제 2 교시

수학 영역(나형)

제0회

5지선다형

1. $4\times 27^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

$4\times 27^{\frac{2}{3}}=4\times(3^3)^{\frac{2}{3}}=4\times 3^2=36$

2. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x-2}-1}$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

(준식)$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)(\sqrt{x-2}+1)}{x-3}$

$=4\times 2=8$

3. $\int_0^2(3x^2-1)dx$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\int_0^2(3x^2-1)dx=[x^3-x]_0^2$

$=2^3-2$

$=6$

4. $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^3$의 전개식에서 $\frac{1}{x^3}$의 계수는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^3$의 전개식에서 일반항은

${}_3C_r\times x^{3-r}\times\left(\frac{1}{x^2}\right)^r={}_3C_r\times x^{3-3r}$

$\frac{1}{x^3}$의 항은 $3-3r=-3$에서 $r=2$일 때이므로

$\frac{1}{x^3}$의 계수는 ${}_3C_2=3$

빠른 채점

1	④	2	③	3	③	4	①	5	④
6	④	7	⑤	8	②	9	②	10	④
11	④	12	④	13	④	14	②	15	①
16	③	17	②	18	④	19	③	20	⑤
21	⑤	22	23	23	6	24	12	25	81
26	18	27	8	28	30	29	424	30	29

자동 채점	정답률/질문	해설 강의

5. $\sum_{k=1}^{9}(k+2)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-2)^2$의 값은? [3점]

① 284 ② 288 ③ 292 ④ 296 ⑤ 300

$\sum_{k=1}^{9}(k+2)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-2)^2$

$=\sum_{k=1}^{9}(k+2)^2-\sum_{k=1}^{9}(k-2)^2-8^2$

$=\sum_{k=1}^{9}(k^2+4k+4-k^2+4k-4)-64=\sum_{k=1}^{9}8k-64$

$=8\times\frac{9\times10}{2}-64 = 360-64 = 296$

6. 사건 전체의 집합 S의 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고,

$A\cap B=\varnothing$

$$A\cup B=S,\quad \mathrm{P}(A)=3\mathrm{P}(B)$$

$(A\cup B)^c=\varnothing$

$A^c\cap B^c=\varnothing$

$\mathrm{P}(A)=3k$, $\mathrm{P}(B)=k$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

	A	A^c	
B	0	k	k
B^c	$3k$	0	$3k$
	$3k$	k	1

$3k+k=1$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=3k=\frac{3}{4}$

[다른 풀이]

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

또, $A\cup B=S$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(S)=1$

따라서 확률의 덧셈정리에 의해

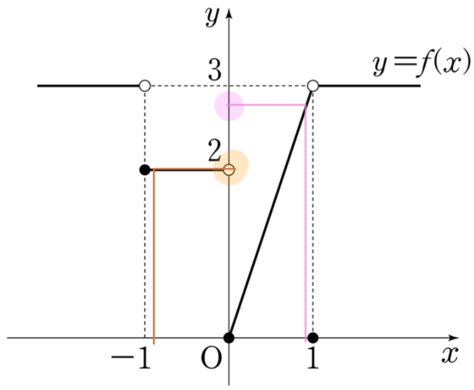
$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$= 3\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B)-0 = 4\mathrm{P}(B) = 1$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=3\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

7. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=2+3=5$

8. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(150,\ p)$를 따르고 X의 평균이 50일 때, X의 분산은? [3점]

① $\frac{50}{3}$ ② $\frac{100}{3}$ ③ 50 ④ $\frac{200}{3}$ ⑤ 100

확률변수 X가 이항분포 B(150,p)를 따르고 E(X)=50이므로

$150 \times p = 50$

$p = \frac{1}{3}$이다.

$\therefore\ V(X) = 150 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{100}{3}$이다.

9. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - 5$이 $x = 1$에서 극소일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{9}{2}$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax$

$f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=0$이다.

$\therefore\ 3+2a=0,\ a=-\frac{3}{2}$

10. 세 숫자 1, 2, 3을 중복 사용하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 1과 3이 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는? [3점]

① 90 ② 120 ③ 150 ④ 180 ⑤ 200

① 1, 2, 3을 중복 사용하여 만든 다섯 자리의 자연수

$_3\Pi_5$

② 1, 2를 중복 사용하여 만든 다섯 자리의 자연수

$_2\Pi_5$

③ 2, 3을 중복 사용하여 만든 다섯 자리의 자연수

$_2\Pi_5$

따라서 1과 3이 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는

$_3\Pi_5 - ({_2\Pi_5} + {_2\Pi_5}) + 1 = 180$

(1은 22222이 두 번 빠지므로 더해준 것이다.)

11. $0 \le \theta < 2\pi$ 일 때, x에 대한 이차방정식

$$2x^2+(4\sin\theta)x+3\cos\theta=0$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha < \theta < \beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{6}\pi$ ② π ③ $\frac{7}{6}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

$2x^2+(4\sin\theta)x+3\cos\theta=0$이

서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$D/4=4\sin^2\theta-6\cos\theta>0$

$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta>0$

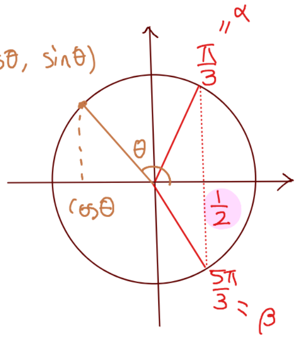
$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2<0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)<0$

$\cos\theta+2>0$ 이므로 $\cos\theta<\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{3}\pi$ 이므로 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$



12. 어느 과수원에서 수확하는 수박의 무게는 평균이 m kg, 표준편차가 1 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 수확한 수박 중에서 25개를 임의 추출하여 얻은 표본평균을 이용하여, 이 과수원에서 수확하는 수박의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le 8.516$이다. a의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.) [3점]

① 7.184 ② 7.284 ③ 7.384 ④ 7.484 ⑤ 7.584

25개를 임의 추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

신뢰도 99%의 신뢰구간은

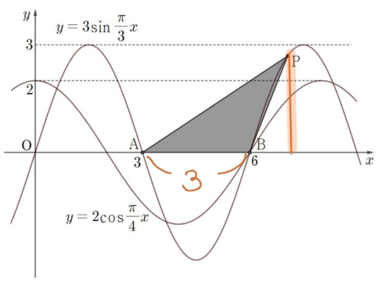
$\overline{X}-2.58\times\frac{1}{\sqrt{25}} \le m \le \overline{X}+2.58\times\frac{1}{\sqrt{25}}$

$8.516-a = 2\times2.58\times\frac{1}{\sqrt{25}} = 2\times2.58\times0.2$

$a=8.516-0.4\times2.58=8.516-1.032=7.484$

13. 두 함수 $y=3\sin\frac{\pi}{3}x$, $y=2\cos\frac{\pi}{4}x$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(a,0)$, $\mathrm{B}(b,0)$ $(0<a<4<b<8)$라 하자. $y=3\sin\frac{\pi}{3}x$의 그래프 위의 임의의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$



$3\sin\frac{\pi}{3}\times3 = 3\sin\pi = 0$이고

$2\cos\frac{\pi}{4}\times6 = 2\cos\frac{3}{2}\pi=0$ 이므로

A(3,0), B(6,0)이다.

따라서 $\overline{AB}=3$이다.

점 P의 y좌표의 절댓값의 최댓값은 3이므로

삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\therefore\ 3\times3\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3+\frac{1}{2}kt^2+3t+3 \text{ (단, } k\text{는 양수)}$$

속도 부호 바뀌는 순간

이다. 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 순간의 가속도의 곱이 -13일 때, 음수 k의 값은? [4점]

① -6 ② -7 ③ -8 ④ -9 ⑤ -10

점 P의 시각 $t(t\geq0)$에의 위치 x가

$x=t^3+\frac{1}{2}kt^2+3t+3$이므로

속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+kt+3$

$a=\frac{dv}{dt}=6t+k$

이차방정식 $3t^2+kt+3=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{k}{3}$, $\alpha\beta=1$이다. ······ ㉠

$t=\alpha$, $t=\beta$일 때 가속도의 곱이 -13이므로

$(6\alpha+k)\times(6\beta+k)=-13$에서 ㉠에 의하여

$36\times1+6k\times\left(-\frac{k}{3}\right)+k^2=-13$,

$-k^2+36=-13$, $k^2=49$,

$\therefore\ k=-7$

15. 다음 조건을 만족시키는 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$의 개수는? [4점]

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2이다.
(나) 함수 f의 치역의 모든 원소의 합은 홀수이다.

① 180 ② 182 ③ 184 ④ 186 ⑤ 188

지석T처럼 머리쓰는법

치역의 원소의 개수가 2인 함수 f의 개수는

${}_5C_2 \times ({}_2\Pi_5 - 2) = 10 \times 30 = 300$

정의역 원소 5개가 각각 2원소중 하나를 선택

정의역의 모든 원소가 2원소 중 하나만 선택

함수 f의 치역의 모든 원소의 합이 짝수인 경우는

모든 원소가 짝수 즉, 치역이 $\{2,4\}$이거나

모든 원소가 홀수 즉, 치역이 $\{1,3,5\}$의 부분집합이어야 한다.

따라서 치역의 모든 원소의 합이 짝수인 함수 f의 개수는

$({}_2\Pi_5 - 2) + {}_3C_2 \times ({}_2\Pi_5 - 2) = 30 + 3 \times 30 = 120$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$300 - 120 = 180$이다.

[다른 풀이]

두 조건 (가), (나)에 의하여 함수 f의 치역은 홀수인 자연수 1개와 짝수인 자연수 1개로 이루어져야 한다.

3개의 홀수 중 1개의 홀수를 뽑는 경우의 수는

${}_3C_1$,

2개의 짝수 중 1개의 짝수를 뽑는 경우의 수는

${}_2C_1$

이므로 함수 f의 치역을 결정하는 경우의 수는

${}_3C_1 \times {}_2C_1 = 6$

한편, 정의역의 각각의 원소는 치역의 2개의 원소 중 아무거나 택해도 되지만 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)$인 경우는 제외해야 하므로

치역의 원소의 개수가 2인 함수 f의 개수는

${}_2\Pi_5 - 2 = 30$이다.

따라서 구하는 모든 함수 f의 개수는

$6 \times 30 = 180$이다.

16. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n}(k-1)\{2^k+(-2)^k\}=\frac{6n-5}{9}\times 2^{2n+3}+\frac{40}{9} \quad \cdots\cdots(*)$$

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,
(좌변)=(우변)= (가) 이므로 $(*)$이 성립한다.
(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{2m}(k-1)\{2^k+(-2)^k\}=\frac{6m-5}{9}\times 2^{2m+3}+\frac{40}{9}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{2(m+1)}(k-1)\{2^k+(-2)^k\}$$
$$=\frac{6m-5}{9}\times 2^{2m+3}+\frac{40}{9}+\boxed{(나)}$$
$$=\frac{\boxed{(다)}}{9}\times 2^{2m+3}+\frac{40}{9}$$
$$=\frac{6(m+1)-5}{9}\times 2^{2(m+1)+3}+\frac{40}{9}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$가 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{p\times g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

지석T처럼 머리쓰는법

(i) n=1일 때,
(좌변)$=2^2+(-2)^2=\boxed{8}$
(우변)$=\frac{1}{9}\times32+\frac{40}{9}=\boxed{8}$ 이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) n=m일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{2m}(k-1)\{2^k+(-2)^k\}=\frac{6m-5}{9}\times2^{2m+3}+\frac{40}{9}$$

이므로 n=m+1일 때,

$$\sum_{k=1}^{2(m+1)}(k-1)\{2^k+(-2)^k\}$$
$$=\sum_{k=1}^{2m}(k-1)\{2^k+(-2)^k\}+2m\{2^{2m+1}+(-2)^{2m+1}\}+(2m+1)\{2^{2m+2}+(-2)^{2m+2}\}$$
$$=\frac{6m-5}{9}\times2^{2m+3}+\frac{40}{9}+2m\{2^{2m+1}+(-2)^{2m+1}\}+(2m+1)\{2^{2m+2}+(-2)^{2m+2}\}$$
$$=\frac{6m-5}{9}\times2^{2m+3}+\frac{40}{9}+\boxed{(2m+1)\times2^{2m+3}}$$
$$=\frac{\boxed{24m+4}}{9}\times2^{2m+3}+\frac{40}{9}$$
$$=\frac{6m+1}{9}\times2^{2m+5}+\frac{40}{9}$$
$$=\frac{6(m+1)-5}{9}\times2^{2(m+1)+3}+\frac{40}{9}$$

이다. 따라서 n=m+1일 때도 $(*)$이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$가 성립한다.

$\therefore p=8$, $f(m)=(2m+1)\times2^{2m+3}$, $g(m)=24m+4$

$\therefore \frac{p\times g(4)}{f(2)}=\frac{8\times100}{640}=\frac{5}{4}$

17. 3부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드 중에서 임의로 서로 다른 2장을 선택한다. 선택한 카드 2장에 적힌 두 수의 곱의 약수의 개수가 8일 때, 선택한 카드에 7이 적힌 카드가 포함될 확률은? [4점]

$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

지석T처럼 머리쓰는법

6장의 카드 중에서 2장을 선택하는 전체 경우의 수는

${}_6C_2=15$

한편 $8 = 4\times2 = 2\times2\times2$이므로

서로 다른 세 개의 소수 a, b, c에 대하여

카드에 적힌 두 수의 곱이

$a^3\times b^1$꼴 또는 $a^1\times b^1\times c^1$꼴이어야 한다.

약수 $= a^{\square}b^{\square}$ (0~3, 0~1) 8개 $= \underset{개}{4}\times\underset{개}{2}$

약수 $= a^{\square}b^{\square}c^{\square}$ (0~1, 0~1, 0~1) 8개 $= \underset{개}{2}\times\underset{개}{2}\times\underset{개}{2}$

3부터 8까지의 자연수는

3, 2^2, 5, 2×3, 7, 2^3로 나타낼 수 있으므로

두 수의 곱의 약수의 개수가 8인 경우의 수는

ⅰ) $a^3\times b$꼴인 경우

$2^3\times3$, $2^3\times5$, $2^3\times7$, $2^2\times(2\times3)$으로 4이다.

ⅱ) $a\times b\times c$꼴인 경우

$5\times(2\times3)$, $7\times(2\times3)$으로 2이다.

이 중에서 7이 적힌 카드가 포함되는 경우의 수는

$2^3\times7$, $7\times(2\times3)$으로 2이다.

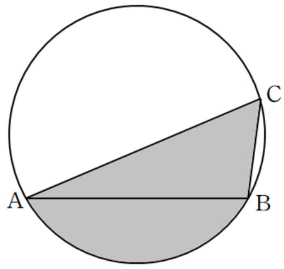
따라서 구하는 확률은

$\therefore \dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{4+2}{15}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$이다.

18. 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킬 때, $(\overline{BC}+\overline{CA})^2$의 값은? [4점]

(가) 점 C를 포함하지 않는 호 AB의 길이는 $\frac{2\pi}{3}$이다.
(나) 점 C를 포함하지 않는 호 AB와 두 선분 BC, CA로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{5}{12}\pi$이다.

① $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+5$ ② $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+6$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+5$
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+6$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+5$

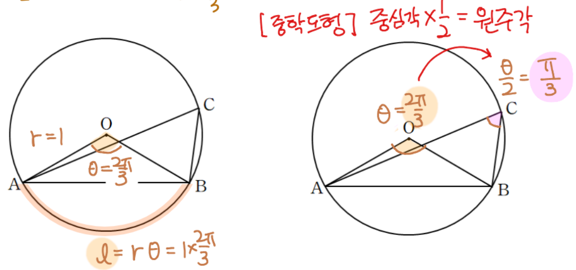


지석T처럼 머리쓰는법

세 점 A, B, C을 지나는 원의 중심을 O라 하고

부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ라 하면 (단, $0<\theta<\pi$)

조건 (가)에 의하여 $\theta=\frac{2\pi}{3}$이다.



이때 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면

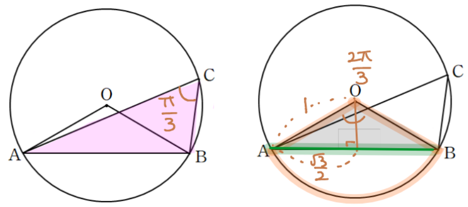
호 AB와 두 선분 BC, CA로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin\frac{\pi}{3}+\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\times1\times\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{5}{12}\pi$이다.

$\frac{\sqrt{3}}{4}(ab-1)+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{12}\pi$

$\frac{\sqrt{3}}{4}(ab-1)=\frac{\pi}{12}$

$ab=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+1$이다.



이때 $\overline{AB}=2\overline{OA}\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로

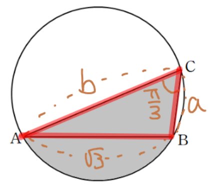
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$a^2+b^2=3+2ab\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+4$이다.

즉, $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+4+2\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+1\right)$

$=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+6$



19. 한 개의 동전을 연속해서 던져 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 게임을 한다.

> (가) 앞면이 나온 뒤 뒷면이 나오면 1점을 얻는다.
> (나) 뒷면이 나온 뒤 앞면이 나오면 2점을 얻는다.
> (다) 앞면 또는 뒷면이 연속해서 나오면 점수를 얻지 않는다.

동전을 5번 던지면서 위의 규칙에 따라 얻은 점수의 합이 3 이하일 때, 점수의 합이 홀수일 확률은? [4점]

① $\frac{7}{11}$ ② $\frac{15}{22}$ ③ $\frac{8}{11}$ ④ $\frac{17}{22}$ ⑤ $\frac{9}{11}$

지석T처럼 머리쓰는법

동전을 5번 던져 얻은 점수의 합이 k인 경우의 수를 a_k라 하자.

i) k=0일 때

모두 앞면 또는 뒷면이 나와야 하므로

$a_0=2$

ii) k=1일 때

(앞면 a번)(뒷면 b번)과 같은 순서로 나와야 하므로

경우의 수는 방정식 $a+b=5$를 만족시키는

자연수 a, b의 순서쌍 (a,b)의 개수와 같다.

$a_1 = {}_2H_{5-2} = {}_4C_3 = 4$

iii) k=2일 때

(뒷면 a번)(앞면 b번)과 같은 순서로 나와야 하므로

ii)와 같이 생각하면

$a_2 = {}_2H_{5-2} = {}_4C_3 = 4$

iv) k=3일 때

(앞면 a번)(뒷면 b번)(앞면 c번) 또는

(뒷면 a번)(앞면 b번)(뒷면 c번)과 같은 순서로 나와야 하고

경우의 수는 각각 방정식 $a+b+c=5$를 만족시키는

자연수 a, b, c의 순서쌍 (a,b,c)의 개수와 같으므로

$a_3 = 2\times{}_3H_{5-3} = 2\times{}_4C_2 = 12$

i)~iv)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{a_1+a_3}{a_0+a_1+a_2+a_3} = \frac{4+12}{2+4+4+12} = \frac{8}{11}$$

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ -f(x) & (x\geq a)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$와 함수 $h(x)=\begin{cases} 1-|x| & (|x|\leq 1) \\ 1 & (|x|>1)\end{cases}$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

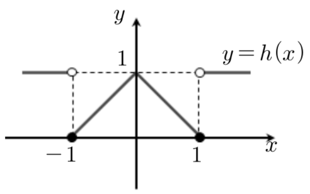
(가) 함수 $g(x)+h(x)$는 한 점에서만 불연속이다. (나) 함수 $g(x)h(x)$는 한 점에서만 불연속이다.

$g(5a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $\frac{37}{2}$ ② $\frac{39}{2}$ ③ $\frac{41}{2}$ ④ $\frac{43}{2}$ ⑤ $\frac{45}{2}$

지석T처럼 머리쓰는법

(step1) 조건 (가) : x=a에서 함수 g(x)의 연속성 판단하기



함수 y=h(x)의 그래프는 위의 그림과 같다.

함수 h(x)가 불연속인 지점에서
함수 g(x)가 연속이면
함수 g(x)+h(x)는 불연속이다.

따라서
함수 h(x)가 불연속인 지점에서
함수 g(x)+h(x)가 연속이려면
함수 g(x)가 불연속이어야 한다.

함수 h(x)가 x=-1, x=1에서 두점에서 불연속인데
함수 g(x)+h(x)가 한 점에서만 불연속이기 위해서는 (∵ 조건(가))
i) 함수 g(x)가 x=a=+1 에서 불연속인 경우나
ii) 함수 g(x)가 x=a=-1 에서 불연속인 경우를
만 가능하다.

여기서 f(a)=k라 할 때 (단, k≠0)

$\lim_{x\to a-} g(x) = f(a) = k$ 이고

$\lim_{x\to a+} g(x) = g(a) = -f(a) = -k$ 이다.

i) 함수 g(x)가 x=a=+1 에서 불연속인 경우

x = -1 에서
함수 h(x)는 불연속이고
함수 g(x)는 연속이므로
함수 g(x)+h(x)는 불연속이다.

x = +1 에서
함수 h(x)는 불연속이고
함수 g(x)도 불연속이다. 이때,

$g(1)+h(1) = -k+0$

$\lim_{x\to 1+}\{g(x)+h(x)\} = -k+1$ 이므로

$g(1)+h(1)\neq \lim_{x\to 1+}\{g(x)+h(x)\}$

이므로 함수 g(x)+h(x)는 x=1에서 불연속이다.
즉, 함수 g(x)+h(x)는 x=-1, x=1에서 불연속이므로
조건 (가), (나)를 만족시키지 않는다.

ii) 함수 g(x)가 x=a=-1 에서 불연속인 경우

x = +1 에서
함수 h(x)는 불연속이고
함수 g(x)는 연속이므로
함수 g(x)+h(x)는 불연속이다.

x = -1 에서
함수 h(x)는 불연속이고
함수 g(x)고 불연속이므로
함수 g(x)+h(x)가 연속이려면

$\lim_{x\to -1-}\{g(x)+h(x)\} = \lim_{x\to -1+}\{g(x)+h(x)\} = g(-1)+h(-1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to -1-} g(x)+h(x) = k+1$

$\lim_{x\to -1+}\{g(x)+h(x)\} = g(-1)+h(-1) = (-k)+0$

$\therefore\ k+1 = (-k)+0 \Leftrightarrow k = f(-1) = -\frac{1}{2}$ ······ ㉠

이때 함수 g(x)h(x)는 x=-1에서 불연속이므로
조건 (나)를 만족시키려면 x=1에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 1-} g(x)h(x) = \lim_{x\to 1+} g(x)h(x) = g(1)h(1)$,

$\Leftrightarrow g(1)\times 0 = g(1)\times 1$

$\Leftrightarrow g(1)=0$

$\Leftrightarrow f(1)=0$

$\Leftrightarrow f(x)=(x-1)(x-\alpha)$ (단, α는 상수)

$f(-1)=-2(-1-\alpha)=-\frac{1}{2}$ (∵ ㉠)

$\Leftrightarrow\ -1-\alpha=\frac{1}{4},\ \alpha=-\frac{5}{4}$

따라서 $f(x)=(x-1)\left(x+\frac{5}{4}\right)$이다.

$\therefore\ g(5a) = g(-5) = f(-5) = \frac{45}{2}$

21. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(0)=f'(0)=f'(6)=0$$

을 만족시킬 때, $t<3$인 실수 t에 대하여 점 $(t, f(t))$를 지나고 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 두 점에서만 만나는 모든 직선에 대하여 y절편의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $t<3$인 모든 실수 t에서 정의되는 함수 $g(t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $g(0)=0$

ㄴ. $\lim_{t\to 3-} g(t)=9$

ㄷ. $g(c)=f(4c)-4cf'(4c)$를 만족시키는 3보다 작은 양수 c에 대하여 $g(-c)=\frac{11}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설 강의에서 더 쉽고 간단한 해결법을 배울 수 있습니다.
강의에서 설명하는 방식이 글로는 담기 어려워
해설지에 포함되지 않았습니다.

지석T처럼 머리쓰는법

(step1) f(x)의 식

f(0)=0이므로

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+px^2+qx$라 하면

$f'(x)=x^2-6x$이므로

$f'(x)=x^2+2px+q$에서 $p=-3$, $q=0$

즉, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2$이다.

(step2) 삼차함수 f(x)의 대칭성

함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

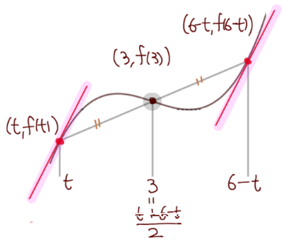
함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3, f(3))$에 대하여 대칭이다.

참고로

점 $(3, f(3))$에 대하여

점 $(t, f(t))$을 대칭이동하면

점 $(6-t, f(6-t))$이 된다.



또한

점 $(t, f(t))$에 대한 접선의 기울기와

점 $(6-t, f(6-t))$에 대한 접선의 기울기가 같다. ……㉠

(step3) g(t) 파악하기

직선이 삼차함수와 서로 다른 두 점에서 만나는 것은

직선이 삼차함수에 접할 때 뿐이다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$을 지나고

곡선 $y=f(x)$와 접하는 직선은 2개 존재하므로

이 두 직선을 기울기가 큰 순서대로 각각 l_1, l_2라 하면

직선 l_1은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이고,

직선 l_2는 점 $(t, f(t))$를 지나고

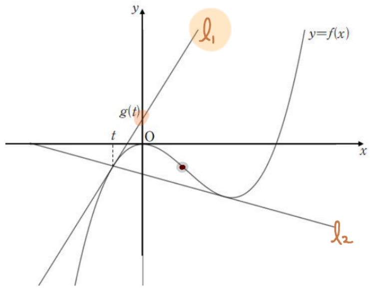
곡선 $y=f(x)$와 접하는 l_1이 아닌 직선이다.

i) t < 0 일 때

점 $(t, f(t))$의 x좌표는 음수이므로

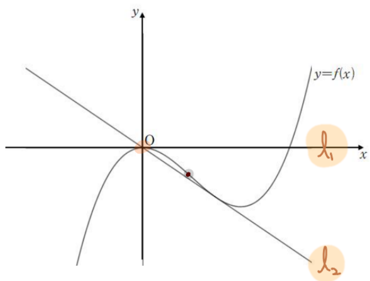
직선의 기울기가 클수록 y절편의 값이 크다.

즉, $g(t)$는 직선 l_1의 y절편이다.



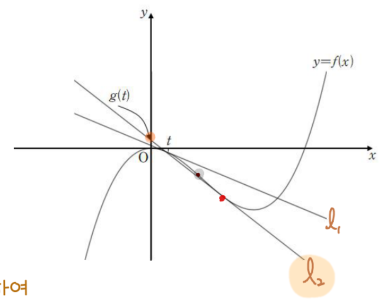
ii) t = 0 일 때

점 $(t, f(t))$는 y축 위의 점이므로 $f(0)=0$에서 $g(t)=0$이다.



iii) t > 0 일 때

i)과 마찬가지로 생각하면 $g(t)$는 직선 l_2의 y절편이다.



이때, ㉠에 의하여

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(6-t, f(6-t))$에서의 접선과

직선 l_1은 서로 평행하므로

직선 l_2와 곡선 $y=f(x)$의 접점의 x좌표를 s라 하면

$3<s<6-t$를 만족시킨다.

다음 페이지에 계속!

21. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(0)=f'(0)=f'(6)=0$$

을 만족시킬 때, $t<3$인 실수 t에 대하여 점 $(t, f(t))$를 지나고 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 두 점에서만 만나는 모든 직선에 대하여 y절편의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $t<3$인 모든 실수 t에서 정의되는 함수 $g(t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $g(0)=0$

ㄴ. $\lim_{t\to 3-} g(t)=9$

ㄷ. $g(c)=f(4c)-4cf'(4c)$를 만족시키는 3보다 작은 양수 c에 대하여 $g(-c)=\frac{11}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

지석T처럼 머리쓰는법 앞 페이지에 이어서

ㄱ. ii)에 의하여 $g(0)=0$이다. (참)

ㄴ. $t\to 3-$이면 $3<s<6-t$ 에서 $s\to 3+$이므로

$\lim_{t\to 3-} g(t)$의 값은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, f(3))$에서의

접선의 y절편의 값과 같다.

$f'(3)=-9$, $f(3)=-18$ 이므로

접선의 방정식 $y=f'(3)(x-3)+f(3)=-9x+9$에서

$\lim_{t\to 3-} g(t)=9$ (참)

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 이므로

이 직선의 y절편은 $f(t)-tf'(t)$ 이다.

따라서 $g(c)=f(4c)-4cf'(4c)$를 만족시키기 위해서는

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4c, f(4c))$에서의 접선이

점 $(c, f(c))$를 지나야 한다.

즉, 직선 $y=f'(4c)(x-4c)+f(4c)$는 점 $(c, f(c))$를 지나야 하므로

$f(c)=-3cf'(4c)+f(4c)$에서

$\frac{1}{3}c^3-3c^2=-3c(16c^2-24c)+\frac{64}{3}c^3-48c^2$,

$27c^3-27c^2=0$, $c^2(c-1)=0$

$\therefore c=1$ ($\because c>0$)

이때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=7(x+1)-\frac{10}{3}=7x+\frac{11}{3}$

즉, $g(-c)=g(-1)=\frac{11}{3}$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

단답형

22. 함수 $f(x)=(x+2)(x^4+x^2+3)$에 대하여 미분계수 $f'(-2)$을 구하시오. [3점]

$f(x)=(x+2)(x^4+x^2+3)$

$f'(x)=x^4+x^2+3+(x+2)(4x^3+2x)$

$f'(-2)=(-2)^4+(-2)^2+3=16+4+3=23$

23. 등차수열 $\{a_n\}$대하여 $a_{10}-a_7=18$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차를 구하시오. [3점]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}-a_7=3d=18$

$\therefore d=6$

24. $x=a$에서 함수 $f(x)$의 미분계수는 4이다. 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)-g(h)}{2h}=0$$

이 성립할 때, $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(a)=4$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)-g(h)}{2h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\left(\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{g(h)}{h}\times\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=\frac{3}{2}f'(a)-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}$

$=\frac{3}{2}\times 4-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=0$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=12$

25. 로그방정식 $(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x - 12 = 0$의 두 근을 각각 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. [3점]

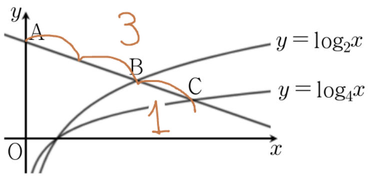
$(\log_3 x+2)(\log_3 x-6)=0$

$\log_3 x=-2$ $\therefore x=3^{-2}$

$\log_3 x=6$ $\therefore x=3^6$

$\therefore \alpha\beta=3^{-2+6}=3^4=81$

26. 그림과 같이 점 A$(0, 3)$을 지나는 직선이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_4 x$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C가 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점일 때, 두 점 B, C의 x좌표의 곱을 구하시오. [4점]



지석T처럼 머리쓰는법

점 B의 좌표를 $(b, \log_2 b)$라 하자.

선분 AB를 3:1로 외분하는 점 C의

x좌표는 $\frac{3\times b-1\times 0}{3-1}=\frac{3b}{2}$,

y좌표는 $\frac{3\times\log_2 b-1\times 3}{3-1}=\frac{3\log_2 b-3}{2}=\frac{3}{2}\log_2\frac{b}{2}$이다.

이때 점 C는 곡선 $y=\log_4 x$ 위의 점이므로

$\frac{3}{2}\log_2\frac{b}{2}=\log_4\frac{3b}{2}$를 정리하면

$\frac{3}{2}\log_2\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\log_2\frac{3b}{2}$,

$3\log_2\frac{b}{2}=\log_2\frac{3b}{2}$,

$\left(\frac{b}{2}\right)^3=\frac{3b}{2}$,

$b^2=12$이다.

따라서 두 점 B, C의 x좌표의 곱은

$b\times\frac{3b}{2}=\frac{3}{2}b^2=\frac{3}{2}\times 12=18$

27. 확률변수 X와 Y는 평균이 각각 m, $m+2$이고 표준편차가 모두 5인 정규분포를 따른다.

$$\mathrm{P}(X\le 2)-\mathrm{P}(0\le Y\le 4)=0.0228$$

이 성립할 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 m의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

지석T처럼 머리쓰는법

확률변수 X는 정규분포 $N(m, 5^2)$을 따르고,

확률변수 Y는 정규분포 $N(m+2, 5^2)$을 따르므로 $Y=X+2$이 성립한다.

$P(X\le 2)-P(0\le Y\le 4) = P(X\le 2)-P(0\le X+2\le 4)$

$=P(X\le 2)-P(-2\le X\le 2)$

$=P(X\le -2)$

$=P\left(Z\le\frac{-2-m}{5}\right)$

$=0.0228$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$에서

$P(Z\le -2)=P(Z\ge 2)$

$=0.5-P(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

이므로 $\frac{-2-m}{5}=-2$에서 $m=8$이다.

28. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\times\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-6$$

을 만족시킨다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=tx$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의되는 함수 $g(t)$가 한 점에서만 불연속일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

지석T처럼 머리쓰는법

함수 f(x)는 삼차함수이고, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\times\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-6$이므로

$f(1)=f(2)=0$이고, $f'(1)\times f'(2)=-6$이다.

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)$ (k는 상수)라 하면

$f'(x)=(x-2)(x-k)+(x-1)(x-k)+(x-1)(x-2)$

에서 $f'(1)=k-1$, $f'(2)=2-k$이므로

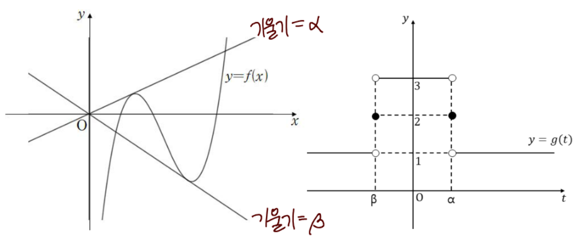
$f'(1)\times f'(2)=(k-1)(2-k)$

$=-k^2+3k-2=-6$

$k^2-3k-4=(k-4)(k+1)=0$에서 $k=4$ 또는 $k=-1$이다.

i) k=4일 때,

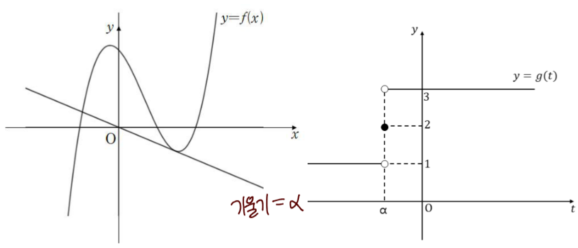
$f(x)=(x-1)(x-2)(x-4)$의 그래프는 다음과 같다.



∴ k=4이면 함수 g(t)는 서로 다른 두 점에서 불연속이므로 조건을 만족시키지 못한다.

ii) k=−1일 때,

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+1)$의 그래프는 다음과 같다.



∴ k=−1일 때, 함수 g(t)는 한 점에서만 불연속이다.

i), ii)에서 k=−1이므로 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+1)$에서

∴ $f(4)=3\times2\times5=30$

29. 첫째항이 a이고 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n+2}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우})\\ \dfrac{a_n+3}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_m=a_{m+1}$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값이 6이 되도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

지석T처럼 머리쓰는법

i) a_6이 짝수일 때

$a_6=a_7$에서 $a_6=\frac{a_6+2}{2}$이므로 $a_6=2$이다.

또한 $a_5\neq2$이어야 하므로 a_5는 홀수이어야 한다.

따라서 $a_6=\frac{a_5+3}{2}$에서 $a_5=2a_6-3=1$이다.

이때 $a_5=1$이면 $a_4=0$ 또는 $a_4=-1$이므로

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

ii) a_6이 홀수일 때

$a_6=a_7$에서 $a_6=\frac{a_6+3}{2}$이므로 $a_6=3$이다.

이때 $a_5\neq3$이어야 하므로 a_5는 짝수이어야 한다.

따라서 $a_6=\frac{a_5+2}{2}$에서 $a_5=2a_6-2=4$이다.

$a_5=4$일 때 4 이하의 자연수 n에 대하여

$$a_n=\begin{cases}2a_{n+1}-2 & (a_{n+1}\text{이 짝수인 경우})\\ 2a_{n+1}-3 & (a_{n+1}\text{이 홀수인 경우})\end{cases}$$

이 성립하므로 a_4, a_3, a_2, a_1의 값을 나열하면 다음과 같다.

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
4	6	10	18	34, 33
			17	32, 31
		9	16	⋮
			15	
	5	8	14	
			13	
		7	12	⋮
			11	20, 19

i), ii)에 의하여 구하는 모든 a의 값의 합은

$\frac{19+34}{2}\times16=424$이다.

30. 함수 $f(x)=2x^2-5x$에 대하여 연속함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(0)$은 자연수이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 모든 정수 n에 대하여 열린 구간 $(n,\ n+1)$에서 미분가능하고, $|g'(x)|=|f(x)|\ (n<x<n+1)$이다.
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=1$과 $x=2$에서 미분가능하다.

$\int_{-1}^{2} g(x)dx=32$일 때, $g(3)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

지석T처럼 머리쓰는법

(step1) 함수 g(x)와 f(x) 관계 파악하기

조건 (나)에 의해 열린 구간 (n, n+1)에서 $|g'(x)|=|f(x)|$이다.

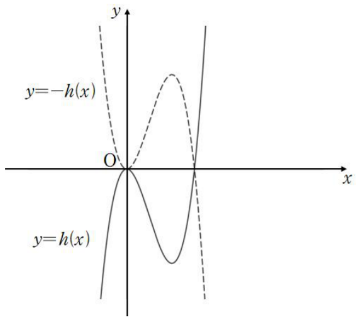
따라서 $g'(x)=\pm f(x)=\pm(2x^2-5x)$,

$g(x)=\pm\int f(x)dx=\pm\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+C\right)$ (단, C는 적분상수)

이때 $h(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2$이라 하면

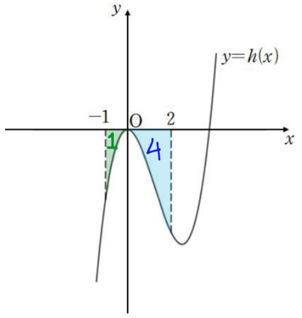
함수 y=g(x)의 그래프는 정수 n에 대하여 각 구간 [n, n+1]에서 함수 y=h(x) 또는 함수 y=-h(x)의 그래프를 y축의 방향으로 평행이동시킨 것이다.

두 함수 y=h(x)와 y=-h(x)의 그래프는 그림과 같다.



$\int_{-1}^{0} h(x)dx=\left[\frac{x^4}{6}-\frac{5}{6}x^3\right]_{-1}^{0}=-1,$

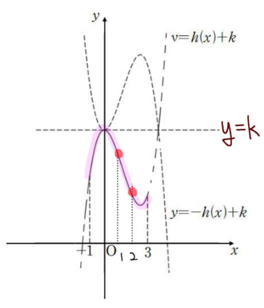
$\int_{0}^{2} h(x)dx=\left[\frac{x^4}{6}-\frac{5}{6}x^3\right]_{0}^{2}=-4$



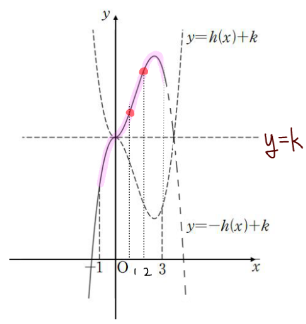
(step2) y=g(x)의 그래프 파악하기

g(0)=k라 하고, 함수 y=g(x)가 연속이고 x=1과 x=2에서 미분가능하므로 함수 y=g(x)의 그래프는 아래 그림 중 하나이다.

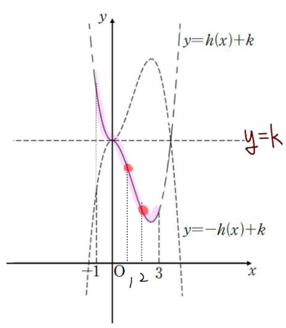
i)



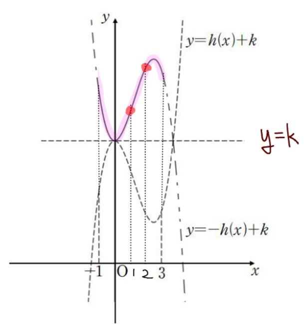
ii)



iii)



iv)



다음 페이지에 계속!

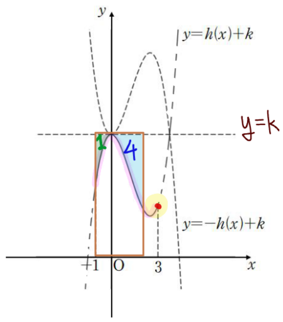
30. 함수 $f(x)=2x^2-5x$에 대하여 연속함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(0)$은 자연수이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 모든 정수 n에 대하여 열린 구간 $(n, n+1)$에서 미분가능하고, $|g'(x)|=|f(x)|\ (n<x<n+1)$이다.
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=1$과 $x=2$에서 미분가능하다.

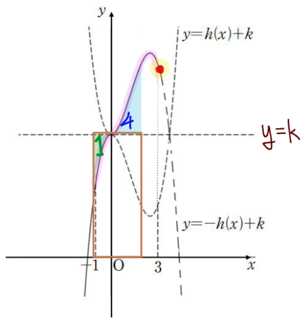
$\int_{-1}^{2} g(x)dx=32$일 때, $g(3)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

지석T처럼 머리쓰는법 ✎ 앞 페이지에 이어서

i)



ii)



i) $\int_{-1}^{2} g(x)dx = \boxed{3k}-1-4$

$= 3k-5 = 32$

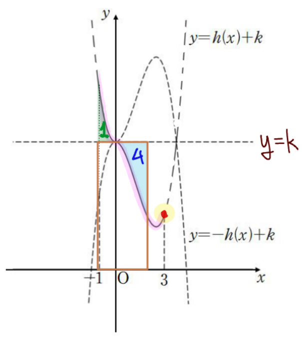
$g(0)=k=\frac{37}{3}$으로 자연수가 아니다.

ii) $\int_{-1}^{2} g(x)dx = \boxed{3k}-1+4$

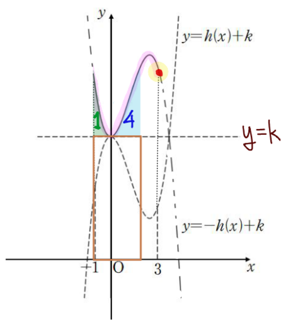
$= 3k+3 = 32$

$g(0)=k=\frac{29}{3}$으로 자연수가 아니다.

iii)



iv)



iii) $\int_{-1}^{2} g(x)dx = \boxed{3k}+1-4$

$= 3k-3 = 32$

$g(0)=k=\frac{35}{3}$으로 자연수가 아니다.

iv) $\int_{-1}^{2} g(x)dx = \boxed{3k}+1+4$

$= 3k+5 = 32$

$g(0)=k=9$으로 자연수이다.

따라서 닫힌 구간 $[-1,3]$에서

$g(x)=-h(x)+9$이다.

$\therefore\ g(3)=-h(3)+9= \frac{9}{2}+9=\frac{27}{2}$이므로 $p+q=29$이다.

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.