2021학년도 대학수학능력시험 대비

김지석 모의고사

수학 영역
(나 형)

Math Master

4킬러 복습변형 문제지

4킬러 복습 변형

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ -f(x) & (x \geq a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$와 함수 $h(x)=\begin{cases} 0 & (|x-2|<1) \\ 1 & (|x-2| \geq 1) \end{cases}$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)+h(x)$는 한 점에서만 불연속이다.
> (나) 함수 $g(x)h(x)$는 한 점에서만 불연속이다.

$a-g(4)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $\frac{11}{4}$　② 5　③ $\frac{21}{4}$　④ 6　⑤ $\frac{27}{4}$

21. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(0)=f'(0)=f'(2)=0$$

을 만족시킬 때, $t<1$인 실수 t에 대하여 점 $(t, f(t))$를 지나고 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 두 점에서만 만나는 모든 직선에 대하여 y절편의 최댓값을 $g(t)$라 하자.
$t<1$인 모든 실수 t에서 정의되는 함수 $g(t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $g(0)=0$

ㄴ. $\lim_{t \to 1-} g(t)=g\left(-\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $0<k<1$인 모든 실수 k에 대하여 $g(k)<\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 첫째항이 a이고 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+2}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ \dfrac{a_n+3}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5 = 4$를 만족시키는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

30. 함수 $f(x) = 2x^2 - 3x$에 대하여 연속함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(0)$은 자연수이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 모든 정수 n에 대하여 열린 구간 $(n, n+1)$에서 미분가능하고, $|g'(x)| = |f(x)|$ $(n < x < n+1)$이다.
> (다) 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 미분가능하다.

$\int_{-1}^{2} g(x)dx = \dfrac{29}{3}$일 때, $g(2) = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

복습변형 (나형)

20	정답 ③

$h(x)=\begin{cases}0 & (1<x<3)\\ 1 & (x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 3)\end{cases}$ 이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 불연속이다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면
함수 $g(x)+h(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 불연속이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 불연속이어야 하고,
$f(a)=k$라 할 때 (단, $k\neq 0$)
$\lim_{x\to a-}g(x)=k$이고 $\lim_{x\to a+}g(x)=g(a)=-k$이다.

함수 $h(x)$가 불연속인 $x=1$, $x=3$에서 함수 $g(x)$가 연속이면 함수 $g(x)+h(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 불연속이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$이나 $x=3$에서 불연속이어야 한다.

또한 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속이므로 $a=1$ 또는 $a=3$이다.

ⅰ) $a=1$인 경우

$x=3$에서 함수 $h(x)$는 불연속이고 함수 $g(x)$는 연속이므로 함수 $g(x)+h(x)$는 불연속이다.
$x=1$에서 함수 $h(x)$는 불연속이고 함수 $g(x)$도 불연속이다.
이때,
$g(1)+h(1)=-k+1$
$\lim_{x\to 1+}\{g(x)+h(x)\}=-k+0$
에 의하여
$g(1)+h(1)\neq\lim_{x\to 1+}\{g(x)+h(x)\}$
이므로 함수 $g(x)+h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
즉, 함수 $g(x)+h(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 불연속이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

ⅱ) $a=3$인 경우

$x=1$에서 함수 $h(x)$는 불연속이고 함수 $g(x)$는 연속이므로 함수 $g(x)+h(x)$는 불연속이다.
$x=3$에서 함수 $h(x)$는 불연속이고 함수 $g(x)$도 불연속이므로 함수 $g(x)+h(x)$가 $x=3$에서 연속이려면
$\lim_{x\to 3-}\{g(x)+h(x)\}=\lim_{x\to 3+}\{g(x)+h(x)\}=g(3)+h(3)$이어야 한다.
즉 $k+0=(-k)+1$에서 $k=\frac{1}{2}$이므로 $f(3)=\frac{1}{2}$이다.
…… ㉠

이때 함수 $g(x)h(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로
조건 (나)를 만족시키려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.
$\lim_{x\to 1-}g(x)h(x)=\lim_{x\to 1+}g(x)h(x)=g(1)h(1)$,
즉 $g(1)\times 1=g(1)\times 0$에서 $g(1)=0$이므로 $f(1)=0$이다.
$f(x)=(x-1)(x-\alpha)$라 하면 (단, α는 상수)
㉠에 의하여
$f(3)=2(3-\alpha)=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{11}{4}$

따라서 $f(x)=(x-1)\left(x-\frac{11}{4}\right)$이다.

$\therefore\ a-g(4)=3+f(4)=3+3\times\frac{5}{4}=\frac{27}{4}$

21	정답 ⑤

함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1, f(1))$에 대하여 대칭이다. …… ㉠

이때, $f(0)=0$이므로 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+px^2+qx$라 하면

$f'(x)=x^2-2x$이므로

$f'(x)=x^2+2px+q$에서 $p=-1$, $q=0$

즉, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$이다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$을 지나고 곡선 $y=f(x)$와 접하는 직선은 2개 존재하므로 이 두 직선을 기울기가 큰 순서대로 각각 l_1, l_2라 하면

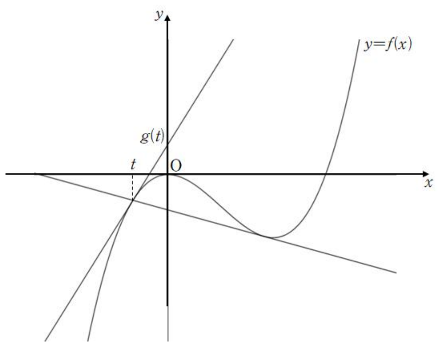
직선 l_1은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이고, 직선 l_2는 점 $(t, f(t))$를 지나고 곡선 $y=f(x)$와 접하는 l_1이 아닌 직선이다.

또한,

ⅰ) $t<0$일 때

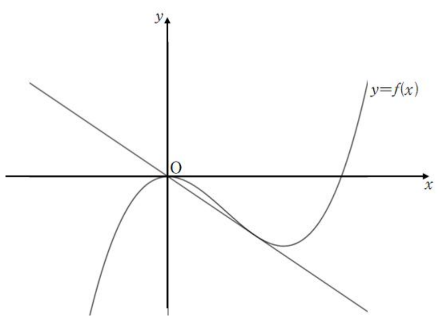
점 $(t, f(t))$의 x좌표는 음수이므로 직선의 기울기가 클수록 y절편의 값이 크다.

즉, $g(t)$는 직선 l_1의 y절편이다.



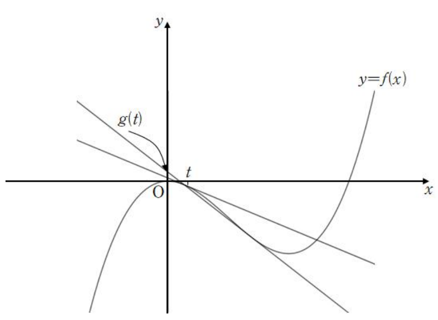
ⅱ) $t=0$일 때

점 $(t, f(t))$는 y축 위의 점이므로 $f(0)=0$에서 $g(t)=0$이다.



ⅲ) $t>0$일 때

ⅰ)과 마찬가지로 생각하면 $g(t)$는 직선 l_2의 y절편이다.



이때, ㉠에 의하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2-t, f(2-t))$에서의 접선과 직선 l_1은 서로 평행하므로 직선 l_2와 곡선 $y=f(x)$의 접점의 x좌표를 s라 하면 $1<s<2-t$를 만족시킨다.

ㄱ. ⅱ)에 의하여 $g(0)=0$이다. (참)

ㄴ. $t\to1-$이면 $1<s<2-t$에서 $s\to1+$이므로

$\lim_{t\to1-}g(t)$의 값은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 y절편의 값과 같다.

이때, $f'(1)=-1$, $f(1)=-\frac{2}{3}$이므로

접선의 방정식 $y=f'(1)(x-1)+f(1)=-x+\frac{1}{3}$에서

$\lim_{t\to1-}g(t)=\frac{1}{3}$

또한 $g\left(-\frac{1}{2}\right)$의 값은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$에서의 접선의 y절편의 값과 같다.

이때, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{24}$이므로

접선의 방정식

$y=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}x+\frac{1}{3}$에서

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$ (참)

ㄷ. $0<k<1$일 때, $g(k)$의 값은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2-k, f(2-k))$에서의 접선의 y절편의 값과 같다.

따라서 $0<k<1$에서 함수 $g(k)$는 증가하므로 ㄴ에 의하여 $g(k)<\lim_{k\to1-}g(k)=\frac{1}{3}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

29	정답 424

$a_{n+2}=k$일 때

a_{n+1}, a_n이 짝수이면

$a_{n+1}=2k-2$, $a_n=2(2k-2)-2=4k-6$

a_{n+1}이 짝수, a_n이 홀수이면

$a_{n+1}=2k-2$, $a_n=2(2k-2)-3=4k-7$

a_{n+1}이 홀수, a_n이 짝수이면

$a_{n+1}=2k-3$, $a_n=2(2k-3)-2=4k-8$

a_{n+1}, a_n이 홀수이면

$a_{n+1}=2k-3$, $a_n=2(2k-3)-3=4k-9$

따라서 $a_5=4$를 만족시키는 a_3의 값은 10, 9, 8, 7이고

a_3의 값에 따른 가능한 a_1의 값의 합은

$(4a_3-6)+(4a_3-7)+(4a_3-8)+(4a_3-9)=16a_3-30$이므로

구하는 모든 a의 값의 합은

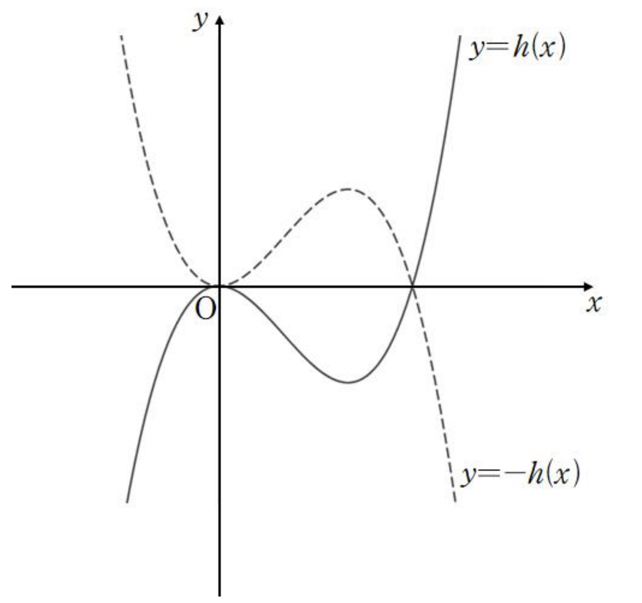
$\sum_{a_3=7}^{10}(16a_3-30)=\frac{82+130}{2}\times4=424$

30	**정답** 14

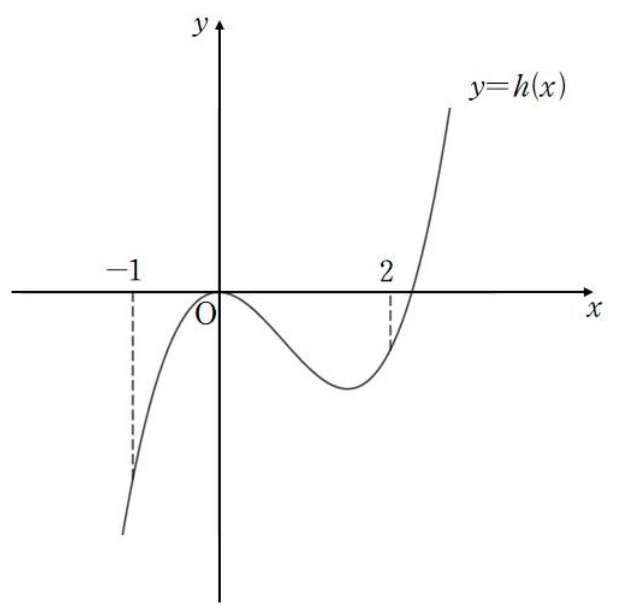
조건 (나)에 의해 열린 구간 $(n, n+1)$에서
$|g'(x)|=|f(x)|$이다.
따라서
$g'(x)=\pm f(x)=\pm(2x^2-3x)$,
$g(x)=\pm\int f(x)dx=\pm\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C\right)$ (단, C는 적분상수)

이때 $h(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2$이라 하면

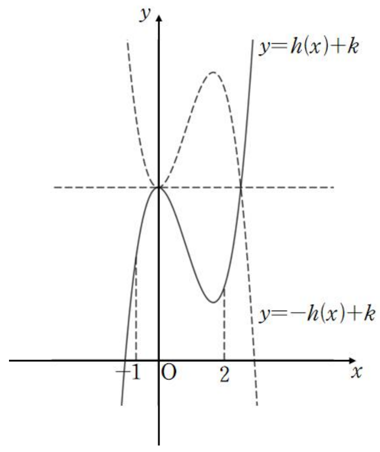
함수 $y=g(x)$의 그래프는 자연수 n에 대하여 각 구간 $[n, n+1]$에서 함수 $y=h(x)$ 또는 함수 $y=-h(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 평행이동시킨 것이다.
두 함수 $y=h(x)$와 $y=-h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



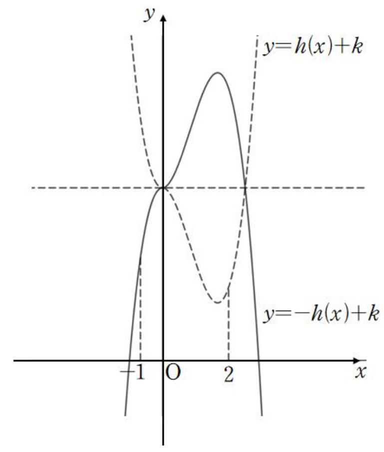
이때,
$\int_{-1}^{0}h(x)\,dx=\left[\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{2}x^3\right]_{-1}^{0}=-\frac{2}{3}$,
$\int_{0}^{2}h(x)\,dx=\left[\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{2}x^3\right]_{0}^{2}=-\frac{4}{3}$



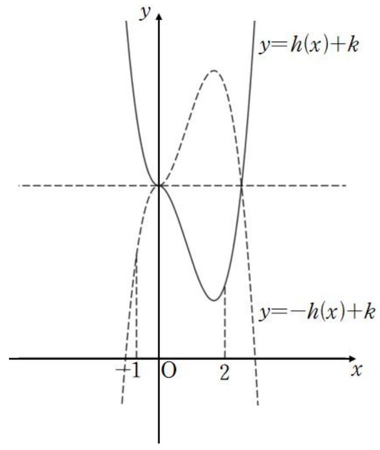
이고, $g(0)=k$라 하면 함수 $y=g(x)$가 연속이고 $x=1$에서 미분가능하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 아래 그림 중 하나이다.



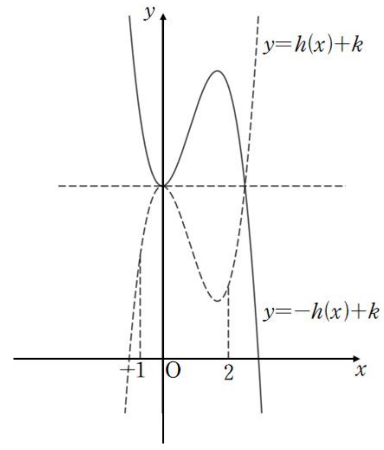
ⅰ)



ⅱ)



ⅲ)



ⅳ)

이때 각 경우마다 $\int_{-1}^{2}g(x)dx$의 값은

ⅰ) $\int_{-1}^{2}g(x)dx=3k-2=\frac{29}{3}$

$g(0)=k=\frac{35}{9}$으로 자연수가 아니다.

ⅱ) $\int_{-1}^{2}g(x)dx=3k+\frac{2}{3}=\frac{29}{3}$

$g(0)=k=3$으로 자연수이다.

ⅲ) $\int_{-1}^{2}g(x)dx=3k-\frac{2}{3}=\frac{29}{3}$

$g(0)=k=\frac{31}{9}$으로 자연수가 아니다.

ⅳ) $\int_{-1}^{2}g(x)dx=3k+2=\frac{29}{3}$

$g(0)=k=\frac{23}{9}$으로 자연수가 아니다.

따라서 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서
$g(x)=-h(x)+3$이고
$g(2)=-h(2)+3=\frac{2}{3}+3=\frac{11}{3}$이므로 $p+q=14$이다.