3}{x-t}$가 나올 때, 0이 나오는 지점은 반드시 하나가 나올 수 밖에 없다.

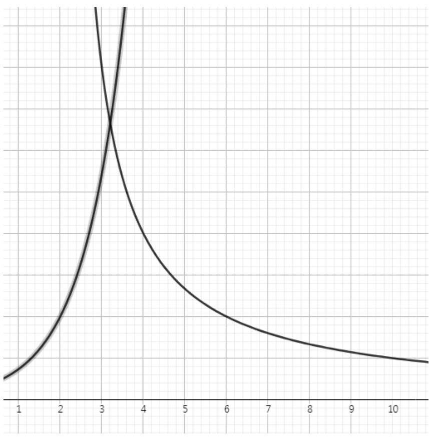
이계도함수를 구해보면 $y''=2e^{x-a}+\dfrac{t^3}{(x-t)^2}$이므로, $x>t$일 때 항상 양수이다.

즉, 항상 도함수의 값이 증가하는 상태이며, x값이 한없이 t에 가까워지면 도함수 값은 $-\infty$,

$x\to\infty$일 때는 $2e^{x-a}$가 기하급수적으로 커진다.

즉, 반드시 0을 지나고, 그 값은 하나이며 극솟값이다.

다른 해석) 그래프의 분석을 간단하게 하면서 이끌어낼 수 있다.



$y=2e^{x-a}$와 $y=\dfrac{t^3}{x-t}$의 그래프를 보자. $y=\dfrac{t^3}{x-t}$에서 $x\to t+0$일 때 ∞로 발산하며, $x\to\infty$일 때, 0에 수렴하게 된다.

그러나 $y=2e^{x-a}$는 $x\to\infty$일 때 ∞로 발산한다.

$y=\dfrac{t^3}{x-t}$는 $x>t$인 구간에서 항상 감소하며 $y=2e^{x-a}$는 항상 증가하므로 교점은 반드시 하나 나올 수밖에 없게 된다.

결과적으로 $2e^{x-a}-t^3\ln(x-t)=0$의 극값이 0이 될 때가 문제의 상황이다.

그래프는 항상 극솟값 하나를 가지며, 정의역 양 끝으로의 극한은 모두 ∞로 발산한다.

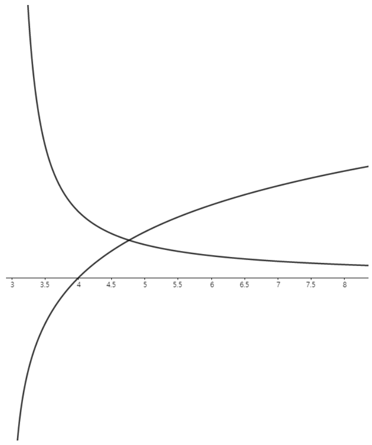
이 사항은 a,t의 값과는 상관없이 공통적이다.

$y'=2e^{x-a}-\dfrac{t^3}{x-t}=0$일 때의 해를 k라 하면

$2e^{x-a}-t^3\ln(x-t)=0$의 해도 k이다.

$t^3\ln(k-t)=2e^{k-a}$이며 $\dfrac{t^3}{k-t}=2e^{k-a}$이므로,

$\ln(k-t)=\dfrac{1}{k-t}$ 이다. 이 방정식의 해를 정확하게 구할 수 없지만, 하나 존재한다.



그 값을 $k-t=\alpha$라 하면, α는 $\ln x=\dfrac{1}{x}$의 양의 실근이며, 상수이다.

(k, 혹은 a는 t에 따라 변하지만, α는 항상 $\ln x=\dfrac{1}{x}$의 양의 실근이다.

즉, 나중에 t로 미분할 때, α와 관련한 식은 상수로써 미분해주면 될 것이다.)

$\dfrac{t^3}{k-t}=2e^{k-a}$의 우변에 대입하기 위해, $k=\alpha+t$로 대입하면, $\dfrac{t^3}{\alpha}=2e^{\alpha+t-a}$

양변에 로그를 씌우면, $3\ln t-\ln\alpha=\ln 2+\alpha+t-a$이며

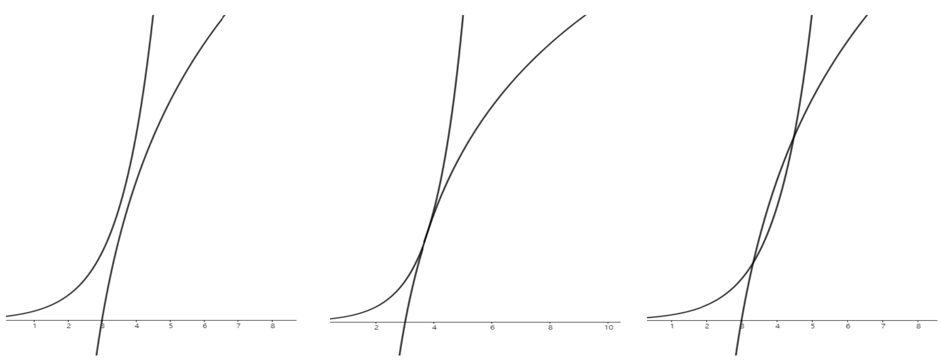
$a=-3\ln t+\ln\alpha+\ln 2+\alpha+t=f(t)$

$f'(t)=-\dfrac{3}{t}+0+0+0+1$이므로

$\left\{f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}^2=(-9+1)^2=64$이다.

풀이 2) 이번에는 $y=t^3\ln(x-t)$와 $y=2e^{x-a}$ 두 개의 그래프를 이동하면서 생각해보자.

마찬가지로 $y=t^3\ln(x-t)$는 그래프의 개형이 크게 변하지 않는다. $y=2e^{x-a}$는 그래프의 개형이 일정한 상태에서 x축 방향으로 평행이동하는 함수이다. 그러므로 다음과 같이 그래프가 움직이는 것을 비교적 쉽게 파악할 수 있다.



그래프가 한 점에서 만날 때는 접할 때이다.

그래프가 한 점을 뚫고 지나간다면, $y=2e^{x-a}$의 그래프는 빠른 속도로 증가하지만, $y=t^3\ln(x-t)$의 그래프는 빠르게 증가하지 않는다. 즉, 두 개의 점을 지날 수밖에

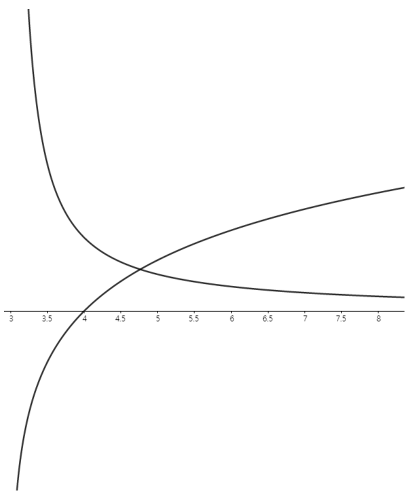
없다.

분명 $y=k$로 놓고 평행이동하는 풀이는 유용하다. 하지만, 이번 경우에는 $y=2e^{x-a}$를 평행이동하여 접함을 밝혔다. 그래프만 잘 관찰할 수 있다면, 충분히 곡선을 변화시켜 가면서 해석할 수 있다. 특히 $y=2e^{x-a}$ 그래프는 모양이 정해진 곡선이므로 그나마 괜찮다.

적당히 확인할 수 있다면, 이러한 풀이도 유용할 수 있음을 잊지 말자.
이후의 풀이는 위의 풀이와 거의 비슷하게 나온다.

접하므로, 접점의 좌표를 k라 생각하면, $t^3\ln(k-t)=2e^{k-a}$이며 $\dfrac{t^3}{k-t}=2e^{k-a}$이므로,

$\ln(k-t)=\dfrac{1}{k-t}$이다. 이 방정식의 해는 구할 수 없지만, 다음과 같이 하나 존재한다.



그러므로, 그 값을 $k-t=\alpha$라 하면, α는 $\ln x=\dfrac{1}{x}$의 양의 실근이며, 상수이다.

(k, 혹은 a는 t에 따라 변하지만, α는 항상 $\ln x=\dfrac{1}{x}$의 양의 실근이다.
즉, 나중에 t로 미분할 때, α와 관련한 식은 상수로써 미분해주면 될 것이다.)

$\dfrac{t^3}{k-t}=2e^{k-a}$의 우변에 대입하기 위해, $k=\alpha+t$로 대입하면, $\dfrac{t^3}{\alpha}=2e^{\alpha+t-a}$

양변에 로그를 씌우면, $3\ln t-\ln\alpha=\ln 2+\alpha+t-a$이며

$a=-3\ln t+\ln\alpha+\ln 2+\alpha+t=f(t)$

$f'(t)=-\dfrac{3}{t}+0+0+0+1$이므로

$\left\{f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}^2=(-9+1)^2=64$이다.

다음 장부터는 고난이도의 기출문제가 수록되어 있습니다.
매우 어려우므로, 교과서와 이전의 기출문제를 충분히 공부한 후 학습을 진행하길 바랍니다.
아이디어를 떠올리기 힘든 문제들이 많습니다.
어떻게 해결할지 충분히 고민하고 답지를 참고하면서 비교해보길 바랍니다

| 2018학년도 수능 가21 |

기출 ① 양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \ln x & (1 \leq x < e) \\ -t+\ln x & (x \geq e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

> 1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \geq 0$ 이다.

미분 가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right)\times h'(a)$의 값은?

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$　② $\dfrac{1}{e(e+1)}$　③ $\dfrac{1}{e^2}$

④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$　⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

| 2016년 4월 가30 |

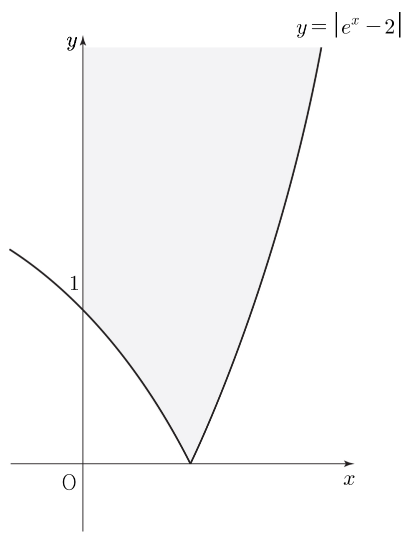
기출 ② 좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq |e^x-2| \end{cases}$$

가 나타내는 영역을 D라 하자. 양의 실수 t에 대하여 영역 D의 서로 다른 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 A가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 정사각형 A의 한 변의 길이는 t이다.
> (나) 정사각형 A의 한 변은 x축과 평행하다.

정사각형 A의 두 대각선의 교점의 y좌표의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)+f'(\ln 5)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



| 2012학년도 수능 가19 |

기출 3 실수 m에 대하여 점 (0, 2)를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선

$$y=x^3-3x^2+1$$

과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은?

① -3 ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 6

| 2013학년도 9월 가21 |

기출 4 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x) \leq \frac{1}{3}$이다.
>
> (나) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은?

| 2013학년도 수능 가21 |

기출 5 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\ (k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분 가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

| 2015년 9월 가30 |

기출 6 양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수

$$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
> (나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
> $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\dfrac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오.

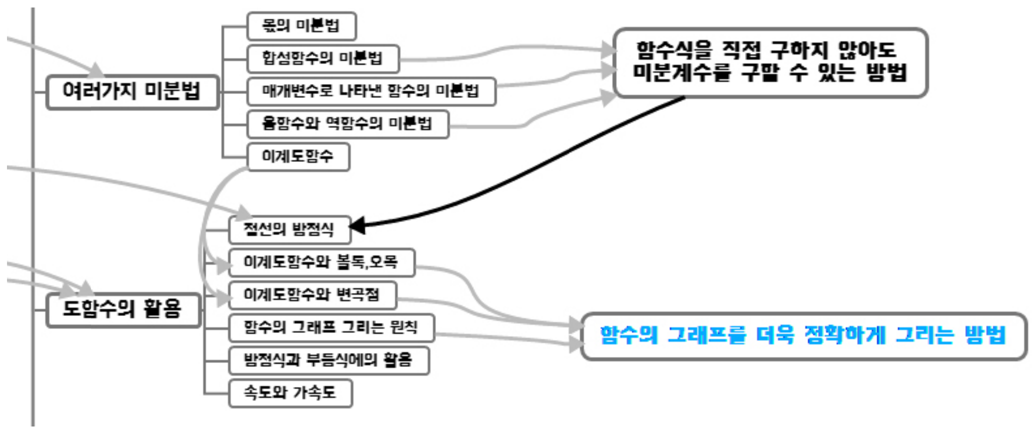
| 2014학년도 수능 가30 |

기출 7 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
> (나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오.

정리하기



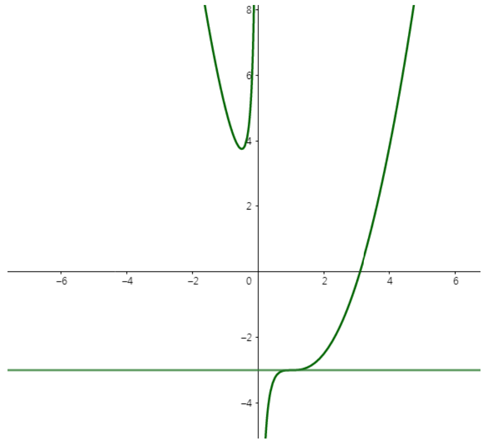
이 단원에서는 앞단원에서 배웠던 미분법의 개념을 이용하여 함수의 그래프를 그리는 원칙을 배웠다. 이계도함수의 개념을 이용하여 위로 볼록한 상태와 아래로 볼록한 상태를 구별할 수 있었고, 변곡점이 도함수의 극값이 생기는 점임을 이해하며, 그래프를 더욱 정확하게 그릴 수 있었다. 방정식과 부등식에의 활용에서는 그래프를 정확하게 그려 실근의 개수를 구하거나 부등식이 성립함을 조사하였다. 또한 수직선과 평면 운동에서의 속도와 가속도를 미분의 개념으로 설명하였다.

여기까지 배운 학생이라면, 이제 모든 함수의 그래프를 그릴 수 있다. 적어도 고등학교 교과과정 내에 나타나는 모든 함수는 그릴 수 있다. 원칙대로 따라가기만 한다면 아무리 어려운 그래프라도 분명 그릴 수 있다. 우리가 가져야할 태도는 복잡한 함수의 그래프를 피하는 것이 아니라, 일관된 원칙에 따라 접근하여 명확하게 그리는 것이다.

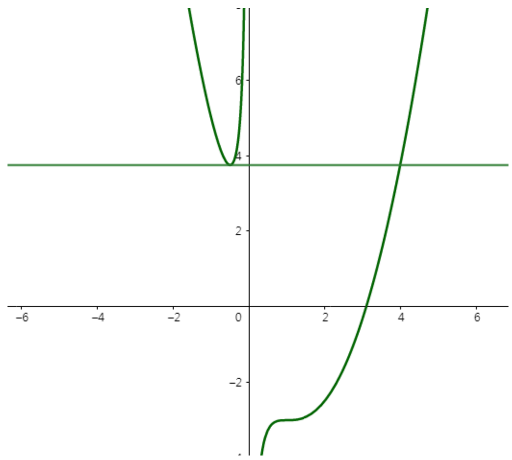
질문하고 생각하는

수학

정답과 풀이



m=−3일 때는 $y=\dfrac{x^3-3x^2-1}{x}$ 에 접한다.



이 때, 처음으로 두 점을 지나며,
이 때의 m값이 문제의 정답이 된다.

$y=x^2-3x-\dfrac{1}{x}$ 에서

$y'=2x-3+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^2}=\dfrac{(2x+1)(x-1)^3}{x^2}$

극값은 $x=-\dfrac{1}{2}$에서 생기므로, 함수에 대입하면,

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}+2=\dfrac{15}{4}$이다.

$\therefore m=\dfrac{15}{4}$

p.s.) 이 문제의 경우, 직선을 회전시키는 풀이보다, x축에 평행한 직선을 평행이동 하는 풀이가 더 이해하기 쉽다. 그래프를 그리기 위해 극값을 반드시 구해야하는데, 평행이동 하여 풀면 극값에 반드시 접할 수밖에 없기 때문이다. 반면, 회전을 시키면 변곡점에 접하여 그 근처를 지나도 만나는 점이 하나밖에 없음을 보여야한다.

기출 ④

1. 무엇?

무엇을 구하는가?

1. $f(1)$을 구하기 위해 함수 $f(x)$의 식을 구해야 한다.

$f(1)$을 구해야하고 그러기 위해서 $f(x)$의 함수식을 구해야한다.

2. 단서 및 해석

단서

1. 극한이 수렴하고 (분모)→ 0일때 (분자)→ 0 → 1. $f(3)=g(3)$

2. 극한식을 미분계수 꼴로 변형할 수 있다.

3. 도함수의 최솟값은 어떻게 구할까? → 3. 도함수의 도함수

1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\frac{8}{9}$이고 $x\to3$일 때, (분모)$\to0$

전체 식이 수렴하기 위해서는

$\displaystyle\lim_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=0$이어야한다.

$f(x)$와 $g(x)$가 전 구간에서 연속이므로, $f(3)=g(3)$이다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는 역함수가 존재하므로, 증가함수이다.
$f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이므로, $f(3)=y$라면 $g(y)=3$이다.
$g(3)=x$라면 $f(x)=3$이다.
$f(3)=g(3)$이므로, $x=y$이다.
$f(3)=x$, $f(x)=3$인데, $x\neq3$일 때, $(3,x)$와 $(x,3)$ 사이의 기울기는 항상 −1이므로, 평균값의 정리에 의해서 $f'(x)=-1$이 되는 x값이 3과 x사이에 존재하게 된다.
이는 증가함수인 $f(x)$라는 조건과 맞지 않으므로, $x=3$이며, $f(x)$와 $g(x)$는 $(3,3)$을 지난다.

2) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분 가능하므로,

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\frac{8}{9}$에서

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)-g(x)+g(3)}{(x-3)g(x)}=\frac{8}{9}$으로 변형하면,

$\dfrac{1}{3}(f'(3)-g'(3))=\dfrac{8}{9}$으로 변형할 수 있다. $f'(3)-g'(3)=\dfrac{8}{3}$

3) $f'(3)=\dfrac{1}{g'(f(3))}=\dfrac{1}{g'(3)}$이므로, $\dfrac{1}{g'(3)}-g'(3)=\dfrac{8}{3}$이다.

양변에 $3g'(3)$을 곱하여 정리하면,

$3-3\{g'(3)\}^2=8g'(3)$ 이며, $3\{g'(3)\}^2+8g'(3)-3=0$.

인수분해하면 $(3\{g'(3)\}-1)(g'(3)+3)=0$이므로,

$g'(3)=-3$ 혹은 $g'(3)=\dfrac{1}{3}$

$g'(x)\le\dfrac{1}{3}$ 이므로 $g'(3)=\dfrac{1}{3}$,

$f'(3)=\dfrac{1}{g'(f(3))}=\dfrac{1}{g'(3)}$ 이므로 $f'(3)=3$이다.

4) $f'(x)=\dfrac{1}{g'(f(x))}$ 이고, $f(x)$는 증가함수이며, 모든 실수를 치역으로 가진다.

$g'(x)\le\dfrac{1}{3}$ 이므로, $g'(f(x))\le\dfrac{1}{3}$ 이다. $f'(x)\ge 3$이다.

그런데, $f'(3)=3$이므로, $f'(x)$는 3에서 최솟값 3을 가져야한다.

$y=f'(x)$는 이차식이므로 미분가능하다. 즉 3에서 극값을 가져야한다.

$f''(3)=0$

3. 연산

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f(3)=3$, $f'(3)=3$, $f''(3)=0$

$f''(x)=6x+2a$에서 $f''(3)=0$이므로 $18+2a=0$, $\therefore a=-9$

$f'(x)=3x^2-18x+b$에서 $f'(3)=3$ 이므로,

$f'(3)=27-54+b=3$, $\therefore b=30$

$f(x)=x^3-9x^2+30x+c$에서 $f(3)=3$이므로

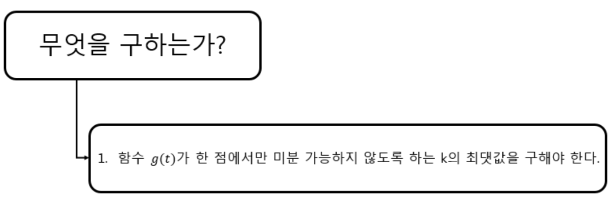
$f(3)=27-81+90+c=3$

$\therefore c=-33$

$f(1)=1-9+30-33=-8-3=-11$

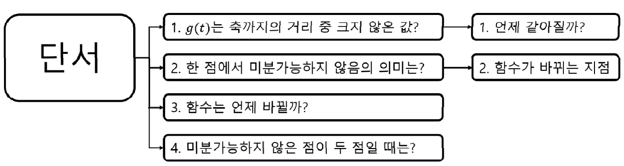
기출 5

1. 무엇?



함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분 가능하지 않도록 하는 k의 최댓값을 구해야 한다.

2. 단서 및 해석



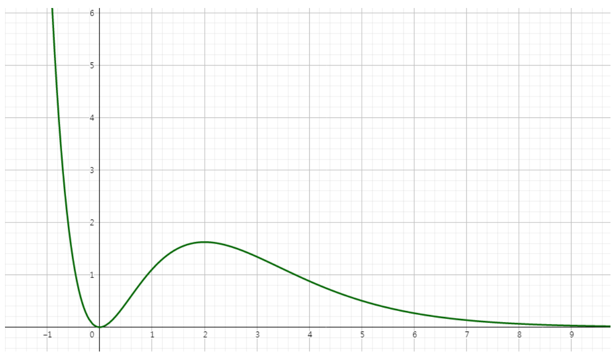
1) $f(x)=kx^2e^{-x}\ (k>0)$의 그래프는 어떻게 그려질까?
(교과서 본문 : 미적분 도함수의 활용 - 그래프 그리기)

❶ 함수의 정의역과 치역
❷ 곡선과 좌표축의 교점
❸ 곡선의 대칭성과 주기
❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점
❻ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, 점근선

ex) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, 원점을 지난다.

$f'(x)=2kxe^{-x}-kx^2e^{-x}=2kxe^{-x}(2-x)$이므로

$x=0, x=2$에서 각각 극솟값, 극댓값을 가진다.



2) x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자.

x축까지의 거리와 y축까지의 거리가 같을 때는 언제일까?
그 때를 기준으로 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 어떤 거리가 큰지 쉽게 살펴볼 수 있다.

식으로 표현하면 $|y|=|x|$이다.
$y=x$일 때, x값과 y값이 같으므로 거리가 같다.
$y=-x$일 때도 x축까지의 거리와 y축까지의 거리가 같다.

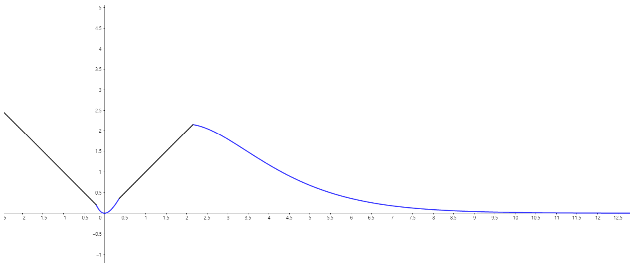
3) 미분 가능하지 않다는 말은 어떤 의미일까?
(교과서 본문 : 수학 2 미분계수와 도함수)
함수 $f(x)=|x-1|$이 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보이라.

ex) 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a & (x<1)\\ bx^2+6x & (x\ge 1)\end{cases}$에 대하여 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 때,
두 상수 a, b의 값을 구하라.

함수가 바뀌는 지점에서 미분 가능하지 않을 수 있다.

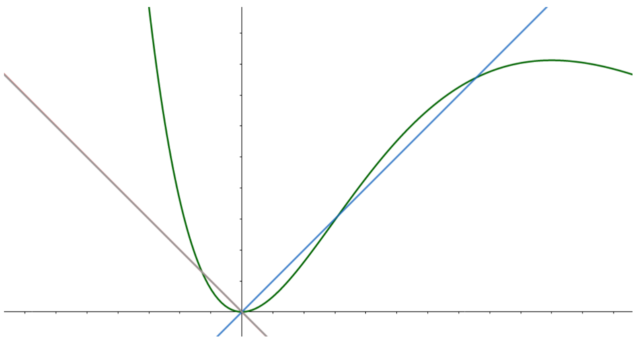
$y=x$와 $y=-x$를 기준으로 아래에 있을 때는 x축까지의 거리가 y축까지의 거리보다 작으므로, y값이 $g(t)$가 된다.
위에 있을 때는 x축까지의 거리가 y축까지의 거리보다 크므로, x값이 $g(t)$가 된다.

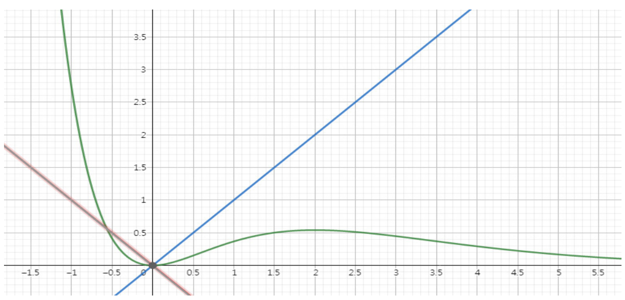
$y=g(t)$를 그래프로 그리면 다음과 같다.



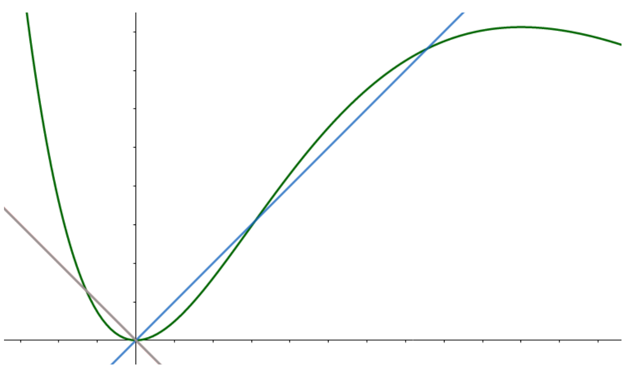
4) 한 점에서만 미분 가능하지 않다?

k값에 관계없이 미분 가능하지 않은 점이 반드시 하나 존재하는 건가?





이와 같이 반드시 $y=-x$와의 교점은 1개가 있으며, 이 때 미분 불가능한 점이 생긴다.
$y=x$와의 교점은 없을 수도 있고, 2개일 수도 있다.
$y=x$와 만나는 점이 2개가 아닐 때 k의 최댓값을 구하는 것이구나!



3. 연산

이 때, 미분가능하지 않은 점이 한 곳만 있으려면 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나지 않거나 접해야 한다.
접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면
$kt^2e^{-t}=t$ …… ㉠이고
$x=t$에서 접선의 기울기가 1이므로
$kt(2-t)e^{-t}=1$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $2-t=1$ $\quad\therefore t=1$
$\therefore k=e$
따라서 k의 최댓값은 e이다.

기출 ⑥

1. 무엇?

무엇을 구하는가?

1. 세 상수 a, b, c의 곱을 구해야 한다.

$60k$를 구해야 하고, k값을 구하기 위해 abc의 최댓값을 구해야 한다.
최댓값이라는 것은 변수가 존재할 것임을 인지하자.

2. 단서 및 해석

단서

1. $f(x)$를 미분해도 (이차 식)$\times e^x$

2. $f'(\sqrt{-3})=0, f'(\sqrt{3})=0$ → 2. 근과 계수의 관계!

3. $0\le x_1<x_2$일 때, $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1\ge 0$

3-1. $f(x_2)-f(x_1)\ge -x_2+x_1$ 에서 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ge -1$

3-2. $f(x_2)+x_2\ge f(x_1)+x_1$

1) $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$, $f'(x)=(ax^2+bx+c+2ax+b)e^x$

2) (가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
$f'(-\sqrt{3})=0$, $f'(\sqrt{3})=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이므로,
$ax^2+(2a+b)x+b+c=0$의 해는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$

3) (나) $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1\ge 0$이다.
이것은 두 가지로 해석이 가능하다.
3-1) 첫 번째는 평균값 정리를 이용하는 것이고,
3-2) 두 번째는 함수의 증가와 감소로 해석하는 것이다.

3. 연산

3)

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ 을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$

$f(x)$ 가 $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$ 에서 극값을 가지므로

$ax^2+(2a+b)x+b+c=0$의 근이 $x=\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

근과 계수와의 관계에서 $-\dfrac{2a+b}{a}=0$, $\dfrac{b+c}{a}=-3$ 이므로

$b=-2a$, $c=-a$

$\therefore f'(x)=a(x^2-3)e^x$, $f(x)=a(x^2-2x-1)e^x$

$abc=a(-2a)(-a)=2a^3$ 의 최댓값을 찾는 것이고,

따라서 a값의 최댓값을 찾으면 된다.

4-1)

$0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$ 이므로 양변을 $x_2-x_1(>0)$ 로

나누어 식을 정리하면 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \ge -1$

$f(x)$ 가 $x \ge 0$ 에서 연속이고 미분 가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c) \quad (0 \le x_1 < c < x_2)$이다.

$\therefore f'(c) \ge -1$

4-2)

$0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2 라는 말을 고1 때 배운 개념에 의하면

'x값이 증가 할 때' 라고 생각할 수 있다.

$f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$의 식을 $f(x_1)+x_1 \le f(x_2)+x_2$ 로 변형해보자.

$f(x)+x=g(x)$라 하면, $g(x)$함수는 $x \ge 0$에서 증가하는 함수라고 할 수 있다.

따라서 $g'(x) \ge 0$ 이고, 즉 $f'(x)+1 \ge 0$이다.

즉, $x \ge 0$ 에서 $f'(x)$ 의 최솟값이 -1 이고

$f(x)$ 의 변곡점에서 $f'(x)$의 최솟값을 가지므로

$f''(x)=a(x^2+2x-3)e^x=0$ 에서 $x=-3, 1$

$x \ge 0$ 을 만족하는 $x=1$ 에서 $f'(x)$의 최솟값을 갖는다.

$f'(1)=-2ae \ge -1$ 에서 $\quad \therefore a \le \dfrac{1}{2e}$

따라서, $abc=a(-2a)(-a)=2a^3 \le 2\left(\dfrac{1}{2e}\right)^3=\dfrac{\frac{1}{4}}{e^3}$ 이므로

$k=\dfrac{1}{4}$

$\therefore 60k=15$

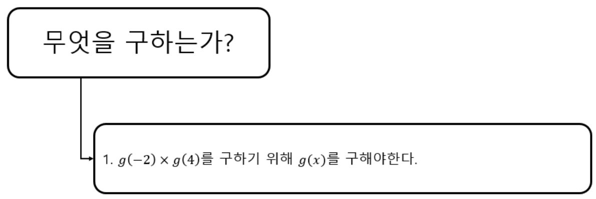
comment.

다음 문제도 한번 참고해봐!

Q. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=\ln f(x)$을 만족시킨다. $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값 4를 가지며, $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 실수 x에 대하여 $g(x_1)-(x_1)^2 \ge g(x_2)-(x_2)^2$을 만족시킨다. $f(3)$의 최댓값을 ae^4이라 할 때, a의 값을 구하시오.

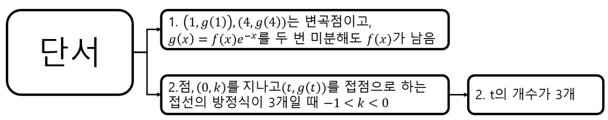
기출 7

1. 무엇?



$g(-2)\times g(4)$를 구해야하고, 그렇다면 $g(x)$를 구해야 한다.

2. 단서 및 해석



1) $g(x)=f(x)e^{-x}$ ($f(x)$는 이차함수)에서

점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

$g''(1)=0, g''(4)=0$이다.(연속한 함수에서 부호가 변하므로 값은 0이 된다.)

$f(x)=ax^2+bx+c \ (a \ne 0)$로 놓으면

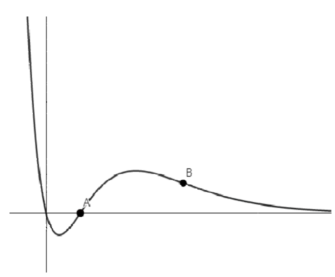
$g''(x)=(ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c)e^{-x}$

조건 (가)에서 방정식 $g''(x)=0$의 두 근이 $x=1$, $x=4$를 두 근으로 갖는다. 근과 계수의 관계에서

$\dfrac{4a-b}{a}=5$, $\dfrac{2a-2b+c}{a}=4$이므로 $b=-a$, $c=0$

즉, $f(x)=ax^2-ax$이고 $g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$

이 함수를 $a>0$일 때를 기준으로 그래프로 그리면 다음과 같다.



2) (나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

점 $(0, k)$을 지나면서, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $T(t, g(t))$에서 그은 접선의 방정식은

$k-g(t)=g'(t)(0-t)$이므로, $k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$을

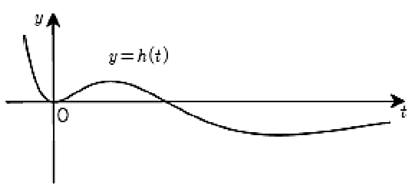
만족시키고, 접선의 개수와 접점의 개수가 같다면, t의 개수가 3개여야 하며,

이 t에 대한 방정식의 해가 3개인 k값의 범위가 $-1<k<0$라는 뜻이다.

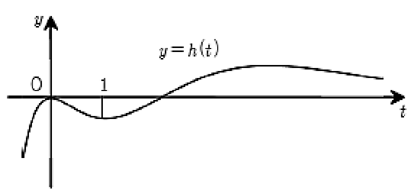
$h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$로 놓고 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 법위가 $-1<k<0$이어야 한다.

이때 두 가지 경우로 나누어서 그래프를 그려야하는데, $a<0$인 경우 함수 $y=h(t)$의

그래프를 그려보면, 개형은 다음과 같고, 문제의 조건을 만족시키지 않는다. (그래프를 그리기 위한 6가지 분석은 생략한다. 하지만 모두 다 해보고 그래프를 그려보아야 한다. 시험장에서 시행착오를 겪고 싶지 않다면!)



$a>0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, $h(1)=-1$이어야 조건을 만족한다는 것은 알 수 있다.

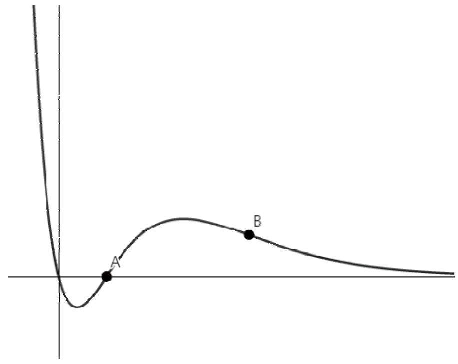


3. 연산

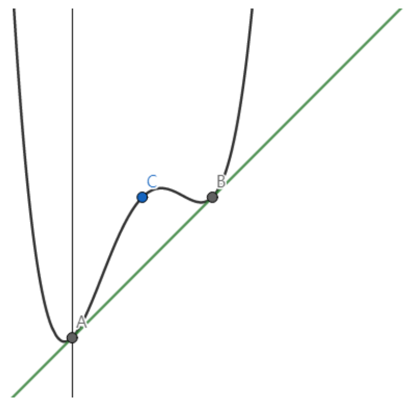
$h(1)=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$

$\therefore g(-2)\times g(4)=f(-2)e^2\times f(4)e^{-4}=72a^2e^{-2}=72e^2e^{-2}=72$

p.s.) 접점의 개수와 접선의 개수가 일치하지 않을 수도 있다. 한 함수의 그래프 안에서 공통접선이 생길 수 있는데, 서로 다른 접점에서 구한 접선이 일치하는 경우이다. 그러나, $g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$의 그래프를 다시 살펴보자.



이 그래프에서는 공통접선이 존재하지 않는다.



만약 공통접선이 존재한다면, 평균값의 정리에 의해서 공통접선의 기울기와 같은 미분계수를 가지는 점이 하나 이상 존재한다.

위와 같은 상황에서, A점 근처에서는 아래로 볼록이므로 $f''(x)>0$인 상황이다.

도함수 값이 x값이 증가하면서 증가하는 상황인데, 변곡점이 없다면 다시 공통접선의 기울기와 같은 미분계수 값이 나올 수 없다. 즉, 변곡점을 거쳐서 공통접선의 기울기와 같은 미분계수를 가지는 점 C가 나오게 된다.

마찬가지로 C점 근처에서는 위로 볼록이므로 $f''(x)<0$이며, x값이 증가하면서 도함수 값이 감소하는 상황이다. 변곡점이 없다면 다시 공통접선의 기울기와 같은 미분계수 값에 도달할 수 없기 때문에 변곡점을 하나 더 거쳐서 B에 도착하게 된다.

즉, 공통접선이 한 그래프 안에 존재하기 위해서는, 변곡점이 두 개여야 한다.

또한 두 변곡점 사이의 임의의 점에서의 미분계수와 같은 기울기의 공통접선을 가져야한다.

즉, 이 문항에서 공통접선의 접점은, 두 변곡점 사이가 아닌 곳에서 존재하게 된다.

B점 이후의 그래프의 미분계수 값을 보면 모두 음수가 된다. 즉, 공통접선의 기울기가 음수여야 하는데, A 이전에서의 미분계수가 음수인 점에서의 접선은 x축 위로 올라가지 않는다. 즉, 이 문항에서 공통접선은 존재하지 않는다.

질문하고 생각하는 수학

질문하기/생각하기

여러 가지 함수의 미분

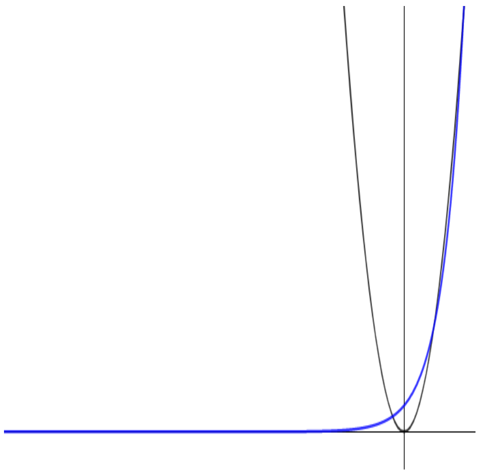
01 지수함수의 극한에서 정의되는 새로운 수를 말하고 그 수를 정의하는 식을 써라.

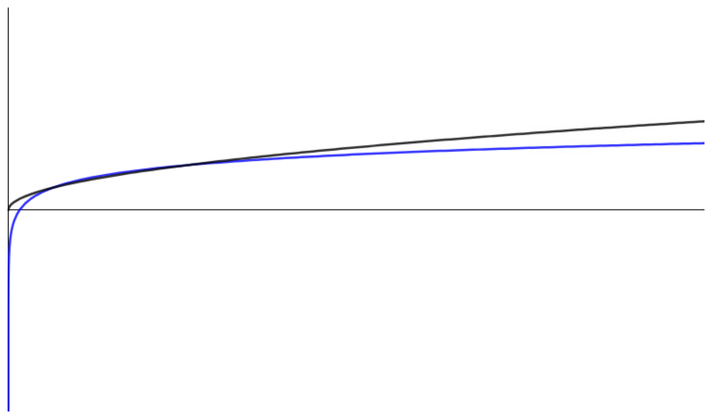
지수함수의 극한에서 정의되는 새로운 수는 무리수 e이다.

정의하는 식은 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$으로 이 형태를 정확하게 기억해야한다.

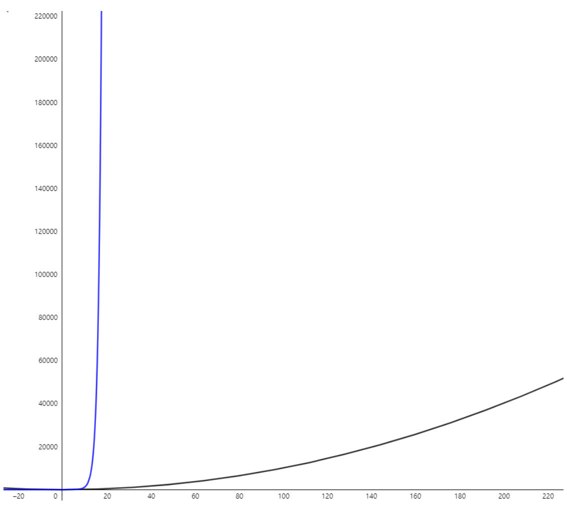
$(1+0)^{\infty}$의 형태임을 기억하자. 1도 무한대도 아닌 무리수 e로 수렴했었다.

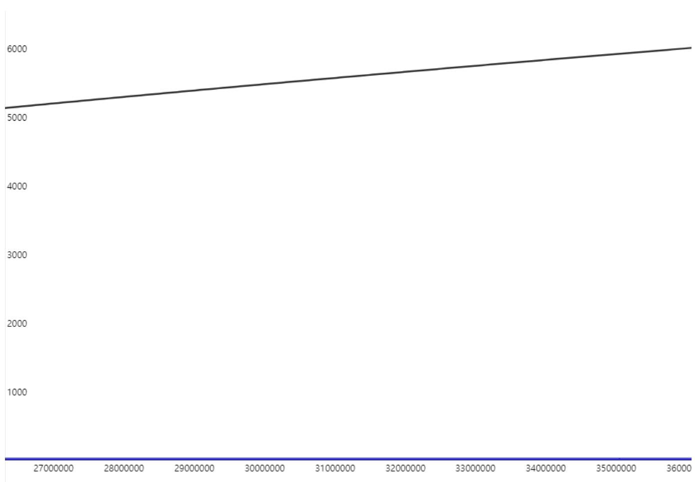
02 지수함수는 이차함수처럼, 로그함수는 무리함수처럼 그려도 될까?





위 그림은 지수함수와 이차함수, 로그함수와 무리함수를 각각 그려본 모습이다. 형태가 비슷한 것처럼 보이지만, 실제로는 꽤 많은 차이가 있다. 다음 그래프를 보자.





이 그래프들은 각각 y축과 x축의 단위를 비약적으로 크게 하여 그래프를 관찰한 것이다.
이 때의 그래프는 확실하게 다르다.

즉, 이차함수, 무리함수와 비슷한 모양이지만, 그렇게 생각하며 그리면 안된다.
지수함수는 이차함수보다 급격하게 증가하고, 로그함수는 무리함수보다 작게 증가한다. 수학 Ⅰ의 수학적 귀납법 단원에서 $n \geq 5$인 자연수 n에 대하여 $n^2 < 2^n$을 증명하면서 $\dfrac{n^2}{2^n}$의 그래프를 프로그램으로 그리면서 증명할 수도 있었다. 그래프의 모습은 다음과 같다.

이를 보면, $y=2^x$는 $y=x^2$보다 훨씬 크게 증가하는 것을 이해할 수 있다. 물론 그래프를 그릴 때는, 이차함수나 지수함수 모두 비슷하게 그려지지만, 똑같다고 생각해서는 안된다.

03 삼각함수에서 외워 두어야 하는 식 변형과 삼각함수 식이 있다면 아는 대로 나열해보자.

먼저, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$과 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$을 수학 1에서 배웠다.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$의 양변에 $\cos^2 x$와 $\sin^2 x$를 나누면 $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \dfrac{1}{\tan^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$이 된다.

덧셈정리 식 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$의 α, β에 같은 수인 x를 대입할 때,
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$가 생기게 된다.
특히 $\cos 2x$는 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$에 의해 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$의 식 변형이 가능하며,
$2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$를 $\cos^2 x$와 $\sin^2 x$로 정리하면
$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$과 같은 식을 얻는다.

물론, 배각공식과 반각공식은 교과 외 개념이지만, 이것을 유도하는 과정은 충분히 교과과정 내에서 가능한 범위이다. 이 흐름대로 정리해보자.

04 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$과 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$의 차이를 설명하여라.

일단 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$는 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$와는 형태 자체가 다르다. 계산을 해보면 $\cos x$값이 1에 가까워지므로 두 식의 극한값은 1에 똑같이 수렴한다. 그러나 식에서처럼 그 값에도 미세한 차이가 있다는 것을 누구나 느낄(?) 수 있을 것이다.
혹자는 이렇게 설명한다. 쌀 두 가마니에서 쌀 한 톨의 차이는 아주 미세한 차이이다. 그러나 쌀 세 톨과 두 톨을 비교하면 쌀 한 톨의 차이는 엄청나게 커 보일 것이다.

그 차이를 비교해볼 수 있는 문제이다. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$ 을 풀어보자.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$ 을 계산하라고하면,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x^3}$ 로 계산하여 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{x^2})=\infty$, $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1}{x^2})=\infty$이므로 $\infty-\infty=0$이라고 계산하는 학생들이 많다. 사실 무한대에서 무한대를 뺐을 때, 0이 되는지를 의심한다면 본인의 풀이가 틀렸음을 의심하지 않을 수 없다.

그러나 sin과 tan가 섞여있는 문제를 풀이할 때 위에서 말한 미세한 차이 때문에 틀릴 수 있다.

그렇다면 어떻게 풀어야 할까? 우리가 정의한 삼각함수의 극한은 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ 밖에 없다.

따라서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cos x-\sin x}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^3\cos x(\cos x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(\cos^2x-1)}{x^3\cos x(\cos x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin^3x}{x^3\cos x(\cos x+1)}$

$=-\dfrac{1}{2}$

이 된다.

매우 큰 두 극한값을 뺐을 때, 아주 미세한 차이가 답이 될 수 있다는 것을 명심하자.

05 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$를 삼각함수의 극한과 지수함수의 극한에서 배운 정의만으로 구해보자.

$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ 는 1^∞ 꼴로 지수함수의 극한에서 배운, 무리수 e의 정의를 떠올릴 수 있다.

$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$에서 1과 x의 자리를 유지해야 하므로, 1을 만들기 위해 주어진 식을 $\lim\limits_{x\to0}(1-1+\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ 로 고칠 수 있고 x의 자리를 유지하기 위해 $\lim\limits_{x\to0}(1-1+\cos x)^{\frac{1}{-1+\cos x}\frac{-1+\cos x}{x^2}}$ 의 형태로 고칠 수 있다. 그렇다면 $\lim\limits_{x\to0}(1-1+\cos x)^{\frac{1}{-1+\cos x}\frac{-1+\cos x}{x^2}\frac{-1-\cos x}{-1-\cos x}}$ 을 계산하면 된다.

따라서 답은 $e^{-\frac{1}{2}}$ 이다.