19. 다음은 자연수 n에 대하여 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1} \le a_n(1-a_n)$$

이 성립할 때, $a_n < \frac{1}{n}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

> (i) $n=1$일 때, $a_1=\frac{1}{2}<1$이고
>
> $n=2$일 때, $a_2 \le a_1(1-a_1)=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$
>
> 이므로 $n=1, 2$일 때 $a_n < \frac{1}{n}$이 성립한다.
>
> (ii) $n=k$일 때 $a_k<\frac{1}{k}$이라고 가정하면
>
> $$\begin{aligned} a_{k+1} &\le a_k(1-a_k) \\ &= -\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \\ &< \boxed{\quad(가)\quad} \end{aligned}$$
>
> 그런데
>
> $$\boxed{\quad(가)\quad}-\frac{1}{k+1}=\frac{-1}{\boxed{\quad(나)\quad}}<0$$
>
> 따라서
>
> $$a_{k+1} < \frac{1}{k+1}$$
>
> (i), (ii)에서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<\frac{1}{n}$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(3)g(8)$의 값은? [4점]

① 16　② 32　③ 64　④ 128　⑤ 256

20. 모집단의 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 1)$ $(m \ge 0)$을 따르고, 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X_1}$이라 하고 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X_2}$라 하자. 양의 실수 k에 대하여 $f(k)=\mathrm{P}(m \le X \le m+k+1)$,
$g(k)=\mathrm{P}\left(m \le \overline{X_1} \le m+k\right)$,
$h(k)=\mathrm{P}\left(m-\frac{1}{3}k \le \overline{X_2} \le m+\frac{1}{3}k\right)$라 할 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

표준정규분포표

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

<보 기>

ㄱ. $f(1)=g(1)<h(1)$

ㄴ. $g\left(\frac{1}{2}\right)<h\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. 정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수 Y에 대하여 $g(k)-\frac{1}{2}h(k)=\mathrm{P}(k \le Y \le 2k)$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 최고차항의 계수가 π인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{2}{3-\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소일 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(\alpha)=\dfrac{4}{5}$
>
> (나) $g'(1+x)+g'(1-x)=0$

$\dfrac{g'(3)}{g'(0)}$의 값은? (단, $0<f(\alpha)<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

① $\dfrac{98}{25}$ ② $\dfrac{49}{25}$ ③ $\dfrac{25}{49}$ ④ $\dfrac{25}{98}$ ⑤ $\dfrac{98}{125}$

단답형

22. $10\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

23. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1,\ \lim_{n\to\infty}b_n=2$$

일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5a_n-b_n)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n은 모든 자연수 n에 대하여 반지름의 길이가 $\frac{1}{2^n}+4$이고, 중심각의 크기가 $\frac{2^{n+1}}{1+2^{n+2}}$인 부채꼴의 넓이이다. $\left|\frac{a_1}{a_6}\right|$의 값을 구하시오. [3점]

25. 이산확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3, 4이고 이산확률변수 Y가 갖는 값은 2, 5, 10, 17이다. 상수 a에 대하여

$$\mathrm{P}(Y=i^2+1)=a\times\mathrm{P}(X=i)+a$$

이고 $E(X)=5$, $V(X)=5$일 때, $E(Y)$의 값을 구하시오. [3점]

26. $a>1$, $b>1$인 두 상수 a, b에 대하여 함수 $y=a^x-b$의 그래프 위의 점 A$(2, 13)$를 지나고 기울기가 -1인 직선이 함수 $y=\log_a(x+b)$의 그래프와 만나는 점을 B, 두 곡선 $y=a^x-b$와 $y=\log_a(x+b)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 $\frac{143}{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, 점 C는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]