

기·출·의 파·급·효·과
수학1



수학1

기출의 파급효과

수학1

Chapter 1. 지수와 로그_11p

Chapter 2. 지수함수와 로그함수_68p

Chapter 3. 개수 세기_168p

Chapter 4. 삼각함수, 사인법칙, 코사인법칙_206p

Chapter 5. 수열_327p

Chapter 6. 수학적 귀납법과 닮은 수열_428p

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 3년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 수학1 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예시해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 ‘순서대로’ 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 기출에 대한 태도와 도구들을 바로 활용할 수 있도록 준킬러 이상급의 기출들을 본문 속 예시로 들었습니다. 21학년도 수능 경향과 해당 기출까지 반영되어 있습니다.

수학1 기출 중 평가원 21, 30번은 물론 오답률이 높은 문제들을 예시로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 더욱 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예시로 든 들어주는 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예시들을 ‘순서대로’ 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 21번, 29번, 30번을 풀 생각이 없어 과거의 21번, 29번, 30번을 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

최근 교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 19학년도 수능 29번의 경우 14학년도 사관학교 15번과 매우 유사하고 20학년도 6월 평가원 21번, 30번은 18년 10월 교육청 21번, 30번과 매우 유사합니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 현재 수능을 대비하기는 힘듭니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 그리고 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 본문과 함께 있는 예시 문제들은 수학1 교재의 경우 대략 100문제 정도입니다. 예시에 있는 문제 수만으로 부족함을 느끼실 분들을 위해 예시보다는 다소 쉬운 유제들도 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 충분히 넣었습니다. 수학1 교재의 경우 유제는 대략 150문제입니다. 본문 속 예시뿐만 아니라 유제들도 단순 단원별로 분리된 것이 아니라 기출에 대한 태도와 도구를 기준으로 분리되었습니다.

4. 칼럼 속 예시해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예시 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 가독성이 좋아 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다. 유제는 칼럼과 예시들을 잘 학습했다면 무리 없이 풀 수 있는 수준입니다.

하루에 예시를 포함한 Chapter 하나만 완료하고 유제 15문제만 푸세요! 이를 실천하면 수학1 교재를 모두 끝내는 데에 2주가 걸립니다. 이 교재를 최소 2번 이상 볼 수 있습니다.

수학 가형 4등급 초반이 1등급 컷 이상 받는 데 1달에서 2달 사이로 걸립니다.
약 파는 것 아닙니다. 과장된 광고를 극히 싫어하는 편입니다.

저도 18학년도 6월 평가원 때 3등급 받고 여름방학 때 이 책의 내용대로 기출을 학습하고 18학년도 9월 평가원, 18학년도 수능 1등급을 가볍게 받아냈습니다.

제 과외 학생은 19학년도 6월 평가원 때 4등급에 가까운 3등급이었으나 이 방법대로 1달간 기출을 학습하고 19학년도 수능 96점을 받아내었습니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

Chapter 4 앞부분에서 다룰 내용은 삼각함수에 관한 기본적인 내용이다. 아직 삼각함수에 익숙지 않은 학생들은 Chapter 4의 처음부터 끝까지 '제대로' 공부하는 것을 추천한다. 하지만 삼각함수에 그리 큰 어려움을 겪지 않는다면 Chapter 4 앞부분은 내용만 훑고 관련 예제들만 풀고 지나가도 문제없다.

Chapter 4 뒷부분에서부터는 사인법칙, 코사인법칙뿐만 아니라 꼭 표시해야 할 도형적 요소, 도형 성질 등을 소개하기에 도형이 약한 학생들한테 큰 도움이 될 것이다.

◆ 삼각함수 기초

◆ 1. 라디안은 무엇인가? 왜 쓰는가?

이번 교육과정에서는 저번 교육과정과 달리 이과뿐만 아니라 문과도 삼각함수에 대해 배운다. 삼각함수, 호도법(라디안)을 처음 배우는 문과는 '라디안을 대체 왜 쓰는가?'에 대한 질문을 한다. 왜냐면 초등학교 때부터 지금까지 멀쩡히 60도, 30도 등등 도(°)를 단위로 하는 육십분법을 잘 써왔기 때문이다.

처음에 라디안에 익숙해지기 위해 $\pi = 180^\circ$ 를 무작정 외울 것이다. 하지만 우리는 π 를 처음 보는 건 아니다. 초등학교 때 원의 둘레, 원의 넓이를 배우면서 접했을 것이다. 이때 배운 $\pi = 3.141592 \dots$ 이다.

여기서 많이들 의문이 드는 학생들이 있을 것이다. "그러면 $\pi = 180^\circ = 3.141592 \dots$ 인 것입니까? 아니면 삼각함수에서 쓰이는 π 랑 초등학교 때 배운 무리수 π 랑 다른 건가?"

결론부터 말하면 $\pi = 3.141592 \dots$ 이 맞고, $\pi(\text{rad}) = 180^\circ$ 인 것이다.

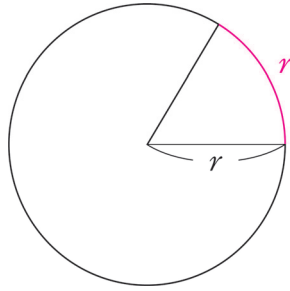
정리하면 $\pi(\text{rad}) = 3.141592 \dots (\text{rad}) = 180^\circ$ 이라는 것이다. rad은 편의상 생략하는 것뿐이다.

이는 곧 $1^\circ = \frac{\pi}{180}(\text{rad})$, $1(\text{rad}) = \frac{180^\circ}{\pi}$ 을 의미한다.

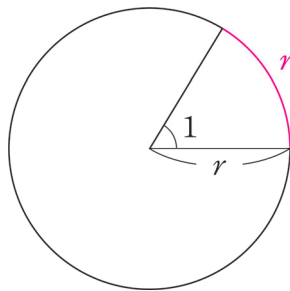
π , $3.141592\dots$, 180° 사이의 관계에 대한 의문은 해결되었는가?
이제 왜 라디안을 쓰는지 알아보도록 하자.

아주 오래 전 이탈리아로 가보자. 피자의 둘레를 재는 상황이다.
둘레를 어떻게 대략적으로 편하게 잴 수 있을까? 이때 정확하게 180등분 되어있는 각도기가 있었겠는가?
당연히 없다. 이 시대 기술로 어떻게 정확하게 만들겠는가.

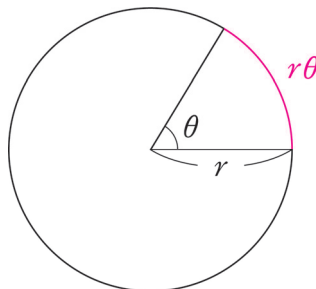
피자의 반지름 길이의 뱃줄로 둘레를 대략적으로 재보는 건 어떨까?



위와 같이 말이다.



이때 중심각을 '1'이라고 해보는 건 어떨까? 호의 길이가 반지름 길이의 '1배'이니까 직관적으로 와닿는다.

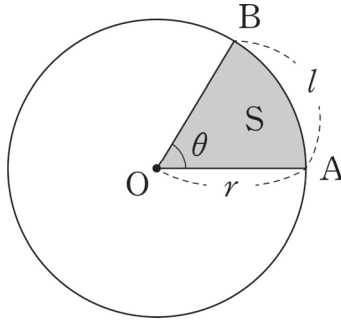


이런 식으로 하면 중심각이 ' θ '이니 위 그림의 호의 길이는 r 의 ' θ 배'로 쉽게 표현할 수 있다.

그렇다. $l = r\theta$ 는 호의 길이를 표현하는 '라디안식 공식'이 아니다. 라디안이 이런 식으로 '정의'된 것이다.
'1 라디안'은 편하게 '호의 길이=반지름 길이'가 될 때의 중심각의 크기라고 보면 된다.
이걸 편하게 단위로 설정한 것이다.

오히려 '라디안'을 단위로 하는 호도법이 '도'를 단위로 하는 육십분법보다 직관적이지 않은가?
원 둘레는 알다시피 $2\pi r$ 이다. 우리는 "원의 둘레는 원의 반지름 r 의 ' 2π 배'구나!"라고 볼 수 있다.
이래서 우리가 편의에 의해 $\pi(\text{rad}) = 180^\circ$ 이렇게 외우고 다니는 것이다.

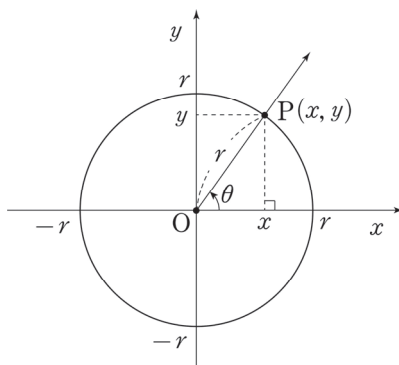
◆ 2. 부채꼴의 호의 길이와 넓이



반지름의 길이가 r , 중심각의 크기가 θ (rad)인 부채꼴에서 호의 길이 l 과, 넓이를 S 라 하면 호의 길이는 $l = r\theta$ 이고, 부채꼴의 넓이는 $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$ 이다.

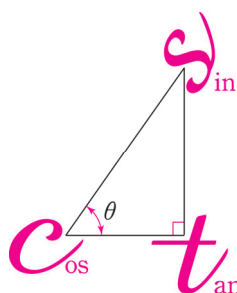
증명은 다음과 같다. 호의 길이를 l 과 부채꼴의 넓이 S 는 중심각의 크기 θ (rad)에 비례하므로 $l : 2\pi r = \theta : 2\pi$ 에서 $l = r\theta$ 이고, $S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$ 에서 $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$ 이다.

❖ 3. 삼각함수 정의, 삼각함수의 부호



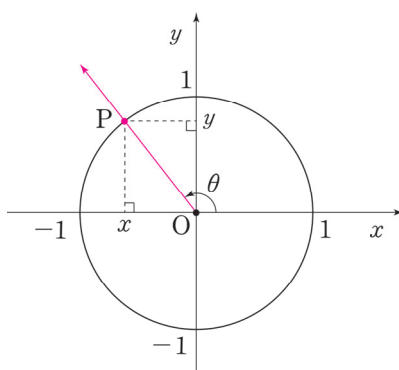
원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 한 점을 $P(x, y)$, x 축의 양의 방향을 시초선으로 하였을 때 동경 OP가 나타내는 각의 크기가 θ 일 때, θ 에 대한 삼각함수는 $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ 이다.

※ \sin 은 동경과 단위원의 교점의 y 좌표, \cos 는 동경과 단위원의 교점의 x 좌표, \tan 는 동경의 기울기로 생각하면 편하다.



θ 가 예각일 때, $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ 를 쉽게 기억하는 방법은 위의 그림과 같다.

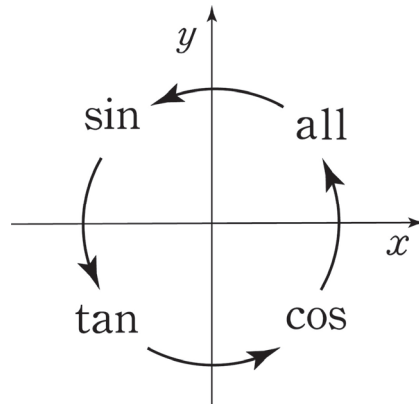
다만, θ 와 직각의 위치에 유의하자.



θ 가 예각이 아니더라도 $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ 는 성립한다.

추가적으로 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 로부터 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 을 얻을 수 있고,

점 $P(x, y)$ 는 점 $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 이고 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위에 있으므로 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 를 얻을 수 있다.



θ 가 어떤 각이라도 $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ 는 성립한다.

이를 바탕으로 각 사분면에서의 삼각함수의 부호는 위의 그림과 같다.

'얼싸안고', '올싸탄코' 등등으로 외우면 된다.

위 그림의 의미는 각 사분면 위에 사인, 코사인, 탄젠트 중 양이 되는 것을 적어둔 것이다.

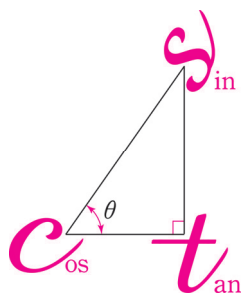
제1 사분면에서는 사인, 코사인, 탄젠트 모두가, 제2 사분면에서는 사인만, 제3 사분면에서는 탄젠트만, 제4 사분면에서는 코사인만 부호가 양이 된다.

◆ 4. 삼각함수 값 실수 없이 구하기

$$\sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{4}, \tan \frac{\pi}{6}$$

삼각함수를 처음 배우고 호도법(라디안)에 약간 익숙해지면 위와 같은 값을 구하는 데에는 전혀 문제가 없을 것이다.

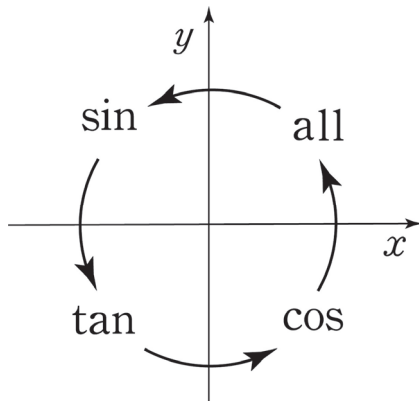
왜? $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서는 아래와 같이 삼각형 그리고 사인, 코사인, 탄젠트 값을 구하면 된다.



그러면 주로 실수는 어디서 나올까?

바로 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 일 때이다. 어떻게 하면 실수를 줄일 수 있을까?

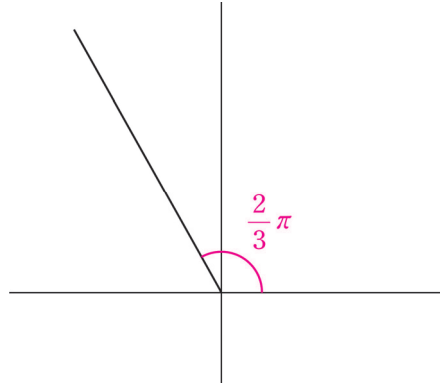
먼저 이전에 알려준 삼각함수의 부호를 나타낸 아래 그림을 머릿속에 넣도록 하자.



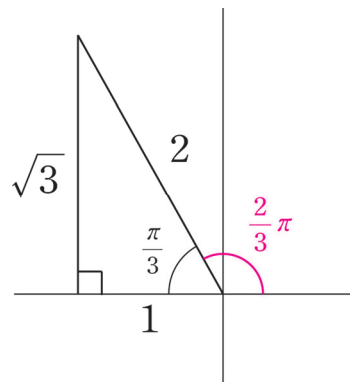
두 번째로 알아두어야 할 것은 x 축에 수선의 발을 내려 삼각형을 만든 후 삼각비를 구하는 것이다.

예를 들어 $\cos \frac{2\pi}{3}$ 의 값을 구한다고 하자.

동경을 좌표평면 위에 표시하면 아래와 같다.



여기에서 x 축에 수선의 발을 내려서 삼각형을 만들면 아래와 같다.

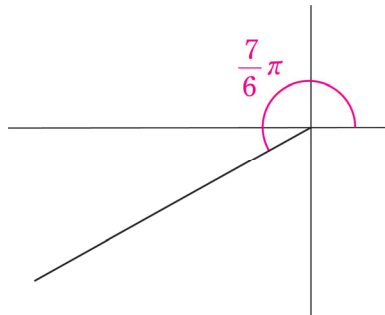


x 축에 수선의 발을 내려 만든 삼각형에서 코사인값을 구하면 $\frac{1}{2}$ 이다. 하지만 $\frac{2\pi}{3}$ 은 제2 사분면 위의 동경
이므로 '사인값'만 양수이다. 코사인값은 음수이므로 아까 구한 $\frac{1}{2}$ 에다가 마이너스(-)만 붙여주자.

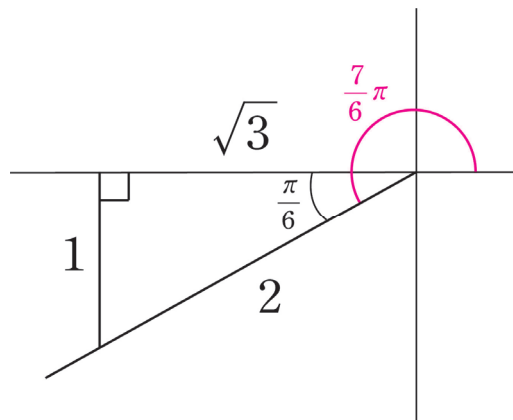
$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ 이다.

체화를 위해 이번엔 $\tan \frac{7\pi}{6}$ 를 같은 방법으로 구해보자.

동경을 좌표평면 위에 표시하면 아래와 같다.



여기에서 x 축에 수선의 발을 내려서 삼각형을 만들면 아래와 같다.



x 축에 수선의 발을 내려 만든 삼각형에서 탄젠트값을 구하면 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\frac{7\pi}{6}$ 은 제3 사분면 위의 동경이므로 '탄젠트값'만 양수이다.

탄젠트값은 양수이므로 아까 구한 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 에다가 플러스(+)만 붙여주자. $\tan \frac{7\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

3줄로 요약하면 아래와 같다.

1. x 축에 수선을 내려 삼각형을 만든다
2. 만든 삼각형에서 필요한 사인, 코사인, 탄젠트 값을 구한다.
3. 올싸탄코로 부호를 정한다.

◆ 5. 삼각함수 호환

\sin , \cos 과 \tan , \cot 호환이 자유자재로 되어야 삼각함수에서 실수를 줄일 수 있다.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=+\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=+\sin\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=+\cot\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=+\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$
$\sin(\pi-\theta)=+\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=+\tan\theta$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=+\cot\theta$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=+\sin\theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$
$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=+\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(2\pi+\theta)=+\sin\theta$ $\cos(2\pi+\theta)=+\cos\theta$ $\tan(2\pi+\theta)=+\tan\theta$

위와 같은 표를 교과서에서 보고 무작정 외우는 안타까운 경우가 많다.

이를 굳이 외우지 않아도 실수 없이 \sin , \cos 과 \tan , \cot 호환하는 방법을 알려주도록 하겠다.

※ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ 이다. \cot 표현은 수학 1에서 등장하지 않으나 표현이 간결하여 본 교재에서는 쓰도록 하겠다.

소개할 $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$ 에서 \sin , \cos 과 \tan , \cot 호환하는 방법은 흔히 ‘예각 가정법’이라고 부르는 방법이다.

먼저, $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$ 에서 n 이 짝수이면 \sin 은 \sin , \cos 은 \cos , \tan 는 \tan 로 두고,

n 이 홀수이면 \sin 은 \cos , \cos 은 \sin , \tan 는 \cot 로 둔다. (n 은 정수)

두 번째로, $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$ 에서 θ 를 항상 예각으로 간주하고 호환을 한다. (θ 가 실제로는 둔각이든, 어떤 각이든)

$\frac{n}{2}\pi \pm \theta$ 를 나타내는 동경이 제 몇 사분면에 존재하는지 파악한 후, ‘호환하기 전 원래 삼각함수’의 부호가 양이면 $+$ 를, 음이면 $-$ 를 ‘호환 후 삼각함수’ 앞에 붙여주자. (n 은 정수)

바른 이해를 돕기 위해 몇몇 예들을 살펴보자.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ 를 호환할 때를 살펴보자. $\frac{n}{2}\pi + \theta$ 에서 n 이 홀수이므로 \cos 을 \sin 으로 바꿔주자.

θ 를 예각으로 가정하면, $\frac{\pi}{2} + \theta$ 를 나타내는 동경은 제2 사분면에 있다.

제2 사분면에서는 ‘호환하기 전 원래 삼각함수 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ 의 \cos ’의 부호가 음이다.

따라서 ‘호환 후 삼각함수 $\sin \theta$ ’ 앞에 $-$ 를 붙여주자. 종합하면 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$ 이다.

$\sin(\pi - \theta)$ 를 호환할 때를 살펴보자. $\frac{n}{2}\pi - \theta$ 에서 n 이 짝수이므로 \sin 을 \sin 으로 두자.

θ 를 예각으로 가정하면, $\pi - \theta$ 를 나타내는 동경은 제2 사분면에 있다.

제2 사분면에서는 ‘호환하기 전 원래 삼각함수 $\sin(\pi - \theta)$ 의 \sin ’의 부호가 양이다.

따라서 ‘호환 후 삼각함수 $\sin \theta$ ’ 앞에 $+$ 를 붙여주자. 종합하면 $\sin(\pi - \theta) = +\sin \theta$ 이다.

$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$ 를 호환할 때를 살펴보자. $\frac{n}{2}\pi + \theta$ 에서 n 이 홀수이므로 \tan 를 \cot 로 바꿔주자.

θ 를 예각으로 가정하면, $\frac{3\pi}{2} + \theta$ 를 나타내는 동경은 제4 사분면에 있다.

제4 사분면에서는 ‘호환하기 전 원래 삼각함수 $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$ 의 \tan ’의 부호가 음이다.

따라서 ‘호환 후 삼각함수 $\cot \theta$ ’ 앞에 $-$ 를 붙여주자. 종합하면 $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$ 이다.

$\cos(2\pi - \theta)$ 를 호환할 때를 살펴보자. $\frac{n}{2}\pi - \theta$ 에서 n 이 짝수이므로 \cos 을 \cos 으로 바꿔주자.

θ 를 예각으로 가정하면, $2\pi - \theta$ 를 나타내는 동경은 제4 사분면에 있다.

제4 사분면에서는 ‘호환하기 전 원래 삼각함수 $\cos(2\pi - \theta)$ 의 \cos ’의 부호가 양이다.

따라서 ‘호환 후 삼각함수 $\cos \theta$ ’ 앞에 $+$ 를 붙여주자. 종합하면 $\cos(2\pi - \theta) = +\cos \theta$ 이다.

θ 에 구체적인 숫자가 있을 때도 살펴보자.

$\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$ 를 계산할 때를 살펴보자.

$\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ 로 바라본다 하자. $\cos\left(\frac{n}{2}\pi - \theta\right)$ 꼴에서 n 이 짝수이므로 \cos 을 \cos 으로 두자.

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 로 두고 θ 를 예각으로 가정하면 (θ 는 실제로도 예각이다), $2\pi - \theta$ 를 나타내는 동경은 제4 사분면에 있다. 제4 사분면에서는 ‘호환하기 전 원래 삼각함수 $\cos(2\pi - \theta)$ 의 \cos ’의 부호가 양이다. 따라서 ‘호환 후 삼각함수 $\cos\theta$ ’ 앞에 $+$ 를 붙여주자. 종합하면 $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = +\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ 이다.

이번에는 $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$ 를 $\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$ 로 바라본다 하자. $\cos\left(\frac{n}{2}\pi + \theta\right)$ 꼴에서 n 이 짝수이므로 \cos 을 \cos 으로 두자. $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 로 두고 θ 를 예각으로 가정하면 (θ 는 실제로는 예각이 아니다), $\pi + \theta$ 를 나타내는 동경은 제3 사분면에 있다. 제3 사분면에서는 ‘호환하기 전 원래 삼각함수 $\cos(\pi + \theta)$ 의 \cos ’의 부호가 음이다. 따라서 ‘호환 후 삼각함수 $\cos\theta$ ’ 앞에 $-$ 를 붙여주자. 종합하면 $\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ 이다.

이를 통해 예각 가정법이 잘 통함을 알 수 있다.

$\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ 를 계산할 때를 살펴보자. $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ 로 바라본다 하자.

$\sin\left(\frac{n}{2}\pi + \theta\right)$ 꼴에서 n 이 짝수이므로 \sin 을 \sin 으로 두자. $\theta = \frac{\pi}{6}$ 로 두고 θ 를 예각으로 가정하면 (θ 는 실제로도 예각이다), $\pi + \theta$ 를 나타내는 동경은 제3 사분면에 있다. 제3 사분면에서는 ‘호환하기 전 원래 삼각함수 $\sin(\pi + \theta)$ 의 \sin ’의 부호가 음이다. 따라서 ‘호환 후 삼각함수 $\sin\theta$ ’ 앞에 $-$ 를 붙여주자. 종합하면 $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ 이다.

$\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ 를 계산할 때를 살펴보자. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ 로 바라본다 하자.

$\sin\left(\frac{n}{2}\pi - \theta\right)$ 꼴에서 n 이 홀수이므로 \sin 을 \cos 으로 바꿔주자. $\theta = \frac{\pi}{3}$ 로 두고 θ 를 예각으로 가정하면 (θ 는 실제로도 예각이다), $\frac{3}{2}\pi - \theta$ 를 나타내는 동경은 제3 사분면에 있다. 제3 사분면에서는 ‘호환하기 전 원래 삼각함수 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right)$ 의 \sin ’의 부호가 음이다. 따라서 ‘호환 후 삼각함수 $\cos\theta$ ’ 앞에 $-$ 를 붙여주자. 종합하면 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ 이다.

삼각함수 호환 공식은 α 가 예각이 아니더라도 성립한다고 배웠다. 정말 가능한지 확인해보자.

예를 들어 α 가 예각일 때, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ 를 간단하게 바꾼다고 하자. $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ 는 제3 사분면에 있다.

이때 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) < 0, \sin\alpha > 0$ 이므로 $-\sin\alpha$ 로 간단히 바꿀 수 있다.

다만, α 가 꼭 예각이 아니어도 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ 를 $-\sin\alpha$ 로 바꿀 수 있다고 배웠다. 진짜로 가능할까?

궁금하니 직접 해보자.

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 일 때, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ 를 간단하게 바꾼다고 하자. $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ 는 제2 사분면에 있다.

이때 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) < 0, \sin\alpha > 0$ 이므로 $-\sin\alpha$ 로 간단히 바꿀 수 있다.

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ 일 때, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ 를 간단하게 바꾼다고 하자. $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ 는 제1 사분면에 있다.

이때 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) > 0, \sin\alpha < 0$ 이므로 $-\sin\alpha$ 로 간단히 바꿀 수 있다.

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ 일 때, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ 를 간단하게 바꾼다고 하자. $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ 는 제4 사분면에 있다.

이때 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) > 0, \sin\alpha < 0$ 이므로 $-\sin\alpha$ 로 간단히 바꿀 수 있다.

이처럼 우리가 그동안 알고 있는 삼각함수 호환 공식은 α 가 예각이 아니더라도 성립함을 보였다. 힘들게 α 범위를 열심히 나누는 수고를 안 해도 된다.

가끔 이런 의문점이 들 때도 있다. $\sin(x+\alpha)$ 를 \cos 에 관련된 식으로 바꿔주고 싶을 때

$\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(x+\alpha)\right\}$ 인가? 아니면 x 대신 $\frac{\pi}{2}-x$ 을 대입한 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x+\alpha\right)$ 인가?

교과서에는 $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 밖에 나와 있지 않아 헷갈릴 수 있다.

하지만 결론적으로는 $\sin(x+\alpha) = \cos\left\{\frac{\pi}{2}-(x+\alpha)\right\}$ 이 맞다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용해 증명하는 게

제일 빠르나 수학 1에서 이를 배우지 않기에 x, α 에 직접 각을 대입하여 확인하는 절차를 꼭 거치자.

시험장에선 헷갈리지 말고 바로 써먹을 수 있으면 좋겠다.

예제(1) 19학년도 9월 평가원 가형 14번

실수 k 에 대하여 함수

$$f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m 이다. $k+m$ 의 값은? [4점]

- ① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3



1. $f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$ 를 관찰하면 $\cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 의 **괄호 안이**

$\frac{\pi}{2}$ **차이**가 난다는 것을 알 수 있다. 따라서 **삼각함수 호환**으로 쉽게 바꿀 수 있다.

$$\cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) = \cos^2\left\{-\frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\} = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{와 같이 바꿀 수 있다.}$$

2. $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 이므로 $f(x) = -\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k + 1$ 로 바꿀 수

있다. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 를 t 로 치환하면 $f(x) = -t^2 - t + k + 1$ ($-1 \leq t \leq 1$)이다.

$f(x)$ 의 **최댓값, 최솟값**을 구해야 하기에 t 의 범위 설정을 잊으면 절대 안 된다.

$f(x)$ 는 $t = -\frac{1}{2}$ 일 때 최댓값을 가지며 $t = 1$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$ 이므로 $k + \frac{5}{4} = 3$, $k = \frac{7}{4}$ 이다. 따라서 $f(1) = k - 1$ 이므로 $m = \frac{3}{4}$ 이다.

$$k + m = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \text{이므로 답은 ③!!}$$

comment

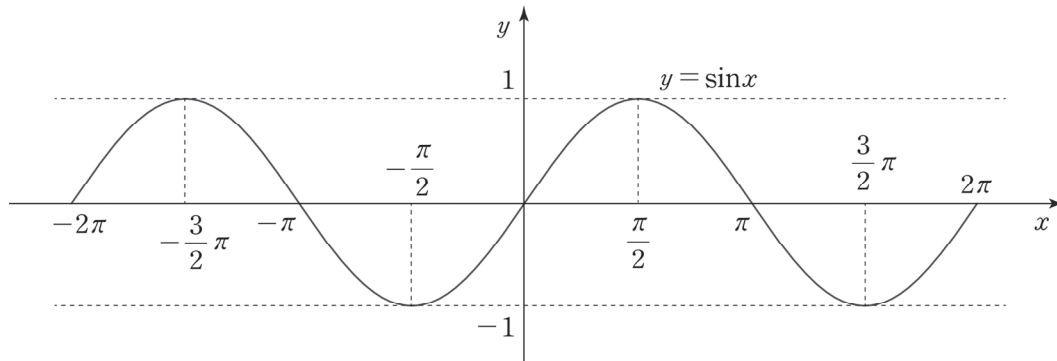
$\cos(x - \alpha)$ 꼴에서 $\alpha = \frac{2n+1}{2}\pi$ (n 은 정수)인 것만 자주 봐와서 $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$ 의 관계를 쉽게 눈치 못챘을 수도 있다. 개념이 탄탄하면 $\cos(x - \alpha)$ 꼴에서 $\alpha \neq \frac{2n+1}{2}\pi$ (n 은 정수)이어도 문제없을 듯하다.

◆ 6. 삼각함수의 그래프

(1) 기본적인 삼각함수 그래프

기본적인 삼각함수의 그래프는 아래와 같다.

$\langle y = \sin x \rangle$



정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y | -1 \leq y \leq 1\}$ 이다. 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

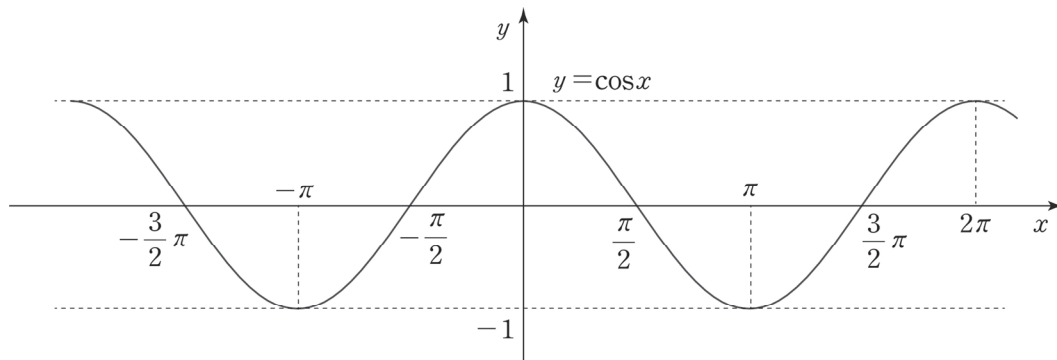
모든 실수 x 에 대하여 $\sin(2n\pi + x) = \sin x$ (n 은 정수)이므로 주기가 2π 인 주기함수이다.

모든 실수 x 에 대하여 $\sin x = -\sin(-x)$ 를 만족하므로 기함수이다.

이뿐만 아니라 점 $(n\pi, 0)$ 에 대해 대칭이고, 직선 $x = \frac{2n-1}{2}\pi$ 에 대해서도 대칭이다. (n 은 정수)

$y = \sin x$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

$\langle y = \cos x \rangle$



정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y | -1 \leq y \leq 1\}$ 이다. 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

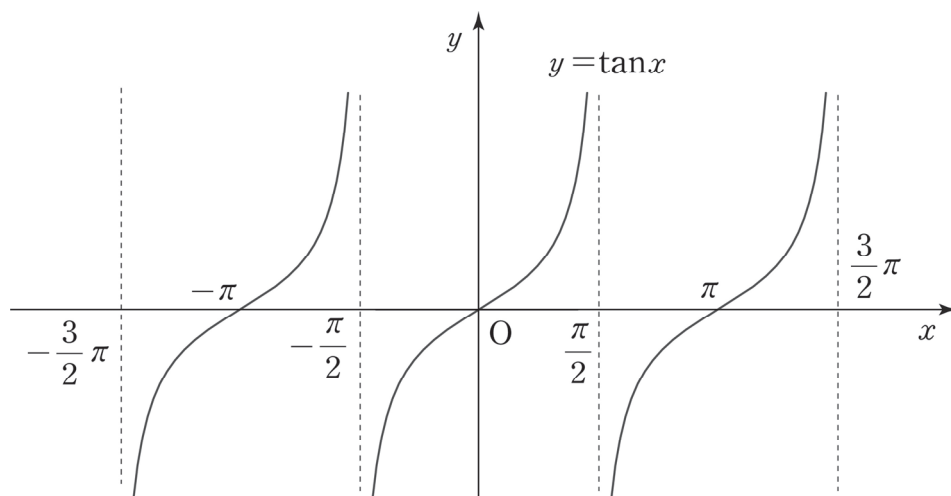
모든 실수 x 에 대하여 $\cos(2n\pi + x) = \cos x$ (n 은 정수)이므로 주기가 2π 인 주기함수이다.

모든 실수 x 에 대하여 $\cos x = \cos(-x)$ 를 만족하므로 우함수이다.

이뿐만 아니라 직선 $x = n\pi$ 에 대해서도 대칭이고, 점 $\left(\frac{2n-1}{2}\pi, 0\right)$ 에 대해서도 대칭이다. (n 은 정수)

$y = \cos x$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

$\langle y = \tan x \rangle$



정의역은 $x \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}$ (n 은 정수)인 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

최댓값과 최솟값을 갖지 않는다. 점근선 $x = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ (n 은 정수)을 지닌다.

※ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 에서 $\cos x = 0$ 을 만족하는 x 에서 $\tan x$ 가 정의되지 않는다는 것을 확인할 수 있다.

모든 실수 x 에 대하여 $\tan(n\pi + x) = \tan x$ (n 은 정수)이므로 주기가 π 인 주기함수이다.

모든 실수 x 에 대하여 $\tan x = -\tan(-x)$ 를 만족하므로 기함수이다.

이뿐만 아니라 점 $(n\pi, 0)$ 에 대해 대칭이다. (n 은 정수)

(2) 여러 가지 삼각함수 그래프

최대, 최소의 변화

$y = a \sin x$, $y = a \cos x$ 의 최솟값과 최댓값은 $-|a|$, $|a|$ 이다.

$y = a \tan x$ 의 최솟값과 최댓값은 존재하지 않는다.

주기의 변화

$y = \sin bx$, $y = \cos bx$ 의 주기는 모두 $\frac{2\pi}{|b|}$ 이다.

$y = \tan bx$ 의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$ 이다.

평행이동

$y = \sin(bx + c) + d$ 를 예로 들어보자.

$y = \sin(bx + c) + d$ 는 $y = \sin bx$ 의 그래프를 x 축으로 $-\frac{c}{b}$ 만큼, y 축으로 d 만큼 평행이동한 것이다.

※ $y = \sin(bx + c)$ 는 $y = \sin bx$ 의 그래프를 x 축으로 $-\frac{c}{b}$ 만큼이 아닌 $-c$ 만큼 평행이동한 것이라고 착각

하는 경우가 많다. 하지만 그렇지 않다. $y = \sin(bx + c)$ 를 $y = \sin\left(b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right)$ 로 바꾸어 보면 금방 이해할 수 있다.

최대와 최소의 변화, 주기의 변화, 평행이동 종합

$(a \sim d$ 는 상수, $a > 0, b \neq 0)$	$y = a \sin(bx + c) + d$	$y = a \cos(bx + c) + d$	$y = a \tan(bx + c) + d$
주기	$\frac{2\pi}{ b }$	$\frac{2\pi}{ b }$	$\frac{\pi}{ b }$
정의역과 치역	정의역 : 실수 전체의 집합 치역 : $\{y -a + d \leq y \leq a + d\}$	정의역 : 실수 전체의 집합 치역 : $\{y -a + d \leq y \leq a + d\}$	정의역 : $\left\{x \mid x \neq \frac{n\pi}{2b} - \frac{c}{b}\right\}$ 치역 : 실수 전체의 집합
최댓값과 최솟값	최댓값 : $a + d$ 최솟값 : $-a + d$	최댓값 : $a + d$ 최솟값 : $-a + d$	최댓값과 최솟값이 존재하지 않는다.
x 축, y 축으로 각각 $\frac{c}{b}$, $-d$ 만큼 평행이동	$y = a \sin bx$	$y = a \cos bx$	$y = a \tan bx$

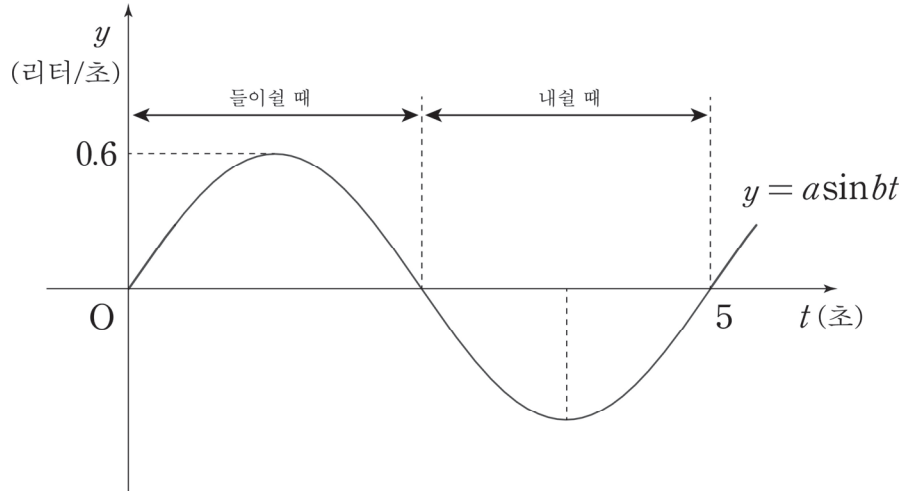
삼각함수 일반형의 주기, 정의역과 치역, 최댓값과 최솟값, 평행이동은 위와 같다.

이를 바탕으로 $y = a \sin(bx + c) + d$ 의 그래프를 그리는 방법은 다음과 같다. 최댓값과 최솟값, 주기를 고려하여 $y = a \sin(bx)$ 를 그린 후, x 축으로 $-\frac{c}{b}$ 만큼, y 축으로 d 만큼 평행이동 시켜주면 된다.

※ 표를 단순히 외우려 하지 말고 문제를 풀면서 자연스레 숙지 되는 느낌으로 공부하자.

예제(2) 04학년도 수능 인문계 23번

다음 그래프는 어떤 사람이 정상적인 상태에 있을 때 시각에 따라 호흡기에 유입되는 공기의 흡입률(리터/초)을 나타낸 것이다. 숨을 들이쉬기 시작하여 t 초일 때 호흡기에 유입되는 공기의 흡입률을 y 라 하면, 함수 $y = a \sin bt$ (a, b 는 양수)로 나타낼 수 있다. 이때, y 의 값은 숨을 들이쉴 때는 양수, 내쉴 때는 음수가 된다.



이 함수의 주기가 5 초이고, 최대 흡입률이 0.6 (리터/초)일 때, 숨을 들이쉬기 시작한 시각으로부터 처음으로 흡입률이 -0.3 (리터/초)이 되는 데 걸리는 시간은? [3점]

- ① $\frac{35}{12}$ 초 ② $\frac{37}{12}$ 초 ③ $\frac{30}{11}$ 초 ④ $\frac{31}{11}$ 초 ⑤ $\frac{35}{31}$ 초



1. 함수 $y = a \sin bt$ 의 주기가 5이므로 $\frac{2\pi}{b} = 5$ 이다. 따라서 $b = \frac{2\pi}{5}$ 이다.

최대 흡입률이 0.6(리터/초)이므로 $a = 0.6$ 이다.

2. 함수 $y = 0.6 \sin \frac{2\pi}{5}t = -0.3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 t 중에 가장 작은 값을 구하자.

$\sin \frac{2\pi}{5}t = -\frac{1}{2}$ 에서 $\frac{2\pi}{5}t = \frac{7\pi}{6}$ 이다. 따라서 $t = \frac{35}{12}$ 이다.

답은 ①!!

예제(3) 18학년도 사관 가형 6번

함수 $f(x) = a \sin bx + c$ ($a > 0, b > 0$)의 최댓값은 4, 최솟값은 -2 이다. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+p) = f(x)$ 를 만족시키는 양수 p 의 최솟값이 π 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)
[3점]

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14



함수 $f(x)$ 의 최댓값이 4, 최솟값이 -2 이므로 $a + c = 4, -a + c = -2$ 에서 $a = 3, c = 1$ 이다.

따라서 $f(x) = 3 \sin bx + 1$ 이고 주기는 $\frac{2\pi}{b} = \pi$ 이므로 $b = 2$ 이다. $abc = 6$ 이다.

답은 ①!!

예제(4) 19년 6월 교육청 고2 나형 27번

두 함수 $f(x) = \log_3 x + 2$, $g(x) = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 가 있다. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 에서 정의된 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하시오. [4점]



1. $g(x) = t$ 라 하자. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 에서 $x = 0$ 일 때 최솟값 $t = \sqrt{3}$ 을 갖고

$x = \frac{\pi}{6}$ 일 때 최댓값 $t = 3\sqrt{3}$ 을 갖는다.

2. $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값, 최솟값을 구해야 하기에 t 의 범위 설정을 잊으면 절대 안 된다.

$f(t) = \log_3 t + 2$ ($\sqrt{3} \leq t \leq 3\sqrt{3}$)에서 $f(t)$ 는 증가함수이므로

$M = f(3\sqrt{3}) = \log_3 3\sqrt{3} + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$, $m = f(\sqrt{3}) = \log_3 \sqrt{3} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ 이다.

$M+m = 6$ 이고 답은 6!!

예제(5) 14학년도 경찰대 7번

함수 $y = a \cos^2 x + a \sin x + b$ 의 최댓값이 10 이고 최솟값이 1 일 때, 실수 a, b 의 곱 ab 의 값은 p 또는 q 이다. $p+q$ 의 값은? [4점]

① -4

② -2

③ 2

④ 4

⑤ 6



1. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로 $y = a \cos^2 x + a \sin x + b = a(1 - \sin^2 x) + a \sin x + b$ 이다.

정리하면 $y = -a \sin^2 x + a \sin x + a + b$ 이므로 $\sin x = t$ 로 치환하면

$$y = -at^2 + at + a + b = -a\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}a + b \quad (-1 \leq t \leq 1) \text{ 이다.}$$

$y = a \cos^2 x + a \sin x + b$ 의 최댓값, 최솟값을 구해야 하기에 t 의 범위 설정을 잊으면 절대 안 된다.

2. a 의 범위에 따라 값을 구해보자.

(1) $a > 0$: 최댓값은 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 $\frac{5}{4}a + b = 10$, 최솟값은 $t = -1$ 일 때, $-a + b = 1$ 이다.

따라서 $a = 4, b = 5$ 이므로 $ab = 20$ 이다.

(2) $a < 0$: 최댓값은 $t = -1$ 일 때 $-a + b = 10$, 최솟값은 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 $\frac{5}{4}a + b = 1$ 이다.

따라서 $a = -4, b = 6$ 이므로 $ab = -24$ 이다.

(1), (2)에 의해 $p + q = 20 - 24 = -4$ 이다.

답은 ①!!

◆ 7. 삼각함수 대칭성 활용

$y = \sin x$, $y = \tan x$ 는 기함수이고 $y = \cos x$ 는 우함수이다.

$y = \sin x$, $y = \cos x$ 는 주기가 2π 이고 $y = \tan x$ 는 주기가 π 이다.

$y = \sin x$, $y = \cos x$ 는 점근선이 없으나 $y = \tan x$ 의 경우 특이하게 $x = \pm \frac{2n+1}{2}\pi$ (n 은 정수)과 같은 점근선이 존재한다.

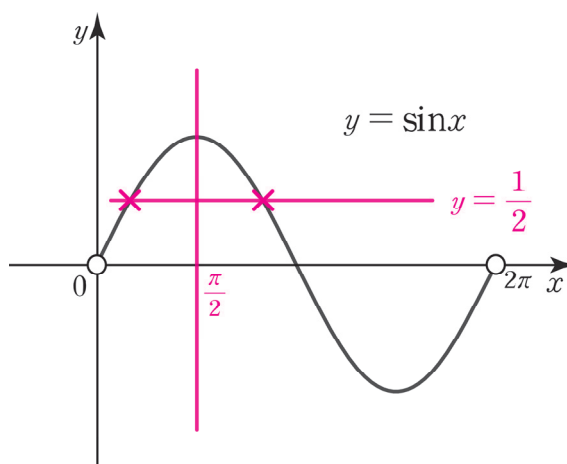
삼각함수의 대칭성, 주기성, 점근선은 그래프를 그리는 것뿐만 아니라 계산을 줄여주는 데에도 유용하다.

예를 들어 $0 < x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{3}\right) = 0$ 의 모든 실근의 합을 구한다고 해보자.
평가원 3점짜리로 주로 나오는 문제이다.

$\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{1}{3}$ 를 동시에 만족하는 x 는 존재하지 않는다.

$0 < x < 2\pi$ 일 때, $\sin x = \frac{1}{2}$ 를 만족하는 x 와 $\cos x = \frac{1}{3}$ 를 만족하는 x 들의 값을 ‘직접’ 구하려고 했는가?
그래프를 그려 대칭성을 이용하면 계산이 훨씬 쉬워지고 실수도 안 한다.

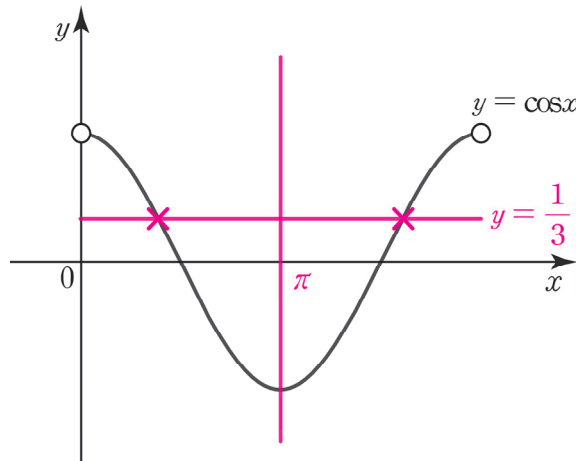
$0 < x < 2\pi$ 에서 $y = \sin x$ 와 $y = \frac{1}{2}$ 을 그리면 다음과 같다. $x = 0$, $x = 2\pi$ 를 포함하지 않으므로
 $x = 0$, $x = 2\pi$ 부분은 꼭 빈 동그라미로 표시하자.



$\sin x = \frac{1}{2}$ 해는 $0 < x < \pi$ 에서 2개가 생긴다. $0 < x < \pi$ 에서 $y = \sin x$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 대칭이기에 2개의 해의

합은 π 라는 걸 쉽게 알 수 있다. 와닿지 않으면 두 개의 해를 $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 로 두고 더해도 된다.

$0 < x < 2\pi$ 에서 $y = \cos x$ 와 $y = \frac{1}{3}$ 을 그리면 다음과 같다. $x = 0, x = 2\pi$ 를 포함하지 않으므로 $x = 0, x = 2\pi$ 부분은 꼭 빈 동그라미로 표시하자.



$\cos x = \frac{1}{3}$ 해는 $0 < x < 2\pi$ 에서 2개가 생긴다. $0 < x < 2\pi$ 에서 $y = \cos x$ 는 $x = \pi$ 대칭이기에 2개의 해의 합은 2π 라는 걸 쉽게 알 수 있다. 와닿지 않으면 두 개의 해를 $\pi - \beta, \pi + \beta$ 로 두고 더해도 된다.

따라서 $0 < x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{3}\right) = 0$ 의 모든 실근의 합은 $\pi + 2\pi = 3\pi$ 이다.

앞으로 삼각방정식이나 삼각부등식을 풀 때는 꼭 삼각함수의 그래프를 그려두고 풀자.
시간도 단축되고 실수도 안 하는 방법이어서 일거양득이다.

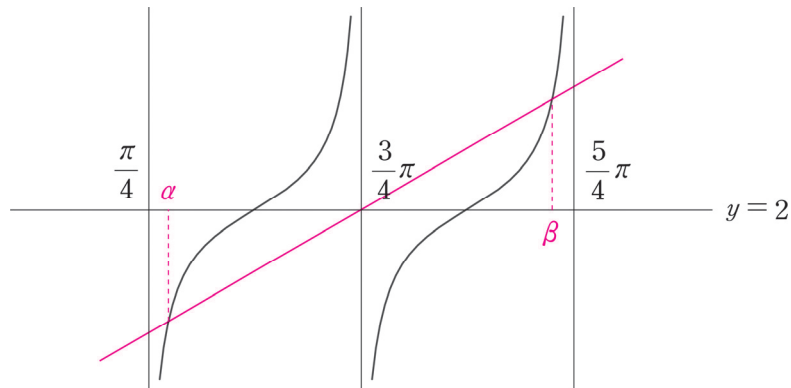
삼각방정식의 경우, 해를 직접 구하여 더하기보다는 대칭성을 이용해 해의 합을 구하기가 쉽다.
삼각부등식의 경우, 시각적으로 범위를 확인할 수 있어 부등호 방향 실수가 적어진다.
덤으로 대칭성과 주기성 역시 확인하기 쉽다.

예제(6) 수능특강 변형

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$ 에서 함수 $y = \tan 2x + 2$ 의 그래프와 직선 $y = m\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) + 2$ ($m > 0$)이 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라 할 때, $\beta - \alpha = \frac{3}{4}\pi$ 이다. $3\pi m$ 의 값을 구하시오.



1. 함수 $y = \tan 2x + 2$ 의 그래프와 직선 $y = m\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) + 2$ 의 그래프를 그려보자.



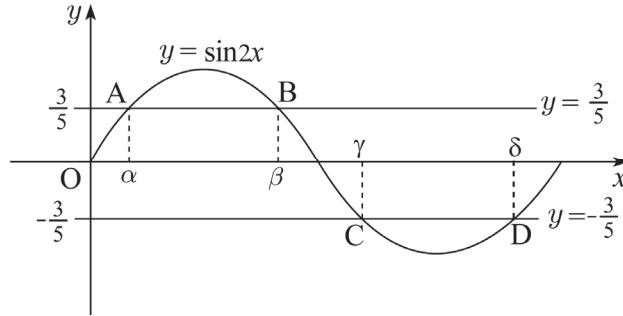
$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{4}\pi$ 에서 $\alpha + \beta = \frac{3}{2}\pi$ 임을 알 수 있다. $\beta - \alpha = \frac{3}{4}\pi$ 이므로 $\alpha = \frac{3}{8}\pi, \beta = \frac{9}{8}\pi$ 이다.

2. 직선 $y = m\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) + 2$ 가 점 $\left(\frac{9}{8}\pi, 3\right)$ 을 지나므로 $m \times \left(\frac{9}{8}\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = 1$ 에서 $m = \frac{8}{3\pi}$ 이다.

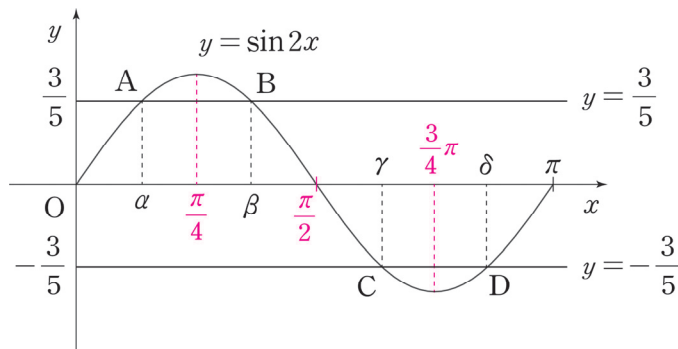
따라서 $3\pi m = 8$ 이다.

답은 8!!

그림과 같이 함수 $y = \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$)의 그래프가 직선 $y = \frac{3}{5}$ 과 두 점 A, B에서 만나고, 직선 $y = -\frac{3}{5}$ 과 두 점 C, D에서 만난다. 네 점 A, B, C, D의 x 좌표를 각각 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때, $\alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{9}{4}\pi$ ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π



$y = \sin 2x$ 의 그래프에 대칭성과 주기성에 집중하자.

$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 이다. 마찬가지로 $\frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{3\pi}{4}$ 이므로 $\gamma + \delta = \frac{3\pi}{2}$ 이다.

또, $\frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\beta + \gamma = \pi$ 이다.

따라서 $\alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta = (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) + (\beta + \gamma) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \pi = 3\pi$ 이다.

답은 ③!!

※ 다른 풀이

$y = \sin(2x)$ 가 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 에 대하여 대칭이므로 $\alpha + \delta = \pi$, $\beta + \gamma = \pi$ 이다.

예제(8) 19년 6월 교육청 고2 나형 21번

음이 아닌 세 정수 a, b, n 에 대하여

$$(a^2 + b^2 + 2ab - 4)\cos \frac{n}{4}\pi + (b^2 + ab + 2)\tan \frac{2n+1}{4}\pi = 0$$

일 때, $a + b + \sin^2 \frac{n}{8}\pi$ 의 값은? (단, $a \geq b$) [4점]

- ① 4 ② $\frac{19}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{25}{4}$ ⑤ 7



1. $\cos \frac{n}{4}\pi$ 의 계수와 $\tan \frac{2n+1}{4}\pi$ 의 계수를 살펴보자.

$a^2 + b^2 + 2ab - 4$ 는 정수이고, $b^2 + ab + 2$ 또한 정수이다.

a 와 b 는 음이 아닌 정수이므로 $b^2 + ab + 2 \geq 2$ 이다.

2. n 에 숫자를 대입하여 $\cos \frac{n}{4}\pi$ 과 $\tan \frac{2n+1}{4}\pi$ 를 구해보면 다음 표와 같다.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\cos \frac{n}{4}\pi$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan \frac{2n+1}{4}\pi$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

$\tan \frac{2n+1}{4}\pi$ 는 항상 정수이다.

$\cos \frac{n}{4}\pi = 0$ 이면 $(b^2 + ab + 2)\tan \frac{2n+1}{4}\pi = b^2 + ab + 2 = 0$ 이어야 한다.

$b^2 + ab + 2 \geq 2$ 이므로 성립하지 않는다.

마찬가지로, $\cos \frac{n}{4}\pi$ 가 무리수이면 두 수의 계수가 모두 0을 만족해야 한다.

$b^2 + ab + 2 \geq 2$ 이므로 $\cos \frac{n}{4}\pi$ 는 무리수가 아니다.

이제 남은 케이스를 나눠서 계산해보자.

(1) $\cos \frac{n}{4}\pi = \tan \frac{2n+1}{4}\pi = 1$: $a^2 + b^2 + 2ab - 4 + b^2 + ab + 2 = 0$ 에서

$(a+b)(a+2b) = 2$ 이다. a 와 b 는 음이 아닌 정수이므로

$a+b=1, a+2b=2$ or $a+b=2, a+2b=1$ 을 만족해야 한다.

$a+b=1, a+2b=2$ 이면 $a=3, b=-1$ 이므로 $b \geq 0$ 인 것에 모순이고,

$a+b=2, a+2b=1$ 이면 $a=0, b=1$ 이므로 $a \geq b$ 인 것에 모순이다.

(2) $\cos \frac{n}{4}\pi = -1, \tan \frac{2n+1}{4}\pi = 1$:

$-a^2 - b^2 - 2ab + 4 + b^2 + ab + 2 = -a^2 - ab + 6 = 0$ 에서 $a(a+b) = 6$ 이다.

a 와 b 는 음이 아닌 정수이므로

$a=1, a+b=6$ 또는 $a=2, a+b=3$ 을 만족해야 한다.

$a=1, a+b=6$ 이면 $a=1, b=5$ 이므로 $a \geq b$ 인 것에 모순이다.

$a=2, a+b=3$ 이면 $a=2, b=1$ 이므로 주어진 조건을 모두 만족한다.

3. $n=4$ 일 때 $\cos \frac{n}{4}\pi = -1, \tan \frac{2n+1}{4}\pi = 1$ 를 만족한다.

따라서 $a+b+\sin^2 \frac{n}{8}\pi = 2+1+\sin^2 \frac{\pi}{2} = 3+1=4$ 이다. 답은 ①!!

예제(9) 13년 3월 교육청 고2 A형 21번

함수 $f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x + \pi) = f(x)$ 이다.

(나) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 일 때, $f(x) = \sin 4x$

(다) $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ 일 때, $f(x) = -\sin 4x$

이때 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{\pi}$ 가 만나는 점의 개수는? [4점]

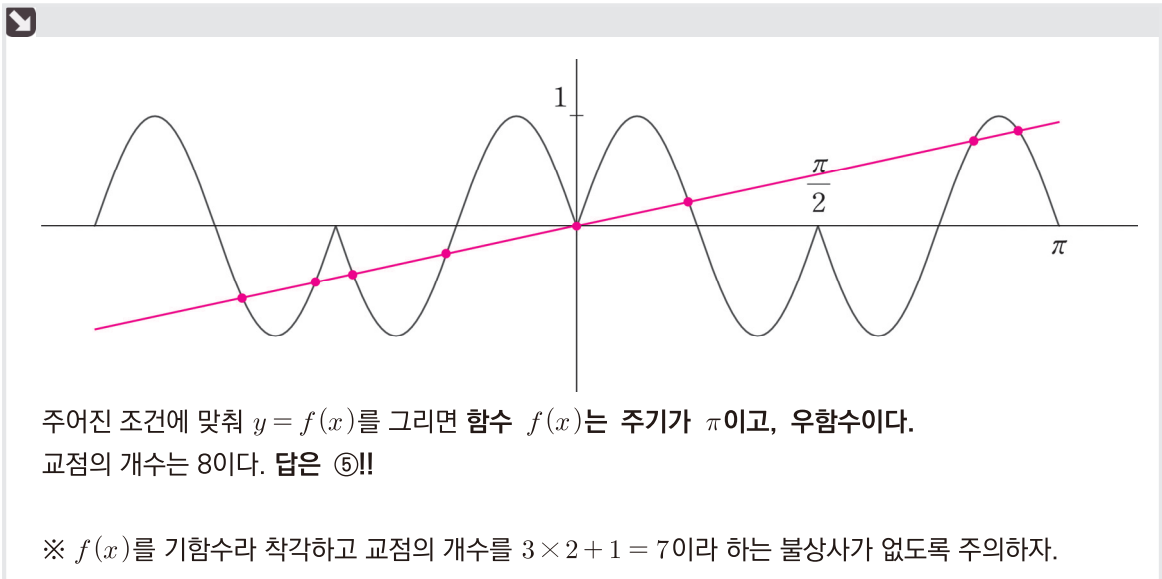
① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8



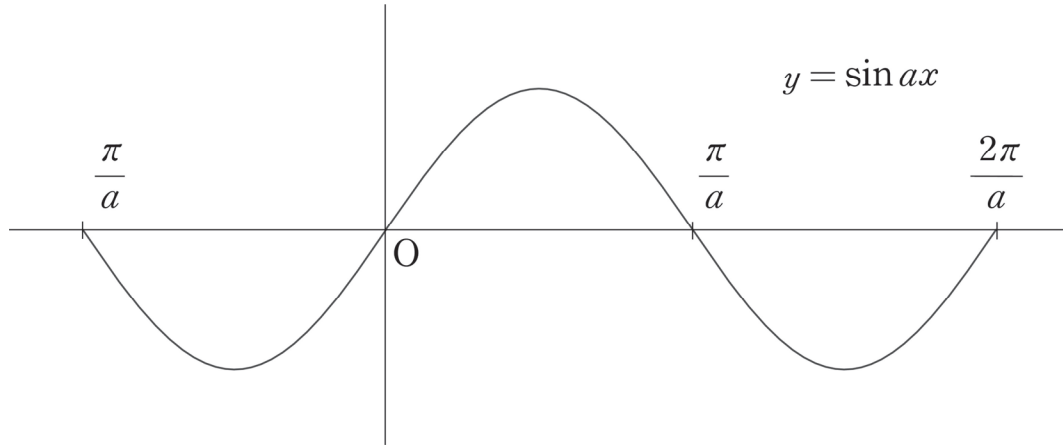
예제(10) 20년 3월 교육청 가형 28번

$0 < a < \frac{4}{7}$ 인 실수 a 와 유리수 b 에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 정의된

함수 $f(x) = 2\sin(ax) + b$ 가 있다. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 두 점 $A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$ 을
지날 때, $30(a+b)$ 의 값을 구하시오. [4점]

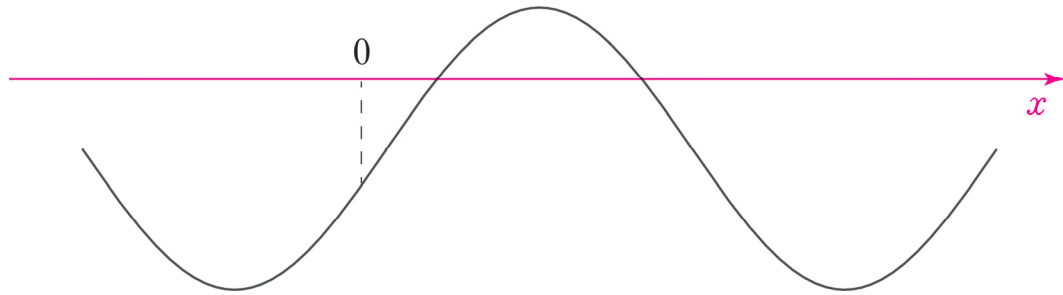


1. 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 주기가 $\frac{2\pi}{a}$ 인 $y = \sin ax$ 를 그리면 아래와 같다.



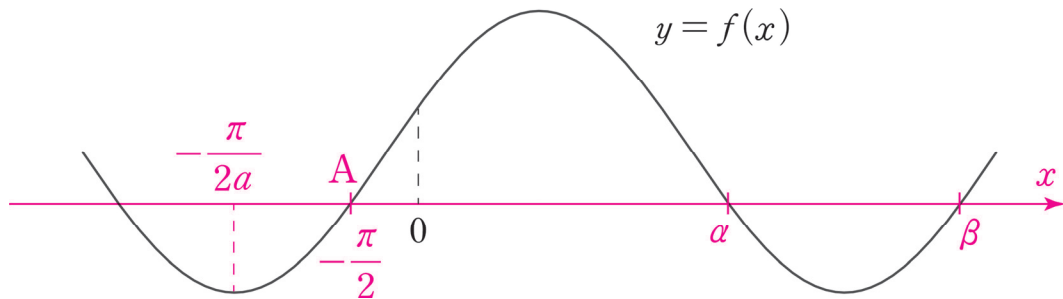
따라서 함수 $f(x) = 2\sin(ax) + b$ 의 그래프 개형은 아래와 같다.

(1) $b < 0$ 일 때



닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 $y = f(x)$ 의 x 절편이 모두 양수이므로 문제 조건에 모순이다.

(2) $b > 0$ 일 때

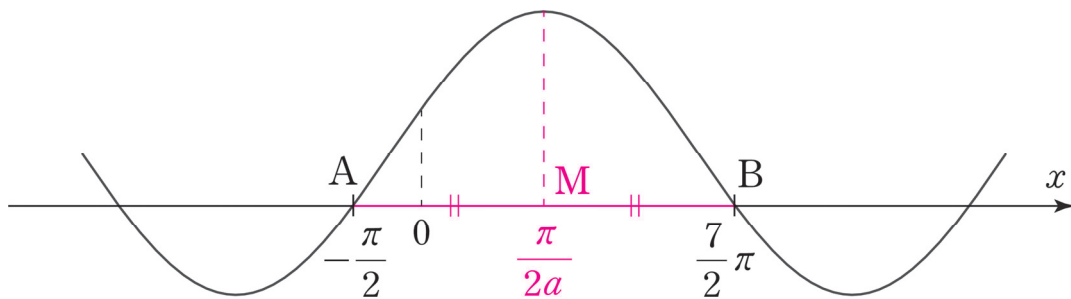


닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 $y = f(x)$ 가 두 점 $A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{7\pi}{2}, 0\right)$ 을 지난다.

$0 < a < \frac{4}{7}$ 이기에 $-\frac{\pi}{2a} < -\frac{\pi}{2}$ 이므로 점 A의 위치는 위와 같고, $\alpha = \frac{7\pi}{2}$ 또는 $\beta = \frac{7\pi}{2}$ 이다.

2. $\alpha = \frac{7\pi}{2}$ 또는 $\beta = \frac{7\pi}{2}$ 일 때, 함수 $f(x) = 2\sin(ax) + b$ 를 구해보자.

(1) $\alpha = \frac{7\pi}{2}$ 일 때

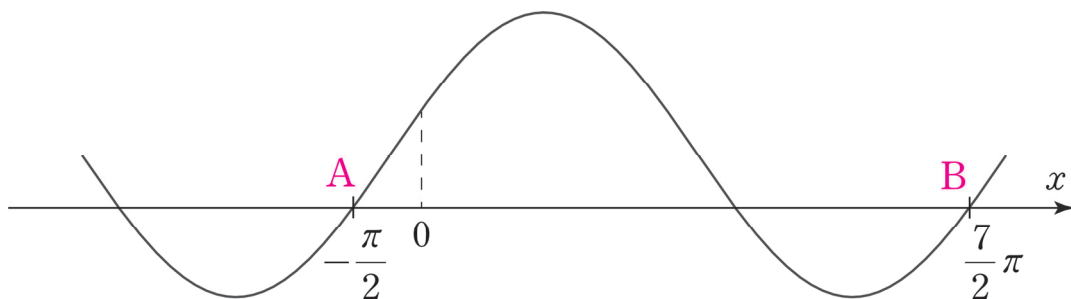


삼각함수의 대칭성을 이용하면 $\overline{AM} = \overline{BM}$ 임을 쉽게 알 수 있다.

$2 \times \frac{\pi}{2a} = -\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{2}$ 이므로 $a = \frac{1}{3}$ 이다. $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{3}x\right) + b$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 에서 $b = 1$ 이다.

따라서 $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{3}x\right) + 1$ 이다.

(2) $\beta = \frac{7\pi}{2}$ 일 때



구간 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$ 은 $y = f(x)$ 의 한 주기이다. 따라서 $\overline{AB} = \frac{2\pi}{a}$ 이므로 $4\pi = \frac{2\pi}{a}$, $a = \frac{1}{2}$ 이다.

$f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + b$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 에서 $b = \sqrt{2}$ 이다. b 가 무리수이므로 문제 조건에 모순이다.

3. $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{3}x\right) + 1$ 에서 $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$ 이다. $30(a+b) = 40$ 이다.

답은 40!!

comment

무작정 수식으로만 풀려고 했다면 시원하게 해결이 되지 않거나 필요한 식을 얻어내기 힘들었을 것이다. 삼각함수 대칭성을 최대한 이용하여 삼각방정식의 해를 구하는 데에 익숙해지자.

예제(11) 21학년도 9월 평가원 가형 21번

단원구간 $[-2\pi, 2\pi]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \sin kx + 2, g(x) = 3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k 의 개수는? [4점]

실수 a 가 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 교점의 y 좌표이면

$$\{x \mid f(x) = a\} \subset \{x \mid g(x) = a\}$$

이다.

① 3

② 4

③ 5

④ 6

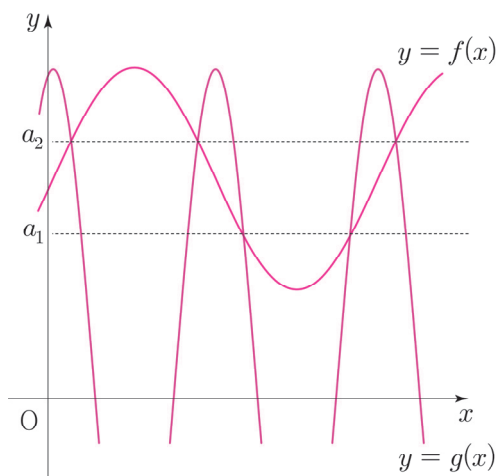
⑤ 7



1. $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$ 의 의미는

$f(x)=a$ 를 만족시키는 모든 x 에 대하여 $g(x)=a$ 라는 뜻이다.

$\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$ 를 만족시키려면 두 함수의 대칭축이 일치해야 한다.



두 곡선 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 교점의 x 좌표를 t 라 하자.

$f(t)=g(t)$ 에서 $\sin kt+2=3\cos 12t$ 이다.

2. 함수 $f(x)$ 를 살펴보자.

함수 $f(x)=\sin kx+2$ 가 $x=\frac{\pi}{2k}$ 에 대하여 대칭이므로 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{k}-x\right)$ 이다.

$f(t)=f\left(\frac{\pi}{k}-t\right)=a$ 에서 $\left(\frac{\pi}{k}-t\right) \in \{x \mid f(x)=a\}$ 이므로 $g(t)=g\left(\frac{\pi}{k}-t\right)=a$ 이다.

3. 함수 $g(x)$ 를 살펴보자.

함수 $g(x)=3\cos 12x$ 가 $x=\frac{\pi}{12}$ 에 대하여 대칭이므로 $g(x)=g\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=g\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 이다.

$g(t)=g\left(\frac{\pi}{k}-t\right)=a$ 에서 $3\cos 12t=3\cos\left(\frac{12\pi}{k}-12t\right)$ 이므로

$3\cos 12t=3\cos(-12t)=3\cos\left(\frac{12\pi}{k}-12t\right)$ 이므로 $\frac{12\pi}{k}=2n\pi$ 이다.

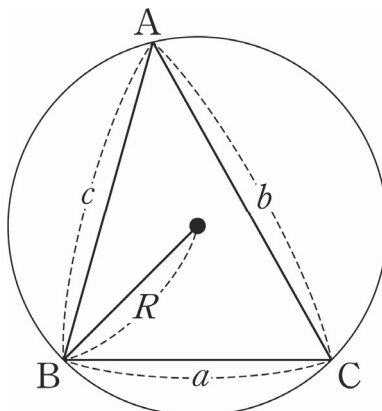
두 자연수 n, k 에 대하여 $nk=6$ 이다. 6의 약수의 개수는 1, 2, 3, 6으로 4개다.

답은 ②!!

◆ 사인법칙, 코사인법칙

◆ 1. 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 이다.



$a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$ 이므로 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ 임을 알 수 있다.

삼각형 ABC의 넓이 S 는 $\frac{abc}{4R}$ 이다. 증명은 다음과 같다.

$S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 이다. $\sin A = \frac{a}{2R}$ 이므로 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 에 대입하면 $S = \frac{abc}{4R}$ 이다.

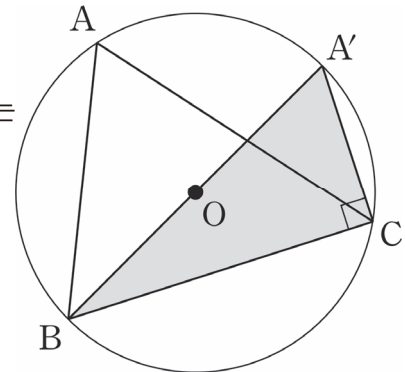
사인법칙의 증명은 다음과 같다.

(1) 삼각형 ABC가 예각삼각형일 때,

\overline{BC} 를 밑변으로 하고 지름 $\overline{A'B}$ 을 빗변으로 하는 직각삼각형을 그린다.
 $\angle BAC$, $\angle BA'C$ 는 호 BC에 대한 원주각이기에 $\angle BAC$ 의 크기는 $\angle BA'C$ 의 크기와 같다.

$\angle BCA' = \frac{\pi}{2}$, $\overline{A'B} = 2R$, $\overline{BC} = a$ 이므로 $\sin A' = \frac{a}{2R} = \sin A$ 이다.

마찬가지 방법으로 $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ 를 증명할 수 있다.



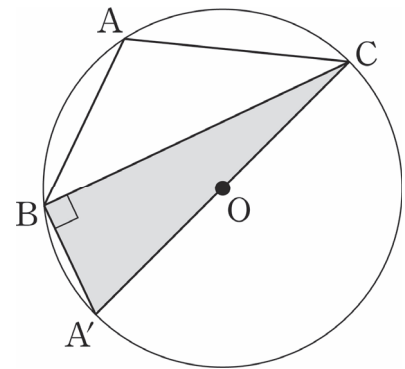
(2) 삼각형 ABC가 둔각삼각형일 때,

\overline{BC} 를 밑변으로 하고 지름 $\overline{A'C}$ 을 빗변으로 하는 직각삼각형을 그린다.
 사각형 ABA'C는 원에 내접하는 사각형이다.
 따라서 $\angle BAC + \angle BA'C = \pi$ 이다.

$\angle A'BC = \frac{\pi}{2}$, $\overline{A'C} = 2R$, $\overline{BC} = a$ 이므로

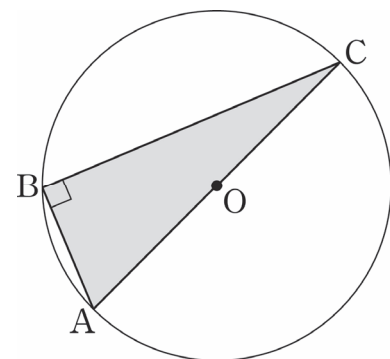
$\sin A' = \frac{a}{2R} = \sin(\pi - A) = \sin A$ 이다.

마찬가지 방법으로 $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ 를 증명할 수 있다.



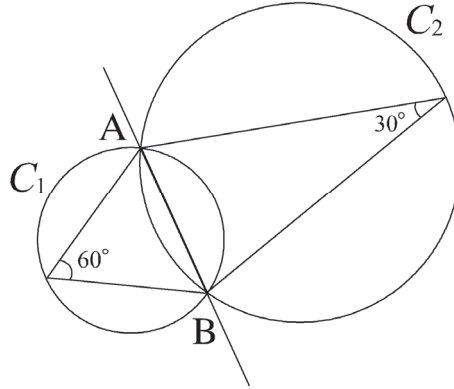
(3) 삼각형 ABC가 직각삼각형일 때,

그림에서 $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ 임이 자명하다.



예제(12) 04년 6월 교육청 고2 가형 28번

두 원 C_1, C_2 가 그림과 같이 두 점 A, B 에서 만난다. 선분 AB 의 길이는 12 이고, 그에 대한 원주각의 크기는 각각 $60^\circ, 30^\circ$ 이다. 두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2 라고 할 때, $R_1^2 + R_2^2$ 의 값을 구하시오. [4점]



원 C_1 에서 사인법칙을 적용하자. $\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3} = 2R_1$ 이므로 $R_1 = 4\sqrt{3}$ 이다.

마찬가지로, 원 C_2 에서도 사인법칙을 적용하자. $\frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24 = 2R_2$ 이므로 $R_2 = 12$ 이다.

$$R_1^2 + R_2^2 = 48 + 144 = 192 \text{ 이다.}$$

답은 192!!

예제(13) 00학년도 수능 인문계 12번

$\triangle ABC$ 에서

$$6 \sin A = 2\sqrt{3} \sin B = 3 \sin C$$

가 성립할 때, $\angle A$ 의 크기는? [3 점]

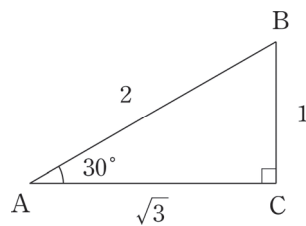
- ① 120° ② 90° ③ 60° ④ 45° ⑤ 30°



사인법칙을 활용하자. $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{CA}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}$, $6 \sin A = 2\sqrt{3} \sin B = 3 \sin C$ 에서

$\overline{BC} = \frac{k}{6}$, $\overline{AC} = \frac{1}{2\sqrt{3}}k$, $\overline{AB} = \frac{k}{3}$ 이다.

$k = 6$ 이라 하면 $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 1$, $\overline{AC} = \sqrt{3}$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 다음과 같이 그려진다.



$\angle A = 30^\circ$ 이다.

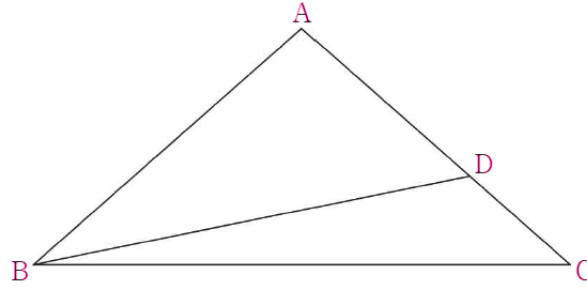
답은 ⑤!!

※ $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ 라 하면 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ 이다. 이를 바로 활용해도 좋다.

예제(14) 21학년도 사관 나형 19번

그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 5:3으로 내분하는 점을 D라 하자.

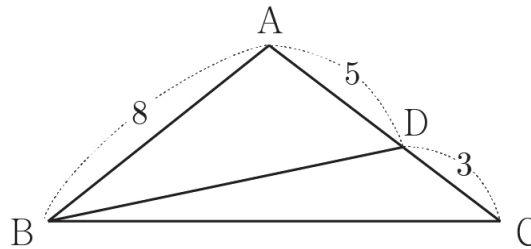
$2\sin(\angle ABD) = 5\sin(\angle DBC)$ 일 때, $\frac{\sin C}{\sin A}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}$



1. 선분 AC의 5:3 내분점이 D 이므로 편의상 $\overline{AB} = \overline{AC} = 8$ 이라 하자.
 $\overline{AD} = 5$, $\overline{CD} = 3$ 이다.

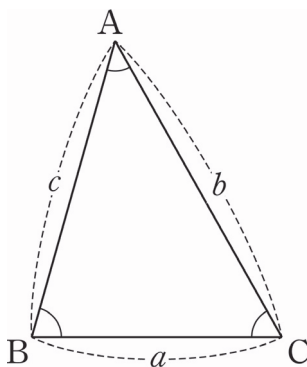


$\sin(\angle ABD)$ 와 $\sin(\angle DBC)$ 의 비율관계가 주어졌으므로
 사인법칙을 활용하여 $\sin A$, $\sin C$ 의 비율관계를 구하자.

2. $\frac{5}{\sin(\angle ABD)} = \frac{\overline{BD}}{\sin A}$, $\frac{3}{\sin(\angle DBC)} = \frac{\overline{BD}}{\sin C}$ 에서
 $\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{5\sin(\angle DBC)}{3\sin(\angle ABD)} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{3}$ 이다.

답은 ③!!

◆ 2. 코사인법칙



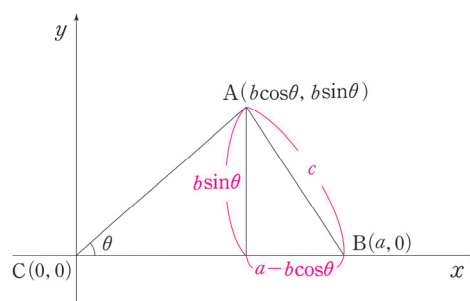
삼각형 ABC에서 다음이 성립한다.

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
2. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

이를 각에 대하여 나타내면 다음과 같다.

1. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
2. $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$
3. $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

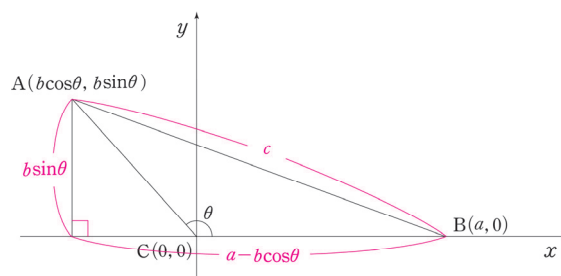
(1) 삼각형 ABC가 예각삼각형일 때,



점 C는 원점, 점 B는 $(a, 0)$, 점 A는 $(b \cos \theta, b \sin \theta)$ 이다.

그림으로부터 $c^2 = (a - b \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$ 임을 알 수 있다.

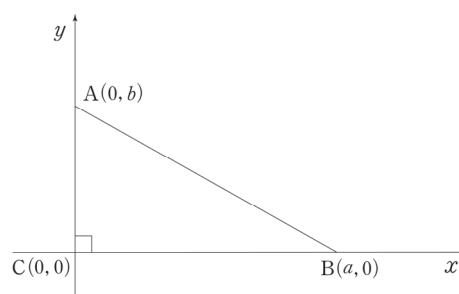
(2) 삼각형 ABC가 둔각삼각형일 때,



점 C는 원점, 점 B는 $(a, 0)$, 점 A는 $(b \cos \theta, b \sin \theta)$ 이다.

그림으로부터 $c^2 = (b \cos \theta - a)^2 + (b \sin \theta)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$ 임을 알 수 있다.

(3) 삼각형 ABC가 직각삼각형일 때,



점 C는 원점, 점 B는 $(a, 0)$, 점 A는 $(0, b)$ 이다.

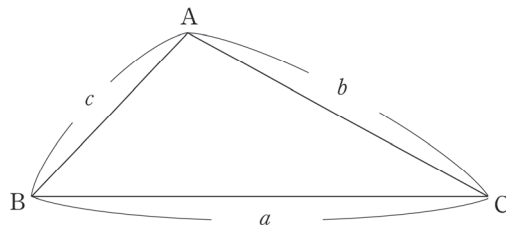
그림으로부터 $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{2}$ 임을 알 수 있다.

◆ 3. 사인법칙, 코사인법칙 활용

삼각형의 결정조건에는 세 변의 길이가 주어질 때, 두 변의 길이와 그 끼인각이 주어질 때, 한 변의 길이와 그 양 끝 각이 주어질 때가 있다. 여기에서 주어지지 않은 나머지 변의 길이나 각에 대한 정보를 알기 위해 사인법칙이나 코사인법칙을 이용해야 한다.

각 상황에서 언제 사인법칙이 편할지, 언제 코사인법칙이 편할지 구분하는 것은 중요하다. 이를 고려하지 않고 무작정 사인법칙이나 코사인법칙을 쓴다면 구하려고 하는 변이나 각과 관련된 식이 너무 복잡해질 수 있다. 언제 사인법칙이 더 편하고 언제 코사인법칙이 더 편할지 알려주도록 하겠다.

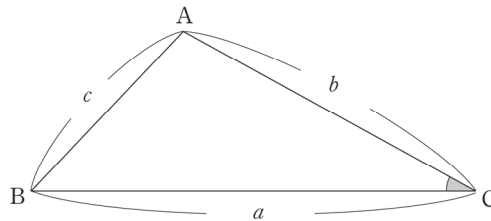
세 변의 길이가 주어질 때는 코사인법칙을 이용하는 것이 유리하다. 코사인법칙을 이용하여 세 각에 대한 정보를 쉽게 알 수 있다.



코사인법칙을 이용하면 $\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos \angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\cos \angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 이다.

또한, 헤론 공식 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ($s = \frac{a+b+c}{2}$)을 이용하여 삼각형의 넓이를 쉽게 구할 수 있다.

두 변의 길이와 그 끼인각이 주어질 때는 코사인법칙을 이용하는 것이 유리하다. 코사인법칙을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 쉽게 알 수 있다. 이후 나머지 두 각에 대한 정보도 코사인법칙이나 사인법칙을 이용하면 쉽게 알 수 있다.

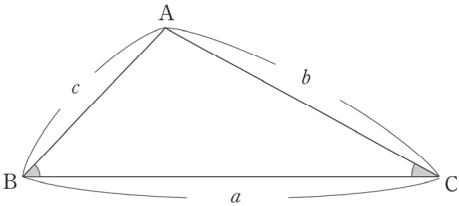


코사인법칙을 이용하면 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$ 로 나머지 한 변의 길이 c 를 알 수 있다.

이후에 코사인법칙을 이용해 $\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos \angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ 를 구하거나

사인법칙을 이용해 $\sin \angle A = \frac{a \sin \angle C}{c}$, $\sin \angle B = \frac{b \sin \angle C}{c}$ 를 구할 수 있다.

한 변의 길이와 두 각의 크기가 주어질 때는 사인법칙을 이용하는 것이 유리하다. 두 각의 크기를 알면 삼각형 내각의 합이 π 이므로 나머지 한 각의 크기도 아는 거나 다름이 없다. 사인법칙을 이용하여 두 변의 길이를 쉽게 알 수 있다.

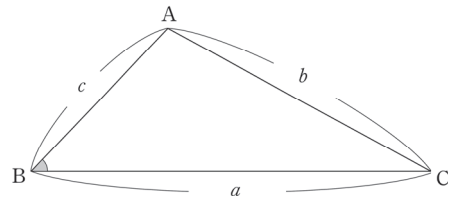


삼각형 내각의 합이 π 이므로 $\angle A = \pi - (\angle B + \angle C)$ 이다.

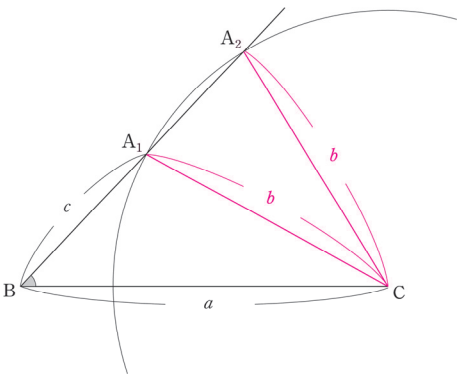
사인법칙을 이용해 $b = \frac{a \sin \angle B}{\sin A}$, $c = \frac{a \sin \angle C}{\sin A}$ 를 구할 수 있다.

※ 두 변의 길이와 끼인각이 아닌 각 하나가 주어질 때는 삼각형의 결정조건은 아니다. 그림에도 불구하고 코사인법칙이나 사인법칙을 적절히 이용하여 나머지 한 변의 길이와 나머지 두 각에 대한 정보를 알 수 있다.

두 변의 길이와 끼인각이 아닌 각 하나가 주어질 때는 코사인법칙을 이용하는 것이 유리하다. 코사인법칙을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 쉽게 알 수 있다. 이후 나머지 두 각에 대한 정보도 코사인법칙이나 사인법칙을 이용하면 쉽게 알 수 있다.

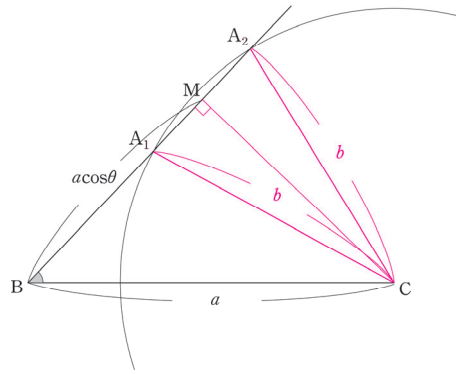


코사인법칙을 이용하면 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$ 로 나머지 한 변의 길이 c 를 알 수 있다.



다만, 다루는 삼각형에 따라 위 그림과 같이 점 A의 위치가 점 A_1 이거나 점 A_2 일 수 있다.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$ 를 이용해 나머지 한 변의 길이 c 를 구할 때, c 에 대한 이차방정식이 나오는 이유도 이 때문이다.



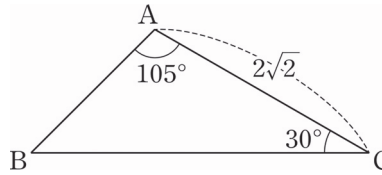
$\angle B = \theta$ 로 두고 c 에 대한 이차방정식 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos \angle B$ 를 정리하면
 $c = a \cos \theta \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta}$ 이다. $\overline{BM} = a \cos \theta$ 이므로 점 A의 위치가 점 A_1 이면 $c < a \cos \theta$ 에서
 $c = a \cos \theta - \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta}$ 이고, 점 A의 위치가 점 A_2 이면 $c > a \cos \theta$ 에서
 $c = a \cos \theta + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta}$ 임을 알 수 있다.

점 A의 위치가 점 A_1 이면 $\angle A$ 가 둔각이고 점 A의 위치가 점 A_2 이면 $\angle A$ 가 예각이다.
따라서 $\angle A$ 가 둔각인지 예각인지에 따라 $c = a \cos \theta - \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta}$ 인지
 $c = a \cos \theta + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta}$ 인지를 결정할 수 있다.

이후에 코사인법칙을 이용해 $\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos \angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 를 구하거나
사인법칙을 이용해 $\sin \angle A = \frac{a \sin \angle B}{b}$, $\sin \angle C = \frac{c \sin \angle B}{b}$ 를 구할 수 있다.

※ 주의

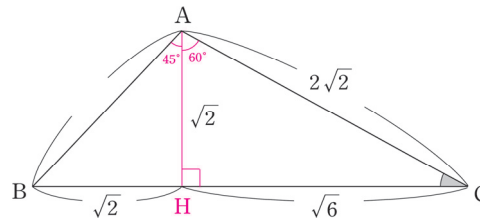
사인법칙, 코사인법칙을 쓰는 것이 최선이 아닐 때도 존재한다.



\overline{BC} 의 길이를 구해보자. $\angle B = 45^\circ$ 이다. ‘어? 이거 완전 사인법칙 상황 아니냐?’ 하며

$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 105^\circ}$ 를 이용하려 하려 했다면 잠깐 멈춰보자.

미적분 선택자라면 $\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ)$ 는 삼각함수 덧셈정리를 이용해 구할 수도 있으나 그리 편한 선택은 아닐 거 같다.



점 A에서 선분 BC에 수선의 발 H를 내려 직각삼각형 2개를 만든다.

삼각형 AHC에서 특수각 삼각비를 이용하면 $\overline{AH} = \sqrt{2}$, $\overline{CH} = \sqrt{6}$ 임을 쉽게 알 수 있고,

삼각형 AHB에서 특수각 삼각비를 이용하면 $\overline{BH} = \sqrt{2}$ 임을 쉽게 알 수 있다.

$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ 이다.

따라서 사인법칙이나 코사인법칙을 이용하기 전에 수선, 특수각 삼각비를 최대한 이용해 보는 것이 좋다.

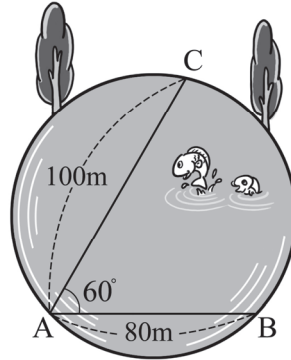
원 모양의 호수의 넓이를 구하기 위해 호수의 가장자리의 세 지점 A, B, C 에서 거리와 각을 측정한 결과가 다음과 같았다.

$$\overline{AB} = 80 \text{ m}$$

$$\overline{AC} = 100 \text{ m}$$

$$\angle CAB = 60^\circ$$

이때 이 호수의 넓이는? [4점]



① $2400 \pi \text{ m}^2$

② $2500 \pi \text{ m}^2$

③ $2600 \pi \text{ m}^2$

④ $2700 \pi \text{ m}^2$

⑤ $2800 \pi \text{ m}^2$



1. $\overline{BC} = a$ 라 하자. $\triangle ABC$ 에서 \overline{AB} , \overline{AC} 의 길이와 끼인각 $\angle BAC$ 를 알기에 코사인법칙을 활용하여 $\overline{BC} = a$ 를 구할 수 있다. $a^2 = 100^2 + 80^2 - 2 \cdot 100 \cdot 80 \cdot \cos 60^\circ = 8400$ 이므로 $a = 20\sqrt{21}$ 이다.

2. 사인법칙을 활용하여 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름을 구해보자.

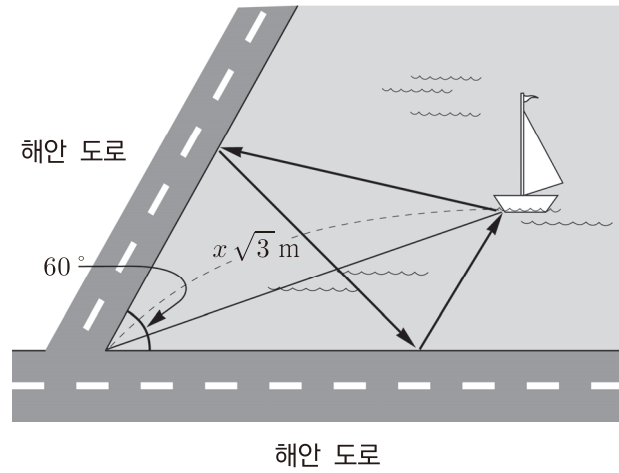
$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R \text{이므로 } \frac{20\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 40\sqrt{7} = 2R \text{에서 } R = 20\sqrt{7} \text{이다.}$$

따라서 호수의 넓이는 $\pi R^2 = 2800\pi$ 이다.

답은 ⑤!!

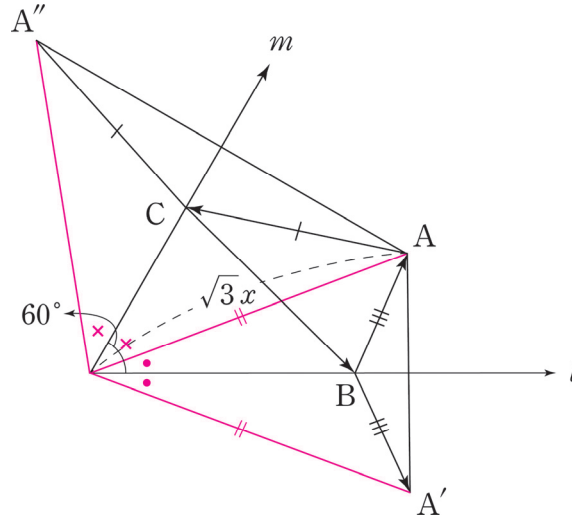
예제(16) 13년 3월 교육청 B형 29번 (고2)

그림과 같이 바다에 인접해 있는 두 해안 도로가 60° 의 각을 이루며 만나고 있다. 두 해안 도로가 만나는 지점에서 바다쪽으로 $x\sqrt{3}$ m 떨어져 있는 배에서 출발하여 두 해안 도로를 차례대로 한번씩 거쳐 다시 배로 되돌아오는 수영코스의 최단길이가 300 m 일 때, x 의 값을 구하시오. (단, 배는 정지해 있고, 두 해안 도로는 일직선 모양이며 그 폭은 무시한다.) [4점]





1. 배의 위치를 점 A , 좌측의 해안 도로를 m , 아래측의 해안 도로를 l 이라 하자.
 배에서 l 을 거칠 때 만나는 l 위의 점을 B . m 을 거칠 때 만나는 m 위의 점을 C 라 하자.

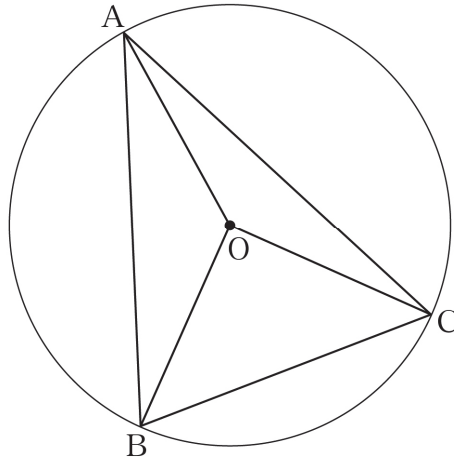


그림과 같이 점 A 를 l 에 대하여 대칭이동 시킨 점을 A' , 점 A 를 m 에 대하여 대칭이동 시킨 점을 A'' 이라 하자. $\overline{AB} = \overline{A'B}$, $\overline{AC} = \overline{A''C}$ 이므로
 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CA''} \geq \overline{A'A''} = 300$ 이다.

2. 두 해안 도로의 교점을 O 라 하면 $\angle A'OA'' = 60^\circ \times 2 = 120^\circ$ 이다.
 $\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''} = x\sqrt{3}$ 이므로 $\triangle OA'A''$ 에서 코사인법칙을 적용하면
 $300^2 = (x\sqrt{3})^2 + (x\sqrt{3})^2 - 2 \times (x\sqrt{3})^2 \cos 120^\circ = 9x^2$ 이다. 따라서 $x = 100$ 이다.

답은 100!!

그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC 에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하자. $3S_1 = 4S_2$ 이고 $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$ 일 때, 선분 AB 의 길이는? [4점]



① $2\sqrt{7}$

② $\sqrt{30}$

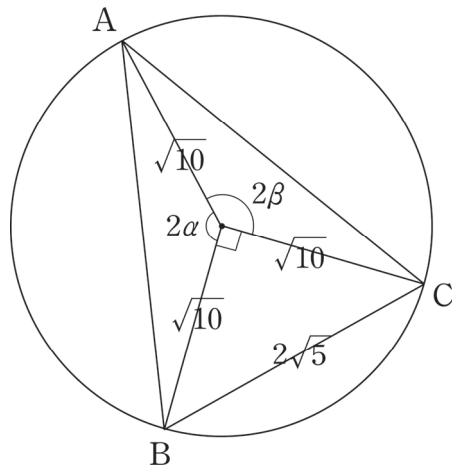
③ $4\sqrt{2}$

④ $\sqrt{34}$

⑤ 6



1. $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$, $\overline{OB} = \overline{OC} = \sqrt{10}$ 이므로 삼각형 OBC 는 직각이등변삼각형이고 $\angle BOC = \frac{\pi}{2}$ 이다.
조건에 맞게 그림을 그려주자.



$\angle AOB = 2\alpha$, $\angle AOC = 2\beta$ 라 하면 두 삼각형 OAB, OCA 의 넓이 S_1, S_2 는 각각
 $S_1 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{10})^2 \times \sin 2\alpha = 5 \sin 2\alpha$, $S_2 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{10})^2 \times \sin 2\beta = 5 \sin 2\beta$ 이다.

주어진 조건에서 $3S_1 = 4S_2$ 이므로 $\sin 2\alpha = \frac{4}{3} \sin 2\beta$ 이다.

$2\alpha + 2\beta + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ 이므로 $\beta = \frac{3}{4}\pi - \alpha$ 이다.

따라서 $\sin 2\alpha = \frac{4}{3} \sin \left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha \right)$ 이므로 $\sin 2\alpha = -\frac{4}{3} \cos 2\alpha$ 에서 $\tan 2\alpha = -\frac{4}{3}$ 이다.

$\tan 2\alpha = -\frac{4}{3}$ 에서 $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ 이다. $\left(\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi \right)$

2. $\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt{10}$, $\angle AOB = 2\alpha$ 이다.

$\triangle OAB$ 에서 \overline{OA} , \overline{OB} 와 끼인각 $\angle AOB$ 의 크기를 알기에 코사인법칙을 활용하여 \overline{AB} 를 표현하면 된다.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{OB} \cos \alpha} \\ &= \sqrt{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2(\sqrt{10})^2 \times \left(-\frac{3}{5} \right)} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

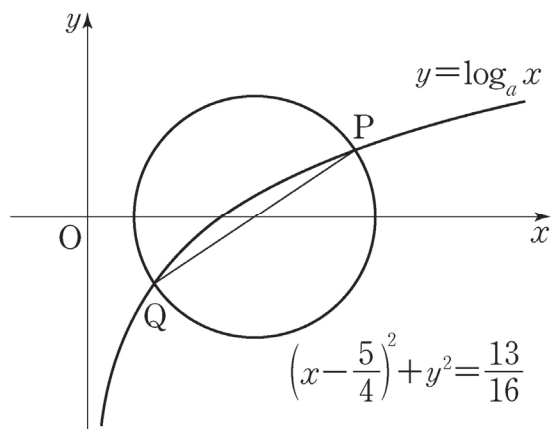
따라서 $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ 이다.

답은 ③!!

CHAPTER 04 유제

01 18학년도 9월 평가원 가형 16번

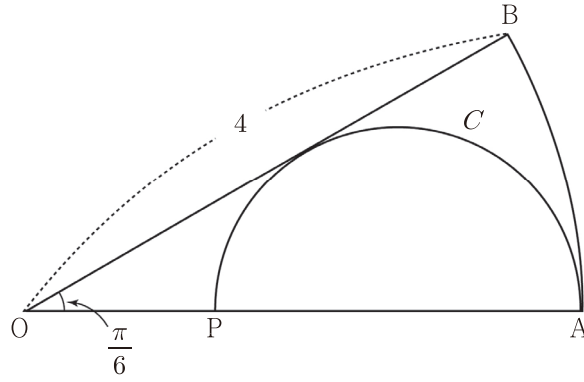
$a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 곡선 $y = \log_a x$ 와 원 $C: \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{13}{16}$ 의 두 교점을 P, Q 라 하자. 선분 PQ 가 원 C의 지름일 때, a 의 값은? [4점]



- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

02 19년 6월 교육청 고2 가형 17번

그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA 위의 점 P에 대하여 선분 PA를 지름으로 하고 선분 OB에 접하는 반원을 C라 할 때, 부채꼴 OAB의 넓이를 S_1 , 반원 C의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 - S_2$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\pi}{9}$ ② $\frac{2}{9}\pi$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{4}{9}\pi$ ⑤ $\frac{5}{9}\pi$

03 19년 3월 교육청 가형 26번

$0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 2 이상의 자연수 n 에 대하여 두 곡선 $y = \sin x$ 와 $y = \sin(nx)$ 의 교점의 개수를 a_n 이라 하자. $a_3 + a_5$ 의 값을 구하시오. [4점]

04 19년 6월 교육청 고2 나형 18번

직선 $y = -\frac{1}{5\pi}x + 1$ 과 함수 $y = \sin x$ 의 그래프의 교점의 개수는? [4점]

① 7

② 8

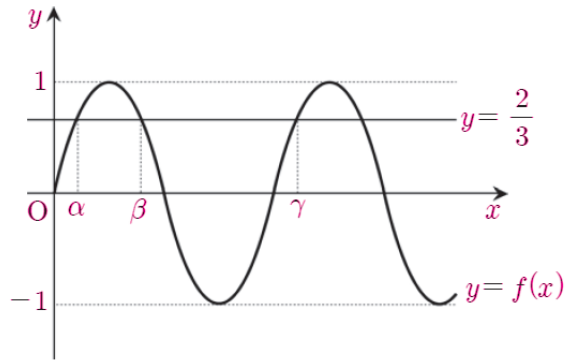
③ 9

④ 10

⑤ 11

05 11년 3월 교육청 고2 17번

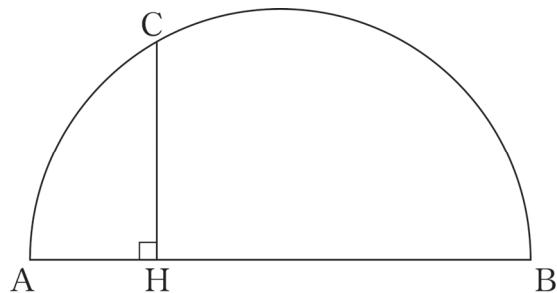
함수 $f(x) = \sin \pi x$ ($x \geq 0$)의 그래프와 직선 $y = \frac{2}{3}$ 가 만나는 점의 x 좌표를 작은 것부터 차례대로 α, β, γ 라 할 때, $f(\alpha + \beta + \gamma + 1) + f\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right)$ 의 값은? [4점]



- ① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

06 17년 3월 교육청 가형 25번

그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원 위에서 호 BC의 길이가 4π 인 점 C를 잡고 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. \overline{CH}^2 의 값을 구하시오. [3점]

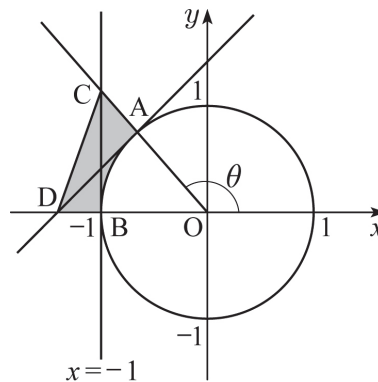


07 10년 3월 교육청 고2 21번

그림과 같이 원점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 A 가 제 2사분면에 있을 때 동경 OA 가 나타내는 각의 크기를 θ 라 하자. 점 $B(-1,0)$ 을 지나는 직선 $x=-1$ 과 동경 OA 가 만나는 점을 C , 점 A 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 D 라 하자. 다음 중 삼각형 OCD 의 넓이에서 부채꼴 OAB 의 넓이를 뺀 어두운 부분의 넓이와 항상 같은 것은?

(단, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$) [4점]

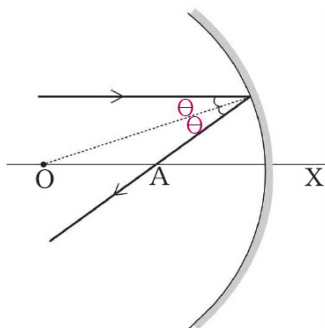
- ① $\frac{1}{2} \left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \pi + \theta \right)$
- ② $\frac{1}{2} \left(-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \pi + \theta \right)$
- ③ $\frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \theta \right)$
- ④ $\frac{1}{2} \left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \pi + \theta \right)$
- ⑤ $\frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \theta \right)$



08 03학년도 수능 인문계 9번

중심이 O 이고 반지름의 길이가 R 인 구면거울이 있다. 그림과 같이 OX 축에 평행하게 입사된 빛이 거울에 반사된 후 축과 만나는 점을 A 라고 할 때, 선분 OA 의 길이는?

(단, 입사각과 반사각의 크기는 θ 로 같고, $0^\circ < \theta < 20^\circ$ 이다.) [2점]



- ① $\frac{R}{2\cos\theta}$
- ② $\frac{R}{2\sin\theta}$
- ③ $R(1 - \cos\theta)$
- ④ $\frac{R}{2\cos 2\theta}$
- ⑤ $\frac{R}{2\sin 2\theta}$

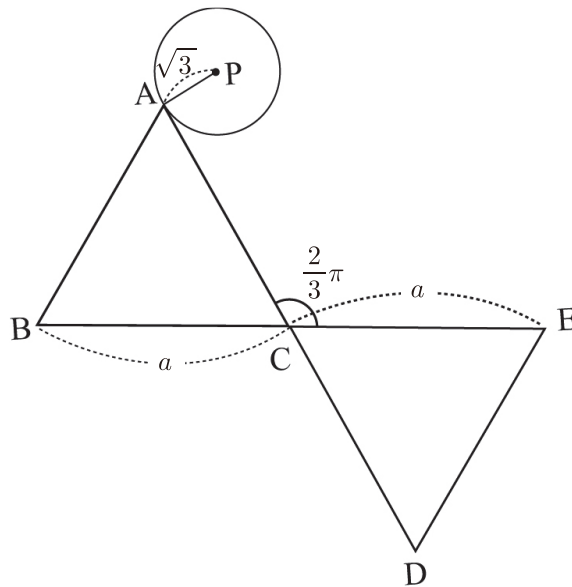
09 20학년도 수능 가형 7번

$0 < x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $4\cos^2 x - 1 = 0$ 과 부등식 $\sin x \cos x < 0$ 을 동시에 만족시키는 모든 x 의 값의 합은? [3점]

- ① 2π ② $\frac{7}{3}\pi$ ③ $\frac{8}{3}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

10 08년 6월 교육청 고2 가형 18번

그림과 같이 $\triangle ABC$ 와 $\triangle CDE$ 는 한 변의 길이가 a 인 정삼각형이고, $\angle ACE = \frac{2}{3}\pi$ 이다.
반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원 P 가 $\triangle ABC$ 와 $\triangle CDE$ 의 둘레를 외접하면서 시계 방향으로 한 바퀴 돌아 처음 출발한 자리로 왔을 때, 원 P 의 중심이 움직인 거리가 $23 + \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ 이다.
 a 의 값은? [4점]



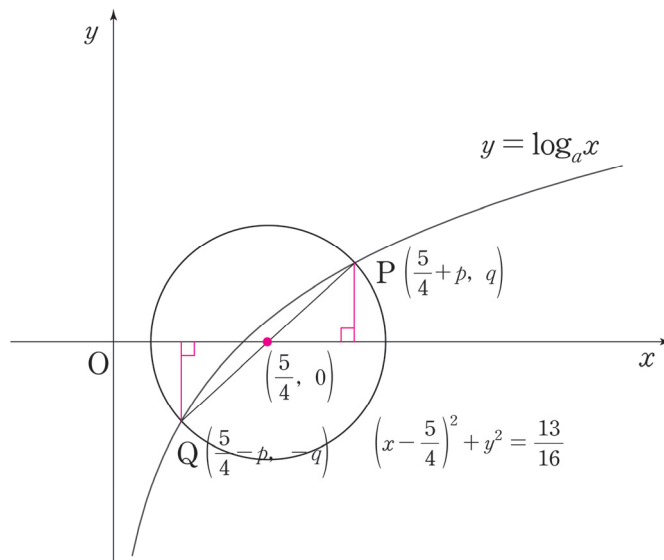
- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

01 18학년도 9월 평가원 16번

답 : ③

1. 선분 PQ는 원의 지름이므로 원의 중심을 지난다. 원의 중심을 점 R이라 하자.

점 R의 좌표는 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ 이다. 이를 활용하여 점 P와 점 Q의 좌표도 잡아주자.



점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{4} + p, q\right)$, 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{5}{4} - p, -q\right)$ 로 나타낼 수 있다.

$(\text{반지름 길이})^2 = \frac{13}{16}$ 이므로 $p^2 + q^2 = \frac{13}{16}$ 임을 쉽게 알 수 있다.

2. 점 P와 점 Q가 곡선 $y = \log_a x$ 위에 있음을 이용하여 p 와 q 의 값을 구하자.

$$\log_a \left(\frac{5}{4} + p\right) = q, \log_a \left(\frac{5}{4} - p\right) = -q \text{ 에서 } \frac{5}{4} + p = \frac{1}{\frac{5}{4} - p} \text{ 이다.}$$

이를 정리하면 $\left(\frac{5}{4} + p\right)\left(\frac{5}{4} - p\right) = 1$ 이다.

$p^2 = \frac{9}{16}$ 에서 $p = \frac{3}{4}$ ($p > 0$)이고, $p^2 + q^2 = \frac{13}{16}$ 이므로 $q^2 = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{2}$ ($q > 0$)이다.

$\log_a \left(\frac{5}{4} + p\right) = \log_a 2 = q = \frac{1}{2}$ 에서 $a = 4$ 이다.

(뒷 페이지 다른 풀이)

※ 다른 풀이

점 P의 좌표를 $(t, \log_a t)$ 라 하자. 점 Q의 y좌표는 점 P의 y좌표와 부호가 반대이므로

$-\log_a t = \log_a \frac{1}{t}$ 이다. 따라서 점 Q의 x좌표가 $\frac{1}{t}$ 임을 구할 수 있다.

점 P, 점 R, 점 Q의 x좌표끼리 등차수열을 이루므로, 점 P와 점 Q의 x좌표끼리의 합은

점 R의 x좌표의 두 배와 같다. 점 R의 x좌표는 $\frac{5}{4}$ 이므로 $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$ 에서 $t = 2 \left(t > \frac{1}{t} \right)$ 이다.

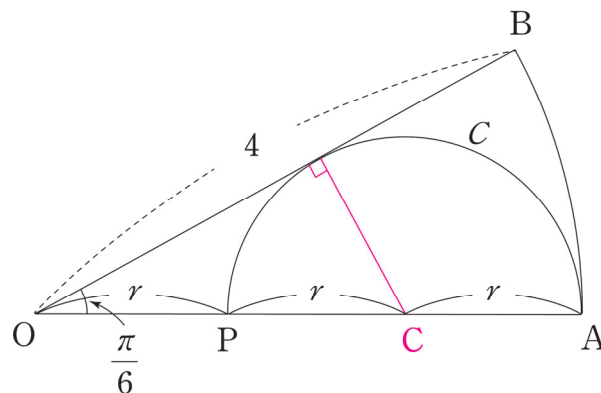
점 P는 원 C 위에 있으므로 대입하면 $\left(2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (\log_a 2)^2 = \frac{13}{16}$ 에서 $(\log_a 2)^2 = \frac{1}{4}$ 이고,

$\log_a 2 = \frac{1}{2} (\log_a 2 > 0)$ 이므로 $a = 4$ 이다.

02 19년 6월 교육청 고2 가형 17번

답 : ④

새 부리를 닮은 내접원 꼴과 매우 유사하게 생겼다. 반원의 중심에서 접점을 잇는 보조선을 긋고 직각을 표시하자.



반원의 중심을 점 C라고 하자. $\angle COB = \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\overline{OC} = 2r$ 이다. 따라서 $\overline{OA} = 3r = 4$ 이다.

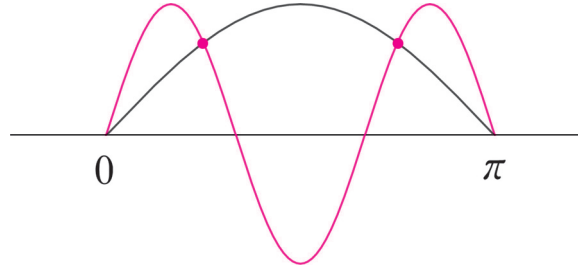
$r = \frac{4}{3}$ 이므로 $S_1 = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi$, $S_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{16}{9}\pi = \frac{8}{9}\pi$ 이다.

따라서 $S_1 - S_2 = \frac{4}{3}\pi - \frac{8}{9}\pi = \frac{4}{9}\pi$ 이다.

03 19년 3월 교육청 가형 26번

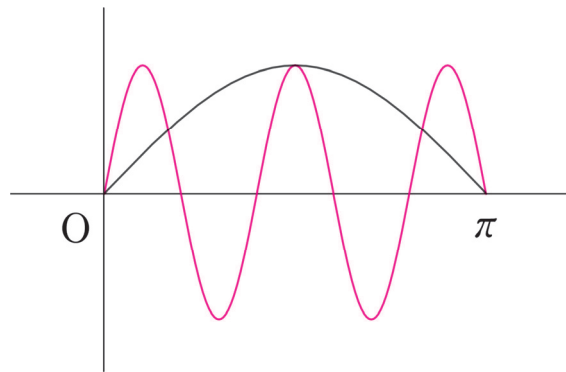
답 : 9

1. a_3 를 구하기 위해 두 곡선 $y = \sin x$ 와 $y = \sin 3x$ 의 그래프를 그려보자.



$a_3 = 4$ 이다.

2. a_5 를 구하기 위해 두 곡선 $y = \sin x$ 와 $y = \sin 5x$ 의 그래프를 그려보자.



$a_5 = 5$ 이다. 따라서 $a_3 + a_5 = 9$ 이다.

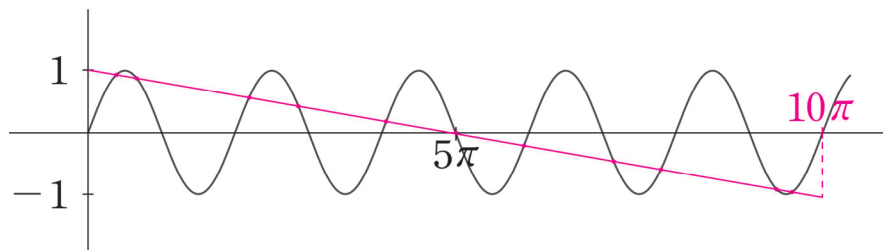
04 19년 6월 교육청 고2 나형 18번

답 : ⑤

$y = \sin x$ 의 최솟값은 -1 , 최댓값은 1 이다. $y = -\frac{1}{5\pi}x + 1$ 는 점 $(0, 1)$, 점 $(10\pi, -1)$ 을 지난다.

또한, 직선 $y = -\frac{1}{5\pi}x + 1$ 의 그래프와 함수 $y = \sin x$ 는 점 $(5\pi, 0)$ 에 대하여 대칭이다.

이를 유의하여 그래프를 그려보자.

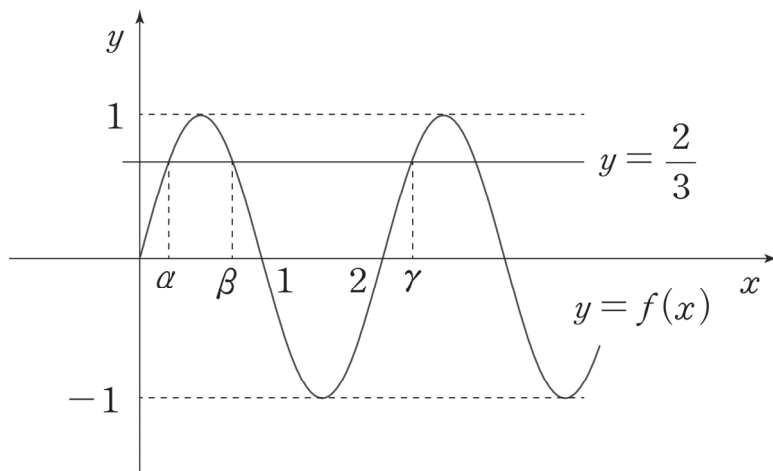


교점의 개수는 $5 \times 2 + 1 = 11$ 이다.

05 11년 3월 교육청 고2 17번

답 : ②

함수 $f(x) = \sin \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이다. 따라서 $f(x) = f(x+2)$ 이다.



삼각함수의 대칭성을 이용하면 $\alpha + \beta = 1$ 이므로 $f(\alpha + \beta + \gamma + 1) = f(\gamma + 2) = f(\gamma) = \frac{2}{3}$ 이다.

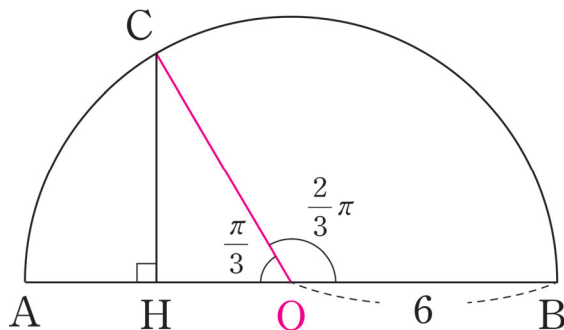
$f\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \sin \frac{3}{2}\pi = -1$ 이다.

따라서 $f(\alpha + \beta + \gamma + 1) + f\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$ 이다.

06 17년 3월 교육청 가형 25번

답 : 27

반원의 중심을 먼저 표시하자. 반원의 중심을 점 O라고 하자.



$\angle COB = \theta$ 라 하면, 호 BC의 길이 $l = 6\theta = 4\pi$ 이므로 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 이다.

$\angle COH = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{CH} = \overline{OC} \sin \frac{2}{3}\pi = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 이다. 따라서 $\overline{CH}^2 = 27$ 이다.

07 10년 3월 교육청 고2 21번

답 : ④

1. 부채꼴 OAB의 넓이를 구하자.

원의 반지름은 1, $\angle AOB = \pi - \theta$ 이므로 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (\pi - \theta)$ 이다.

2. $\triangle OCD$ 의 넓이를 구하기 위해 \overline{OD} 와 \overline{BC} 의 길이를 구하자.

원의 중심 O에서 접점 A를 긋고 직각 표시를 하자.

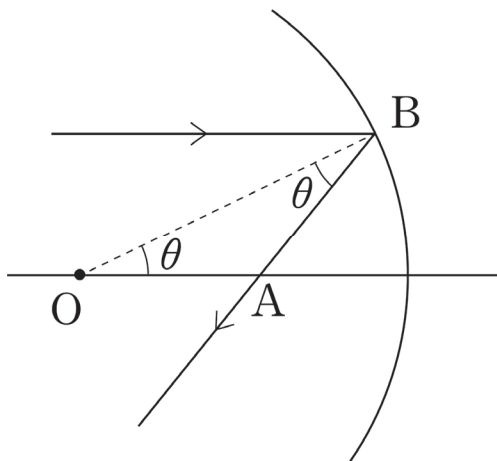
$$\overline{OD} = \frac{1}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{-1}{\cos \theta}, \quad \overline{BC} = \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \text{ 이다.}$$

$$\triangle OCD \text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \frac{-1}{\cos \theta} \times (-\tan \theta) = \frac{\sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 어두운 부분의 넓이는 } \frac{\sin \theta}{2 \cos^2 \theta} - \frac{1}{2}(\pi - \theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \pi + \theta \right)$$

08 03학년도 수능 인문계 9번

답 : ①



입사된 빛과 구면이 만나는 점을 B라고 하자. $\angle BOA$ 는 입사각과 엇각이므로 θ 이다.

$\angle OBA$ 는 반사각이므로 θ 이다. 따라서 $\triangle OAB$ 는 이등변삼각형이다.

$$R = \overline{OB} = 2\overline{OA} \cos \theta \text{ 이므로 } \overline{OA} = \frac{R}{2 \cos \theta} \text{ 이다.}$$

09 20학년도 수능 가형 7번

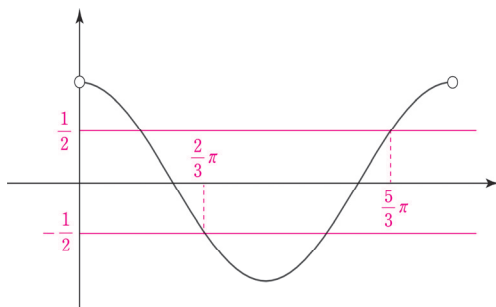
답 : ②

1. $4\cos^2 x - 1 = 0$ 에서 $\cos x = \frac{1}{2}$ or $\cos x = -\frac{1}{2}$ 이다.

2. $\sin x \cos x < 0$ 에서 $\sin x$ 와 $\cos x$ 의 부호가 반대이려면 동경이 제2 사분면과 제4 사분면에 존재해야 한다.

따라서 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ 이다.

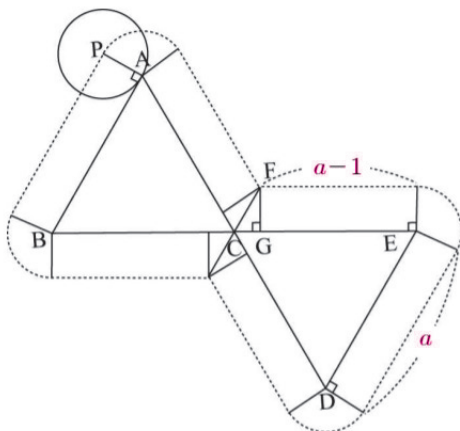
이제 $y = \cos x$ 의 그래프와 두 직선 $y = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ 의 그래프를 그려보자.



$x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$ 이므로 모든 x 의 값의 합은 $\frac{7}{3}\pi$ 이다.

10 08년 6월 교육청 고2 가형 18번

답 : ②



원 P를 굴러보며 원 P의 중심의 자취를 표시하면 위와 같다.

$\overline{FG} = \sqrt{3}$, $\angle FCG = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{CG} = \frac{\sqrt{3}}{\tan \frac{\pi}{3}} = 1$ 이다. 따라서 $\overline{GE} = a - 1$ 이다.

따라서 원 P의 중심이 움직인 거리는 $2 \times a + 4 \times (a - 1) + 4 \times \sqrt{3} \times \frac{2\pi}{3} = 6a - 4 + \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ 이다.

$6a - 4 = 23$ 이므로 $6a = 27$, $a = \frac{9}{2}$ 이다.

◆ 수열

◆ 1. 기본 개념

수열의 정의 : 차례로 나열된 수의 열

항 : 수열에서 나열된 각각의 수

일반항 : 수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 에서 n 번째 항 a_n 을 수열의 일반항이라 한다.

표현 : 일반항이 a_n 인 수열은 $\{a_n\}$ 으로 나타낸다.

◆ 2. 수열과 함수의 관계

수열의 기본적 정의는 차례로 나열된 수의 열이긴 하지만,

함수를 이용한다면 수열은 자연수 전체의 집합 N 을 정의역으로 갖는 함수 $f(n)$ 으로 볼 수 있고,

자연수 n 에 대응하는 함수값 $f(n)$ 이 a_n (수열의 일반항)이 된다.

예를 들어 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 와 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_n = f(n)$ 이면,

수열 $\{a_n\}$ 의 각 항은 함수 $y = f(x)$ 의 정의역을 자연수의 집합으로 제한했을 때의 치역의 원소이다.

이처럼 우리가 익숙하게 알고 있는 실수 전체의 집합에서 정의된 함수들도 정의역을 ‘자연수의 집합’으로 한정하기만 한다면 함수값들을 수열로 볼 수 있고, 관련 기출 문제도 많다.

유리함수 $f(x) = \frac{8x}{2x-15}$ 와 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_n = f(n)$ 이다. (16년 3월 교육청 나형 30번)

$f(x) = \log_4 x$ 일 때, 수열 $\{f(2^n)\}$ 은 등차수열이다. (05학년도 6월 평가원 나형 24번 (ㄴ) 선지)

수열을 함수로 해석한다면 수열에 대한 유연한 관점을 가질 수 있다는 점에서 굉장히 유용하다. 등차, 등비수열, 수열의 합에서도 수열의 함수적 의미가 매우 중요하므로 앞으로는 계속해서 수열과 함수를 연결지어 사고하자.

◆ 등차수열

◆ 1. 등차수열의 정의, 판별, 함수와의 관계

(1) 정의

첫째항부터 차례로 일정한 수를 더해 만들어지는 수열을 등차수열이라 한다.

등차수열에서 더하는 일정한 수 또는 연속인 두 항의 차를 공차라고 하고, 일반적으로 d 로 표현한다.

첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은 다음과 같다.

$$a_n = a + (n-1)d \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

이때, 첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열의 귀납적 정의는 다음과 같다. (수열의 귀납적 정의는 수열을 위와 같은 일반항이 아닌 ‘처음의 몇 개의 항과 이웃하는 항의 관계식’을 통해 정의하는 것을 말한다. <Chapter 6>에서 자세히 배운다.)

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{혹은} \quad a_1 = a, \quad a_{n+1} - a_n = d \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

오른쪽 식은 왼쪽 식에서 a_n 을 이항한 것뿐이지만, 실제 문제에서 만났을 때 헷갈리는 경우가 종종 있으므로 두 형태 모두 알아두자.

혹은 다음과 같이 등차중항을 이용해서 등차수열을 귀납적으로 정의할 수도 있다.

$$a_1 = a, \quad a_2 = a + d, \quad a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{혹은} \\ a_1 = a, \quad a_2 = a + d, \quad a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

※ $\{a_n\}$ 이 등차수열이라면 ‘ $\{a_n\}$ 의 서로 다른 두 항의 값’ 또는 ‘ $\{a_n\}$ 의 하나의 항의 값과 공차’만 안다면 일반항 a_n 을 구할 수 있다. 등차수열의 일반항은 미지수 a, d 를 포함하고 있으므로 일반항을 완전히 알아 내려면 서로 다른 두 개의 정보가 필요한 것이다.

태도: 서로 다른 n 개의 미지수의 값을 알아내려면 적어도 서로 다른 n 개의 정보가 필요하다.

(2) 등차수열 판별 (다항식으로 보는 등차수열)

첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 $a_n = a + (n-1)d$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)에서 a_n 을 n 에 관해 정리하면 $a_n = dn + a - d$ 이다.

이때

$d = 0$ 이면 a_n 은 상수이고,

$d \neq 0$ 이면 a_n 은 n 에 관한 일차식이다.

특히 n 의 계수가 $\{a_n\}$ 의 공차라는 점이 중요하다.

어떤 수열 $\{b_n\}$ 이 등차수열인지 판별하고 싶다면 해당 식이 상수 또는 n 에 관한 일차식에 해당하는지 관찰하면 된다. 둘 중 어느 것에도 해당하지 않는다면 수열 $\{b_n\}$ 은 등차수열이 아니다. 일반항이 상수인 수열도 등차수열임을 주의하자.

(3) 등차수열과 함수의 관계

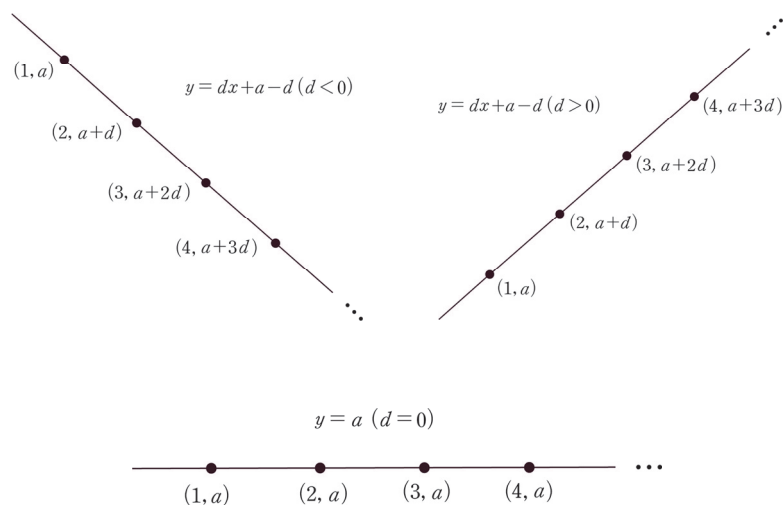
첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 $a_n = a + (n-1)d$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)에서 a_n 을 n 에 관해 정리하면 $a_n = dn + a - d$ 이다.

이때, $f(x) = dx + a - d$ 에 대하여 $a_n = f(n)$ 이라 하면

등차수열 $\{a_n\}$ 의 항은 직선 $y = dx + a - d$ 위의 x 좌표가 자연수인 점들의 y 좌표와 같다.

이때, 직선 $y = dx + a - d$ 의 기울기 d 는 $\{a_n\}$ 의 공차와 같다는 점이 포인트다.

d 의 부호에 따라 직선 $y = dx + a - d$ 위의 x 좌표가 자연수인 점들을 관찰하면 쉽게 이해할 수 있다.



아래 예제는 수학II 내용이 주를 이루지만, 등차수열과 관련하여 중요한 포인트를 담고 있다.

예제(1) 20학년도 9월 평가원 나형 30번

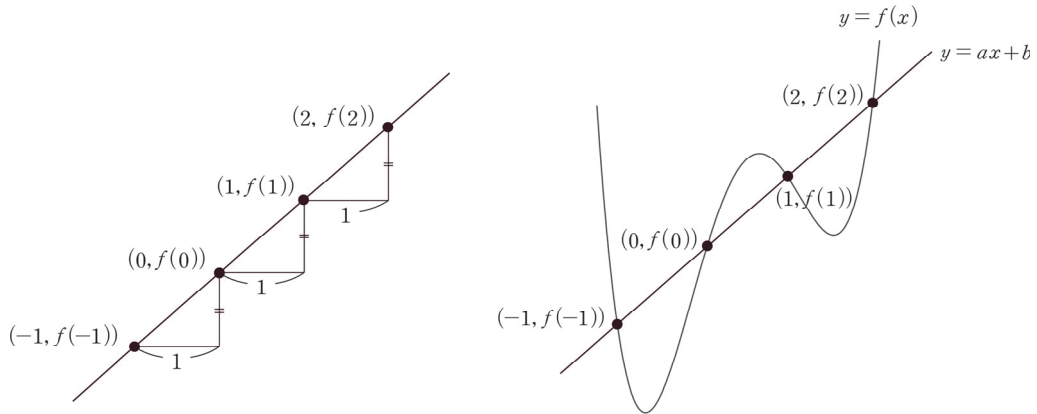
최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선과 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선이 점 $(k, 0)$ 에서 만난다. $f(2k) = 20$ 일 때, $f(4k)$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.) [4점]



1. 순서대로 등차수열을 이루는 네 개의 수 $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 의 x 좌표 $-1, 0, 1, 2$ 또한 이 순서대로 등차수열을 이루므로

네 점 $(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))$ 는 모두 한 직선 위에 존재한다.

그림으로 이해해도 좋고, 수식으로 이해해도 좋다. $f(0) - f(-1) = f(1) - f(0) = f(2) - f(1)$ 에 의하여 $\frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$ 이다.



네 점 $(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))$ 을 모두 지나가는 직선 l 의 방정식을 $y = ax + b$ (단, a, b 는 상수)라 하자.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 는 서로 다른 네 점 $(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))$ 에서 만나므로 **차이함수**를 이용하면 $f(x) - (ax + b) = x(x+1)(x-1)(x-2)$ 이다.

2. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선과 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선이 점 $(k, 0)$ 에서 만난다. 그래프 특성을 이용하고 싶지만 그래프 특성으로 해결하기는 어려워 보인다. **정직하게 두 접선의 방정식을 구한 다음 $(k, 0)$ 을 대입하자.** (무작정 조건을 식으로 표현하기보다 그래프 특성을 이용하려는 시도 자체가 중요하다.)

$$f(x) - (ax + b) = x(x+1)(x-1)(x-2) \text{에서 } f(-1) = -a + b, f(2) = 2a + b$$

$$f'(x) - a = (x+1)(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2) + x(x+1)(x-2) + x(x+1)(x-1) \text{에서}$$

$$f'(-1) = a - 6, f'(2) = a + 6$$

※ 해설을 위해 $f(x) - (ax + b) = x(x+1)(x-1)(x-2)$ 의 양변을 x 에 대하여 일일이 미분했지만, 실전에서는 곱의 미분의 특성을 바로 이용하면 된다.

$f'(x) - a = (x+1)(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2) + x(x+1)(x-2) + x(x+1)(x-1)$
에 $x = -1$ 을 대입하면 $(x+1)$ 을 인수로 갖는 항은 모두 사라지므로 $x(x-1)(x-2)$ 에만 $x = -1$ 을 대입하면 된다.

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선의 방정식 : $y = (a-6)(x+1) - a + b$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 방정식 : $y = (a+6)(x-2) + 2a + b$

두 접선이 모두 점 $(k, 0)$ 을 지나므로

$$0 = (a-6)(k+1) - a + b, 0 = ak - 6k - 6 + b, 6(k+1) = ak + b \cdots \textcircled{㉠}$$

$$0 = (a+6)(k-2) + 2a + b, 0 = ak + 6k - 12 + b, 6(-k+2) = ak + b \cdots \textcircled{㉡}$$

$$6(k+1) = 6(-k+2) \text{이므로}$$

$$6k + 6 = -6k + 12, 12k = 6 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

3. a, b 의 값을 구하려면 한 가지 조건이 더 필요하다. $f(2k) = 20$ 을 이용하자.

$f(2k) = f(1) = 20$ 이므로 $f(x) - (ax+b) = x(x+1)(x-1)(x-2)$ 에서
 $f(1) = a+b = 20$

$$\textcircled{㉠} \text{에 } k = \frac{1}{2} \text{을 대입하면 } 9 = \frac{1}{2}a + b$$

$$a+b = 20 \text{와 } 9 = \frac{1}{2}a + b \text{를 연립하면 } a = 22, b = -2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x(x+1)(x-1)(x-2) + 22x - 2 \text{이므로 } f(4k) = f(2) = 22 \times 2 - 2 = 42$$

답은 42!!

comment

등차수열과 직선을 연관 짓는 아이디어가 있다면 30번 문항치고는 무난한 문항이지만 사전에 등차수열과 직선을 연결지을 수 있다는 점을 배우지 않은 학생들은 실전에서 이를 생각하기 어려울 수 있다.

평가원은 발상적인 풀이가 유일한 풀이가 되도록 문제를 설계하지 않는다.

(등차수열과 직선을 연결짓는 게 발상이라는 것은 논쟁의 여지가 있다. 알아두긴 해야 한다.)

이 문항도 다른 방법으로 풀 수 있는데, 어떤 방법일지 고민해보고 다음 페이지를 보자.



〈네 점을 지나가는 직선을 떠올리지 못했을 때의 풀이〉

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 네 개의 수 $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다는 것에서 그래프 특징을 발견하기는 어렵다. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 의 일반식을 작성하여 $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 의 값을 일일이 식으로 나타내자.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 의 일반식을 작성하면,

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (\text{단, } a, b, c, d \text{는 상수})$$

$$f(-1) = 1 - a + b - c + d$$

$$f(0) = d$$

$$f(1) = 1 + a + b + c + d$$

$$f(2) = 16 + 8a + 4b + 2c + d$$

네 개의 값이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $f(0) - f(-1) = f(1) - f(0) = f(2) - f(1)$
 $-1 + a - b + c = 1 + a + b + c = 15 + 7a + 3b + c$ 모든 변에서 c 를 빼면,
 $-1 + a - b = 1 + a + b = 15 + 7a + 3b$

$$-1 + a - b = 1 + a + b \text{에서 } 2b = -2 \quad \therefore b = -1$$

$$1 + a + b = 15 + 7a + 3b \text{에 } b = -1 \text{을 대입하면 } a = 12 + 7a, \quad 6a = -12 \quad \therefore a = -2$$

$$c \text{를 구할 수는 없으므로 } f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + cx + d$$

본 해설에서는 등차수열과 직선의 관계에 착안하여

$$f(x) - (ax + b) = x(x+1)(x-1)(x-2) \text{을 얻었고,}$$

여기서는 사차함수의 일반식 설정, 대입으로 $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + cx + d$ 을 얻었다.

두 식 모두 2개의 미지수를 가지므로 이후의 풀이는 같다. 두 풀이 모두 알아두자.

◆ 2. 등차중항

세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 등차중항이라고 한다.

b 가 a, c 의 등차중항이면 $b - a = c - b = (\text{공차})$ 이므로 $2b = a + c$, $b = \frac{a+c}{2}$ 가 성립한다.

이때, $\frac{a+c}{2}$ 는 a 와 c 의 평균이므로 **b 를 a, c 의 평균으로 해석하자.**

등차수열의 가장 중요한 특징은 등차중항이다. 등차수열의 일반항이 간단하다는 이유로 등차수열 문제를 볼 때마다 일반항부터 작성하여 문제 속 조건을 대입하여 푸는 학생들이 많은데 이제부터는 그 습관을 버리자.

등차중항을 이용하면 계산이 수월해지므로 등차수열 문제를 본다면 일반항이 아닌 등차중항부터 생각해야 한다.

등차중항으로 문제를 풀기 어려운 경우에만 일반항을 작성하면 된다.

등차중항과 관련된 팁을 주자면, 순서대로 등차수열을 이루는 세 개의 수는 $a, a+d, a+2d$ 로 표현하기보다 $a-d, a, a+d$ 로 표현하자. 이 경우 세 수의 합은 $3a$ 가 된다.

순서대로 등차수열을 이루는 네 개의 수는 $a-3k, a-k, a+k, a+3k$ 로 표현하자. 이 경우 네 수의 합은 $4a$ 가 된다. 등차수열에서는 이처럼 중심을 먼저 고려하는 습관이 중요하다.

※ 등차수열에서 합(혹은 평균)이 같은 쌍들

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots$

자연수 p, q 에 대해 등차수열 $\{a_n\}$ 의 항 a_p 와 a_q 가 있을 때,

$p+q$ 의 값이 같은 (a_p, a_q) 쌍에 대해 $a_p + a_q$ 의 값(혹은 a_p 와 a_q 의 평균)은 일정하다.

첫째항이 a 이고, 공차가 d 인 등차수열의 일반항을 이용하여 바로 증명할 수 있다.

$$a_p = a + (p-1)d, \quad a_q = a + (q-1)d \text{이므로 } a_p + a_q = 2a + (p+q-2)d$$

이때, a, d 는 상수이므로 $p+q$ 가 상수라면 $a_p + a_q$ 의 값은 상수가 된다.

등차수열에서 ‘합이 같은 쌍’은 ‘등차중항’과 더불어 등차수열 문제에서 계산을 줄일 수 있는 강력한 도구이므로 반드시 숙지하자. 이 도구를 이용하면 다음과 같은 문제의 답을 빠르게 구할 수 있다.

예시 12년 3월 교육청 나형 22번

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 4$, $a_2 + a_3 = 17$ 일 때, a_4 의 값을 구하시오. [3점]

→ $a_2 + a_3 = a_1 + a_4$ 이므로 $17 = 4 + a_4$, $a_4 = 13$ 이다. 답은 13!!

❖ 3. 등차수열의 합

(1) 등차수열의 합의 원리

등차수열의 합 공식을 모르는 학생은 거의 없을 것이다.

첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

첫째항이 a , 제 n 항이 l 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

그러나 이를 제대로 이해하고 있는 학생은 많지 않다. 대부분 두 개의 등차수열의 합 공식을 독립적인 공식으로 인식하고, 등차수열의 합을 구할 때 둘 중 하나의 공식에 값을 대입하는 식으로 문제를 푸는데 이러면 수능 수학이 추구하는 자유로운 사고로부터 멀어진다.

이제부터 등차수열의 합은 다음의 공식으로 이해하자.

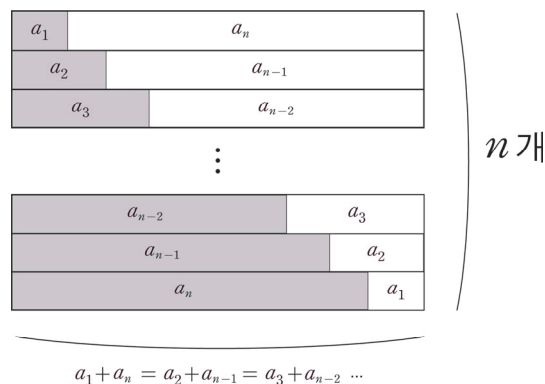
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(a_2 + a_{n-1})}{2} = \frac{n(a_3 + a_{n-2})}{2} = \dots$$

가장 기본이 되는 형태는 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 이고, (첫째항과 끝항의 평균) \times (항의 개수)로 이해하면 된다.

$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{n\{a + a + (n-1)d\}}{2} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 이므로 $S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$ 도 독립적으로 외우는 것이 아니라 이러한 관점에서 자연스럽게 이해할 수 있어야 한다.

이전 페이지에서 알아봤듯이 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots$ 이므로

$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(a_2 + a_{n-1})}{2} = \frac{n(a_3 + a_{n-2})}{2} = \dots$ 이다. 아래의 그림과 함께 이해하자.



따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 a_1 부터 a_n 까지의 합을 구할 때, **문제 상황에 따라 주어진 수열에서 $(a_1, a_n), (a_2, a_{n-1}), (a_3, a_{n-2}), \dots$ 중 아무 쌍이나 하나를 선택해서 합을 구하면 된다.**

단순히 등차수열의 합 공식을 외운 학생과, 등차수열의 합 공식의 원리를 이해한 학생은 풀이 속도에서 유의미한 차이를 가져온다. 등차수열의 합의 원리를 이해했다면 다음의 문제들은 손쉽게 답을 구해야 한다.

예시(1) 15학년도 9월 평가원 A형 24번

등차수열 a_n 에 대하여 $a_1 + a_{10} = 22$ 일 때 $\sum_{k=2}^9 a_k$ 의 값을 구하시오. [3점]



$$\sum_{k=2}^9 a_k = \frac{8(a_2 + a_9)}{2} = \frac{8(a_1 + a_{10})}{2} = 4 \times 22 = 88 \text{이다.}$$

답은 88!!

예시(2) 11학년도 6월 평가원 나형 6번

1과 2사이에 n 개의 수를 넣어 만든 등차수열

$$1, a_1, a_2, \dots, a_n, 2$$

의 합이 24일 때, n 의 값은? [3점]

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15



첫째항은 1, 끝항은 2, 항의 개수는 $n+2$ 이므로 $\frac{3(n+2)}{2} = 24$, $n+2 = 16$, $n = 14$ 이다.

답은 ④!!

예제(2) 20년 3월 교육청 나형 17번

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 42$ 일 때, 다음 조건을 만족시키는 4 이상의 자연수 k 의 값은? [4점]

(가) $a_{k-3} + a_{k-1} = -24$

(나) $S_k = k^2$

① 13

② 14

③ 15

④ 16

⑤ 17



1. 등차수열의 일반항 $a + (n-1)d$ 는 두 개의 미지수 a, d 를 포함하고, 문제 속에서 새로운 미지수 k 가 등장했다. 즉, 미지수는 3개다.

이때, 세 개의 미지수 a, d, k 에 관한 서로 다른 세 개의 식 $a_3 = 42$, $a_{k-3} + a_{k-1} = -24$, $S_k = k^2$ 이 있으므로 일반항에 적절히 숫자를 대입한 다음 세 개의 식을 연립하면 a, d, k 의 값을 모두 구할 수 있다.

그러나 이러한 풀이는 계산이 상당히 복잡하고, 누가 봐도 출제 의도와는 거리가 먼 풀이이다. **등차수열의 합에서 배운 도구**를 활용하자.

$$2. S_k = \frac{k(a_1 + a_k)}{2} = \frac{k(a_2 + a_{k-1})}{2} = \frac{k(a_3 + a_{k-2})}{2} = \frac{k(a_4 + a_{k-3})}{2} = \dots = k^2$$

문제에서 주어진 항은 $a_3 = 42$ 이므로 $S_k = \frac{k(a_3 + a_{k-2})}{2} = k^2$ 을 이용하자.

이때, 출제자에 감탄해야 한다. (가)에서 $a_{k-3} + a_{k-1} = -24$ 이므로 등차중항에 의하여

$$\frac{a_{k-3} + a_{k-1}}{2} = a_{k-2} = -12$$

$a_3 = 42$, $a_{k-2} = -12$ 를 $\frac{k(a_3 + a_{k-2})}{2} = k^2$ 에 대입하자.

$$\frac{k(a_3 + a_{k-2})}{2} = \frac{k(42 - 12)}{2} = k^2$$

$15k = k^2$ 에서 양변을 k 로 나누면 ($\because k \geq 4$)

$$15 = k$$

답은 ③!!

comment

정말 잘 만든 문항이다. ‘등차수열의 합의 원리를 생각하고 접근하는 학생’과 ‘아무 생각 없이 일반항을 작성한 뒤 대입, 계산으로 접근하는 학생’ 사이에 엄청난 풀이 시간의 차이를 만들어내기 때문이다.

지금까지 배운 내용을 바탕으로 준킬러 문항을 풀어보자.

예제(3) 20학년도 사관 나형 29번

수열 $\{a_n\}$ 은 a_1 이 자연수이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - d & (a_n \geq 0) \\ a_n + d & (a_n < 0) \end{cases} \quad (d \text{는 자연수})$$

이다. $a_n < 0$ 인 자연수 n 의 최솟값을 m 이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 3$

(나) $a_1 + a_{m-1} = -9(a_m + a_{m+1})$

(다) $\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 45$

a_1 의 값을 구하시오. (단, $m \geq 3$) [4점]



1. 수열 $\{a_n\}$ 은 양수인 항에 대해 d 만큼 빼고, 음수인 항에 대해 d 만큼 더하는 수열이다.

이때, $a_n < 0$ 인 자연수 n 의 최솟값이 m 이므로 a_m 이 처음으로 음수가 되는 항이다.

즉, 수열 $\{a_n\}$ 의 정의에 의해 m 개의 항으로 구성된 수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}, a_m$ 은 공차가 첫째항이 a_1 이고 공차가 $-d$ 인 등차수열이다.

2. 박스 안 조건을 따져보자. 우선 (가)에서 $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 3$ 이고, a_{m-1} 은 a_{m-2} 와 a_m 의 등차중항이므로 $a_{m-1} = 1$ 이다.

다음으로 (나)에서 $a_1 + a_{m-1} = -9(a_m + a_{m+1})$ 이고, (다)에서 $\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 45$ 이다.

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k = \frac{(m-1)(a_1 + a_{m-1})}{2} = 45 \text{ 이므로 } a_1 + a_{m-1} = \frac{90}{m-1} \text{ 이다.}$$

$$a_1 + a_{m-1} = \frac{90}{m-1} \text{ 을 } a_1 + a_{m-1} = -9(a_m + a_{m+1}) \text{ 에 대입하면 } \frac{90}{m-1} = -9(a_m + a_{m+1})$$

$$a_m = a_{m-1} - d = 1 - d$$

$$a_{m+1} = a_m + d = 1 \quad (\because a_m < 0) \text{ 이므로}$$

$$\frac{90}{m-1} = -9(1 - d + 1)$$

$$-10 = (m-1)(2-d)$$

$$\therefore (m-1)(d-2) = 10$$

3. $(m-1)(d-2) = 10$ 을 만족시키는 m, d 의 값을 구하려면 한 가지 식이 더 필요하다.

$$a_1 + a_{m-1} = \frac{90}{m-1} \text{ 를 마저 이용하자.}$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}, a_m$ 은 첫째항이 a_1 , 공차가 $-d$ 인 등차수열이고 $a_{m-1} = 1$ 이다.

즉, $a_{m-1} = a_1 - (m-2)d = 1$ 이므로 $a_1 = 1 + (m-2)d$ 이다.

$$\text{따라서 } a_1 + a_{m-1} = \frac{90}{m-1} \text{ 에서}$$

$$\{1 + (m-2)d\} + 1 = -9\{(1-d) + 1\}$$

$$2 + (m-2)d = -9(2-d)$$

$$(m-11)d = -20$$

$$\therefore d = \frac{20}{11-m}$$

4. $d = \frac{20}{11-m}$ 를 $(m-1)(d-2) = 10$ 에 대입하여 m, d 의 값을 구하자.

$$(m-1)\left(\frac{20}{11-m}-2\right)=10$$

$$(m-1)\{20-2(11-m)\}=10(11-m)$$

$$(m-1)(m-1)=5(11-m)$$

$$m^2-2m+1=55-5m$$

$$m^2+3m-54=0$$

$$(m-6)(m+9)=0$$

$$\therefore m=6 \text{ 또는 } m=-9$$

$$m \text{은 자연수이므로 } m=6, d=\frac{20}{11-6}=4$$

$$\text{따라서 } a_1=1+(m-2)d=1+(6-2)4=17 \text{이다.}$$

답은 17!!

comment

1. 수열 $\{a_n\}$ 이 어떤 수열인지 파악한 다음, a_1 부터 a_m 까지는 공차가 $-d$ 인 등차수열임을 파악한다.
2. 등차중항을 이용하여 a_{m-1} 의 값을 구한다.
3. 미지수의 개수는 m, d 두 개이므로 (나) 식과 (다) 식을 연립하여 m, d 의 값을 구한다. 이때, 해설처럼

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k = \frac{(m-1)(a_1 + a_{m-1})}{2} = 45 \text{을 이용하면 계산이 비교적 간단해진다.}$$

예제(4) 20년 7월 교육청 나형 21번

첫째항이 양수이고 공차가 -1 보다 작은 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 은 다음과 같다.

$$b_n = \begin{cases} a_{n+1} - \frac{n}{2} & (a_n \geq 0) \\ a_n + \frac{n}{2} & (a_n < 0) \end{cases}$$

수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_5 < b_6$

(나) $S_5 = S_9 = 0$

$S_n \leq -70$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은? [4점]

① 13

② 15

③ 17

④ 19

⑤ 21



1. 조건 (가)를 해석하기 위해 $b_6 - b_5$ 를 조사해보자.

(1) $a_5 \geq 0, a_6 \geq 0$ 일 때

$$b_6 - b_5 = (a_7 - 3) - \left(a_6 - \frac{5}{2}\right) = a_7 - a_6 - \frac{1}{2} < 0 \text{이다.}$$

따라서 $b_6 < b_5$ 가 되어 모순이다.

(2) $a_5 < 0, a_6 < 0$ 일 때

$$b_6 - b_5 = (a_6 + 3) - \left(a_5 + \frac{5}{2}\right) = a_6 - a_5 + \frac{1}{2} < 0 \text{이다.}$$

따라서 $b_6 < b_5$ 가 되어 모순이다.

수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 음수이므로 (1), (2)에 의하여 $a_5 \geq 0, a_6 < 0$ 이다.

따라서 $1 \leq n \leq 5$ 에서 $b_n = a_{n+1} - \frac{n}{2}$ 이고, $n \geq 6$ 에서 $b_n = a_n + \frac{n}{2}$ 이다.

2. S_5 를 계산해보자. $1 \leq n \leq 5$ 에서 $\{b_n\}$ 은 등차수열이므로 등차수열의 합 공식과 등차중항을

적절히 활용하면 $S_5 = \frac{5}{2}(b_1 + b_5) = \frac{5}{2} \times 2b_3 = 0$ 을 얻는다. 따라서 $b_3 = 0$ 이다.

$$b_3 = a_4 - \frac{3}{2} = 0 \text{이므로 } a_4 = \frac{3}{2} \text{이다.}$$

S_9 를 계산해보자. $S_9 = S_9 - S_5 = b_6 + b_7 + b_8 + b_9$ 이다.

$n \geq 6$ 에서 $\{b_n\}$ 은 등차수열이므로 등차수열의 합 공식을 적절히 활용하자.

$$S_9 = b_6 + b_7 + b_8 + b_9 = \frac{4}{2}(b_6 + b_9) = 0 \text{을 얻는다. 따라서 } b_6 + b_9 = 0 \text{이다.}$$

$$b_6 + b_9 = a_6 + \frac{6}{2} + a_9 + \frac{9}{2} = a_6 + a_9 + \frac{15}{2} = 0 \text{이다.}$$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$a_4 = a_1 + 3d = \frac{3}{2}$$

$$a_6 + a_9 = 2a_1 + 13d = -\frac{15}{2} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } 2a_1 + 13d - 2(a_1 + 3d) = 7d = -\frac{15}{2} - 3 = -\frac{21}{2} \text{이므로 } d = -\frac{3}{2}, a_1 = 6 \text{이고,}$$

$$a_n = -\frac{3}{2}n + \frac{15}{2} \text{이다.}$$

4. 이제 n 의 최솟값을 구해보자. $S_n = S_n - S_9 = \sum_{k=10}^n b_k = \frac{1}{2}(n-9)(b_{10} + b_n) \leq -70$ 에서

$$b_{10} = a_{10} + \frac{10}{2} = -\frac{5}{2}, b_n = a_n + \frac{n}{2} = -\frac{3}{2}n + \frac{15}{2} + \frac{n}{2} = -n + \frac{15}{2} \text{이므로}$$

$$S_n = \frac{1}{2}(n-9)\left(-\frac{5}{2} - n + \frac{15}{2}\right) \leq -70 \text{이다.}$$

따라서 $(n-9)(n-5) \geq 140$ 에서 $n^2 - 14n - 95 = (n+5)(n-19) \geq 0$ 이다.
 $n \geq 19$ 에서 n 의 최솟값은 19이다.

답은 ④!!

comment

첫째항이 양수이고 공차가 음수인 등차수열은 기출 단골 소재이다. 이 수열은 어떤 자연수 k 에 대하여 $1 \leq n \leq k$ 에서 $a_n \geq 0$ 이고 $n \geq k+1$ 에서 $a_n < 0$ 이다. 마찬가지로, 첫째항이 음수이고 공차가 양수인 등차수열은 어느 항까지는 음수이고 그 뒤로는 양수이다.

(2) 등차중항으로 구하는 등차수열의 합

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ 의 값은 $\frac{5(a_3 + a_7)}{2} = \frac{5(a_4 + a_6)}{2}$ 이다.

이때, ‘ a_3 과 a_7 의 등차중항’과 ‘ a_4 와 a_6 의 등차중항’은 모두 a_5 이므로 $\frac{a_3 + a_7}{2} = \frac{a_4 + a_6}{2} = a_5$ 이다.

즉, $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 5a_5$ 이다. 이제부터는 중간과정을 모두 생략하고 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ 을 보자마자 $5a_5$ 를 말할 수 있도록 연습하자.

① $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 의 값은 얼마인가? $5a_5$ 이다.

② $a_1 + a_2 + a_3$ 의 값은 얼마인가? $3a_2$ 이다.

③ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 의 값은 얼마인가? a_2 와 a_3 의 등차중항이 존재하지 않으므로 $\frac{4(a_1 + a_4)}{2}$ 또는 $\frac{4(a_2 + a_3)}{2}$ 으로 나타내는 수밖에 없다.

④ $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은 얼마인가? a_3 과 a_5 의 등차중항이 a_4 이므로 $4a_4$ 이다.

다시 말하지만 등차수열에서 가장 중요한 것은 등차중항이고, 등차수열의 합을 구할 때도 등차중항을 통해 사고하는 것이 유용하다.

$$(3) \sum_{k=p}^q a_k + dn(q-p+1) = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k \quad (\text{단, } p, q \text{는 } q > p \text{인 자연수이고 } \{a_n\} \text{은 공차가 } d \text{인 등차수열})$$

공식을 외우려 하지 말고 이해하자. $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$ 가 $a_{p+n} + a_{p+n+1} + \cdots + a_{q+n}$ 이 되기 위한 조건을 생각하면 자연스럽게 이해할 수 있다.

$$a_p + dn = a_{p+n}$$

$$a_{p+1} + dn = a_{p+n+1}$$

⋮

$$a_q + dn = a_{q+n} \text{이므로}$$

$$a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q + \{dn \times (q-p+1)\} = a_{p+n} + a_{p+n+1} + \cdots + a_{q+n} \text{이다.}$$

$$\text{시그마를 이용하여 예쁘게 정리하면 } \sum_{k=p}^q a_k + dn(p-q+1) = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k \text{이다.}$$

앞으로 두 등차수열의 합이 있을 때 $\sum_{k=p}^q a_k + dn(p-q+1) = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ 성질을 이용할 수 있는지 확인하자.

(4) 다항식으로 이해하는 등차수열의 합

첫째항이 a 이고 공차가 d 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 S_n 을 n 에 관해 정리하면 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{dn^2 + (2a-d)n}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n$$

즉, S_n 은 상수항이 0인 n 에 관한 이차식이다. 이를 인수의 관점으로 해석하면 S_n 은 n 을 인수로 가진다.

이 점을 바탕으로 등차수열의 합에 관한 기출 문제를 풀어보자.

예제(5) 09학년도 6월 평가원 나형 16번

공차가 d_1, d_2 인 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하자.

$$S_n T_n = n^2(n^2 - 1)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_n = n$ 이면 $b_n = 4n - 4$ 이다.

ㄴ. $d_1 d_2 = 4$

ㄷ. $a_1 \neq 0$ 이면 $a_n = n$ 이다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



1. $a_n = n$ 이므로 $S_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이다. (혹은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열의 합을 구하면 된다.)

$S_n T_n = n^2(n^2 - 1)$ 이므로 $T_n = 2n(n-1)$ 이다.

① 선지 (ㄱ)에서 $b_n = 4n - 4$ 이라 했으므로 $\sum_{k=1}^n (4k - 4) = 2n(n-1)$ 이 성립하는지 확인해도 좋고,

② 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 $T_1 = b_1 = 0$, $T_n - T_{n-1} = b_n (n \geq 2)$ 을 구해도 좋다.

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n (4k - 4) = 4 \sum_{k=1}^n k - 4n = 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 4n = 2n(n-1)$$

$$\textcircled{2} b_n = T_n - T_{n-1} = 2n(n-1) - 2(n-1)(n-2) = 2(n-1)\{n - (n-2)\} = 4n - 4 (n \geq 2)$$

이때, $4 \times 1 - 4 = 0$ 이므로 $b_n = 4n - 4 (n \geq 1)$ (O)

2. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항을 각각 a, b 라 할 때 S_n, T_n 은 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d_1\}}{2}, \quad T_n = \frac{n\{2b + (n-1)d_2\}}{2}$$

$S_n T_n = n^2(n^2 - 1)$ 이므로 위의 두 식을 서로 곱한 다음 계수 비교법을 적용하자.

$$\frac{n^2\{2a + (n-1)d_1\}\{2b + (n-1)d_2\}}{4} = n^2(n^2 - 1)$$

궁금한 것은 $d_1 d_2$ 의 값이므로 좌변의 식을 전개할 필요 없이 좌변의 식을 전개했을 때 나오는 하나의 항과 그에 대응하는 우변의 항을 비교하면 된다. 최고차항을 비교하자.

$$(\text{좌변의 최고차항}) = \frac{d_1 d_2}{4} n^4$$

$$(\text{우변의 최고차항}) = n^4$$

$$\text{좌} \cdot \text{우변의 최고차항이 서로 같으므로 } \frac{d_1 d_2}{4} = 1, \quad d_1 d_2 = 4 \quad (\text{O})$$

3. (ㄷ)은 등차수열의 합 공식과 인수의 관점으로 풀어야 한다. 먼저, 등차수열의 합은 상수항이 없는 n 에 관한 이차식이다. 즉, **등차수열의 합은 반드시 n 을 인수로 갖는다.**

$S_n T_n = n^2(n^2 - 1)$ 이고, S_n, T_n 은 모두 등차수열의 합이므로 이차식이다. 따라서 S_n, T_n 은 4개의 인수 $n, n, n+1, n-1$ 중 두 개씩을 나눠 갖는다. 만약 S_n, T_n 중 하나라도 4개의 인수 중 두 개를 갖지 않는다면 S_n, T_n 모두 이차식이 아니게 된다.

등차수열의 합은 반드시 n 을 인수로 가지므로 S_n, T_n 은 각각 n 을 인수로 갖는다. 따라서 남은 두 인수 $n+1, n-1$ 중 하나는 S_n 이 갖고, 남은 하나는 T_n 이 갖는다.

그런데 $a_1 \neq 0$ 이면 $S_1 \neq 0$ 이므로 **인수정리에 의해 S_n 은 $(n-1)$ 을 인수로 갖지 않는다.** 따라서 S_n 은 $n, n+1$ 을 인수로 가지므로 $S_n = kn(n+1)$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = kn(n+1) - k(n-1)n \\ &= kn^2 + kn - kn^2 + kn = 2kn \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$a_1 = S_1 = 2k \text{이므로 } a_n = 2kn$$

이때, ' a_n, b_n 이 등차수열, $S_n T_n = n^2(n^2 - 1)$ ' 이외의 조건이 없으므로 k 는 0이 아닌 모든 실수가 가능하다. $k \neq \frac{1}{2}$ 이면 $a_n \neq n$ 이다. 즉, $a_1 \neq 0$ 이라고 해서 반드시 $a_n = n$ 인 것은 아니다. (X)

옳은 것은 ㄱ, ㄴ이므로 답은 ㉓!!

※ 선지 (ㄷ)은 대우 명제를 통해서도 풀 수 있다.

' $a_1 \neq 0$ 이면 $a_n = n$ 이다.' (명제)

' $a_n \neq n$ 이면 $a_1 = 0$ 이다.' (대우 명제)

대우 명제인 ' $a_n \neq n$ 이면 $a_1 = 0$ 이다.'가 참이면 기존 명제도 참이고, 대우 명제가 거짓이면 기존 명제도 거짓이다. $a_n = n$ 일 때 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ 이므로 $a_n \neq n$ 일 때 $S_n \neq \frac{n(n+1)}{2}$ 이다.

따라서 $S_n \neq \frac{n(n+1)}{2}$ 일 때 $a_1 = S_1 = 0$ 인지 따지면 된다.

$S_n = \frac{n(n+1)}{p} \quad (p \neq 2)$ 일 때 $a_1 = S_1 \neq 0$ 이므로 반례가 존재한다. 즉, 대우 명제가 거짓이므로 명제 (ㄷ)도 거짓이다. (X)

(5) 상수항이 0이 아닌 n 에 관한 이차식

이렇게 해서 등차수열의 합 S_n 이 상수항이 0인 n 에 관한 이차식이라는 것을 알아보았다. 그렇다면 상수항이 0이 아닌 n 에 관한 이차식은 무엇을 의미할까?

결론부터 말하자면 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

‘ $S_n = an^2 + bn + c$ ($c \neq 0$)’와 ‘수열 $\{a_n\}$ 이 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.’는 서로가 참이 되기 위한 필요충분 조건이다. 다음 문제를 풀어보면서 그 이유를 생각해보자.

예제(6) 11년 10월 교육청 나형 30번

수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 3, a_n = 8n - 4 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

를 만족시키고, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{S_n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1. $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_{10}}$ 을 일일이 구하기는 매우 힘들므로 S_n 의 식을 구하자.

$a_1 = 3, a_n = 8n - 4 (n = 2, 3, 4, \dots)$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.

$$S_n = a_1 + \sum_{k=2}^n (8k - 4) = a_1 + \sum_{k=1}^n (8k - 4) - 4$$

($k = 1$ 부터 정의된 시그마로 고쳤으니 $(8 - 4)$ 에 해당하는 값을 빼야 한다.)

$$= -1 + 8 \sum_{k=1}^n k - 4n$$

$$= -1 + 4n(n+1) - 4n = 4n^2 - 1$$

$$\begin{aligned} 2. \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{S_n} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{4n^2 - 1} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{20}{21} = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

$p = 21, q = 10$ 이므로 $p + q = 31$ 이다. **답은 31!!**

그렇게 어려운 문항은 아니므로 답은 수월하게 맞힐 수 있다. 다음 페이지에서 이를 상수항이 0이 아닌 S_n 과 연결지어보자.

이 문제에서 주목해야 할 것은 $S_n = 4n^2 - 1$ 이다. 둘째 항부터 등차수열을 이루는 수열 $\{a_n\}$ 에 대해 S_n 은 상수항이 0이 아닌 이차식이다.

하지만 문제에서 주어진 수열 $\{a_n\}$ 에 한해 S_n 이 우연히 상수항을 가졌을 가능성도 존재한다. 미지수를 사용하여 다시 증명해보자.

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = a$, $a_n = bn - c (n = 2, 3, 4, \dots)$ 을 만족시키고 $a \neq b - c$ 일 때,
수열 $\{a_n\}$ 은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다. 이때, S_n 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \sum_{k=2}^n (bk - c) = a + \sum_{k=1}^n (bk - c) - (b - c) \\ &= b \sum_{k=1}^n k - cn + a - (b - c) \\ &= \frac{bn(n+1)}{2} - cn + a - (b - c) \end{aligned}$$

S_n 의 상수항은 $a - (b - c)$ 이다. 그런데 $a \neq b - c$ 이므로 상수항은 0이 아니다.

그런데 위의 증명은

‘수열 $\{a_n\}$ 이 둘째 항부터 등차수열을 이루면 $S_n = an^2 + bn + c (c \neq 0)$ 이다.’가 참임을 증명한 것이므로
‘ $S_n = an^2 + bn + c (c \neq 0)$ ’와 ‘수열 $\{a_n\}$ 은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.’가 서로가 참이 되기 위한 필요충분조건임을 증명하기 위해서는

‘ $S_n = an^2 + bn + c (c \neq 0)$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.’

도 참임을 증명해야 한다. 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하자.

$S_n = an^2 + bn + c (c \neq 0)$ 일 때 $a_1 = S_1$, $S_n - S_{n-1} = a_n (n \geq 2)$ 이다.

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = an^2 + bn + c - \{a(n-1)^2 + b(n-1) + c\} \\ &= an^2 + bn + c - \{an^2 + n(b-2a) + a - b + c\} \\ &= 2an - a + b \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$a_1 = S_1 = a + b + c$$

이때, $a_n = 2an - a + b$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값인 $a + b$ 와 $a_1 = a + b + c$ 가 서로 다르므로 수열 $\{a_n\}$ 은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.

따라서 ‘ $S_n = an^2 + bn + c (c \neq 0)$ ’와 ‘수열 $\{a_n\}$ 이 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.’는 서로가 참이 되기 위한 필요충분조건이다.

(6) 함수로 이해하는 등차수열의 합

첫째항이 a 이고 공차가 d 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 S_n 을 n 에 관해 정리하면 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{dn^2 + (2a-d)n}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n$$

이를 함수와 연결지으면,

수열 $\{S_n\}$ 의 항은 원점을 지나고 최고차항의 계수가 $\frac{d}{2}$ 인 이차함수 $y = \frac{d}{2}x^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)x$ 위의 x 좌표가 자연수인 점의 y 좌표와 같다.

{등차수열}의 각 항이 직선 위의 x 좌표가 자연수인 점의 y 좌표와 같다면,

{등차수열의 합 수열}의 각 항은 이차함수의 위의 x 좌표가 자연수인 점의 y 좌표와 같다.

예제(7) 13년 3월 교육청 A형 30번

첫째항이 60인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{T_n\}$ 을

$$T_n = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad T_{19} < T_{20}$$

$$(나) \quad T_{20} = T_{21}$$

$T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오. [4점]



1. T_n 을 함수로 바라보자. 원점을 지나가는 어떤 이차함수 $f(x)$ 에 대해

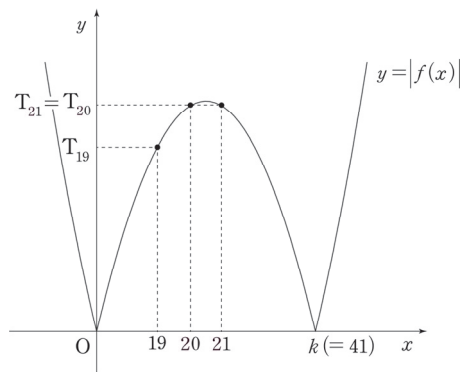
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = f(n)$ 이라 할 수 있고 이때 $T_n = |f(n)|$ 이다.

$T_{19} < T_{20}$, $T_{20} = T_{21}$ 를 모두 만족시키는 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 $x = 20$, $x = 21$ 의 위치를 좌표 평면에 나타내자.

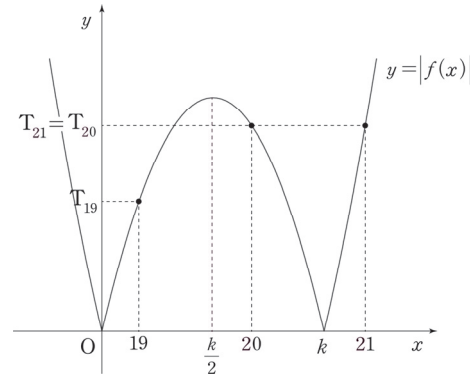
$y = |f(x)|$ 가 x 축과 만나는 점의 0이 아닌 x 좌표를 k 라 할 때, 아래와 같이 $21 < k$ 인 경우와 $k < 21$ 인 경우가 가능하다.

$21 < k$ 일 때 이차함수 $y = f(x)$ 의 대칭축은 $x = \frac{20+21}{2} = \frac{41}{2} = \frac{k}{2}$ 이므로 $k = 41$ 이다.

(i) $21 < k$



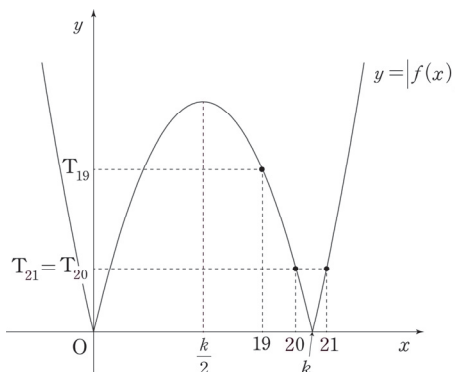
(ii) $k < 21$



※ $T_n = f(n)$ 이라면 이차함수의 대칭성에 의하여 (i)만 가능하지만, $T_n = |f(n)|$ 이므로 (ii)와 같이 $k < 21$ 인 경우도 가능함에 주의하자. ((ii)에서 20이 대칭축의 왼쪽에 있는 경우도 가능하다.)

하지만 (ii) $k < 21$ 인 경우 모순이 발생한다. $y = f(x)$ 의 대칭축은 $x = \frac{k}{2} < \frac{21}{2} = 10.5$ 이므로

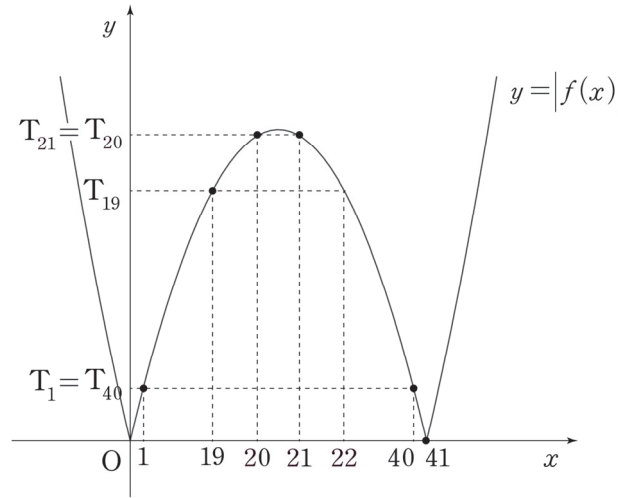
$T_{19} < T_{20} = T_{21}$ 을 만족시킬 수 없다. 즉, $k < 21$ 인 경우 19, 20, 21은 모두 대칭축의 오른쪽에 존재해야 하므로 $T_{20} = T_{21}$ 이라면 아래 그림과 같이 $T_{19} > T_{20} = T_{21}$ 일 수밖에 없으므로 조건을 만족시키지 못한다.



따라서 (i)이 답인 경우이다.

2. 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 $x = \frac{41}{2}$ 에 대하여 대칭이고 x 축과 $x = 0, x = 41$ 에서 만난다.

$y = |f(x)|$ 의 그래프 상에서 $T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하자.



$n \leq 19$ 일 때 $T_n < T_{n+1}$

$n = 20$ 일 때 $T_n = T_{n+1}$

$21 \leq n \leq 40$ 일 때 $T_n > T_{n+1}$

$41 \leq n$ 일 때 $T_n < T_{n+1}$

따라서 $T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값과 최댓값의 합은 $21 + 40 = 61$ 이다.

답은 61!!

comment

1. 등차수열의 합의 수열을 '이차함수'의 관점에서 해석하고, 각 항을 이차함수의 그래프 위의 점으로 파악해야 한다.

2. 그래프 해석을 하지 않는다면 식으로도 풀 수 있지만, 본 풀이보다 계산이 상당히 많아진다.

$T_n = \left| \frac{n\{2 \times 60 + (n-1)d\}}{2} \right|$ 로 일반항을 세운 다음 $T_{20} = T_{21}$ 을 통해 가능한 d 의 두 가지 값을 구하고 각각의 경우에서 $n = 19, 20$ 을 대입하여 $T_{19} < T_{20}$ 을 만족시키는지 확인하면 된다. 각자 계산해보자.

◆ 등비수열

◆ 1. 등비수열의 정의, 판별, 함수와의 관계

(1) 정의

이웃하는 두 항 사이의 비(공비)가 일정한 수열을 등비수열이라 한다. 이름에서도 알 수 있듯이 등차는 ‘차가 일정’, 등비는 ‘비가 일정’하다는 것을 나타낸다.

첫째항이 a 이고 공비가 r ($r \neq 0$)인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은 다음과 같다.

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

이때, 첫째항이 a 이고 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의는 다음과 같다. (단, $a \neq 0$, $r \neq 0$)

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = ra_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{혹은}$$

$$a_1 = a, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ 은 $a_{n+1} = ra_n$ 에서 양변을 a_n 으로 나눈 것뿐이지만, 실제 문제에서 만났을 때 헷갈리는 경우가 종종 있으므로 두 형태 모두 알아두자.

혹은 다음과 같이 등비중항을 이용하여 등비수열 $\{a_n\}$ 을 귀납적으로 정의할 수도 있다.

$$a_1 = a, \quad a_2 = ar, \quad a_{n+2}a_n = (a_{n+1})^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{혹은}$$

$$a_1 = a, \quad a_2 = ar, \quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 등비수열의 판별

첫째항이 a 이고 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 $a_n = ar^{n-1}$ 에서 $r = 1$ 이면 $a_n = a$ 이고, $r \neq 1$ 이면 a_n 은 밑이 r 인 지수 꼴이다. 특히 n 을 지수로 갖는 밑이 $\{a_n\}$ 의 공비라는 점이 중요하다.

어떤 수열 $\{b_n\}$ 이 ‘등비수열’인지 판별하고 싶다면 해당 식이 상수 또는 지수 n 에 관한 꼴에 해당하는지 관찰하면 된다. 둘 중 어느 것에도 해당하지 않는다면 수열 $\{b_n\}$ 은 등비수열이 아니다.

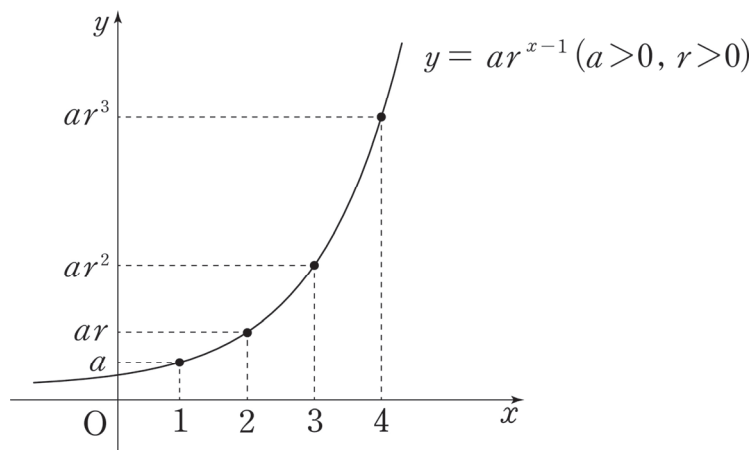
단, 일반항이 상수인 수열은 등차수열인 동시에 등비수열이라는 점을 주의하자.

(3) 등비수열과 함수의 관계

일반항이 $a_n = ar^{n-1}$ 인 등비수열은 지수함수 $y = ar^{x-1}$ 와 연결지을 수 없다. 지수함수의 밑은 무조건 양수여야 하지만, 등비수열에서 공비는 양수가 아닐 수도 있기 때문이다.

단, $r > 0$ 인 경우 일반항이 $a_n = ar^{n-1}$ 인 등비수열의 항은 지수함수 $y = ar^{x-1}$ 위의 x 좌표가 자연수인 점들의 y 좌표와 같다.

이는 지수함수의 정의역의 항들이 순서대로 등차수열을 이루는 경우, 정의역에 대응하는 치역의 원소들은 순서대로 등비수열을 이룬다는 점과도 연결된다.



※ 지수함수와 역함수 관계에 있는 로그함수의 정의역의 항들이 순서대로 등비수열을 이루는 경우, 정의역에 대응하는 치역의 원소들은 순서대로 등차수열을 이룬다.

(4) $\{a_n\}$ 이 등차, 등비수열일 때 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$

① $\{a_n\}$ 이 등차수열일 때 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이 아니다. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ 를 구하는 공식도 존재하지 않는다. 만약 등차수열 $\{a_n\}$ 에 관해 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 이 주어졌다면, 이를 해결하는 기막힌 공식은 없으므로 다른 조건과 연결 지어 문제를 풀어나가야 한다.

교육청에서 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ 의 값을 물어본 적이 있으나 직접적인 값이 아니라 부등식을 만족시키는 n 의 최댓값을 물어봤고, 출제 의도는 ‘대칭성’을 이용한 계산이었다. 이 문제는 수열의 합 파트에서 예제로 만나볼 것이다.

② 반면, $\{a_n\}$ 이 등비수열일 때 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등비수열이다. $\{a_n\}$ 의 일반항이 ar^{n-1} 일 때, $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$ 이기 때문이다. (단, $a \neq 0, r \neq 0$ 이다.)

◆ 2. 등비중항

0이 아닌 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 등비중항이라고 한다.

b 가 a, c 의 등비중항이면 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ (공비)이므로 $b^2 = ac$ 가 성립한다. a, b, c 가 모두 양수이면 $b = \sqrt{ac}$ 으로 b 를 a, c 의 기하평균이라 할 수 있지만, 음수인 항이 포함된 경우 그러한 해석은 가능하지 않다.

등차중항만큼 중요하지는 않지만, 등비중항을 이용할 경우 계산이 간단해지는 문제도 많이 출제되므로 때에 따라 적절히 사용할 준비는 돼 있어야 한다.

※ 등비수열에서 곱이 같은 쌍들

등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1a_n = a_2a_{n-1} = a_3a_{n-2} = a_4a_{n-3} = \cdots$

자연수 p, q 에 대해 등비수열 $\{a_n\}$ 의 항 a_p 와 a_q 가 있을 때, $p+q$ 의 값이 같은 (a_p, a_q) 쌍에 대해 a_pa_q 의 값은 일정하다.

(증명)

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 $a_p = ar^{p-1}$, $a_q = ar^{q-1}$ 이므로 $a_pa_q = a^2r^{p+q-2}$ 이다.
이때, a, r 은 상수이므로 $p+q$ 가 상수이면 a_pa_q 도 상수이다.

예제(8) 12학년도 6월 평가원 나형 8번

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = \sqrt{5}$ 일 때, $a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_5$ 의 값은? [3점]

① $\sqrt{5}$

② 5

③ $5\sqrt{5}$

④ 25

⑤ $25\sqrt{5}$

예제(9) 05학년도 6월 평가원 나형 11번

다섯 개의 실수 a, b, c, d, e 를 적당히 배열하여 공비가 1보다 큰 등비수열을 만들었다.
 a, b, c, d, e 가 다음 조건을 만족시킬 때 b 가 이 수열의 제 n 항이라면, n 의 값은? [4점]

(가) $e = \sqrt{cd}$

(나) $\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$

(다) $a < b$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5



예제(8) 해설

$$a_1 \times a_5 = a_2 \times a_4 = (a_3)^2 = 50 \text{이므로}$$

$$a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_5 = 5 \times 5 = 25 \text{이다. 답은 ④!!}$$



예제(9) 해설

1. (가) $e = \sqrt{cd}$ 에서 $e^2 = cd$ 이므로 e 는 c, d 의 등비중항이다.

(나) $\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$ 에서 $ad = ec$ 이다.

2. (가), (나)를 모두 만족시키는 a, d, c, e 의 순서를 알아보자.

우선, e 는 c, d 의 등비중항이므로 c, e, d 의 순서대로 등비수열을 이루거나 d, e, c 의 순서대로 등비수열을 이룬다.

(i) c, e, d 의 순서대로 등비수열을 이룰 때 $ad = ec$ 를 만족시키려면 a, c, e, d 순으로 등비수열을 이뤄야 한다.

(ii) d, e, c 의 순서대로 등비수열을 이룰 때 $ad = ec$ 를 만족시키려면 d, e, c, a 순으로 등비수열을 이뤄야 한다.

(다)에서 $a < b$ 이므로

(i)에서 a, c, e, d, b 의 순서대로 등비수열을 이루거나

(ii)에서 d, e, c, a, b 의 순서대로 등비수열을 이룬다.

어느 쪽을 택하든 b 는 이 수열의 제5항이므로 $n = 5$ 이다.

답은 ⑤!!

comment

c, e, d 의 순서대로 등비수열을 이룰 때 $ad = ec$ 를 만족시키려면 a, c, e, d 순으로 등비수열을 이뤄야 한다는 것을 잘 이해하자. ‘등차수열’에서는 ‘합이 같은 쌍’이 중요하고, ‘등비수열’에서는 ‘곱이 같은 쌍’이 중요하다.

◆ 2. 등비수열의 합

(1) 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 다음과 같다.

$$(i) \ r \neq 1 \text{ 일 때, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$(ii) \ r = 1 \text{ 일 때, } S_n = na$$

저자는 $r < 1$ 이면 $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 을 이용하고 $r > 1$ 이면 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ 을 이용하는 편이다. 크게 중요한 것은 아니다.

또한, 일반적으로 $r \neq 1$ 이지만 $r = 1$ 인 경우도 등장할 수 있으므로 가능성을 배제하지 말자!

$$(2) \ S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 때 항상 $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ 을 이용해야 하는 것은 아니다.

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})$ 으로 항을 나열하여 수열의 합을 표현할 수도 있다.

그렇다고 해서 두 식이 서로 다른 의미인 것은 아니다.

고등학교 저학년 인수분해 파트에서 배웠듯이 $r^n - 1 = (r-1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1)$ 이므로

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a(r-1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1)}{r-1} = a(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1) \text{이다.}$$

예제(10) 08년 3월 교육청 나형 9번

등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 5항까지의 합이 $\frac{31}{2}$ 이고 곱이 32일 때,

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{31}{4}$

② $\frac{31}{8}$

③ $\frac{31}{12}$

④ $\frac{8}{31}$

⑤ $\frac{4}{31}$



1. $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 도 등비수열이다.

$$a_n = ar^{n-1} \text{으로 놓으면 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} \times \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$$

등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 5항까지의 합이 $\frac{31}{2}$ 이고 곱이 32이므로

$$\frac{a(1-r^5)}{1-r} = \frac{31}{2}$$

$$a \times ar \times ar^2 \times ar^3 \times ar^4 = a^5 r^{10} = 32 = 2^5, ar^2 = 2$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} &= \frac{\frac{1}{a} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{r} \right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{r}} \\ &= \frac{\frac{1}{a} \left(\frac{r^5 - 1}{r^5} \right)}{\frac{r-1}{r}} = \frac{r^5 - 1}{a(r-1)} \times \frac{1}{r^4} \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\frac{a(1-r^5)}{1-r} = \frac{31}{2} \text{의 양변에 } \frac{1}{a^2} \text{을 곱하면 } \frac{1-r^5}{a(1-r)} = \frac{r^5-1}{a(r-1)} = \frac{31}{2a^2}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{31}{2a^2} \times \frac{1}{r^4} = \frac{31}{2} \times \left(\frac{1}{ar^2} \right)^2 = \frac{31}{2} \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{31}{8}$$

답은 ②!!

comment

등비수열의 합 공식을 이용하지 않고도 풀 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + \frac{1}{ar^3} + \frac{1}{ar^4} \\ &= \frac{1}{ar^4} (r^4 + r^3 + r^2 + r + 1) \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 5항까지의 합은 $\frac{31}{2}$ 이므로 $a(1+r+r^2+r^3+r^4) = \frac{31}{2}$

$1+r+r^2+r^3+r^4 = \frac{31}{2a}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{ar^4} (r^4 + r^3 + r^2 + r + 1) = \frac{1}{a^2 r^4} \times \frac{31}{2} = \left(\frac{1}{ar^2} \right)^2 \times \frac{31}{2} = \frac{31}{8}$$

$$(3) r^n \times \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k \text{ (단, } p, q \text{는 } q > p \text{인 자연수이고 } \{a_n\} \text{은 공비가 } r \text{인 등비수열)}$$

등차수열에서 배운 공식 $\sum_{k=p}^q a_k + dn(q-p+1) = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ 와 비슷한 느낌이지만, 이 공식이 훨씬 중요하다.

마찬가지로 공식을 외우려 하지 말고 이해하자. $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$ 가 $a_{p+n} + a_{p+n+1} + \cdots + a_{q+n}$ 이 되기 위한 조건이 생각하면 자연스럽게 이해할 수 있다.

$$a_p \times r^n = a_{p+n}, a_{p+1} \times r^n = a_{p+n+1}, \cdots, a_q \times r^n = a_{q+n} \text{ 이므로}$$

$$(a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q) \times r^n = a_{p+n} + a_{p+n+1} + \cdots + a_{q+n} \text{ 이다.}$$

$$\text{시그마를 이용하여 예쁘게 정리하면 } r^n \times \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k \text{ 이다.}$$

앞으로 두 등비수열의 합이 있을 때 $r^n \times \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ 성질을 이용할 수 있는지 확인하자.

$$\text{e.g. 공비가 } r \text{인 등비수열 } \{a_n\} \text{에 대하여 } r^2 \times \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=3}^{12} a_k \text{ 이다.}$$

공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{S_3 + r^3 \times S_3}{S_3} = 1 + r^3 \text{ 이다.}$$

한편, 이 성질을 이용하면 등비수열의 합을 굉장히 유연하게 바라볼 수 있다.

예를 들어, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

수열 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \cdots$ 의 공비는 r 이다. (수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$)

수열 $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \cdots$ 의 공비는 r 이다. (수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$)

수열 $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, \cdots$ 의 공비는 r^2 이다. (수열 $\{a_{2n-1} + a_{2n}\}$)

이때, 수열 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \cdots$ 의 공비가 r 이라는 점을 수식적으로도 증명할 수 있다.

수열 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \cdots$ 은 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 이다. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 할 때 $a_n = ar^{n-1}$ 이다. 따라서 $a_n + a_{n+1} = ar^{n-1} + ar^n = ar^{n-1}(r+1) = (ar+a)r^{n-1}$ 에서 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 $a+ar(=a_1+a_2)$ 이고 공비가 r 인 등비수열이다.

수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 과 수열 $\{a_{2n-1} + a_{2n}\}$ 에서도 똑같이 증명하면 된다. 스스로 해보자.

단, $r^n \times \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ 와 관련하여 주의할 부분이 있다.

예를 들어, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $16 \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=5}^{14} a_k$ 라 할 때, (단, $r \neq 1$)

$r^4 \times \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=5}^{14} a_k$ 이므로 $16 \times \sum_{k=1}^{10} a_k = r^4 \times \sum_{k=1}^{10} a_k$ 에서 $16 = r^4$, $r = \pm 2$ 일까?

아니다. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 0$ 인 경우에도 $16 \times \sum_{k=1}^{10} a_k = r^4 \times \sum_{k=1}^{10} a_k$ 은 성립한다.

(이런 실수를 방지하려면 이항하여 인수분해하는 것이 가장 좋다.)

즉, $\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 0$ 에서 $r^{10} = 1$, $r = -1$ ($\because r \neq 1$)인 경우도 고려해야 한다.

($r = -1$ 인 경우 $\sum_{k=1}^{10} a_k = a - a + a - a + \cdots + a - a = 0$ 이 된다.)

예제(11) 17년 3월 교육청 고2 가형 18번

첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_4 의 값은? [4점]

(가) $S_{12} - S_2 = 4S_{10}$

(나) $S_{12} < S_{10}$

① -24

② -16

③ -8

④ 16

⑤ 24



1. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하자.

(가) $S_{12} - S_2 = 4S_{10}$ 에서 $a_3 + \cdots + a_{12} = 4(a_1 + \cdots + a_{10})$

$$a_3 + \cdots + a_{12} = r^2 \times (a_1 + \cdots + a_{10}) \text{이므로 } r^2 \times (a_1 + \cdots + a_{10}) = 4 \times (a_1 + \cdots + a_{10})$$

$$\therefore r^2 = 4 \text{ 또는 } a_1 + \cdots + a_{10} = 0$$

$a_1 + \cdots + a_{10} = 0$ 일 때의 r 의 값을 구하자. $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2인 등비수열이므로

$r = 1$ 인 경우 $a_1 + \cdots + a_{10} = 20$ (X)

$r \neq 1$ 인 경우 $a_1 + \cdots + a_{10} = \frac{2(r^{10} - 1)}{r - 1} = 0$ 에서 $r^{10} = 1$, $r = -1$ ($\because r \neq 1$)

2. 따라서 $r = 2$ 또는 $r = -2$ 또는 $r = -1$ 이다. 조건 (나)를 통해 r 의 값을 구하자.

$S_{12} < S_{10}$ 에서 $S_{12} - S_{10} < 0$, $a_{11} + a_{12} < 0$

$$2r^{10}(1+r) < 0, 1+r < 0$$

$$r < -1$$

$$\therefore r = -2, a_4 = ar^3 = 2 \times (-2)^3 = -16$$

답은 ②!!

comment

조건 (가)를 통해 $r^2 = 4$ 또는 $a_1 + \cdots + a_{10} = 0$ 을 도출한 다음, 조건 (나)를 만족시키는 r 의 값을 구하면 된다. 특히 $S_{12} < S_{10}$ 에서 S_{10} 을 이항하여 $S_{12} - S_{10} = a_{11} + a_{12} < 0$ 을 관찰하는 것은 ‘수열의 합과 일반항의 관계’를 이용하는 중요한 테크닉이므로 반드시 숙지하자.

예제(12) 20년 4월 교육청 가형 17번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_3 의 값은? [4점]

$$(가) \sum_{k=1}^4 a_k = 45$$

$$(나) \sum_{k=1}^6 \frac{a_2 \times a_5}{a_k} = 189$$

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24



1. (가)에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 45$ 이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 ($a > 0, r > 0$)

(나)에서 $a_2 \times a_5 \times \frac{1}{a_k} = ar \times ar^4 \times a^{-1}r^{1-k} = ar^{6-k}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 ar^{6-k} &= ar^5 + ar^4 + ar^3 + ar^2 + ar + a \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 189 \end{aligned}$$

따라서 $a_5 + a_6 = 144$

2. $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6$ 은 이 순서대로 공비가 r^2 인 등비수열을 이룬다.

$a_1 + a_2 = t$ 라고 하면 $t + tr^2 = 45, tr^4 = 144$ 이다.

따라서 $t = \frac{144}{r^4}$ 를 $t + tr^2 = 45$ 에 대입하면 $\frac{144}{r^4} + \frac{144}{r^2} = 45, \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} = \frac{45}{144} = \frac{5}{16}$

양변에 $16r^4$ 을 곱하면 ($\because r > 0$) $16 + 16r^2 = 5r^4$ 이다. $r^2 = k$ ($k > 0$)라 하면

$$5k^2 - 16k - 16 = 0, (5k+4)(k-4) = 0 \therefore k = 4 (\because k > 0)$$

$r^2 = 4$ 에서 $r > 0$ 이므로 $r = 2$ 이다.

3. $a_5 + a_6 = 144$ 에서 $16a + 32a = 48a = 144$ 이므로 $a = \frac{144}{48} = 3$ 이다.

따라서 $a_3 = ar^2 = 3 \times 4 = 12$ 이다.

답은 ①!!

comment

무작정 (가), (나) 조건을 보고 등비수열의 합 공식을 이용하려 하면 계산이 꽤 복잡해진다. 항상 조건 간 관계를 관찰하면서 책에서 배운 도구를 적용할 수 있는지 살펴보자.

지금까지 배운 등차, 등비수열의 태도와 도구를 생각하면서 다음 준킬러 문항을 풀어보자.

예제(13) 19학년도 수능 나형 29번

첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_7 + b_7$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$(가) \sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = 27$$

$$(나) \sum_{n=1}^5 (a_n + |b_n|) = 67$$

$$(다) \sum_{n=1}^5 (|a_n| + |b_n|) = 81$$



1. (나) 식에서 (가) 식을 변끼리 빼면 $\sum_{n=1}^5 (|b_n| - b_n) = 40$ 이다.

$\{b_n\}$ 은 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열이므로 $b_1, b_3, b_5 > 0$, $b_2, b_4 < 0$ 이다.

$$b_n > 0 \text{이면 } |b_n| - b_n = 0,$$

$$b_n < 0 \text{이면 } |b_n| - b_n = -2b_n \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^5 (|b_n| - b_n) = -2b_2 - 2b_4 = 40$$

$$b_2 + b_4 = -20$$

$\{b_n\}$ 의 첫째항을 b , 공비를 r 이라 하면

$$br + br^3 = -20$$

$$br(1 + r^2) = -20$$

이때, $br(1 + r^2) = -20$ 을 통해 b, r 의 값을 구할 수 없다고 생각하면 안 된다. b 는 자연수, r 은 음의 정수이므로 $br(1 + r^2) = -20$ 을 만족하는 b, r 의 값은 유의미할 정도로 적다.

$1 + r^2$ 이 20의 양의 약수여야 하므로 $r = -1$ 또는 $r = -2$ 또는 $r = -3$ 이다.

$$r = -1 \text{ 일 때 } b = 10$$

$$r = -2 \text{ 일 때 } b = 2$$

$$r = -3 \text{ 일 때 } b = \frac{2}{3} \text{ (X)}$$

$$\therefore b_n = 10 \times (-1)^{n-1} \text{ 또는 } b_n = 2 \times (-2)^{n-1}$$

2. $b_n = 10 \times (-1)^{n-1}$ 또는 $b_n = 2 \times (-2)^{n-1}$ 을 $\sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = 27$ 에 대입하자.

(i) $b_n = 10 \times (-1)^{n-1}$ 인 경우

$$\sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^5 a_n + 10 = 27$$

$$\sum_{n=1}^5 a_n = 17$$

$\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 등차중항을 이용하면 $\sum_{n=1}^5 a_n = 5a_3 = 17, a_3 = \frac{17}{5}$ (X)

$\{a_n\}$ 의 첫째항은 자연수이고 공차는 음의 정수이므로 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 정수이다.
따라서 이 경우는 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $b_n = 2 \times (-2)^{n-1}$ 인 경우

$$\sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^5 a_n + 22 = 27$$

$$\sum_{n=1}^5 a_n = 5$$

마찬가지로 등차중항을 이용하면 $5a_3 = 5, a_3 = 1$ (O)

a_3 은 자연수이므로 조건을 만족시킨다.

3. (나) $\sum_{n=1}^5 (a_n + |b_n|) = 67$, (다) $\sum_{n=1}^5 (|a_n| + |b_n|) = 81$ 를 이용하여 a_n 의 나머지 항을 구하자.

(다) 식에서 (나) 식을 변끼리 빼면 $\sum_{n=1}^5 (|a_n| - a_n) = 14$ 이다.

$\{a_n\}$ 의 공차는 음의 정수이고 $a_3 = 1$ 이므로 $a_1, a_2, a_3 > 0, a_4, a_5 \leq 0$ 이다.

$a_n > 0$ 이면 $|a_n| - a_n = 0$, $a_n < 0$ 이면 $|a_n| - a_n = -2a_n$ 이므로

$$\sum_{n=1}^5 (|a_n| - a_n) = -2a_4 - 2a_5 = 14$$

$$a_4 + a_5 = -7$$

$$(1+d) + (1+2d) = -7, 3d = -9$$

$$\therefore d = -3$$

따라서 $a_7 = a_3 + 4d = 1 - 12 = -11$, $b_7 = br^6 = 2 \times (-2)^6 = 128$ 이므로

$a_7 + b_7 = -11 + 128 = 117$ 이다.

답은 117!!

comment

실전에서 마주치면 꽤 까다로운 문항이다. 이 문항 해결에 필요한 행동은 다음과 같다.

1. (가), (나), (다) 식을 적절히 변끼리 빼서 b_n 에 관한 식과 a_n 에 관한 식 얻기
2. b, r 은 각각 실수보다 작은 범위인 자연수, 음의 정수이므로 $br(1+r^2) = -20$ 을 만족시키는 b, r 의 값 얻기
3. 등차중항을 이용하여 등차수열의 합 표현하기

CHAPTER 05 유제

01 17학년도 수능 나형 15번

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2 의 값은? [4점]

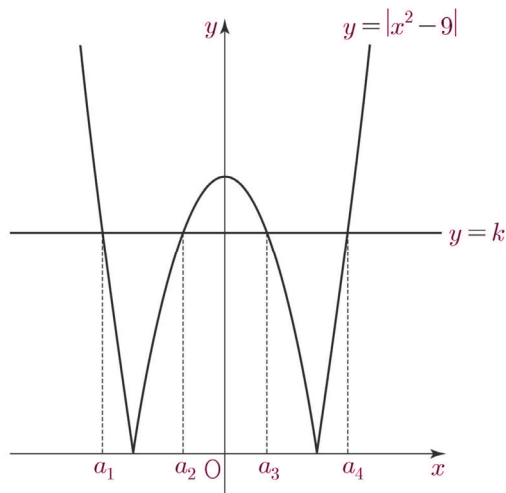
(가) $a_6 + a_8 = 0$

(나) $|a_6| = |a_7| + 3$

- ① -15 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

02 14년 4월 교육청 A형 20번

그림과 같이 함수 $y = |x^2 - 9|$ 의 그래프가 직선 $y = k$ 와 서로 다른 네 점에서 만날 때, 네 점의 x 좌표를 각각 a_1, a_2, a_3, a_4 라 하자. 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k 의 값은? (단, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$) [4점]



- ① $\frac{34}{5}$ ② 7 ③ $\frac{36}{5}$ ④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{38}{5}$

03 09학년도 9월 평가원 나형 10번

자연수 n 에 대하여 함수 $y = 2^{x+n}$ 의 그래프가 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프와 만나는 점을 P_n 이라 하자. 점 P_n 의 x 좌표를 a_n , y 좌표를 b_n 이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

- ㄱ. 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
- ㄴ. 임의의 자연수 m, n 에 대하여 $b_m b_n = b_{m+n}$ 이다.
- ㄷ. $2b_n < b_{n+1}$ 을 만족하는 자연수 n 이 존재한다.

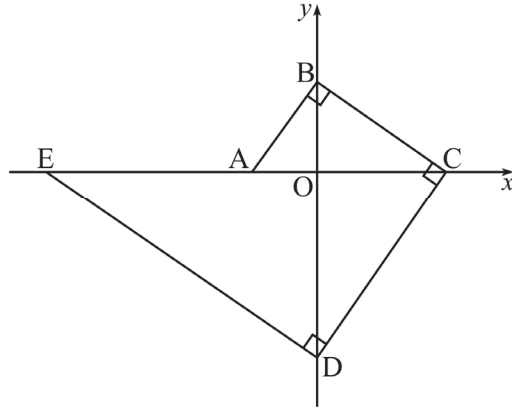
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 07학년도 수능 나형 22번

첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 를 만족시킬 때, b_{27} 의 값을 구하시오. [4점]

05 06년 3월 교육청 나형 14번

그림과 같이 좌표축 위의 다섯 개의 점 A, B, C, D, E에 대하여 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$, $\overline{CD} \perp \overline{DE}$ 가 성립한다. 세 선분 AO, OC, EA의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 AB의 기울기는? (단, O는 원점이고 $\overline{OA} < \overline{OB}$ 이다.) [4점]



- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

06 05학년도 6월 평가원 나형 14번

함수 $f(x) = \log_4 x$ 일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 양수 x 에 대하여 $f\left(\frac{x}{4}\right) = f(x) + 1$ 이다.

ㄴ. 수열 $\{f(2^n)\}$ 은 등차수열이다.

ㄷ. $x > 1$ 일 때, $f(f(x)) > 0$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

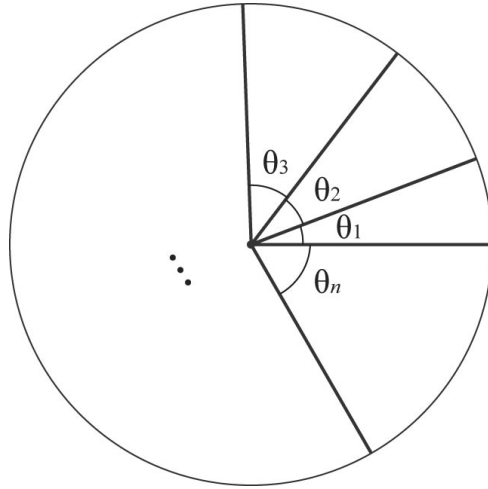
07 14년 3월 교육청 B형 28번

첫째항이 a 이고 공차가 -4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.
모든 자연수 n 에 대하여 $S_n < 200$ 일 때, 자연수 a 의 최댓값을 구하시오. [4점]

08 09년 7월 교육청 나형 7번

넓이가 A 인 원을 중심각이 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ 인 n 개의 부채꼴로 나누고 중심각이 θ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 인 부채꼴의 넓이를 A_k 이라 하자. 수열 $\{\theta_n\}$ 이 등차수열을 이루고,

$\sum_{k=1}^n \theta_k = 2\pi$ 이다. $A_1 + A_n = \frac{1}{5}A$ 일 때, n 의 값은? [3점]



- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

09 11학년도 6월 평가원 나형 25번

첫째항이 16이고 공비가 $2^{\frac{1}{10}}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log a_n$ 의 소수 부분을 b_n 이라 하자.

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{k-1}, b_k, b_{k+1} + 1$$

이 주어진 순서로 등차수열을 이룰 때, k 의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.301$ 로 계산한다.)

[4점]

10 09년 4월 교육청 나형 21번

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_3 = 40$, $a_8 = 30$ 일 때, $|a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}|$ 이 최소가 되는 자연수 n 의 값을 구하시오. [3점]

11 18년 4월 교육청 나형 28번

등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ a_1 + a_2 + a_3 = 159$$

$$(나) \ a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 96 \text{ 인 자연수 } m \text{에 대하여 } \sum_{k=1}^m a_k = 425 \text{ (단, } m > 3 \text{)}$$

a_{11} 의 값을 구하시오. [4점]

12 07년 3월 교육청 나형 22번

n 개의 항으로 이루어진 등차수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 이 다음 조건을 만족한다.

- (가) 처음 4 개 항의 합은 26 이다.
(나) 마지막 4 개 항의 합은 134 이다.
(다) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 260$

이때 n 의 값을 구하시오. [4점]

13 20학년도 수능 나형 15번

첫째항이 50이고 공차가 -4 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$\sum_{k=m}^{m+4} S_k$ 의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

CHAPTER 05 해설

01 17학년도 수능 나형 15번

답 : ①

1. 등차중항을 이용하자. (가)에서 $a_6 + a_8 = 2a_7 = 0$ 이므로 $a_7 = 0$

(나)에서 $|a_6| = |a_7| + 3$, $|a_6| = 3$

$\{a_n\}$ 의 공차는 양수이므로 $a_6 = -3$, $d = 3$ 이다. (단, 공차 = d)
($a_6 = 3$ 인 경우 $d = -3$ 이 되어 조건을 위배한다.)

2. $a_2 = a_7 - 5d = -5d = -15$

02 14년 4월 교육청 A형 20번

답 : ③

1. 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 다음과 같이 놓자.

$$a_1 = a - 3d, a_2 = a - d, a_3 = a + d, a_4 = a + 3d \text{ (공차는 } 2d\text{)}$$

이때, $y = |x^2 - 9|$ 의 그래프는 $x = 0$ 에 대하여 대칭이므로 $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = 0$ 이다.

$$a_2 + a_3 = (a - d) + (a + d) = 2a = 0, a = 0$$

$$\text{따라서 } a_1 = -3d, a_2 = -d, a_3 = d, a_4 = 3d$$

2. $f(x) = |x^2 - 9|$ 라 하면 $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = f(a_4) = k$ 이다. ... ㉠

$$f(a_3) = f(a_4) \text{에서 } f(d) = f(3d), |d^2 - 9| = |9d^2 - 9|$$

절댓값을 풀어주면 $d^2 - 9 = 9d^2 - 9$ 또는 $d^2 - 9 = -9d^2 + 9$ 이다.

$d^2 - 9 = 9d^2 - 9$ 인 경우 $d = 0$ 이다. 그러나 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ 이므로 $d > 0$ 이다.

따라서 $d^2 - 9 = -9d^2 + 9$ 에서 $10d^2 = 18$, $d^2 = \frac{9}{5}$, $d = \sqrt{\frac{9}{5}}$ 이다.

3. ㉠에서 $f(a_3) = k$, $f\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) = \left|\frac{9}{5} - 9\right| = \frac{36}{5} = k$ 이다.

03 09학년도 9월 평가원 나형 10번

답 : ③

$2^{x+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 교점의 x 좌표가 a_n , y 좌표가 b_n 이다. ($y = 2^{x+n}$ 와 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 교점은 하나밖에 생기지 않는다.)

$$2^{x+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^x, 2^{x+n} = 2^{-x}$$

양변에 2^x 를 곱하면 $2^{2x+n} = 1, 2x+n=0, x=-\frac{n}{2}$

$$\therefore a_n = -\frac{n}{2}, b_n = 2^{\frac{n}{2}}$$

1. $a_n = -\frac{n}{2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 $-\frac{1}{2}$ 이고 첫째항이 0인 등차수열이다. (O)

2. $b_n = 2^{\frac{n}{2}}, b_m = 2^{\frac{m}{2}}$ 이므로 $b_m b_n = 2^{\frac{m}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{m}{2} + \frac{n}{2}} = 2^{\frac{m+n}{2}} = b_{m+n}$ (O)

3. $2b_n < b_{n+1}, 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}} < 2^{\frac{n+1}{2}}, 2^{\frac{n+2}{2}} < 2^{\frac{n+1}{2}}$

$f(x) = 2^x$ 라 하면 $f(x)$ 는 증가함수이므로 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

이때, $\frac{n+2}{2} > \frac{n+1}{2}$ 이므로 $2^{\frac{n+2}{2}} > 2^{\frac{n+1}{2}}$ 이다. 따라서 $2b_n < b_{n+1}$ 를 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다. (X)

옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 07학년도 수능 나형 22번

답 : 13

$\{a_n\}$ 은 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열이므로 공차를 d 라 하면

$$a_{n+1} = nd, \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{n(n-1)d}{2} \text{이다.}$$

$$\text{이를 } a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{에 대입하면 } ndb_n = \frac{n(n-1)d}{2}$$

$d \neq 0, n > 0$ 이므로 양변을 nd 로 나누면 $b_n = \frac{n-1}{2}$ 이다.

$$\therefore b_{27} = \frac{26}{2} = 13$$

(뒷 페이지 다른 풀이)

※ 위의 풀이에서는 등차수열과 등차수열의 합의 일반항을 이용하여 답을 구했다. 그런데 $\sum_{k=1}^n a_k = S_n$

이라 하면 $a_{n+1}b_n = S_n$ 이다. 하나의 식이 S_n 과 a_{n+1} 을 동시에 포함하고 있으므로 수열의 합과 일반항 사이의 관계인 $S_n - S_{n-1} = a_n (n \geq 2)$ 을 이용해서 풀 수는 없을까?

$$a_{n+1}b_n = S_n \cdots \textcircled{㉠} \quad a_nb_{n-1} = S_{n-1} (n \geq 2) \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면 $a_{n+1}b_n - a_nb_{n-1} = a_n (n \geq 2)$ 이다.

$a_{n+1} = dn$, $a_n = d(n-1)$ 이므로 이를 $a_{n+1}b_n - a_nb_{n-1} = a_n (n \geq 2)$ 에 대입하면

$dnb_n - d(n-1)b_{n-1} = d(n-1) (n \geq 2)$, $d > 0$ 이므로 양변을 d 로 나누면

$nb_n - (n-1)b_{n-1} = n-1 (n \geq 2)$ 이다. n 자리에 $2, 3, \dots, n-1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} 2b_2 - b_1 &= 1 \\ 3b_3 - 2b_2 &= 2 \\ 4b_4 - 3b_3 &= 3 \\ &\vdots \\ nb_n - (n-1)b_{n-1} &= n-1 \end{aligned}$$

위의 등식들을 변끼리 모두 더하면 $nb_n - b_1 = \frac{(n-1)n}{2} (n \geq 2)$ 이다.

$a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 에서 $a_2b_1 = a_1 = 0$ 이다. 이때, $a_2 > 0$ 이므로 $b_1 = 0$ 이다.

$$\therefore nb_n = \frac{(n-1)n}{2}, \quad b_n = \frac{n-1}{2} (n \geq 1) \text{이므로 } b_{27} = \frac{26}{2} = 13$$

05 06년 3월 교육청 나형 14번

답 : ①

1. 직선 AB의 기울기와 직선 DC의 기울기가 서로 같고,
직선 BC의 기울기와 직선 ED의 기울기가 서로 같다는 점을 이용하자.

(직선 AB의 기울기) = (직선 DC의 기울기) = m

이라 하면 직선 AB와 직선 BC는 서로 직교하므로

(직선 BC의 기울기) = (직선 ED의 기울기) = $-\frac{1}{m}$ 이다.

2. 점 A의 좌표를 $(-a, 0) (a > 0)$ 이라 하면 직선 AB의 기울기가 $m (m > 1)$ 이므로 점 B의 좌표는 $(0, am)$ 이다. ($\overline{OA} < \overline{OB}$ 이므로 $m > 1$ 이다.)

$$(\text{직선 BC의 기울기}) = -\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = -\frac{am}{\overline{OC}} = -\frac{1}{m} \text{이므로 } \overline{OC} = am^2$$

따라서 점 C의 좌표는 $(am^2, 0)$ 이다.

$$(\text{직선 DC의 기울기}) = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD}}{am^2} = m \text{이므로 } \overline{OD} = am^3$$

따라서 점 D의 좌표는 $(0, -am^3)$ 이다.

$$(\text{직선 ED의 기울기}) = -\frac{\overline{OD}}{\overline{OE}} = -\frac{am^3}{\overline{OE}} = -\frac{1}{m} \text{이므로 } \overline{OE} = am^4$$

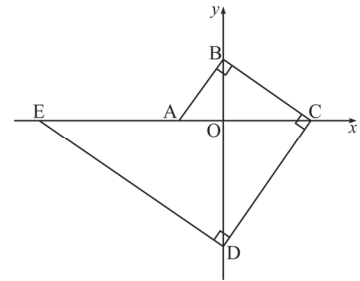
따라서 점 E의 좌표는 $(-am^4, 0)$ 이다.

3. 따라서 세 선분 AO, OC, EA의 길이는 각각 $a, am^2, am^4 - a$ 이고, 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항을 이용하면 $2am^2 = am^4$ 이다. $a > 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면 $2m^2 = m^4$, $m^4 - 2m^2 = 0$, $m^2(m^2 - 2) = 0$, $m^2(m + \sqrt{2})(m - \sqrt{2}) = 0$
 $m > 1$ 이므로 $m = \sqrt{2}$ 이다.

※ 다른 풀이 1: 삼각형의 닮음

점 A의 좌표를 $(-a, 0)$ ($a > 0$)이라 하면 직선 AB의 기울기가 m ($m > 1$)이므로 점 B의 좌표는 $(0, am)$ 이다. 네 삼각형 AOB, BOC, COD, DOE는 모두 서로 닮음이다.

$$\begin{aligned} (\overline{OB})^2 &= \overline{OA} \times \overline{OC}, \quad a^2 m^2 = a \times \overline{OC} \text{이므로 } \overline{OC} = am^2 \\ (\overline{OC})^2 &= \overline{OB} \times \overline{OD}, \quad a^2 m^4 = am \times \overline{OD} \text{이므로 } \overline{OD} = am^3 \\ (\overline{OD})^2 &= \overline{OC} \times \overline{OE}, \quad a^2 m^6 = am^2 \times \overline{OE} \text{이므로 } \overline{OE} = am^4 \end{aligned}$$



이후 풀이는 동일하다. 또한, 삼각함수를 이용해서 풀 수도 있다.

※ 다른 풀이 2: 삼각함수

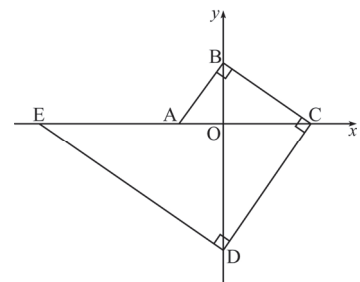
$$\begin{aligned} \overline{OA} &= k, \quad \angle OAB = \theta \text{라 하면 직선 AB의 기울기는 } \tan \theta \text{이다.} \\ \overline{OB} &= k \tan \theta, \quad \overline{OC} = k \tan^2 \theta \\ \overline{OD} &= k \tan^3 \theta, \quad \overline{OE} = k \tan^4 \theta \quad (\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

따라서 세 선분 AO, OC, EA의 길이는 각각

$k, k \tan^2 \theta, k(\tan^4 \theta - 1)$ 이고, 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항을 이용하면 $2k \tan^2 \theta = k \tan^4 \theta$ 이다.

$$2 = \tan^2 \theta \text{이므로 } \tan \theta = \sqrt{2} \text{이다. } (\because \tan \theta > 0)$$

따라서 직선 AB의 기울기는 $\sqrt{2}$ 이다.



06 05학년도 6월 평가원 나형 14번

답 : ②

$$1. f\left(\frac{x}{4}\right) = \log_4 \frac{x}{4} = \log_4 x - \log_4 4 = f(x) - 1 \quad (\text{X})$$

$$2. f(2^n) = \log_4 2^n = n \log_4 2 = \frac{n}{2}$$

$f(2^n)$ 은 n 에 관한 일차식이므로 수열 $\{f(2^n)\}$ 은 등차수열이다. 정확히 말하면 첫째항과 공차가 모두 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이다. (O)

3. $x > 1$ 일 때 $f(x) > 0$ 이다. 이때, $f(x) = t$ 라 하면 $t > 0$ 일 때 $f(t) > 0$ 을 따져주면 된다.
 $0 < t \leq 1$ 일 때 $f(t) \leq 0$ 이므로 $x > 1$ 일 때 항상 $f(f(x)) > 0$ 이 아니다. (X)

옳은 것은 ㄴ뿐이다.

※ 선지 (ㄷ)은 부등식 $f(f(x)) > 0$ 의 해를 직접 찾아서 풀 수도 있다. $f(x) = t$ 로 치환하면 $f(t) > 0$ 이다. $f(t) > 0$ 의 해는 $t > 1$ 이다. 치환을 풀어주면 $f(x) > 1$ 이고 $f(x) > 1$ 의 해는 $x > 4$ 이다. 따라서 $x > 4$ 일 때, $f(f(x)) > 0$ 이다.

07 14년 3월 교육청 B형 28번

답 : 37

$$1. S_n = \frac{n\{2a - 4(n-1)\}}{2} = (-2n + a + 2)n$$

$$S_n < 200 \text{이므로 } (-2n + a + 2)n < 200, \quad 2n^2 - (a+2)n + 200 > 0$$

n 에 관한 이차방정식 $2n^2 - (a+2)n + 200 = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 한다. 이때, 판별식을 사용하여 안 된다. 자연수 n 에 관한 이차방정식이므로 $2x^2 - (a+2)x + 200 = 0$ 이 실근을 가지더라도 $2n^2 - (a+2)n + 200 = 0$ 은 실근을 갖지 않을 수 있기 때문이다.

2. 따라서 $f(n) = 2n^2 - (a+2)n + 200$ 이라 할 때, $f(n)$ 이 최소가 되게 하는 n 의 후보군을 정하여 각각에 대하여 $f(n) > 0$ 인지 확인해야 한다.

$$2n^2 - (a+2)n + 200 = 2\left(n - \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{(a+2)^2}{8} + 200 \text{이므로 } f(n) \text{이 최소가 되게 하는 } n \text{은}$$

$$\frac{a}{4}, \frac{a+1}{4}, \frac{a+2}{4}, \frac{a+3}{4} \text{ 중의 하나이다. } \frac{a+2}{4} \text{가 자연수라면 } f(n) \text{이 최소가 되게 하는 } n \text{은}$$

$$\frac{a+2}{4} \text{이지만 } \frac{a+2}{4} \text{가 자연수가 아닐 수도 있으므로 4개의 후보가 생기는 것이다.}$$

$f(n)$ 이 최소가 되게 하는 n 은 $\frac{a+1}{4}, \frac{a+2}{4}, \frac{a+3}{4}, \frac{a+4}{4}$ 중의 하나라고 해도 좋다. 또한, 이차함수는 대칭성이 있으므로 $\frac{a}{4}, \frac{a+1}{4}, \frac{a+2}{4}$ 중의 하나라고 해도 좋다. 어차피 결과는 같다.)

3. $f\left(\frac{a}{4}\right) > 0, f\left(\frac{a+1}{4}\right) > 0, f\left(\frac{a+2}{4}\right) > 0, f\left(\frac{a+3}{4}\right) > 0$ 을 모두 만족시키는 a 의 범위를 구하자.

$$f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{(a+2)^2}{8} + 200 > 0 \text{에서 } (a+2)^2 < 1604 \text{이다.}$$

$$f\left(\frac{a+1}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{(a+2)^2}{8} + 200 > 0 \text{에서 } (a+2)^2 < 1601 \text{이다.}$$

$$f\left(\frac{a+2}{4}\right) = -\frac{(a+2)^2}{8} + 200 > 0 \text{에서 } (a+2)^2 < 1600 \text{이다.}$$

$$f\left(\frac{a+3}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{(a+2)^2}{8} + 200 > 0 \text{에서 } (a+2)^2 < 1601 \text{이다.}$$

a 는 자연수이므로 $(a+2)^2 < 1600$ 이어야 한다. 따라서 $-40 < a+2 < 40$ 이므로 자연수 a 의 최댓값은 37이다.

※ 이 문제를 쉽게 풀려면 방정식에 주목하지 않으면 된다.
(산술평균) \geq (기하평균)을 이용해보고, 다음 페이지를 보자.

$$2n^2 - (a+2)n + 200 > 0, 2n^2 + 200 > (a+2)n \text{이다.}$$

$$n \text{이 자연수이므로 양변을 } n \text{으로 나누면 } 2n + \frac{200}{n} > a+2 \text{이다.}$$

$$\text{여기서 } 2n > 0, \frac{200}{n} > 0 \text{이므로 (산술평균)} \geq \text{(기하평균)임을 이용하면 } 2n + \frac{200}{n} \geq 40 \text{이다.}$$

$$(\text{단, 등호는 } 2n = \frac{200}{n} \text{일 때 성립})$$

따라서 $40 > a+2, 38 > a$ 이므로 자연수 a 의 최댓값은 37이다.

comment

산술평균과 기하평균을 생각하는 것이 어려울 수 있다. 따라서 ‘실수에 관한 부등식이 아닌 경우 산술평균과 기하평균의 관계를 적용해볼 수도 있겠다.’ 정도만 알아둬도 좋다.

08 09년 7월 교육청 나형 7번

답 : ③

원의 반지름을 r 이라 하면 $A_k = \frac{1}{2}r^2\theta_k$ 이다. 수열 $\{\theta_n\}$ 이 등차수열을 이루므로 A_1, A_2, \dots, A_n 또한 등차수열을 이룬다.

$$\sum_{k=1}^n \theta_k = 2\pi \text{ 이므로 } \sum_{k=1}^n A_k = A \text{ 이다.}$$

$$A_1 + A_n = \frac{1}{5}A \text{ 이므로 } \sum_{k=1}^n A_k = \frac{n(A_1 + A_n)}{2} = \frac{n}{2} \times \frac{1}{5}A = A$$

$$\frac{n}{10} = 1 \text{ 이므로 } n = 10 \text{ 이다.}$$

09 11학년도 6월 평가원 나형 25번

답 : 27

1. 첫째항이 16이고 공비가 $2^{\frac{1}{10}}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 을 구하면

$$a_n = 16 \times \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{n-1} = 2^{4 + \frac{n-1}{10}} \text{ 이다.}$$

$$\log a_n = \log 2^{4 + \frac{n-1}{10}} = \left(4 + \frac{n-1}{10}\right) \log 2 \text{ 에서 } \log 2 = 0.301 \text{ 이므로}$$

$$\log a_n = \left(4 + \frac{n-1}{10}\right) \times 0.301 = 1.204 + (n-1) \times 0.0301 \text{ 이다.}$$

따라서 $0 \leq 0.204 + (n-1) \times 0.0301 < 1$ 일 때

$\log a_n$ 의 소수 부분은 $b_n = 0.204 + (n-1) \times 0.0301$ 이다.

2. 따라서 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{k-1}, b_k, b_{k+1} + 1$ 은 순서대로 첫째항이 0.204, 공차가 0.0301인 등차수열을 이룬다.

이때, $b_{k+1} + 1$ 이 특이하다. $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{k-1}, b_k, b_{k+1} + 1$ 이 순서대로 등차수열을 이루기 위해서는 $b_k + 0.0301 = b_{k+1} + 1$ 이어야 하고

이를 위해서는 $0.204 + \{(k)-1\} \times 0.0301 < 1$, $0.204 + \{(k+1)-1\} \times 0.0301 \geq 1$ 을 만족시켜야 한다.

따라서 $p_n = 0.204 + (n-1) \times 0.0301$ 이라 할 때 $p_k < 1$ 이고 $p_{k+1} \geq 1$ 인 자연수 k 의 값을 구하자.

$$p_k = 0.204 + (k-1) \times 0.0301 < 1 \text{ 에서 } k < 1 + \frac{1-0.204}{0.0301} = 1 + \frac{0.796}{0.0301} = 1 + \frac{7960}{301} = 27. \dots$$

$$p_{k+1} = 0.204 + k \times 0.0301 \geq 1 \text{에서 } k \geq \frac{1-0.204}{0.0301} = \frac{0.796}{0.0301} = \frac{7960}{301} = 26. \dots$$

따라서 $26. \dots \leq k < 27. \dots$ 이고 k 는 자연수이므로 $k = 27$ 이다.

comment

b_n 과 p_n 이 같은 식임에도 불구하고 $p_n = 0.204 + (n-1) \times 0.0301$ 을 새로 도입하는 이유는 b_n 은 소수 부분이므로 그 정의상 $0 \leq b_n < 1$ 이기 때문이다.

10 09년 4월 교육청 나형 21번

답 : 22

1. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3 = 40$, $a_8 = 30$ 이므로 $5d = -10$, $d = -2$ 이다. $a_3 = a + 2d = a - 4 = 40$ 이므로 $a = 44$ 이다.

$$|a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}| = \left| \frac{n(a_2 + a_{2n})}{2} \right| \text{에서}$$

$$a_2 = 44 - 2 = 42, a_{2n} = 44 - 2(2n - 1) = -4n + 46 \text{이므로}$$

$$|a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}| = \left| \frac{n(a_2 + a_{2n})}{2} \right| = \left| \frac{n(-4n + 88)}{2} \right| = |n(-2n + 44)|$$

2. $|n(-2n + 44)|$ 이 최소가 되는 자연수 n 의 값을 구하자.
 $|n(-2n + 44)| \geq 0$ 이므로 $|n(-2n + 44)| = 0$ 일 때 최소이다.

$$n(-2n + 44) = 0, n(n - 22) = 0 \quad \therefore n = 22 \quad (\because n > 0)$$

따라서 $|a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}|$ 이 최소가 되는 자연수 n 의 값은 22이다.

11 18년 4월 교육청 나형 28번

답 : 26

1. 등차중항을 이용하면 $a_1 + a_3 = 2a_2$ 이다.

따라서 (가)에서 $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 159 \quad \therefore a_2 = 53$

2. 등차중항을 이용하면 $a_{m-2} + a_m = 2a_{m-1}$ 이다.

따라서 (나)에서 $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 3a_{m-1} = 96 \quad \therefore a_{m-1} = 32$

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_2 + (m-3)d = a_{m-1}$ 에서 $(m-3)d = -21$ 이다.

3. $a_{m-1} = 32$ 인 자연수 m 에 대하여 $\sum_{k=1}^m a_k = 425$ 이다. a_2 와 a_{m-1} 의 값을 이용하여 $\sum_{k=1}^m a_k$ 의

$$\text{식을 작성하면 } \sum_{k=1}^m a_k = \frac{m(a_2 + a_{m-1})}{2} = \frac{m(53 + 32)}{2} = \frac{85m}{2} = 425$$

$$\therefore m = \frac{425}{85} \times 2 = 5 \times 2 = 10$$

$(m-3)d = -21$ 에서 $m = 10$ 이므로 $d = -3$ 이다. 따라서 $a_{11} = a_9 + 2d = 32 - 6 = 26$ 이다.

12 07년 3월 교육청 나형 22번

답 : 13

1. (가)에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26$

(나)에서 $a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 134$

$$\begin{aligned} \text{(다)에서 } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(a_2 + a_{n-1})}{2} \\ &= \frac{n(a_3 + a_{n-2})}{2} = \frac{n(a_4 + a_{n-3})}{2} = 260 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{n(a_1 + a_n)}{2} + \frac{n(a_2 + a_{n-1})}{2} + \frac{n(a_3 + a_{n-2})}{2} + \frac{n(a_4 + a_{n-3})}{2} \\ = \frac{n\{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + (a_4 + a_{n-3})\}}{2} \\ = \frac{n\{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n)\}}{2} = \frac{n(26 + 134)}{2} = 4 \times 260 \end{aligned}$$

$$80n = 4 \times 260 \quad \therefore n = 13$$

comment

‘처음 4개의 항, 마지막 4개의 항’을 보자마자 합이 같은 네 쌍을 이용하여 (다)의 $\sum_{k=1}^n a_k$ 를 표현해야 겠다고 생각해야 한다.

13 20학년도 수능 나형 15번

답 : ④

1. 그래프로 푸는 게 절대적으로 유리하다.

$$S_n = \frac{n\{2 \times 50 - 4(n-1)\}}{2} = (-2n + 52)n = -2n^2 + 52n = -2(n-13)^2 + 338 \text{에서}$$

$f(x) = -2(x-13)^2 + 338$ 이라 하면 $f(n) = S_n$ 이다.

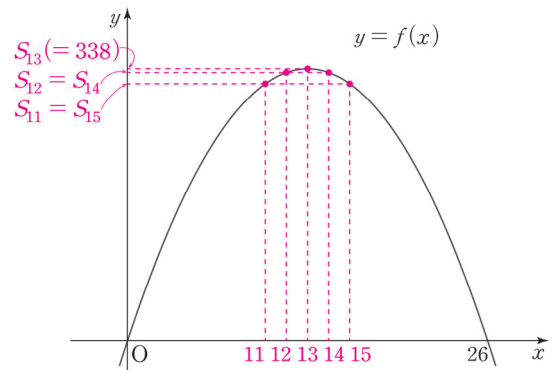
2. $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 $f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + f(m+4)$ 의 값이 최대가 되는 자연수 m 의 값을 구하자.

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = 13$ 에

대하여 대칭이므로 $m = 11$ 일 때

$$f(m) + f(m+1) + f(m+2)$$

$+ f(m+3) + f(m+4)$ 의 값이 최대가 된다.



comment

$\sum_{k=m}^{m+4} S_k$ 의 값을 m 에 관한 식으로 표현하여 최대가 되게 하는 m 의 값을 구할 수도 있지만, 최상위권으로 도약하려면 그래프로 빠르게 해결하고 넘어갈 수 있어야 한다.

14 17년 3월 교육청 고2 나형 15번

답 : ⑤

1. 등비중항을 이용하자.

$$\frac{k}{a}, \frac{k}{b}, \frac{k}{12} \text{가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 } \left(\frac{k}{b}\right)^2 = \frac{k}{a} \times \frac{k}{12}, b^2 = 12a$$

이때, a, b 는 $a < b < 12$ 인 자연수이므로 $b^2 = 12a$ 을 만족시키는 a, b 의 값을 구할 수 있다. (만약 a, b 가 자연수라는 말이 없었다면 a, b 에 관한 또 다른 조건이 하나 더 필요했을 것이다.)

$b^2 = 2^2 \times 3 \times a$ 이므로 a 는 3을 인수로 가진다. 이때 $a > 3$ 이라면 $b > 12$ 가 되므로 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 $a = 3, b = 6$ 이다.

$$2. f(a) = \frac{k}{a} = \frac{k}{3} = 3 \text{이므로 } k = 9 \text{이다.}$$

$$\therefore a + b + k = 3 + 6 + 9 = 18$$