2021학년도 대학수학능력시험 대비

김지석 모의고사

수학 영역
(가 형)

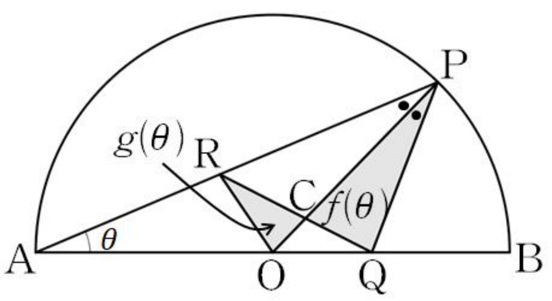
4킬러 복습변형 문제지

제 2 교시

4킬러 복습 변형

제0회S

20. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 8인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 선분 AB 위의 A가 아닌 점 Q를 $\angle\mathrm{APO}=\angle\mathrm{OPQ}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위의 점 R를 $\overline{\mathrm{PR}}=4$가 되도록 잡는다. 두 선분 OP와 QR이 만나는 점을 C라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$일 때 삼각형 PQC의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OCR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $60\times\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$이다.) [4점]



21. 음이 아닌 실수 t에 대하여 $x=0$부터 $x=k$ $(k\geq0)$까지 곡선 $y=\dfrac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$의 길이가 t가 되도록 하는 k의 값을 $f(t)$라 하고, 함수 $g(x)$를

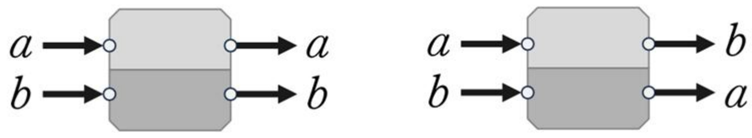
$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq0)\\ -f(-x) & (x<0)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

> $-m<x<m$인 모든 실수 x에 대하여
> $\displaystyle\int_{-x}^{x}\{|g(s)-a|-b\}ds=0$ (a, b는 양의 상수)이
> 되도록 하는 양수 m의 최댓값이 $\dfrac{4}{3}$이다.

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

29. 그림은 왼쪽의 입력 신호 a, b 를 오른쪽으로 전달하여 신호를 출력하는 장치를 표현한 것이다. 장치는 [그림1]처럼 입력된 신호가 변하지 않은 채로 출력하기도 하고, [그림2]처럼 입력된 신호가 변하여 출력하기도 한다.



[그림1] [그림2]

장치는 A, B 두 가지 종류가 있다. 장치 A는 [그림1]과 같이 출력할 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, [그림2]와 같이 출력할 확률도 마찬가지로 $\frac{1}{2}$ 이다. 장치 B는 [그림1]과 같이 출력할 확률은 $\frac{1}{4}$ 이고, [그림2]와 같이 출력할 확률은 $\frac{3}{4}$ 이다.
이런 A, B 두 종류의 장치 중 4개를 선택하여 일렬로 연결한다. 여기서 출력 결과가 변하지 않을 확률이 가장 높은 배열 상태에서, 출력 결과가 변하지 않을 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이며, 각 장치는 독립적으로 작동한다.) [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 도함수를 갖는 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-2 < x < 0$에서 $f'(f(x)) = \frac{1}{9}(x+3)$이다.
> (나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1) \le f'(x_2)$이다.

1보다 큰 양수 a에 대하여 구간 $[-2, 0]$에서 $f(x) = a - \frac{1}{x+3}$이다. 좌표평면의 제1사분면에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y = \frac{1}{4}x + \frac{4}{9}\ln 3$이 오직 한 점에서만 만나도록 하는 a의 최댓값이 $p+q\ln 6$일 때, $62(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 6$은 무리수이다.) [4점]

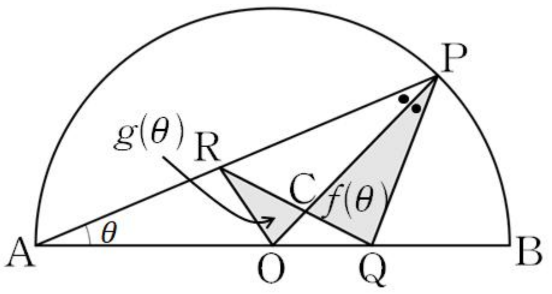
복습변형 (가형)

20	정답 160

$f(\theta)-g(\theta)$의 값은 두 삼각형 OPQ와 OQR의 넓이의 차와 같다.

삼각형 AOP는 $\overline{AO}=\overline{PO}$인 이등변삼각형이므로

$\angle APO=\theta$이고 $\angle POQ=2\theta$이다.



이때 $\angle APO=\angle OPQ$이므로 삼각형 APQ에서

$\angle AQP=\pi-3\theta$이다.

한편, 직각삼각형 APB에서 $\overline{AP}=8\cos\theta$이고,

삼각형 APQ에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{8\cos\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\overline{PQ}}{\sin\theta}$

$\therefore\ \overline{PQ}=\dfrac{8\sin\theta\cos\theta}{\sin3\theta}$

각 APQ의 이등분선은 직선 OP이므로

$\overline{AP}:\overline{PQ}=\overline{AO}:\overline{QO}$에서 $\overline{QO}=\dfrac{4\sin\theta}{\sin3\theta}$이다.

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\cos\theta\sin\theta}{\sin3\theta}\times\dfrac{4\sin\theta}{\sin3\theta}\times\sin(\pi-3\theta)=\dfrac{16\sin^2\theta\cos\theta}{\sin3\theta}$

한편, $\overline{AR}=8\cos\theta-4$이므로

점 R에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 R′이라 하면

$\overline{RR'}=4(2\cos\theta-1)\sin\theta$

따라서 삼각형 OQR의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sin\theta}{\sin3\theta}\times4(2\cos\theta-1)\sin\theta=\dfrac{8\sin^2\theta(2\cos\theta-1)}{\sin3\theta}$

이때 두 삼각형 OPQ와 OQR에서 삼각형 OCQ의 부분은 겹치므로

$f(\theta)-g(\theta)$의 값은 두 삼각형 OPQ와 OQR의 넓이의 차와 같다.

$\therefore\ f(\theta)-g(\theta)=\dfrac{16\sin^2\theta\cos\theta}{\sin3\theta}-\dfrac{8\sin^2\theta(2\cos\theta-1)}{\sin3\theta}$

$\therefore\ 60\times\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$

$=60\times\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{16\sin^2\theta\cos\theta}{\theta\times\sin3\theta}-60\times\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{8\sin^2\theta(2\cos\theta-1)}{\theta\times\sin3\theta}$

$=60\times\left(\dfrac{16}{3}-\dfrac{8}{3}\right)=160$

21	정답 ③

(step1) 함수 $f(t)$ 파악하기

$y=\dfrac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$에서 $y'=x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$이므로

$x=0$부터 $x=k\ (k\geq0)$까지 곡선 $y=\dfrac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$의 길이는

$$\begin{aligned}\int_0^k\sqrt{1+x^2(x^2+2)}\,dx&=\int_0^k\left(\sqrt{x^4+2x^2+1}\right)dx\\&=\int_0^k\left(\sqrt{(x^2+1)^2}\right)dx\\&=\int_0^k(x^2+1)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^k\\&=\frac{1}{3}k^3+k\end{aligned}$$

이때, $x=0$부터 $x=k\ (k\geq0)$까지

곡선 $y=\dfrac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$의 길이가 t가 되도록 하는

k의 값이 $f(t)$이므로

$\therefore\ t=\dfrac{1}{3}\{f(t)\}^3+f(t)\ \ (t\geq0)$

그런데 $t=f^{-1}(f(t))$이므로

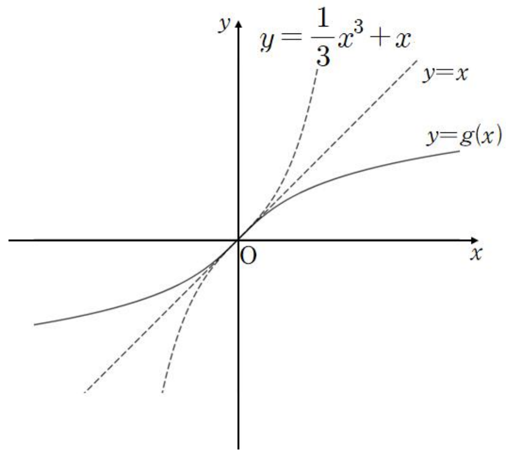
$\therefore\ f^{-1}(t)=\dfrac{1}{3}t^3+t\ \ (t\geq0)$

(step2) 함수 $g(x)$ 파악하기

$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq0)\\ -f(-x) & (x<0)\end{cases}$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점대칭이고

그 그래프는 아래 그림과 같다.



$x\geq0$일 때,

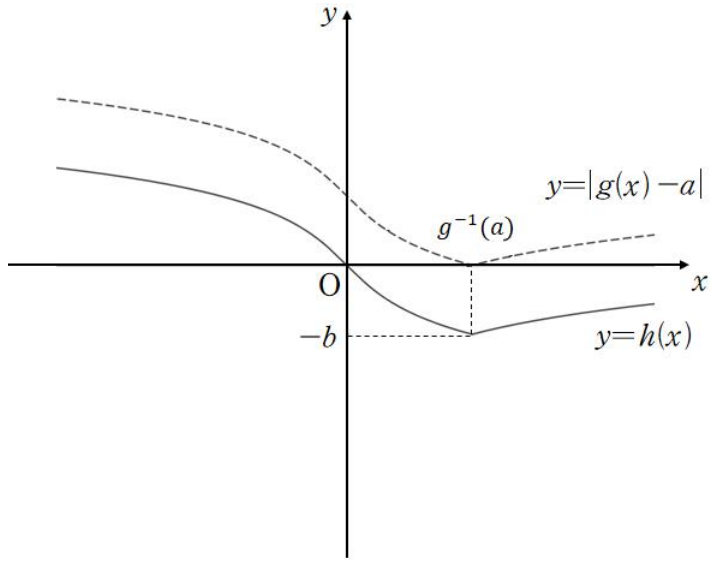
$g^{-1}(x)=f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x\ \ (x\geq0)$ 인데,

함수 $y=\dfrac{1}{3}x^3+x$의 그래프도 원점대칭이므로

$\therefore\ g^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x$ (x는 모든 실수)

(step3) 함수 $|g(x)-a|-b$ 파악하기

함수 $h(x)=|g(x)-a|-b$라 하면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$-m<x<m$인 모든 실수 x에 대하여

$\int_{-x}^{x}\{|g(s)-a|-b\}ds=0$ (a, b는 양의 상수)이 되도록 하는 양수 m의 최댓값이 $\frac{4}{3}$이기 위해서는 구간 $\left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$에서만 함수 $y=h(x)$가 점 $(0, 0)$에 대하여 대칭이어야 한다.

따라서 ① $h(0)=0$이고, ② $f^{-1}(a)=\frac{4}{3}$이어야 한다.

① $h(0)=0$

$\Leftrightarrow$ $|g(0)-a|-b=0$

$\Leftrightarrow$ $|-a|-b=0$

$\Leftrightarrow$ $a=b$

② $f^{-1}(a)=\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{3}a^3+a=\frac{4}{3}$,

$\Leftrightarrow$ $a^3+3a-4=(a-1)(a^2+a+4)=0$,

$\Leftrightarrow$ $a=1$

따라서 $a=b=1$이다.

$\therefore$ $a+b=2$

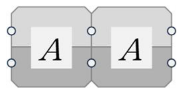
29	정답 49

(step1) 장치가 2개만 연결되는 걸 예로 들어보자.

{출력 결과가 변하지 않을 확률}

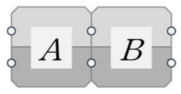
= {2 장치 모두 출력 결과를 변화시키지 않을 확률}

+ {2 장치 모두 출력 결과를 변화시킬 확률}

ⅰ) 

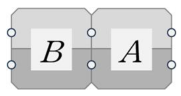
인 경우

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

ⅱ) 

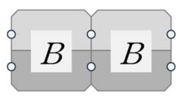
인 경우

$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}$

ⅲ) 

인 경우

$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ⅳ) 

인 경우

$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{8}$

위의 결과를 보면 A가 하나라도 들어가는 경우 확률은 $\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

(step2) 원리를 파악하자.

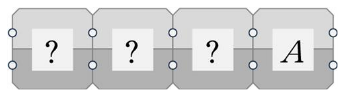
각 장치는 독립적으로 작동하므로

장치가 어떠한 순서로 연결되어있든 각 장치별 개수 구성이 같다면 출력 결과가 변하지 않을 확률은 같다.

(예를 들어, A-A-B-B이든 B-B-A-A이든 확률은 동일하다.)

ⅰ) 연결한 4개의 장치 중 장치 A가 1개 이상 있는 경우

어떤 배열 상태이든 장치 A가 맨 뒤에 있다고 해도 확률값은 동일하다.



앞의 세 개의 장치를 거쳐서 출력결과가

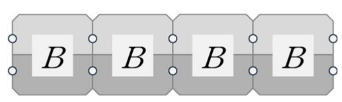
변하지 않을 확률을 p,

변할 확률을 $1-p$라고 하면,

마지막 장치 A까지 거쳐서 출력결과가 변하지 않을 확률은

$p\left(\frac{1}{2}\right)+(1-p)\left(\frac{1}{2}\right)=(p+1-p)\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ⅱ) 연결한 4개의 장치 중 장치 A가 없는 경우



출력 결과가 변하지 않을 확률은

{4장치 모두 출력 결과를 변화시키지 않을 확률}

+ {4장치 중 2장치만 출력 결과를 변화시킬 확률}

+ {4장치 모두 출력 결과를 변화시킬 확률}

= $\left(\frac{1}{4}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{17}{32}$이다.

$\frac{17}{32}>\frac{1}{2}$ 이므로 구하고자 하는 확률 $\frac{q}{p}=\frac{17}{32}$이다.

$\therefore$ $p+q=49$

30	**정답** 40

주의!

$-2<x<0$에서

$f(x)=a-\dfrac{1}{x+3}$이고

$f'(x)=\dfrac{1}{(x+3)^2}$이지만

$f'(f(x))\neq\dfrac{1}{\left\{\left(a-\dfrac{1}{x+3}\right)+3\right\}^2}$이다.

$-2<x<0$에서

$a-1<a-\dfrac{1}{x+3}<a-\dfrac{1}{3}$

$0<f(x)<a-\dfrac{1}{3}$ $(\because\ a>1)$

이기 때문이다.

(step1) 문제 해결의 방향 설정하기

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{4}{9}\ln 3$가

제1사분면에서 만나도록 하는 a의 값을 구하는 것이므로

$x\geq 0$에서의 $y=f(x)$ 그래프에 대한 정보를 파악해야

한다.

(step2) 구간 $[-2,0]$에서 $f(x)=a-\dfrac{1}{x+3}$ 단서 활용하기

$-2<x<0$에서 $f'(x)=\dfrac{1}{(x+3)^2}$이므로

위 단서로 도출할 수 있는

$x\geq 0$에서의 $y=f(x)$에 대한 정보는

$\therefore$ $f(0)=a-\dfrac{1}{3}$이고 $f'(0)=\dfrac{1}{9}$이다.

(step3) 조건 (가) 활용하기

$-2<x<0$에서 $f'(f(x))=\dfrac{1}{9}(x+3)$은

$t=f(x)$라고 치환하면

$f'(f(x))=f'(t)$인데

$a-1<a-\dfrac{1}{x+3}<a-\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow$ $0<a-1<f(x)<a-\dfrac{1}{3}$ $(\because\ a>1)$

$\Leftrightarrow$ $0<a-1<t<a-\dfrac{1}{3}$

이므로

$x\geq 0$에서의 $y=f(x)$ 그래프에 대한

정보를 구하기 위하여 활용할 수 있다.

$f(x)=a-\dfrac{1}{x+3}=t\ \Leftrightarrow\ x+3=\dfrac{1}{a-t}$

$f'(t)=\dfrac{1}{9(a-t)}$

$f(t)=-\dfrac{1}{9}\ln(a-t)+C$

그러므로 $a-1<x<a-\dfrac{1}{3}$에서

$\therefore$ $f(x)=-\dfrac{1}{9}\ln(a-x)+C_2$, $f'(x)=\dfrac{1}{9(a-x)}$

(이때, $f(x)$, $f'(x)$ 모두 연속이므로 위의 식이

$a-1\leq x\leq a-\dfrac{1}{3}$에서도 성립한다.)

$\therefore$ $f(a-1)=-\dfrac{1}{9}\ln 1+C=C$이고 $f'(a-1)=\dfrac{1}{9}$이다.

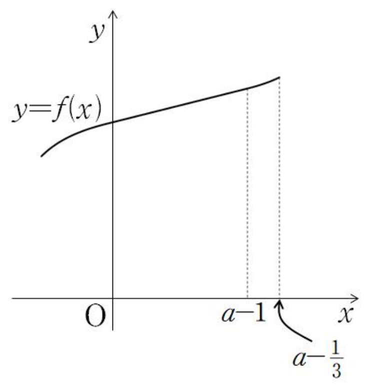
(step4) 조건 (나) 활용하기

$0<a-1$이고 $f'(0)=f'(a-1)=\dfrac{1}{9}$이므로, 아래의 조건

(나) $0\leq x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)\leq f'(x_2)$이다.

에 의해 구간 $[0,a-1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는

기울기가 $\dfrac{1}{9}$인 직선의 일부이다.



$f(a-1)=f(0)+\dfrac{1}{9}(a-1)=\left(a-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{9}(a-1)=\dfrac{10}{9}a-\dfrac{4}{9}$

$\therefore$ $C=\dfrac{10}{9}a-\dfrac{4}{9}$

$\therefore$ $f(x)=-\dfrac{1}{9}\ln(a-x)+\dfrac{10}{9}a-\dfrac{4}{9}$ (단, $a-1\leq x\leq a-\dfrac{1}{3}$)

(step5) 제 1사분면에서 두 그래프가 한 점에서 만날 때

$f'(a-1)=\frac{1}{9}$, $f'\left(a-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$이고

$\frac{1}{9}<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$이므로

좌표평면의 제1사분면에서 곡선 $y=f(x)$와 직선

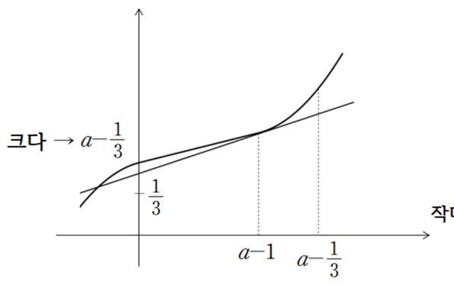
$g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{4}{9}\ln 3$가 오직 한 점에서만 만나도록 하는 a의

최댓값을 가지는 건,

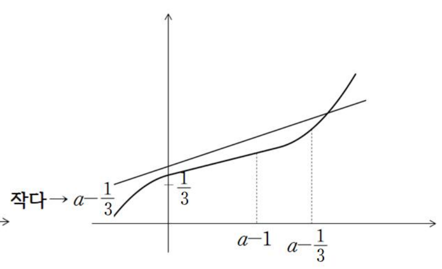
$a-1<c<a-\frac{1}{3}$을 만족시키는 상수 c에 대하여 곡선

$y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$이 $x=c$에서 접할 때이다.

ⅰ) 접할 때



ⅱ) 접하지 않을 때



(step6) 두 그래프가 접하는 것 활용하기

따라서 아래 두 식이 성립한다.

㉠ $f'(c)=g'(c)$

㉡ $f(c)=g(c)$

㉠ $f'(c)=g'(c)$

$f'(c)=\frac{1}{9(a-c)}$이고 $g'(c)=\frac{1}{4}$이므로

$\therefore\ a-c=\frac{4}{9}$, $c=a-\frac{4}{9}$

㉡ $f(c)=g(c)$

$$f(c)=-\frac{1}{9}\ln(a-c)+\frac{10}{9}a-\frac{4}{9}$$
$$=-\frac{1}{9}\ln\frac{4}{9}+\frac{10}{9}a-\frac{4}{9}$$
$$=-\frac{2}{9}\ln\frac{2}{3}+\frac{10}{9}a-\frac{4}{9}$$

이고

$g(c)=\frac{1}{4}c+\frac{4}{9}\ln 3=\frac{1}{4}\left(a-\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{9}\ln 3$이므로

$$-\frac{2}{9}\ln\frac{2}{3}+\frac{10}{9}a-\frac{4}{9}=\frac{1}{4}\left(a-\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{9}\ln 3$$

$$\frac{31}{36}a=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\ln 3$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 2-\frac{2}{9}\ln 3+\frac{4}{9}\ln 3$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 2+\frac{2}{9}\ln 3$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 6$$

$\therefore\ a=\frac{12}{31}+\frac{8}{31}\ln 6$

$\therefore\ 62(p+q)=40$