[수리 추론형]

Bridge 2 사칙연산

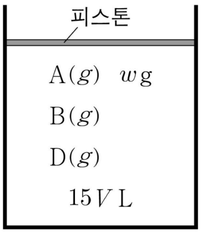
정량값 간 활용되는 사칙연산(+, −, ×)을 상댓값 간에서도 활용할 수 있다.
이를 통해 불필요한 연산량을 줄일 수 있다.

예를 들어보자.

예시 1 출처
첨가 반응 Schema
(22 6평 간소화)

상댓값 간 연산

예시 1



(가)

그림 (가)는 실린더에 A(g)와 B(g), D(g)를 넣은 것을 나타낸 것이다. (가)에서 $\frac{\text{D의 양(mol)}}{\text{전체 기체의 양(mol)}}$은 $\frac{2}{5}$이고, $\frac{\text{A의 양(mol)}}{\text{D의 양(mol)}}$은 $\frac{1}{3}$이며, $\frac{\text{A의 분자량}}{\text{B의 분자량}}$은 $\frac{7}{4}$이다. 실린더 속 기체의 온도와 압력은 일정할 때, B의 질량은?

분자량의 상댓값 (대상 간 비교)
단위 개수 당 질량

예를 들어, 분자량이 A가 B의 2배라면 A 1개 당 질량이 B 1개당 질량보다 2배 크다.

아래 교과 개념을 활용하여 "B의 질량"을 구해보자.

분자량의 정량값
1몰(일정 개수) 당 질량

기체의 부피 해석
온도와 압력이 일정할 때, 기체의 부피비는 입자의 개수비와 동일하다.

예를 들어, A와 B의 부피비가 6 : 5 이면 A와 B의 개수비가 6 : 5이다.

몰(mol)
물질의 양을 나타내는 단위
1몰은 대략 6.02×10^{23}개 이며 1몰의 정확한 개수는 아보가드로 수(N_A)라고 한다.

[교과 개념]

1. 질량은 물질의 양을 나타내는 단위로, $\frac{\text{원자의 질량}}{\text{원자 1몰의 질량(g/mol)}}$ = 원자의 mol 이다.
2. mol은 "입자 수"와 유사하다. 즉, 몰수는 개수라고 생각해도 무방하다.
3. 분자량의 정량값은 분자 1몰의 질량이다.
4. 아보가드로 법칙에 의해 온도와 압력이 일정할 때, 부피 간 비율은 입자수 간 비율이다.

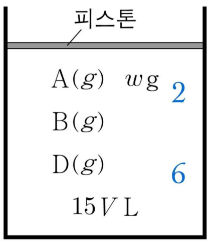
(가)의 부피가 $15V$라고 제시되어 있으므로
(가)의 전체 입자수(상댓값)를 15로 설정할 수 있다.

(∵ 부피 비 = 입자수 비)

물질의 몰수 간 비율이 아래와 같이 제시됨에 따라

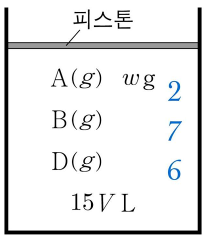
$$\text{“(가)에서 } \frac{\text{D의 양(mol)}}{\text{전체 기체의 양(mol)}} \text{은 } \frac{2}{5} \text{이고, } \frac{\text{A의 양(mol)}}{\text{D의 양(mol)}} \text{은 } \frac{1}{3} \text{이다”}$$

입자 수(상댓값) 정보를 아래와 같이 입힐 수 있다.



(수리 추론형에서)
U(전체 입자수(상댓값) 15)와 A(A와 D의 입자수(상댓값) 8)을 알면
A^{C} (B의 입자수(상댓값)) 또한 결정된다.

따라서 B의 입지수(상댓값)은 7이다.



A와 B의 입자 수 비가 2 : 7임을 알고
A와 B의 분자량 비가 아래와 같이 제시되어 있으므로

$$\text{“(가)에서 } \frac{\text{A의 분자량}}{\text{B의 분자량}} \text{은 } \frac{7}{4} \text{이다.”}$$

A와 B의 질량비를 알 수 있다.

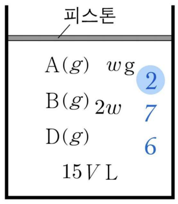
[Remark 1] 물질 간 질량비, 입자 수 비, 분자량 비 중 2가지를 알면 나머지 하나를 알아낼 수 있다.

[Remark 2] 보통 최종 구하는 것이 분자량비로 귀결되는 경우가 많다.

기체	질량(g)	입자 수 (상댓값)	분자량 (상댓값)
A	w	2	7
B	?	7	4

A와 B의 질량비를 알고 A의 질량(정량값)이 제시되어 있으므로 B의 질량(정량값)을 알 수 있다.

$\dfrac{\text{A의 분자량}}{\text{B의 분자량}}$은 $\dfrac{7}{4}$이다.



기체	질량(g)	입자 수 (상댓값)	분자량 (상댓값)
A	w	2	7
B	?	7	4

(행마다 7이 있으므로 비례관계 상 1로 퉁쳐도 무방,
B의 질량이 A의 질량의 2배)

따라서 B의 질량은 $2w$이다.

[Remark 3] 상댓값에서 중요한 것은 정확한 값이 아니라 비례관계이다.

[Remark 4] 상댓값의 계산에서 ÷보다는 ×를 활용하는 게 계산이 더 간결하다.

예를 들어 위에서 $\dfrac{w}{2} : \dfrac{?}{7} = 7 : 4$ 꼴로 계산한다면 암산이 용이하지 않을뿐더러 암산할 수 있더라도 간결하지 못하다.

[수리 추론형]

Bridge 3 비율과 분할

비율은 대상 간 상댓값이므로 기준이 되는 숫자를 설정하여 자료를 정리하고 해석할 수 있다.

비율 자체를 정량값으로 질문하기도 하며 상황별로 비율(정량값)과 비율(상댓값)의 유불리가 다소 다르다.

분할되어 있는 자료를 통해 비율을 구해낼 수도 있어야 하고
제시된 비율을 분할하여 대상 간 상댓값을 구할 수도 있어야 한다.

예를 들어보자.

비율과 분할

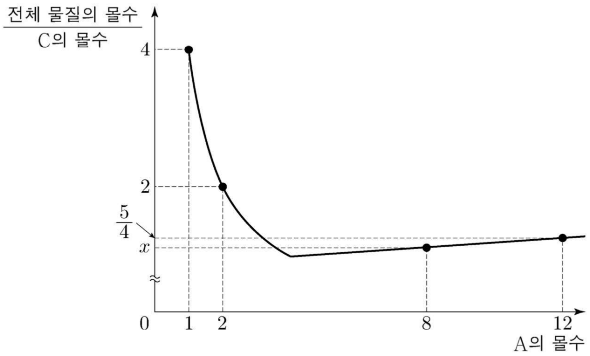
예시 1 출처
화학 양론 Schema (20 9평)

예시 1

다음은 A와 B가 반응하여 C를 생성하는 화학 반응식이다.

$$\mathrm{A} + b\mathrm{B} \rightarrow c\mathrm{C} \quad (b,\ c\text{는 반응 계수})$$

그림은 m몰의 B가 들어 있는 용기에 A를 넣어 반응을 완결시켰을 때, 넣어 준 A의 몰수에 따른 반응 후 $\dfrac{\text{전체 물질의 몰수}}{\text{C의 몰수}}$를 나타낸 것이다.



아래 교과 개념을 활용하여 b, c, x, m 값을 각각 구하시오.

[교과 개념]

1. 주어진 반응식은 반응물 A의 계수가 1, 반응물 B의 계수가 b, 생성물 C의 계수가 c인 반응식이다. 이는 A 1개와 B b개가 반응해서 C c개가 생성되는 반응이라는 것을 의미한다.

2. 몰수는 "입자 수"와 유사한 말이다. 즉, 몰수는 개수라고 생각하고 풀어보자.

물질의 몰수 간 비율이 그래프의 y축 값으로 제시되어 있다.

이때 전체 물질의 몰수 = 남은 반응물의 몰수 + 생성물의 몰수 이고
남은 반응물과 생성물은 각각 1종류이므로

다음과 같이 물질 간 상댓값을 알 수 있도록 분할할 수 있다.

$$\frac{\text{남은 반응물의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}$$

A를 넣어주는 반응이므로 (첨가 반응)

완결점 이전에는 남은 반응물은 B이고 완결점에서는 남은 반응물이 없으며
완결점 이후에는 남은 반응물은 A임을 알 수 있다.

따라서 각 지점에서 $\frac{\text{남은 반응물의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}$ 은 다음과 같이 분류된다.

[완결점 이전]

$$\frac{\text{남은 반응물의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}=\frac{\text{B의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}>1$$

[완결점]

$$\frac{\text{남은 반응물의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}=\frac{\text{C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}=1$$

[완결점 이후]

$$\frac{\text{남은 반응물의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}=\frac{\text{A의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}>1$$

[Remark 1] 위 3가지 케이스를 모두 적고 풀라는 말이 아니다. $\frac{\text{전체 물질의 몰수}}{\text{C의 몰수}}$의 표현이 각 지점(다음 페이지 이미지)에서 해석할 때 자연스럽게 바뀌어 읽혀야 한다.

[Remark 2] ㉠ 초기점과 가까운 지점에서 C의 몰수는 0+이고, A의 몰수는 상수 k이므로 $\frac{\text{B의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}$는 ∞ −임을 알 수 있다. ㉠에서 A를 더 넣어주면 $\frac{\text{B의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}=1+\frac{\text{B의 몰수}}{\text{C의 몰수}}$에서 B의 몰수(분자)은 감소하고, C의 몰수(분모)는 증가하므로 완결점 이전 구간에서 $\frac{\text{전체 물질의 몰수}}{\text{C의 몰수}}$는 완결점까지 1:1 대응으로 감소하는 경향을 나타낸다.

뭉뚱그려진 표현
전체 물질의 몰수
남은 반응물의 몰수
생성된 물질의 몰수 등

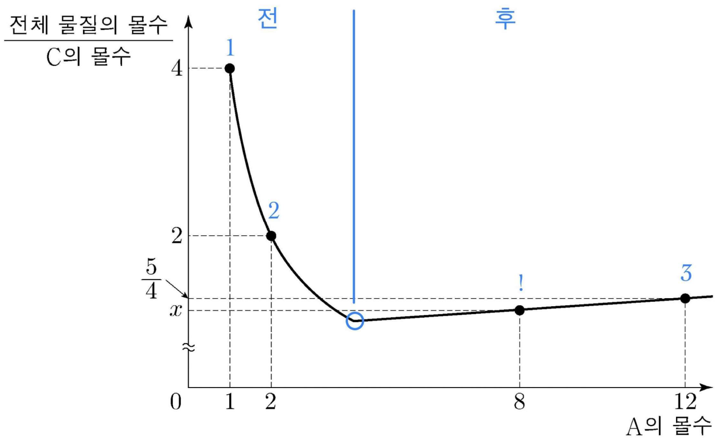
뭉뚱그려진 표현을 정확한 표현(C의 몰수, A의 몰수+B의 몰수 등)으로 바꿔 생각하다 보면 문제는 자연스럽게 해제된다.

그래프 상 완결점
경향이 바뀌는 지점

그래프 해석 Schema에서 상술된다.

완결점
반응이 끝나 남은 반응물이 없는 지점

초기점
A를 0몰 넣어준 지점



!(느낌표)
정보가 결정되지 않은 지점.
구해야 하는 목표

[완결점 이전]
특이점은 2군데(1, 2)이고, 남은 반응물은 B이다.

[특이점 1]

$$\frac{\text{남은 반응물의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}=\frac{\text{B의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}=4=\frac{3+1}{1}$$

∴ B의 몰수 : C의 몰수 = 3 : 1

이때 해당 지점은 A를 1몰 넣어준 지점이므로 C는 c몰 생성된다.

(정량값)	B의 몰수	C의 몰수
특이점 1	$3c$	c

[특이점 2]

$$\frac{\text{남은 반응물의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}=\frac{\text{B의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}=2=\frac{1+1}{1}$$

∴ B의 몰수 : C의 몰수 = 1 : 1

이때 해당 지점은 A를 2몰 넣어준 지점이므로 C는 $2c$몰 생성된다.

(정량값)	B의 몰수	C의 몰수
특이점 2	$2c$	$2c$

정보 간 연결
Mind 3에 상술되어 있다.

[Remark 3] 각각 $\frac{3+1}{1}$, $\frac{1+1}{1}$으로 바꿔 읽고, 첨가한 A의 몰수가 2배이므로 두 비율 정보를 연결하여 $3:1$ & $2:2$로 해석할 수 있으면 좋다.

그래프에 완결점과 완결점 이후, 특이점의 정보만 제시되어 있으므로
초기점(A를 0몰 넣어준 지점)의 정보를 파악하겠다는 생각은 자연스럽다.

A를 0몰~1몰 넣어준 구간과 1몰~2몰 넣어준 구간의 변화량은 동일하므로
[특이점 1]과 [특이점 2]의 변화를 관찰해보자.

(∵ 첨가 반응 Schema - 등차수열)

A를 1몰 첨가할 때
남은 반응물 B가 c몰 감소한다.

A를 1몰 첨가했을 때 남은 반응물이 B $3c$몰이므로
초기점(=A가 0몰인 지점, A를 첨가하지 않은 지점)에는 B가 $4c$몰 존재하며

반응(생성) 비율이 $1:c:c$ 임을 알 수 있다.

(∵ A를 1몰 첨가했을 때, B가 c몰 반응하고 C가 c몰 생성됨)

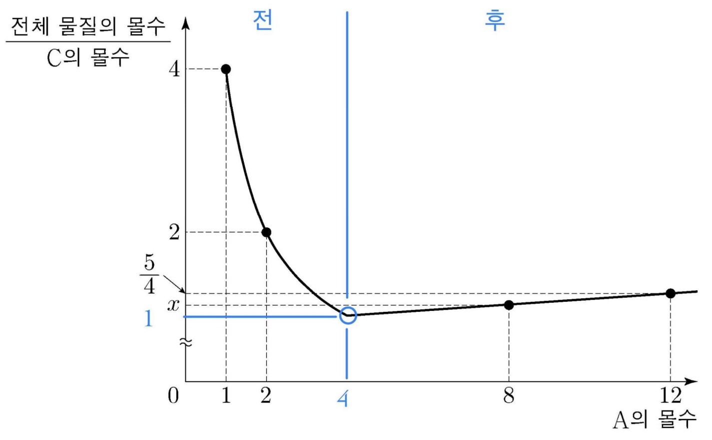
반응(생성) 비율은 계수비이므로 $b=c$이다.

(∵ 반응식 계수비 $1:b:c$)

완결점은 남은 반응물이 없는 지점이므로
초기 반응물 B $4c$몰이 모두 소모되려면 A가 4몰 추가되어야 한다.

∴ 완결점에서 추가된 A의 몰수 = 4몰

[완결점 정보 파악]



[Remark 4] 지금까지 문제에 표기할 사항은 4와 1 뿐이다. 추후 시험보기 직전에는 지금까지의 논리가 머리로 끝나면 이상적이다.

[Remark 5] 그래프에 완결점의 정보는 모두 결정지어 두자.

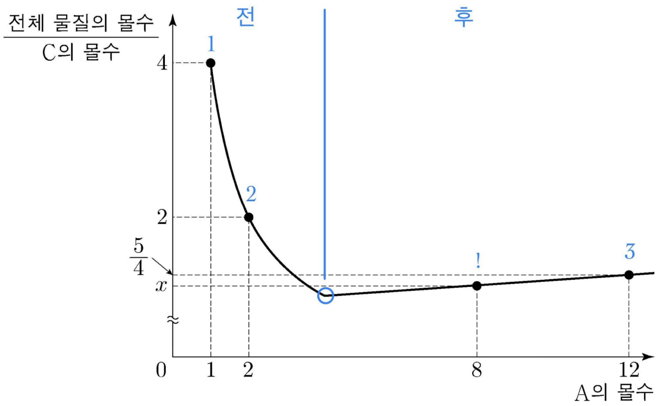
변화량
바로 뒤 Bridge 4에 상술된다.

초기점
그래프 해석은 다음 4가지 파악으로 끝난다.

초기점, 완결점, 완결점 이후, 특이점

이 역시 화학 양론 Schema에서 상술된다.

결정된 것
Mind 1에 상술되어 있다.



!(느낌표)
정보가 결정되지 않은 지점.
구해야 하는 목표

[완결점 & 완결점 이후]

특이점은 2군데(3, !), 결정된 특이점은 1군데(3)이고, 완결점 이후 남은 반응물은 A이다.

[특이점 3]

$$\frac{\text{남은 반응물의 몰수} + \text{C의 몰수}}{\text{C의 몰수}} = \frac{\text{A의 몰수} + \text{C의 몰수}}{\text{C의 몰수}} = \frac{5}{4} = \frac{1+4}{4}$$

∴ A의 몰수 : C의 몰수 = 1 : 4

이때 해당 지점은 완결점으로부터 A를 8몰 추가한 지점이므로 C는 32몰 존재한다.

(정량값)	A의 몰수	C의 몰수
특이점 3	8	32

따라서 완결점에 존재하는 C의 몰수는 32몰으로 결정된다.

(정량값)	반응한 A의 몰수	반응한 B의 몰수	생성된 C의 몰수
완결점	4	m (∵ 발문)	32

반응(생성) 비율이 $1 : c : c$ 이므로 c는 8이고, 반응한 B의 몰수는 32몰이다.

$\therefore\ b=8,\ m=32$

[Remark 6] 완결점의 반응(생성) 비율을 구하는 것으로 대부분의 문제는 귀결된다.

[Remark 7] 완결점 이후 구간에서 $\frac{\text{전체 물질의 몰수}}{\text{넣은 물질의 몰수}}$ 경향은 1:1 대응으로 증가하고

완결점 이전 구간에서 $\frac{\text{전체 물질의 몰수}}{\text{넣은 물질의 몰수}}$ 경향은 1:1 대응으로 감소한다.

이는 $\frac{\text{전체 물질의 몰수}}{\text{넣은 물질의 몰수}}$ 값이 같은 곳이 2군데 있다면, 하나는 완결점 이전 구간 다른 하나는 완결점 이후 구간이라는 것을 의미한다.

[결정할 특이점]
완결점과 완결점 이후의 첨가한 물질 몰수-전체 물질 몰수 그래프 경향은 1차식이다.
(넣으면 넣은만큼 증가)

$\frac{\text{전체 물질의 몰수}}{\text{C의 몰수}}$에서 완결점 이후 C의 몰수(생성물)는 상수(변하지 않는 값)이므로
그래프의 경향은 A의 몰수-전체 물질의 몰수 그래프와 동일하다.

($\because$ C의 몰수=상수 C, $y=kx$ (k는 상수))
($\because$ 첨가 반응 Schema - 등차수열)

8은 4와 12의 중점이므로 x는 $1=\frac{4}{4}$와 $\frac{5}{4}$의 중점($\frac{4.5}{4}$)이다.

$\therefore\ x=\frac{4.5}{4}=\frac{9}{8}$

1차식
x축과 y축의 경향이 등차수열.
그래프 상 직선

첨가한 물질-전체 물질 그래프
x축이 첨가한 물질의 몰수
y축이 전체 물질의 몰수인
그래프

[예시 1 정답]

$b=8,\ c=8,\ x=\frac{9}{8},\ m=32$

[Remark 8] 위 사항은 논증일 뿐... 실전에서는 "직선"이니 중점의 값을 구하면 된다.

[Remark 9] 완결점 이후에서 생성물의 양(분모)은 일정하고, 넣어준 물질만큼 전체 물질의 몰수(분자)는 증가하므로, $\frac{\text{A의 몰수 + C의 몰수}}{\text{C의 몰수}}$는 1차함수의 경향을 보이며 증가한다.

[Remark 10] 결정된 지점을 통해 결정되지 않은 지점을 추론
$\Rightarrow$ 구하는 것의 귀결
(초기 지점 B $4c$몰, 완결점 A 4몰, 특이점 !의 y 값 x)

문제가 중간에 막혔다면 결정된 곳의 조건을 모두 활용하지 못했을 것이다.
활용하지 못한 결정된 조건이 무엇인지 생각하자.