(2015개정 교육과정)

실전개념(개념+581문제)

아르코 수학(상)

arco 지음

“아르코 수학 실전개념서를 소개하겠습니다.”
총 479페이지(단면기준, 해설서 포함) 입니다.
이 책의 목적은 어떻게 하면 좀 더 개념과 문제간의 괴리감을 줄일 수 있을까? 의문에서 출발했습니다. 개념설명을 숙지하고 유형별 문제를 풀더라도 연습문제에서는 풀지 못하는 경우가 많았기 때문입니다. 그래서 단계별 구성과 그에 맞는 적절한 예제를 배치한 것이 아니라 단계별 확인이 아닌 개념, 예제, 개념check, 개념연습, 실력연습문제 문항의 구성에 일정 난이도를 유지하게 했으며 일정 난이도를 유지할 때 발생될 수 있는 문제에 대한 이해도를 높이기 위해서 ‘개념길잡이’라는 것을 예제 밑에 배치하여 개념, 예제 내용에서 발생할 수 있는 추가 의문점을 해결하게 했습니다. 물론 단원 별 특징에 따라 ‘개념길잡이’ 멘트에 차이는 있겠지만 되도록 연습문제를 접하게 됐을 때, 문제에 대해 접근을 못하는 것을 줄이기 위해 노력했습니다. 또한 단순 개념 확인의 선택형 문제를 제와한 전 문항을 주관식으로 구성하였습니다. 그리고 해설의 경우도 답에 도출에 있어서 상세히 기술하여 중간에서 막히는 일이 없도록 했으며, 예제 및 개념체크, 개념연습, 실력연습에서의 해설은 단순계산도 친절하게 하려고 했습니다. 개념에 대한 설명에 있어서도 방정식이라도 그래프적인 설명이 필요한 경우 추가 설명을 하여 방정식을 통해 이미지가 그려지도록 하려 했습니다.

◆ [기본확인 문제] 64문제 (교과서 필수 예제 난이도)
[개념길잡이 예제] 143문제 (실전개념 유형 익히기)
[개념check 문제] 154문제 (실전개념 유형에 대한 확인)
[개념연습 문제] 159문제 (내신 3등급 이상 난이도)
[실력연습 문제] 61문제 (내신고정 1등급 난이도)
총 581문제 (주관식)

◆ 교재활용 팁
기본개념(개정 교과서)과 문제 적용, 유형별 접근법이 필요한 경우 정리를 했으며, 특히 그래프(지오지브라를 바탕으로 실제 값에 가까운 이미지)를 활용하여 개념에 대한 이해도를 높이려 했습니다.

◆ 내신 실전 대비
[기본 확인 문제] 교과서 예제 확인용
[1단계]개념길잡이 예제+ 개념CHECK ==> 개념 및 유형에 대해 부족할 시
[2단계] 개념연습+ 실력연습 ==> 실전 내신 및 상위 등급 내신 맞보기 연습용

◆ 수능 개념 및 실전대비
개념길잡이 예제 ==> 개념check ==> 개념연습 ==> 실력연습

[목차]

Ⅰ. 다항식

Ⅰ. 다항식

1. 다항식의 연산

01. 다항식의 덧셈과 뺄셈

1.다항식에서 사용하는 용어

단항식: 변수(문자)와 상수(숫자 혹은 고정된 수로 보는 문자)들의 곱으로 이루어진 식
다항식: 여러 단항식들의 합으로 이루어진 식
항: 다항식을 구성하는 각각의 단항식
계수: 다항식의 각 항에서 변수가 아닌 상수 부분
차수
  단항식의 차수: 단항식에서 곱해져 있는 변수의 수
  다항식의 차수: 다항식에는 최고차항(그 다항식의 항들 중 가장 차수가 높은 것)의 차수
상수항: 항상 그 값이 일정한 항

예를 들면 다항식 $3x^2+5x+7$ 에서 항은? $3x^2$, $5x$, 7 이렇게 세 개이다.
이 다항식은 x 에 들어가는 값에 따라 $3x^2+5x+7$ 의 값이 달라진다.
$x=1$ 일 때 $3\times(1)^2+5\times1+7=3+5+7=15$
$x=2$ 일 때 $3\times(2)^2+5\times2+7=12+10+7=29$
이 두 예에서 $3x^2$ 이란 항은 그 값이 3, 12 이다. 그런데 가장 마지막 항이었던 7 은 x 가 들어있지 않기 때문에 그 값이 변하지 않는다. 그래서 이런 항을 상수항이라고 한다.

동류항: 문자와 문자의 차수가 같은 항

우선 항이 무엇인지 부터 정리를 해야 합니다. 항이란 곱하기나 나누기로 연결되어 있는 것이다. 예를 들면 $3x+7y+9$ 는 $3x$, $7y$, 9 의 세 개의 항으로 이루어진 식이다.
그리고 몇 차식인지도 알아야한다. 여기서 몇 차식인지는 어떤 문자를 가장 많이 곱한 항에서 문자가 몇 개 곱하여있는지를 말한다.
위의 예에서 $3x+7y+9$ 는 x 에 대하여 일차식, y 에 대하여도 일차식이다.
또한 $3x+5x^2-10x+30y+6xy-2yx+2$ 는 x 에 대하여 가장 많이 곱해진 것은 두 번째 항인 $5x^2$ 이 되어 이차식이고, y 에 대하여는 일차식이 된다. 또한 각각 $6xy$ 와 $2yx$ 에서 x 에 대한 계수는 $6y$, $2y$ 이고 y 에 대한 계수는 $6x$, $2x$ 이고 2 는 상수항이다.
여기에서 동류항이란 문자와 문자의 차수가 같은 항을 말한다.
두 번째 예 $3x+5x^2-10x+30y+6xy-2yx+2$ 에서 $3x$ 와 $10x$ 는 모두 문자가 x 의 일차식인 동류항이고 $6xy$ 와 $2yx$ 도 동류항이다. 여기서 xy 와 yx 는 순서에 상관없다.

2. 다항식의 정리

내림차순: 다항식을 정리할 때, 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮아지는 순서대로 나타내는 것
오름차순: 차수가 낮은 항부터 높아지는 순서대로 나타내는 것

동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.
다항식은 x 에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타낸 식이다. 다항식을 불규칙하게 나열하는 것보다 차수에 따라 순서대로 나타내면 식을 다루기에 편리하다.

내림차순 또는 오름차순 정리의 핵심은 해당 문자와 차수에 대한 정리이므로 문자 순서에 따라 맞고 틀리는 것은 아니다. (문자 순서는 다항식을 정리할 때 중요하지 않다.)
예를 들면 $2xy-3y^2+x^2+y+2$ 를
x 에 대하여 내림차순으로 정리하면 $x^2+2xy-3y^2+y+2$
x 에 대하여 오름차순으로 정리하면 $-3y^2+y+2+2xy+x^2$
또한 $2xy^2+3x^2y$ 식의 정리는 다음과 같습니다.
x 에 대하여 내림차순으로 정리하면 $3x^2y+2xy^2$
x 에 대하여 오름차순으로 정리하면 $2xy^2+3x^2y$
y 에 대하여 내림차순으로 정리하면 $2xy^2+3x^2y$
y 에 대하여 오름차순으로 정리하면 $3x^2y+2xy^2$

3. 다항식의 덧셈과 뺄셈
일반적으로 다항식의 덧셈과 뺄셈은 동류항끼리 모아서 정리하면 된다. 이때, 뺄셈은 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 더하면 된다.
예를 들면 두 다항식 $A=2x^2+x+4$ 와 $B=-4x^2-3x+2$ 의 덧셈은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$A+B=2x^2+x+4+(-4x^2-3x+2)=(2x^2-4x^2)+(x-3x)+(4+2)$$
$$=(2-4)x^2+(1-3)x+(4+2)$$ ⇦동류항끼리 모아서 계산
$$=-2x^2-2x+6$$

두 다항식 $A=2x^2+x+4$ 와 $B=-4x^2-3x+2$ 의 뺄셈은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$A-B=2x^2+x+4-(-4x^2-3x+2)=(2x^2+4x^2)+(x+3x)+(4-2)$$
$$=(2+4)x^2+(1+3)x+(4-2)$$ ⇦동류항끼리 모아서 계산
$$=6x^2+4x+2$$

여기서 주의할 점은 $A-B=A+(-B)$ 를 이용하면 된다.

4. 다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여
교환법칙: $A+B=B+A$
결합법칙: $(A+B)+C=A+(B+C)$

예를 들면 $(2x+1)+(3x-2)$
$=2x+(1+3x)-2$ ⇦ 결합법칙
$=2x+(3x+1)-2$ ⇦ 교환법칙
$=(2x+3x)+(1-2)$ ⇦ 결합법칙

기본개념 확인 : 교과 필수예제 Level

1. 다음 물음에 답하시오.
   (1) $2x^2y-5y+2xy^2-7x-3$ 을 x 에 대한 내림차순으로 정리하시오.
   (2) $2xy^2+4x^2y-2+x-5x^2$ 을 y 에 대한 오름차순으로 정리하시오.

2. 다음 식을 간단히 하시오.
   (1) $2y-\{3x-(4y-5x)\}$
   (2) $2x^2+xy-y^2-2(x^2-2xy+y^2)$
   (3) $(-x^2-x^3+2x-4)+(2x^2+4-x)-(1-3x^3+7x^2)$

3. 두 다항식 $A=2x-3y$, $B=-3x+5y$일 때 $3A-(A-B)$를 구하시오.

4. 두 다항식 $A=3x^2+xy+y^2$, $B=x^2+2y^2$에 대하여 $A-2B$를 구하시오.

5. 세 다항식 $A=2x^2-x+2$, $B=-2x^2+x-3$, $C=2x^2+3x+2$ 에 대하여 $A+2X=2B-C$ 를 만족시키는 다항식 X 를 구하시오.

(길잡이 예제1) 다항식의 덧셈과 뺄셈(1)

두 다항식 $A=-x^2+6xy-2y^2$, $B=3x^2+3xy-4y^2$ 에 대하여 다음을 계산하시오.
(1) $-2A+B$ (2) $3A-(2B+A)$ (3) $5A-(2A-B)$

[풀이] (1) $-2A+B=-2(-x^2+6xy-2y^2)+(3x^2+3xy-4y^2)$
$=2x^2-12xy+4y^2+3x^2+3xy-4y^2$
$=(2+3)x^2-(12-3)xy+(4-4)y^2$
$=5x^2-9xy$
(2) $3A-(2B+A)=3A-2B-A=2A-2B$
$=2(-x^2+6xy-2y^2)-2(3x^2+3xy-4y^2)$
$=-2x^2+12xy-4y^2-6x^2-6xy+8y^2$
$=-(2+6)x^2+(12-8)xy+(8-4)y^2$
$=-8x^2+6xy+4y^2$
(3) $5A-(2A-B)=5A-2A+B$
$=5(-x^2+6xy-2y^2)+(5x^2-9x)$
$=-5x^2+30xy-10y^2+5x^2-9x$
$=-(5-5)x^2+30xy-9x-10y^2$
$=-10y^2+30xy-9x$

개념길잡이 두 다항식 A, B에 대하여 $A+B$는 A와 B의 각 항을 동류항끼리 모아서 정리하면 됩니다. 동류항은 다항식에서 문자와 차수가 각각 같은 항을 말합니다. 또한 $A-B$는 A에 B의 각 항의 부호를 바꾼 $-B$를 더하는 것과 같습니다. 즉, $A-B=A+(-B)$임을 알 수 있습니다.

(개념Check)1. 세 다항식 $A=x^2-3xy+2y^2$, $B=-3x^2+xy+y^2$,
$C=4x^2+5xy-3y^2$ 에 대하여 $C-\{2A-(B-2C)\}$ 를 구하시오.

(길잡이 예제2) 다항식의 덧셈과 뺄셈(2)

두 다항식 A, B 에 대하여 $A+B=3x^2-2xy-y^2$, $A-B=-x^2-4xy+3y^2$ 일 때, $2A-3B$ 의 값을 구하시오.

[풀이] $A+B=3x^2-2xy-y^2$ ······ ㉠

$A-B=-x^2-4xy+3y^2$ ······ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $2A=2x^2-6xy+2y^2$

$\therefore A=x^2-3xy+y^2$

㉠ − ㉡을 하면 $2B=4x^2+2xy-4y^2$

$\therefore B=2x^2+xy-2y^2$

따라서 $2A-3B=2(x^2-3xy+y^2)-3(2x^2+xy-2y^2)$

$=2x^2-6xy+2y^2-6x^2-3xy+6y^2$

$=-4x^2-9xy+8y^2$

개념길잡이 다항식 A, B 를 각각의 미지수로 보고 A, B 에 대한 각각의 꼴로 정리하여 먼저 구합니다. 그러나 주어진 조건에 따라서 각각의 다항식의 꼴로 나타낼 수도 있습니다.

조건 $A+2B$, $A-B$ 에서 $3B$ 를 구하는 꼴이라면 $A+2B-(A-B)=3B$ 을 통해서 다항식 $3B$ 를 구합니다. 즉 연립일차방정식이 아니더라도 덧셈 또는 뺄셈의 연산을 사용하면 됩니다.

(개념 Check)2. 두 다항식 A, B 에 대하여

$A-B=6x^3-x^2+2x+2$, $2A+B=-8x^2+4x-2$ 일 때, $3A+2B$ 를 구하시오.

02. 다항식의 곱셈

다항식의 곱셈에 앞서 단항식과 단항식의 곱셈인 지수법칙을 확인해 보자.

(지수법칙)

a, b 는 실수이고 m, n 은 자연수일 때 다음 법칙이 성립한다.

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$　　② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

③ $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$　　④ $(ab)^m = a^m \times b^m$

⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ (단, $b \neq 0$)　　⑥ $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

⑦ $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

②에서 주의할 점은 $a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n}$ 에 대한 꼴에서 m, n 은 자연수일 뿐 m, n 의 크기에 대한 구분이 없으므로 $m > n$ 일 때 a^{m-n} 이고 $m = n$ 일 때 a^0 가 되는데 여기서 실수 a 의 조건에서 $a = 0$ 이 되면 지수법칙 ⑦이 성립이 안 되므로 $a \neq 0$ 이어야 성립할 수 있다.

또한 $m < n$ 일 때 $\dfrac{1}{a^{n-m}}$ 으로 나타낼 수 있다.

예를 들면 $3^2 \div 3^3 = 3^2 \times \dfrac{1}{3^3} = 3^2 \times 3^{-3} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3^{3-2}}$ 과 같다.

2. 다항식의 곱셈

다항식의 곱셈은 수의 경우와 같이 생각하여 분배법칙을 사용하여 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리 한다.

$$(a+b)(c+d) = \underset{①}{\underline{ac}} + \underset{②}{\underline{ad}} + \underset{③}{\underline{bc}} + \underset{④}{\underline{bd}}$$

$$(1)\ (a+1)(b+2) = \underset{①}{\underline{a \times b}} + \underset{②}{\underline{a \times (-2)}} + \underset{③}{\underline{1 \times b}} + \underset{④}{\underline{1 \times (-2)}}$$
$$= ab - 2a + b - 2$$

$$(2)\ (x+3)(x+5) = \underset{①}{\underline{x \times x}} + \underset{②}{\underline{x \times 5}} + \underset{③}{\underline{3 \times x}} + \underset{④}{\underline{3 \times 5}}$$
$$= x^2 + \underbrace{5x + 3x}_{\text{동류항}} + 15 = x^2 + 8x + 15$$

3. 다항식의 곱셈에 대한 성질

다항식에 대한 곱셈은 다음과 같은 교환, 결합, 분배법칙이 성립한다.

세 다항식 A, B, C 에 대하여

교환법칙 : $AB = BA$

결합법칙 : $(AB)C = A(BC)$ ⇦ $(AB)C = A(BC)$ 이므로 ABC 로 나타낸다.

분배법칙 : $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$

(길잡이 예제3) 다항식의 곱셈과 나눗셈

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(ab^2c)^4 \times (a^3bc)^2 \div (a^2b^3c)^3$ (2) $\frac{1}{3}x^2y^3 \div \left(\frac{1}{6}xy^2\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2y^3\right)^3$

[풀이] (1) (주어진 식) $= (ab^2c)^4 \times (a^3bc)^2 \div (a^2b^3c)^3$

$$= a^4b^8c^4 \times a^6b^2c^2 \div a^6b^9c^3$$
$$= a^4b^8c^4 \times a^6b^2c^2 \times \frac{1}{a^6b^9c^3}$$
$$= a^4b^8c^4 \times a^6b^2c^2 \times a^{-6}b^{-9}c^{-3}$$
$$= a^4b^8c^4 \times a^{6-6}b^{2-9}c^{2-3}$$
$$= a^4b^8c^4 \times a^0b^{-7}c^{-1}$$
$$= a^4b^{8-7}c^{4-1}$$
$$= a^4bc^3$$

(2) (주어진 식) $= \frac{2}{3}x^2y^3 \div \left(\frac{1}{36}x^2y^4\right) \times \left(-\frac{1}{8}x^6y^9\right)$

$$= \frac{2}{3}x^2y^3 \times \left(\frac{36}{x^2y^4}\right) \times \left(-\frac{1}{8}x^6y^9\right)$$
$$= \frac{2}{3}x^2y^3 \times (36x^{-2}y^{-4}) \times \left(-\frac{1}{8}x^6y^9\right)$$
$$= \left\{\frac{2}{3} \times 36 \times \left(-\frac{1}{8}\right)\right\} \times x^2y^3 \times (x^{-2}y^{-4}) \times x^6y^9$$
$$= \left\{\frac{2}{3} \times 36 \times \left(-\frac{1}{8}\right)\right\} \times x^{2-2+6}y^{3-4+9}$$
$$= -3x^{2-2+6}y^{3-4+9}$$
$$= -3x^6y^8$$

개념길잡이 m, n 은 자연수일 때 $a^m \div a^n = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^{m-n}$ 의 꼴에서와 같이 나눗셈이 있는 경우 곱으로 바꾼 뒤에 정리를 하는 것이 좋습니다. 예제 (1)은 다음과 같이 $a^4b^8c^4 \times a^6b^2c^2 \times \frac{1}{a^6b^9c^3} = a^4b^8c^4 \times \frac{1}{b^7c} = a^4bc^3$ 으로 정리해줘도 같은 결과임을 확인할 수 있습니다.

(개념Check)3. 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $9x^3 \times (-2yz)^2 \div (x^2y^2)$ (2) $\left(\frac{3}{2}ab^2\right)^3 \div (ab^3)^2 \times \left(-\frac{2}{3}b^2\right)^3$

(길잡이 예제4) 다항식의 곱셈

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x^2-3)(2x^2-5x+4)$ (2) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$ (3) $(x+2y-3)(x-2y+1)$

[풀이] (1) (주어진 식) $=2x^4-5x^3+4x^2-6x^2+15x-12$

$=2x^4-5x^3-(6-4)x^2+15x-12$

$=2x^4-5x^3-2x^2+15x-12$

(2) (주어진 식)$=8x^3+4x^2y+2xy^2-4x^2y-2xy^2-y^3$

$=8x^3+(4-4)x^2y+(2-2)xy^2-y^3$

$=8x^3-y^3$

(3) (주어진 식)$=x^2-2xy+x+2xy-4y^2+2y-3x+6y-3$

$=x^2+(2-2)xy-4y^2-(3-1)x+(6+2)y-3$

$=x^2-4y^2-2x+8y-3$

개념길잡이 다항식을 A, B이라 하면 두 다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리를 합니다. 이때 문자의 거듭제곱은 지수법칙을 이용하여 나타내면 됩니다. 특히 두 다항식의 곱의 관계는 다항식이 성립하므로 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 모두 성립함을 알 수 있습니다.
다항식의 곱셈에서는 위와 같이 결합법칙이 성립되므로 세 다항식 A, B, C에서 $(AB)C$와 $A(BC)$는 괄호를 생략해서 ABC으로 나타냅니다.

(개념 Check)4. 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x^2-xy+2y)(x-3y)$

(2) $(2x+3y-1)(x-3y+2)$

(길잡이 예제5) 다항식의 전개식에서 계수 구하기

다음 물음에 답하시오.

(1) $(2x-y+3)(x+3y-5)$의 전개식에서 xy의 계수를 구하시오.

(2) $(x^2+x+1)(x^2+2x-k)$의 전개식에서 x^2의 계수가 5일 때, x의 계수를 구하시오. (단, k는 상수이다.)

(3) 다항식 $(x-2)(x^2+ax+b)$의 전개식에서 일차항의 계수와 상수항이 같고 이차항의 계수가 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

[풀이] (1) 주어진 식에서 xy항이 나올 수 있는 부분만 선택하여 전개하면

$6x\times y-y\times x=6xy-xy$ $\quad\therefore$ (xy의 계수)$=5$

(2) 주어진 식에서 x^2과 x항이 나올 수 있는 부분만 선택하여 전개하면

$(3-k)x^2+(2-k)x$, x^2의 계수가 5이므로 $3-k=5$, $k=-2$,

$\therefore$ x의 계수는 $2-k=2+2=4$

(3) $(x-2)(x^2+ax+b)$

$=x^3+ax^2+bx-2x^2-2ax-2b$

$=x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b$

에서 일차항의 계수와 상수항이 같으므로

$b-2a=-2b$, $3b=2a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차항의 계수가 4이므로

$a-2=4$, $a=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=4$ $\quad\therefore$ $a+b=6+4=10$

개념길잡이 다항식의 전개식에서 계수를 구할 때 주어진 식의 모든 항을 전개하지 말고 문제에서 구하고자 하는 부분의 다항식의 특정항을 파악하여 필요한 부분만 전개하여 구한다. 예를 들면 이차항이 되는 경우는 (이차항)×(상수항), (일차항)×(일차항), (상수항)×(이차항)의 경우만 전개해 보면 됩니다. 주의할 것은 예제(3)와 같은 꼴에서 미지수 문자가 나오면 문제의 조건에서 미지수가 상수임을 확인해 줘야 됩니다.

(개념Check)5 다음 물음에 답하시오.

(1) $(1+2x+3x^2+4x^3)(4+3x+2x^2+x^3)$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하시오

(2) 다항식 $(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})^2$의 전개식에서 x^5의 계수를 구하시오.

03. 곱셈공식

곱셈 공식

다항식의 곱셈은 분배법칙과 지수법칙을 이용하여 식을 전개한 후 동류항끼리 모아서 정리하지만 다음과 같은 곱셈 공식을 이용하면 편리하다.

[1] $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

[2] $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

[3] $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$, $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

[4] $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

[5] $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

[6] $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

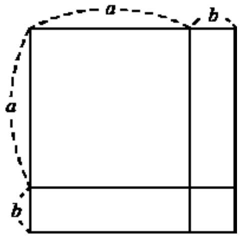
[7] $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

[8] $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

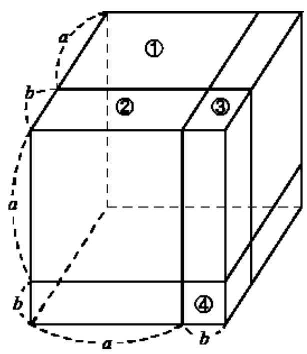
[9] $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

[10] $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

곱셈 공식을 이용하는데 있어서 곱셈 공식이 유도된 도형과 관련하여 출제가 된다.
그래서 넓이와 부피에 적용된 예를 소개해 보고자 한다.
곱셈 공식 (1)과 (7)에 대한 적용된 문제를 보면 다음과 같다.
다음 그림과 같이 넓이가 다른 세 종류의 직사각형 종이 네 장을 이용하여
(가로)×(세로)= $(a+b)(a+b)$이므로 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$임을 보일 수 있다.



이와 같은 방법으로 부피가 다른 몇 종류의 직육면체 나무토막을 이용하여
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$임을 보이고자 한다.
곱셈공식 (7)$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$을 보이려면 아래 그림과 같이 가로, 세로, 높이가 각각$a+b$인 정육면체를 이용하면 된다.



그러면 최소로 필요한 나무토막의 종류의 수와 전체의 개수를 구해보면 다음과 같다.
①과 같이 세 모서리의 길이가 a, a, a인 모양이 1개
②와 같이 세 모서리의 길이가 a, b, a인 모양이 3개
③과 같이 세 모서리의 길이가 a, b, b인 모양이 3개
④과 같이 세 모서리의 길이가 b, b, b인 모양이 1개
따라서 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$으로 나타낼 수 있음을 확인할 수 있다.
즉, 나무토막의 종류의 수는 4가지이고 나무토막의 전체의 개수는 8개가 됨을 알 수 있다.

곱셈공식 (2)을 이용하여 $999 \times 1001 \times 1000001$을 계산해보면

$$\begin{aligned} 999 \times 1001 \times 1000001 &= (10^3 - 1)(10^3 + 1)(10^6 + 1) \\ &= (10^6 - 1)(10^6 + 1) = 10^{12} - 1 \end{aligned}$$

곱셈공식 (6)을 이용하여 $(a-b+c)^2$을 전개해보면

$$\begin{aligned} (a-b+c)^2 = \{(a-b)+c\}^2 &= (a-b)^2 + 2(a-b)c + c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca \end{aligned}$$

(7)을 이용하여 $(x-2y)^3$을 전개해보면

$$\begin{aligned} (x-2y)^3 &= x^3 - 3 \times x^2 \times 2y + 3 \times x \times (2y)^2 - (2y)^3 \\ &= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 \end{aligned}$$

(8)을 이용하여 $(x+3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$전개해보면

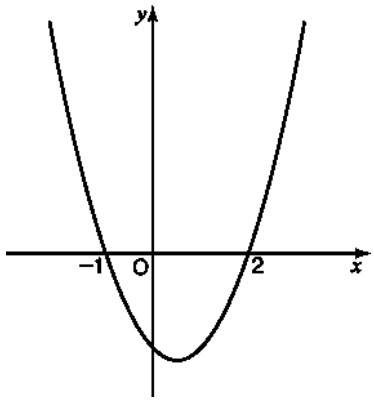
$$(x+3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) = x^3 + 3^3y^3 = x^3 + 27y^3$$

3. 이차방정식과 이차함수

01. 이차함수와 이차방정식의 관계

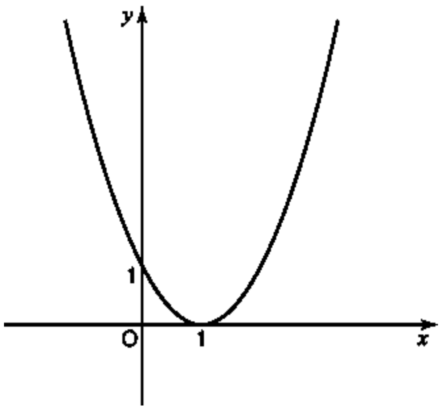
1. 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 좌표평면에서 x축이 만나는 교점의 x좌표는 $y=0$일 때의 x값과 같다. 예를 들면 이차방정식 $x^2-x-2=0$의 두 실근 $x=2$와 $x=-1$는 이차함수 $y=x^2-x-2$의 그래프의 직선 $y=0$일 때의 x축과의 교점의 x좌표와 같다.

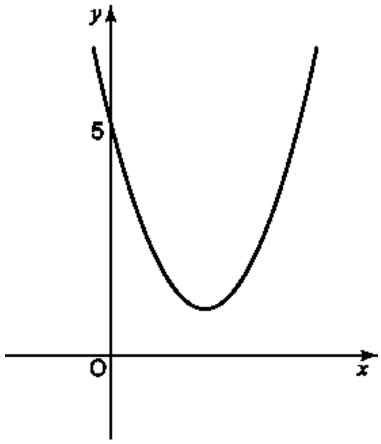


즉 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$이 실근 α, β를 가지면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 x축과 만나고 그 때의 교점의 x좌표는 α, β이다.

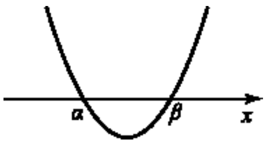
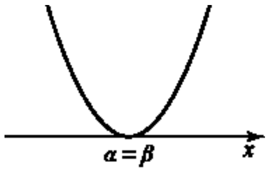
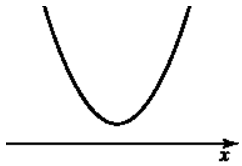
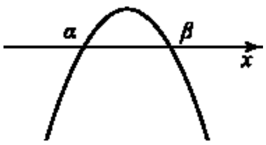
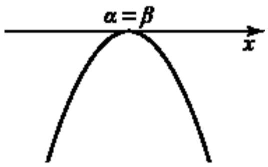
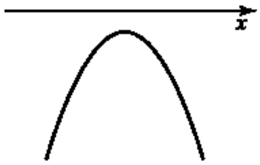
이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$이 중근 α를 가지면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 x축과 한 점 $(\alpha, 0)$에서 만난다. 예를 들면 $y=x^2-2x+1$은 이차방정식 $x^2-2x+1=0$의 중근 $x=1$은 $y=x^2-2x+1$의 그래프의 직선 $y=0$일 때의 x축과의 교점의 x좌표와 같다.



이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$이 실근을 갖지 않으면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. 즉 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의의 그래프와 x축이 만나지 않으면 $ax^2+bx+c=0$은 실근을 갖지 않는다. 예를 들면 $y=x^2-4x+5$의 두 허근 $x=2+i$와 $x=2-i$는 이차함수 $y=x^2-4x+5$의 그래프의 직선 $y=0$일 때의 x축과 만나지 않는다.



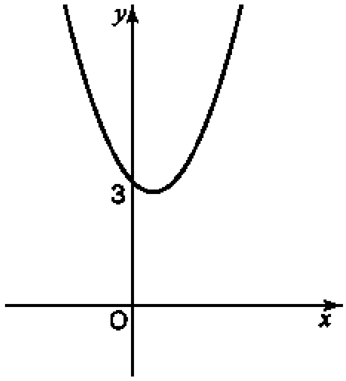
2. 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

판별식의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다(접한다).	만나지 않는다.
이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프			
이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$의 그래프			
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$의 해	$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ (서로 다른 두 실근)	$x=\alpha$ (중근)	서로 다른 두 허근

$a>0$ 이차함수 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4}$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 $-\frac{b}{2a}$이고 y좌표는 $-\frac{D}{4a}$이다.

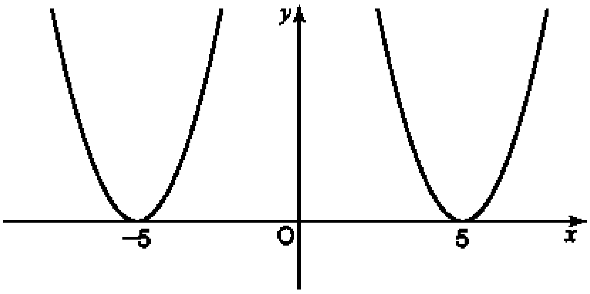
예를 들어 $y=x^2-x+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$이므로 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{1}{2}$이고 y좌표는 $\frac{11}{4}$이다. 즉 $-\frac{b}{2a}=-\frac{(-1)}{2\times 1}=\frac{1}{2}$, $-\frac{D}{4a}=-\left(\frac{(-1)^2-4\times 1\times 3}{4\times 1}\right)=\frac{11}{4}$

판별식 $D=(-1)^2-4\times 1\times 3=-11<0$이므로 x축과 만나지 않는다.



이차함수 $y=x^2+2kx+25$의 그래프가 x축의 오직 한 점에서 만나도록 실수 k의 값을 정하는 문제의 경우 이차방정식 $x^2+2kx+25=0$이 중근을 가져야 한다. 즉 판별식 $D=0$을 이용하는데 x의 계수가 짝수 $2k$꼴이므로 $\frac{D}{4}=k^2-25=(k+5)(k-5)=0$, $k=-5$또는 $k=5$이다.

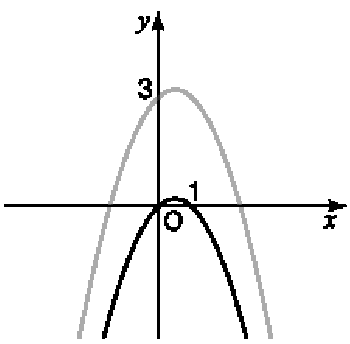
$k=5$일 때 $y=x^2+10x+25=(x+5)^2$, $k=-5$일 때 $y=x^2-10x+25=(x-5)^2$이다.



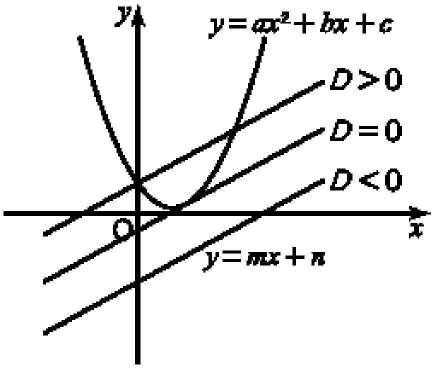
이차함수 $y=-x^2+x+3$ 그래프의 x축과의 교점은 이차방정식 $-x^2+x+3=0$의 판별식 $D_1=1^2-4\times(-1)\times(3)=13>0$이므로 서로 다른 두 점에서 만난다. 또한 $y=-x^2+x$그래프와 비교하면 $y=-x^2+x$그래프의 이차방정식 $-x^2+x=0$의 판별식 $D_2=1-4\times(-1)\times0=1>0$이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

3. 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계

이차함수의 그래프 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는

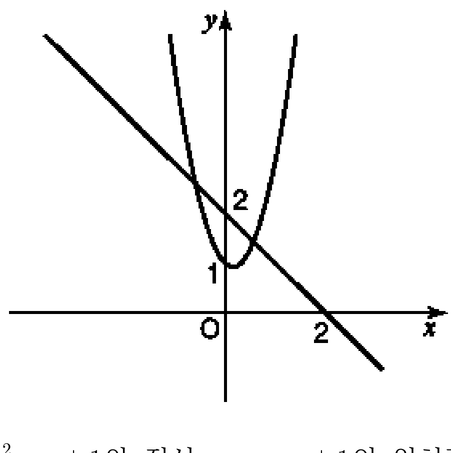


직선 $y=mx+n$을 이차함수의 $y=ax^2+bx+c$ 그래프에 대입하면 $mx+n=ax^2+bx+c$, $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 실근과 같다. 즉 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 $ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$의 실근의 개수와 같다.
그러므로 판별식 $D=(b-m)^2-4a(c-n)$의 값의 부호에 따라 이차함수와 직선의 위치관계를 알 수 있다. $y=ax^2+bx+c(a>0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n(m>0)$의 위치관계는 다음과 같다.

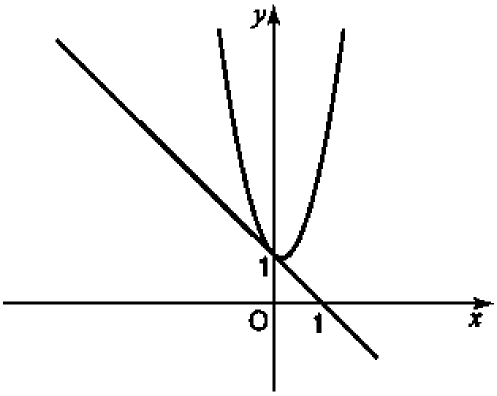


(ⅰ) $D>0$인 경우 방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 서로 다른 두 점에서 만난다.
(ⅱ) $D=0$인 경우 방정식은 중근(실근)을 가지므로 한 점에서 만난다(접한다).
(ⅲ) $D<0$인 경우 방정식은 실근을 가지지 않으므로 만나지 않는다.

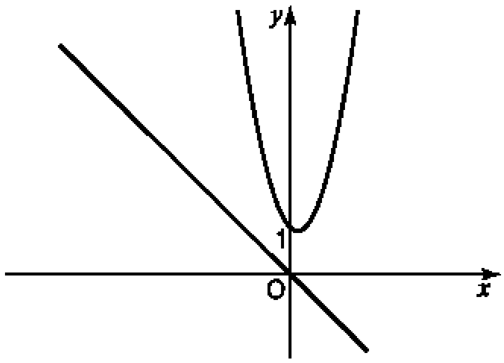
두 함수 $y=f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$와 $y=g(x)=mx+n$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.
예를 들면 이차함수 $y=3x^2-x+1$와 직선 $y=-x+2$의 위치관계는 판별식 D를 이용하면 $3x^2-x+1=-x+2$, $3x^2-1=0$에서 $D=-(-4\times 3\times 1)=12>0$이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.



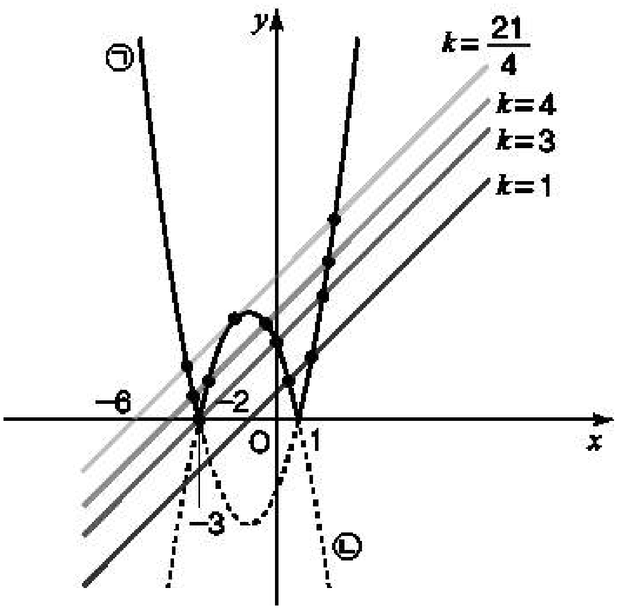
예를 들면 이차함수 $y=3x^2-x+1$와 직선 $y=-x+1$의 위치관계는 판별식 D를 이용하면 $3x^2-x+1=-x+1$, $3x^2=0$에서 $D=0$이므로 한 점에서 만난다(접한다).



예를 들면 이차함수 $y=3x^2-x+1$와 직선 $y=-x$의 위치관계는 판별식 D를 이용하면 $3x^2-x+1=-x$, $3x^2+1=0$에서 $D=-4\times3\times1=-12<0$이므로 만나지 않는다.



k가 결정하는 위치관계



그래프는 두 이차함수

$y=x^2+2x-3$ ……㉠

$y=-x^2-2x+3$ ……㉡

직선 $y=x+k$(단, k는 실수)라 하면 $k=1$, $k=3$, $k=4$, $k=\frac{21}{4}$일 때

㉠, ㉡과의 교점을 나타낸 것이다. 두 이차함수와 $y=x+k$의 위치관계를 k의 값 또는 범위에 의해서 개수를 구할 수 있다.

㉠의 범위를 $x<-3$또는 $x>1$이고 ㉡의 범위가 $-3 \le x < 1$이면

$k=\frac{21}{4}$일 때 $y=x+\frac{21}{4}$과의 만나는 개수는 서로 다른 세 점에서 만나는 것을 알 수 있다.

$k=4$일 때 $y=x+4$과의 만나는 개수는 서로 다른 네 점에서 만나는 것을 알 수 있다.

$k=3$일 때 $y=x+3$과의 만나는 개수는 서로 다른 세 점에서 만나는 것을 알 수 있다.

$k=1$일 때 $y=x+1$과의 만나는 개수는 서로 다른 두 점에서 만나는 것을 알 수 있다.

또한 위와 같은 그래프 ㉠의 범위를 $x<-3$또는 $x>1$이고,

㉡의 범위가 $-3 \le x < 1$에서 k의 범위에 따른 그래프 ㉠, ㉡의 범위에서 만나는 개수는 다음과 같다.

k의 범위가 $k>\frac{21}{4}$이면 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

k의 범위가 $4<k<\frac{21}{4}$이면 직선은 서로 다른 네 점에서 만난다.

k의 범위가 $0<k<3$이면 직선은 두 점에서 만난다.

판별식 D를 이용하면 $x^2+2x-3=x+k$, $x^2+x-3-k=0$, $D_1=1^2-4\times1\times\{-(3+k)\}$이므로 $D_1=13+k$이다.

$D_1=13+k>0$이면 $k>-13$,

$D_1=13+k<0$이면 $k<-13$,

$D_1=13+k=0$, $k=-13$

$-x^2-2x+3=x+k$, $x^2+3x+k-3=0$, $D_2=3^2-4\times1\times(k-3)$이므로

$D_2=21-4k$

$D_2=21-4k>0$이면 $k<\frac{21}{4}$,

$D_2=21-4k<0$이면 $k>\frac{21}{4}$,

$D_2=21-4k=0$이면 $k=\frac{21}{4}$

따라서 위에서 쓰인 판별식은 D_2임을 확인할 수 있다.

기본개념 확인 : 교과 필수예제 Level

43. 다음 이차함수의 그래프와 x축과의 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=x^2-2x-3$

(2) $y=x^2-2x+1$

(3) $y=x^2+x+1$

(4) $y=-2x^2+2x-1$

(5) $y=-x^2-3x+1$

44. 이차함수 $y=2x^2-x+k$의 그래프와 x축의 위치관계가 다음과 같도록 실수 k의 값 또는 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

45. 이차함수 $y=x^2-2ax+b$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서 만날 때, 실수 a, b의 값을 구하시오.

46. 다음 이차함수의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 교점의 개수를 구하시오.

(1) $y=-x^2+6x-4$

(2) $y=x^2+3x+1$

47. 이차함수 $y=x^2+5x-k$의 그래프가 직선 $y=2x-3$에 접하도록 실수 k의 값을 구하시오.

(길잡이 예제62) 이차함수의 그래프와 x축의 위치관계

> 이차함수 $y=x^2-2ax-a+20$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나고, 이차함수 $y=-x^2+x-a+3$의 그래프는 x축과 만나지 않도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

[풀이] 이차함수 $y=x^2-2ax-a+20$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로

이차방정식 $x^2-2ax-a+20=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-1\times(-a+20)=a^2+a-20=0$

$a^2+a-20=0$, $(a+5)(a-4)=0$ $\quad\therefore\ a=-5$ 또는 $a=4$ ……㉠

이차함수 $y=-x^2+x-a+3$의 그래프는 x축과 만나지 않으므로

이차방정식 $-x^2+x-a+3=0$의 판별식을 D_2이라 하면

$D_2=(1)^2-4\times(-1)\times(-a+3)=1+4(-a+3)<0$

$-4a+13<0$ $\quad\therefore\ a>\frac{13}{4}$ ……㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의해 $a=4$

개념길잡이 a, b, c가 실수인 계수 이차함수의 그래프 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$가 x축과 만난다는 것은 $y=0$이므로 $ax^2+bx+c=0$꼴인 이차방정식이 됩니다. 그래서 이차방정식에서 판별식을 이용하여 x축과의 교점의 개수 또는 범위를 구할 수 있는 것입니다. 또한 이차함수가 x축에서 서로 다른 두 점을 지나는 경우 예를 들면 두 점 사이의 거리가 r이라면 이차방정식의 한 근을 α라 놓고 $\alpha+(\alpha+r)=-\frac{b}{a}$, $\alpha(\alpha+r)=\frac{c}{a}$꼴로 식을 만들 수 있습니다.

(개념Check)69. 이차함수 $y=x^2+4ax-b^2+25$의 그래프가 x축과 만나지 않을 때, 두 자연수 a, b에 대하여 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

(개념Check)70. 이차함수 $y=x^2+2kx+5$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나고 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{11}$이다. 이 때, k의 값을 모두 구하시오.

(길잡이 예제63) 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계

> 이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 만나고 직선 $y=g(x)$와 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\gamma,\ 6)$에서 만난다. $2\beta=\alpha+\gamma$이고 $g(0)=-3$일 때, $f(\alpha-1)$의 값을 구하시오. (단, $0<\alpha<\beta<\gamma$)

[풀이] 이차항의 계수가 1이고 x축과 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 만나므로

이차함수 $f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x-\alpha)(x-\beta)$ ……㉠

이차함수 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 α, γ이므로

α, γ은 $g(x)=f(x)$의 두 근이다.

$g(x)-f(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$으로 나타낼 수 있다.

㉠을 위 식에 대입하면 $(x-\alpha)(x-\beta)-g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$

$g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)(x-\gamma)=(x-\alpha)\{(x-\beta)-(x-\gamma)\}$

$\therefore\ g(x)=(x-\alpha)(\gamma-\beta)$

$2\beta=\alpha+\gamma$에서 $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$을 $\gamma-\beta=\gamma-\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\dfrac{\gamma-\alpha}{2}$

$\therefore\ \gamma-\beta=\dfrac{\gamma-\alpha}{2}$ ……㉡

$g(\gamma)=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=6$이므로 ㉡을 대입하면

$g(\gamma)=(\gamma-\alpha)\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)^2=6$, $\gamma-\alpha=\pm2\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ \gamma-\alpha=2\sqrt{3}\ (\gamma>\alpha)$

㉡에서 $\gamma-\beta=\dfrac{\gamma-\alpha}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ \gamma-\beta=\sqrt{3}$

$f(\alpha-1)=(\alpha-1-\alpha)(\alpha-1-\beta)=(-1)(\alpha-\beta-1)=-\alpha+\beta+1$이므로

$\gamma-\alpha=2\sqrt{3}$에서 $\gamma-\beta=\sqrt{3}$을 빼면 $-\alpha+\beta=\sqrt{3}$

따라서 $f(\alpha-1)=-\alpha+\beta+1=\sqrt{3}+1$

개념길잡이 함수 $y=g(x)$와 $y=f(x)$의 x에 대한 교점이 존재하면 함수 $g(x)$와 $f(x)$는 $g(x)=f(x)$이므로 $g(x)-f(x)=0$꼴인 교점의 함수 꼴로 나타낼 수 있습니다. 이러한 방식은 교점이 존재하는 함수로서 식을 만들 때 이용하면 됩니다.

(개념 Check)71. 이차항의 계수가 1인 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하자. $\alpha+\beta=-8$이고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=2x-13$ 위에 있을 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

개념연습 : 3등급 이상 Level

81. 다음 연립방정식의 값을 구하시오.

(1) 두 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - ay^2 = 0 \\ x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{3}{a}x + y = b \\ x^2 - 3xy - 4y^2 = 10 \end{cases}$ 의 공통인 해가 존재할 때, 두 자연수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

(2) 두 연립방정식 $\begin{cases} ax^2 - 4y^2 = 15 \\ x^2 - 8xy + 12y^2 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x^2 - axy + by^2 = 32 \end{cases}$ 의 공통인 해가 존재할 때, 양의 실수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

82. 양의 실수 x, y가 연립방정식 $\begin{cases} xy = 5 \\ 9x^2 - 4y^2 = 1 \end{cases}$ 을 만족시킬 때, $2x - y$의 최댓값을 구하시오.

83. 연립방정식 $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x^2 - 3xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$라 할 때, $\alpha + \beta$의 최댓값을 구하시오.

84. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하시오.

85. 연립방정식 $\begin{cases} x + y + xy = -5 \\ x^2 + y^2 - (x+y) = 12 \end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x^2 + y^2$의 최댓값을 구하시오.

86. 두 자리 자연수에서 각 자리 수의 제곱의 합은 13이고, 일의 자리 숫자와 십의 자리 숫자의 곱은 6이다. 이때 처음 수를 구하시오. (단, 처음 수의 십의 자리 숫자가 일의 자리 숫자보다 크다.)

87. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 18 \end{cases}$을 만족하는 정수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오.

88. 연립방정식 $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 15 \end{cases}$ 을 만족시키는 두 정수 x, y를 좌표평면 위의 점(x, y)로 나타낼 때, 이 점들을 꼭짓점으로 하는 사각형들의 넓이의 합을 구하시오.

89. 두 실수 x, y에 대하여 $x * y$를 $x * y = \begin{cases} x & (x \geq y) \\ y & (x < y) \end{cases}$이라 하면

연립이차방정식 $\begin{cases} xy + y - 1 = x * y \\ 3xy + 7y = x * y \end{cases}$ 을 만족시키는 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$이라 할 때. $\alpha + \beta$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합을 구하시오.

실력문제 : 고정 1등급 Level

37. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-(y-1)^2=0 \\ x^2-4x+y=a \end{cases}$ 를 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 순서쌍 (x, y)가 3개 존재할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

38. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ 2x^2-kx-y^2-2y+1=0 \end{cases}$ 가 실근을 갖지 않도록 하는 정수 k의 최솟값을 구하시오.

39. 연립방정식 $\begin{cases} x^3-y^3=0 \\ 2x^2+ax-y^2-2y+b^2=0 \end{cases}$ 를 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 순서쌍 (x, y)가 1개 존재하게 하는 10이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

40. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-9y^2=12 \\ (x+3y)^2-4(x+3y)=12 \end{cases}$ 를 만족시키는 두 양수 x, y에 대하여 $15xy$의 값을 구하시오.

41. 연립방정식 $\begin{cases} x+y-xy=9 \\ x^2y+xy^2-x-y=11 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하시오.

[해설 일부분]

88. $\begin{cases} x^2-y^2+x+y=0 \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=1 \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-y^2+x+y=(x-y)(x+y)+x+y=(x+y)(x-y+1)=0$

$(x+y)(x-y+1)=0 \quad \therefore \ y=-x$ 또는 $y=x+1$

(i) $y=-x$일 때, ㉡에 대입하면 $x^2-xy+2y^2=x^2+x^2+2x^2=1$

$4x^2=1 \quad \therefore \ x=\pm\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

$\therefore \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

(ii) $y=x+1$일 때, ㉡에 대입하면

$x^2-xy+2y^2=x^2-x(x+1)+2(x+1)^2=x^2-x^2-x+2(x^2+2x+1)$

$2x^2+3x+2=1$, $2x^2+3x+1=0$, $(x+1)(2x+1)=0 \ \therefore \ x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

(i)과 (ii)에서 x, y는 정수이므로 $x=-1$, $y=0$

따라서 $x+y=-1+0=-1$

89. 연립방정식 $\begin{cases} x+y-xy=1 \\ x^2+y^2-2xy(x+y)=1 \end{cases}$ 에서 $x+y=u$, $xy=v$으로 놓으면

$x+y-xy=u-v=1$,

$x^2+y^2-2xy(x+y)=(x+y)^2-2xy-2xy(x+y)=u^2-2v-2vu=1$

$\begin{cases} u-v=1 & \cdots ㉠ \\ u^2-2v-2uv=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=u-1$을 ㉡에 대입하면

$u^2-2(u-1)-2uv=u^2-2(u-1)-2u(u-1)=u^2-2u+2-2u^2+2u=-u^2+2=1$

$u^2=1$, $u^2-1=0$이므로 $(u+1)(u-1)=0 \quad \therefore u=-1$ 또는 $u=1$

(i) $u=-1$이면 $v=u-1=-1-1=-2$이므로 $u=-1$, $v=-2$일 때,

$x+y=-1$와 $xy=-2$에서 x, y는 이차방정식 $t^2+t-2=0$의 두 근이다.

$t^2+t-2=(t+2)(t-1)=0 \quad \therefore \ t=-2$ 또는 $t=1$

따라서 $x=-2$ 또는 $y=1$ 또는 $x=1$또는 $y=-2$

(ii) $u=1$이면 $v=u+1=1+1=2$이므로 $u=1$, $v=2$일 때,

$x+y=1$와 $xy=2$에서 x, y는 이차방정식 $t^2-t+2=0$의 두 근이다.

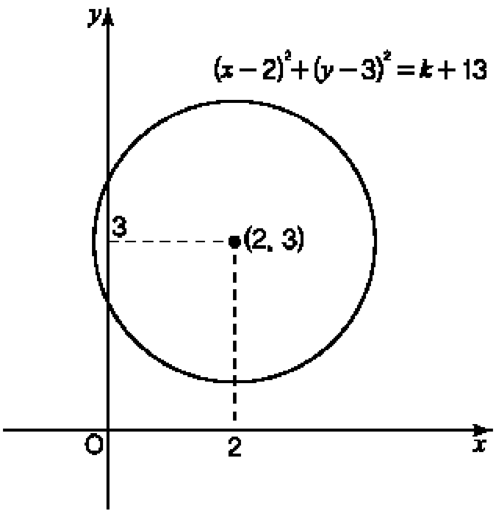
$t^2-t+2=(t-2)(t+1)=0 \quad \therefore \ t=2$ 또는 $t=-1$

따라서 $x=2$ 또는 $y=-1$ 또는 $x=-1$또는 $y=2$

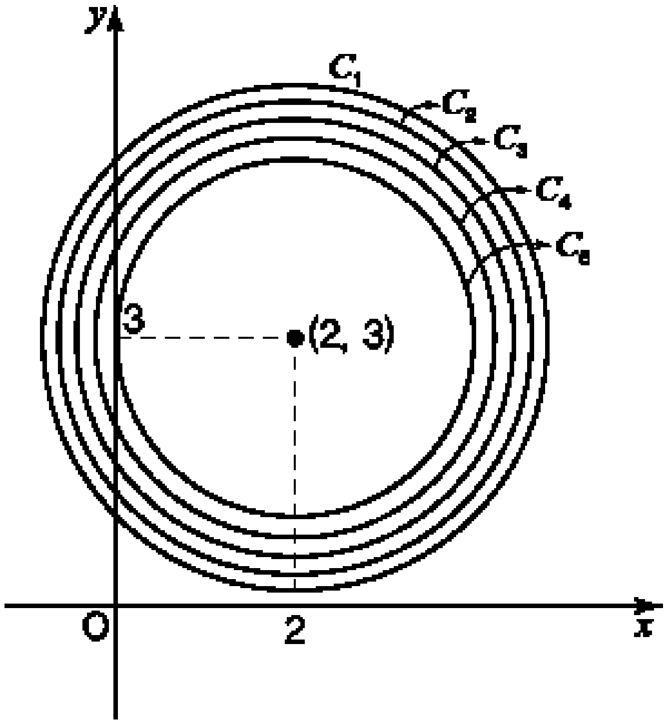
(i)과 (ii)에 의해 $|x-y|$에 $x=-2$, $y=2$를 대입하면

따라서 $3|x-y|=3|-2-2|=3|-4|=3\times4=12$

141. $x^2+y^2-4x-6y-k=0$에서 $(x-2)^2+(y-3)^2=k+13$
즉, 중심의 좌표가 $(2,\ 3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{k+13}$인 원이다.
다음 그림과 같다면 y축과는 만나고, x축과는 만나지 않으므로



$2 \le \sqrt{k+13} < 3$에서 $4 \le k+13 < 9$, $4-3 \le k < 9-13$
$\therefore\ -9 \le k < -4$
따라서 정수 k의 개수는 -9, -8, -7, -6, -5의 5개
$k=-5$일 때, $C_1 : (x-2)^2+(y-3)^2=-5+13=8$
$k=-6$일 때, $C_2 : (x-2)^2+(y-3)^2=-6+13=7$
$k=-7$일 때, $C_3 : (x-2)^2+(y-3)^2=-7+13=6$
$k=-8$일 때, $C_4 : (x-2)^2+(y-3)^2=-8+13=5$
$k=-9$일 때 $C_5 : (x-2)^2+(y-3)^2=-9+13=4$



142. 원의 중심은 (1, 1)이고 반지름의 길이는 $\sqrt{(4-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{13}$

즉, 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-1)^2=13$

원의 중심 (1, 1)과 직선 $y=-x+a$ 사이의 거리는 $y=-x+a$을 $x+y-a=0$으로 변형한 뒤에 점 (1, 1)사이의 거리를 구하면

$\dfrac{|1\times1+1\times1-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|1+1-a|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|2-a|}{\sqrt{2}}$ 이므로

직선 $x+y-a=0$과 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=13$이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|2-a|}{\sqrt{2}}<\sqrt{13}$ 이어야 하므로

$|2-a|<\sqrt{26}$, $-\sqrt{26}<2-a<\sqrt{26}$, $-2-\sqrt{26}<-a<\sqrt{26}-2$

$\therefore\ 2-\sqrt{26}<a<2+\sqrt{26}$

143. 주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2+5x+y-6)+k(x^2+y^2-x-y)=0$ (단, $k\neq-1$) ……㉠

이 원이 점 (1, 2)를 지나므로

$(1+4+5+2-6)+k(1+4-1-2)=0$

$\therefore\ k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-4x-2y+3=0$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-1)^2=2$

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$

144. 원의 넓이가 4등분 되려면 두 직선은 모두 원의 중심을 지나고, 서로 수직이어야 한다.

원의 방정식 $x^2+y^2-2x-4y=0$을 변형하면

$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=5$

즉, 두 직선 $y=ax$와 $y=bx+c$은 원의 중심 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=a,\ 2=b+c$임을 알 수있다.

또한 두 직선 $y=2x$와 $y=bx+c$는 서로 수직이므로

$2b=-1,\ b=-\dfrac{1}{2}$이므로 $b=-\dfrac{1}{2}$을 $2=b+c$에 대입하여 정리하면

$2=-\dfrac{1}{2}+c,\ c=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}\quad \therefore\ c=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ a+b-c=2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{4-1-5}{2}=-\dfrac{2}{2}=-1$