2021학년도 김지석 모의고사 해설지

제 2 교시

수학 영역(가형)

제0회

5지선다형

1. $4\times 27^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 36 ② 48 ③ 60 ④ 72 ⑤ 84

$4\times 27^{\frac{2}{3}}=4\times(3^3)^{\frac{2}{3}}=4\times 3^2=36$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 2^{n+2}+1}{2^n}$의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 2^{n+2}+1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 2^2+\frac{1}{2^n}}{1}=\frac{3\times 2^2}{1}=12$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(1+x)}{\log_4(1+x)}$의 값은? [2점]

① $\log_2 3$ ② $2\log_3 2$ ③ $\log_4 5$
④ $2\log_5 2$ ⑤ $\log_4 3$

$\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(1+x)}{\log_4(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(1+x)}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log_4(1+x)}$

$=\log_3 e\times\frac{1}{\log_4 e}=\frac{\ln 4}{\ln 3}=\log_3 4$

$=2\log_3 2$

4. $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^3$의 전개식에서 $\frac{1}{x^3}$의 계수는? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^3$의 전개식에서 일반항은

${}_3C_r\times x^{3-r}\times\left(\frac{1}{x^2}\right)^r={}_3C_r\times x^{3-3r}$

$\frac{1}{x^3}$의 항은 $3-3r=-3$에서 $r=2$일 때이므로

$\frac{1}{x^3}$의 계수는 ${}_3C_2=3$

빠른 채점

1	①	2	②	3	⑤	4	②	5	④
6	④	7	⑤	8	②	9	⑤	10	④
11	④	12	①	13	④	14	①	15	③
16	④	17	⑤	18	⑤	19	③	20	①
21	③	22	3	23	6	24	4	25	81
26	18	27	8	28	424	29	122	30	99

자동 채점 정답률/질문 해설 강의

5. $\sum_{k=1}^{9}(k+2)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-2)^2$의 값은? [3점]

① 284 ② 288 ③ 292 ④ 296 ⑤ 300

$\sum_{k=1}^{9}(k+2)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-2)^2$

$=\sum_{k=1}^{9}(k+2)^2-\sum_{k=1}^{9}(k-2)^2-8^2$

$=\sum_{k=1}^{9}(k^2+4k+4-k^2+4k-4)-64=\sum_{k=1}^{9}8k-64$

$=8\times\frac{9\times10}{2}-64=360-64=296$

6. 사건 전체의 집합 S의 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고,

$A\cap B=\varnothing$

$$A\cup B=S,\quad \mathrm{P}(A)=3\mathrm{P}(B)$$

$(A\cup B)^c=\varnothing$

$A^c\cap B^c=\varnothing$

$\mathrm{P}(A)=3k$, $\mathrm{P}(B)=k$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

	A	A^c	
B	0	k	k
B^c	3k	0	3k
	3k	k	1

$3k+k=1$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=3k=\frac{3}{4}$

[다른 풀이]

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

또, $A\cup B=S$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(S)=1$

따라서 확률의 덧셈정리에 의해

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=3\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B)-0=4\mathrm{P}(B)=1$

즉 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=3\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

7. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(5-\frac{a_n}{3^n}\right)=25$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n}{3^{n-1}}$의 값은? [3점]

① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(5-\frac{a_n}{3^n}\right)$이 수렴하므로 $b_n=5-\frac{a_n}{3^n}$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}(5-b_n)=5$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n}{3^{n-1}}=3\times\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n}{3^n}=3\times20=60$

8. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(150,\ p)$를 따르고 X의 평균이 50일 때, X의 분산은? [3점]

① $\frac{50}{3}$ ② $\frac{100}{3}$ ③ 50 ④ $\frac{200}{3}$ ⑤ 100

확률변수 X가 이항분포 B(150, p)를 따르고 E(X)=50이므로

$150\times p=50$

$p=\frac{1}{3}$이다.

$\therefore\ V(X)=150\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{100}{3}$이다.

9. 함수 $f(x)=9x^2+x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$의 값은? [3점]

① 11 ② $\frac{23}{2}$ ③ 12 ④ $\frac{25}{2}$ ⑤ 13

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2(9x^2+x)dx$

$=\frac{1}{2}\left[3x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=13$

10. 세 숫자 1, 2, 3을 중복 사용하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 1과 3이 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는? [3점]

① 90 ② 120 ③ 150 ④ 180 ⑤ 200

① 1, 2, 3을 중복 사용하여 만든 다섯 자리의 자연수

$_3\Pi_5$

② 1, 2를 중복 사용하여 만든 다섯 자리의 자연수

$_2\Pi_5$

③ 2, 3을 중복 사용하여 만든 다섯 자리의 자연수

$_2\Pi_5$

따라서 1과 3이 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는

$_3\Pi_5-({}_2\Pi_5+{}_2\Pi_5)+1=180$

(1은 22222이 두 번 빠지므로 더해준 것이다.)

11. $0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때, x에 대한 이차방정식

$$2x^2 + (4\sin\theta)x + 3\cos\theta = 0$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha < \theta < \beta$이다. $\beta - \alpha$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{6}\pi$ ② π ③ $\frac{7}{6}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

$2x^2+(4\sin\theta)x+3\cos\theta=0$이

서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$D/4=4\sin^2\theta-6\cos\theta>0$

$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta>0$

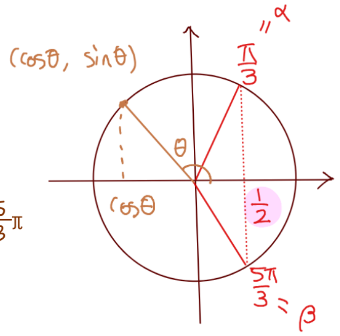
$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2<0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)<0$

$\cos\theta+2>0$ 이므로 $\cos\theta<\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{3}\pi$ 이므로 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore$ $\beta-\alpha=\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$



12. 어느 과수원에서 수확하는 수박의 무게는 평균이 m kg, 표준편차가 1 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 수확한 수박 중에서 25개를 임의 추출하여 얻은 표본평균을 이용하여, 이 과수원에서 수확하는 수박의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구하면 $a \leq m \leq 8.516$이다. a의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 7.484 ② 7.584 ③ 7.684
④ 7.784 ⑤ 7.884

25개를 임의 추출하여 얻은 표본평균을 $\bar{X}$라 하면

신뢰도 99%의 신뢰구간은

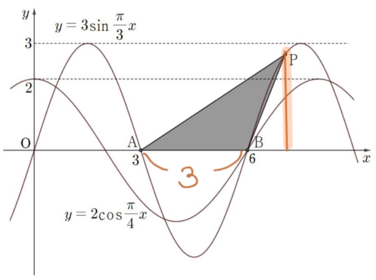
$\bar{X}-2.58\times\frac{1}{\sqrt{25}} \leq m \leq \bar{X}+2.58\times\frac{1}{\sqrt{25}}$

$8.516-a = 2\times2.58\times\frac{1}{\sqrt{25}} = 2\times2.58\times0.2$

$\therefore$ $a = 8.516-0.4\times2.58 = 8.516-1.032 = 7.484$

13. 두 함수 $y=3\sin\frac{\pi}{3}x$, $y=2\cos\frac{\pi}{4}x$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(b, 0)$ $(0<a<4<b<8)$이라 하자. $y=3\sin\frac{\pi}{3}x$의 그래프 위의 임의의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$



$3\sin\frac{\pi}{3}\times3 = 3\sin\pi = 0$ 이고

$2\cos\frac{\pi}{4}\times6 = 2\cos\frac{3}{2}\pi=0$ 이므로

A(3,0), B(6,0)이다.

∴ $\overline{AB}=3$이다.

점 P의 y좌표의 절댓값의 최댓값은 3이므로

삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

∴ $3\times3\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

14. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\rightarrow X$의 개수는? [4점]

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2이다.
(나) 함수 f의 치역의 모든 원소의 합은 홀수이다.

① 180 ② 182 ③ 184 ④ 186 ⑤ 188

지석T처럼 머리쓰는법

치역의 원소의 개수가 2인 함수 f의 개수는

$_5C_2\times({}_2\Pi_5-2) = 10\times30 = 300$

정의역 원소 5개가 각각 2원소중 하나를 선택

정의역의 모든 원소가 2원소 중 하나만 선택

함수 f의 치역의 모든 원소의 합이 짝수인 경우는

모든 원소가 짝수 즉, 치역이 {2,4}이거나

모든 원소가 홀수 즉, 치역이 {1,3,5}의 부분집합이어야 한다.

따라서 치역의 모든 원소의 합이 짝수인 함수 f의 개수는

$({}_2\Pi_5-2)+{}_3C_2\times({}_2\Pi_5-2) = 30+3\times30 = 120$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$300-120 = 180$

[다른 풀이]

두 조건 (가), (나)에 의하여 함수 f의 치역은 홀수인 자연수 1개와 짝수인 자연수 1개로 이루어져야 한다.

3개의 홀수 중 1개의 홀수를 뽑는 경우의 수는

$_3C_1$,

2개의 짝수 중 1개의 짝수를 뽑는 경우의 수는

$_2C_1$

이므로 함수 f의 치역을 결정하는 경우의 수는

$_3C_1\times{}_2C_1=6$

한편, 정의역의 각각의 원소는 치역의 2개의 원소 중 아무거나 택해도 되지만 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)$인 경우는 제외해야 하므로

치역의 원소의 개수가 2인 함수 f의 개수는

$_2\Pi_5-2=30$

따라서 구하는 모든 함수 f의 개수는

$6\times30=180$

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n}(k-1)\{2^k+(-2)^k\}=\frac{6n-5}{9}\times 2^{2n+3}+\frac{40}{9} \quad \cdots\cdots(*)$$

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때,
(좌변)=(우변)= (가) 이므로 $(*)$이 성립한다.
(ⅱ) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{2m}(k-1)\{2^k+(-2)^k\}=\frac{6m-5}{9}\times 2^{2m+3}+\frac{40}{9}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{2(m+1)}(k-1)\{2^k+(-2)^k\}$$
$$=\frac{6m-5}{9}\times 2^{2m+3}+\frac{40}{9}+\boxed{(나)}$$
$$=\frac{\boxed{(다)}}{9}\times 2^{2m+3}+\frac{40}{9}$$
$$=\frac{6(m+1)-5}{9}\times 2^{2(m+1)+3}+\frac{40}{9}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$가 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{p\times g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

지석T처럼 머리쓰는법

(i) n=1일 때,
(좌변)$=2^2+(-2)^2=\boxed{8}$
(우변)$=\frac{1}{9}\times 32+\frac{40}{9}=\boxed{8}$ 이므로 (*)이 성립한다.

(ii) n=m일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
$$\sum_{k=1}^{2m}(k-1)\{2^k+(-2)^k\}=\frac{6m-5}{9}\times 2^{2m+3}+\frac{40}{9}$$
이므로 n=m+1일 때,
$$\sum_{k=1}^{2(m+1)}(k-1)\{2^k+(-2)^k\}$$
$$=\sum_{k=1}^{2m}(k-1)\{2^k+(-2)^k\}+2m\{2^{2m+1}+(-2)^{2m+1}\}+(2m+1)\{2^{2m+2}+(-2)^{2m+2}\}$$
$$=\frac{6m-5}{9}\times 2^{2m+3}+\frac{40}{9}+2m\{2^{2m+1}+(-2)^{2m+1}\}+(2m+1)\{2^{2m+2}+(-2)^{2m+2}\}$$
$$=\frac{6m-5}{9}\times 2^{2m+3}+\frac{40}{9}+\boxed{(2m+1)\times 2^{2m+3}}$$
$$=\frac{\boxed{24m+4}}{9}\times 2^{2m+3}+\frac{40}{9}$$
$$=\frac{6m+1}{9}\times 2^{2m+5}+\frac{40}{9}$$
$$=\frac{6(m+1)-5}{9}\times 2^{2(m+1)+3}+\frac{40}{9}$$
이다. 따라서 n=m+1일 때도 (*)이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)가 성립한다.

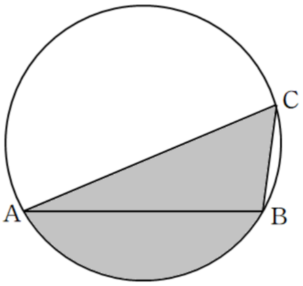
$\therefore p=8$, $f(m)=(2m+1)\times 2^{2m+3}$, $g(m)=24m+4$

$\therefore \frac{p\times g(4)}{f(2)}=\frac{8\times 100}{640}=\frac{5}{4}$

16. 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킬 때, $(\overline{BC}+\overline{CA})^2$의 값은? [4점]

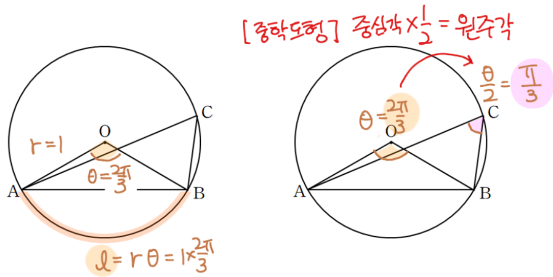
> (가) 점 C를 포함하지 않는 호 AB의 길이는 $\frac{2\pi}{3}$이다.
> (나) 점 C를 포함하지 않는 호 AB와 두 선분 BC, CA로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{5}{12}\pi$이다.

① $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+5$ ② $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+6$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+5$
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+6$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+5$

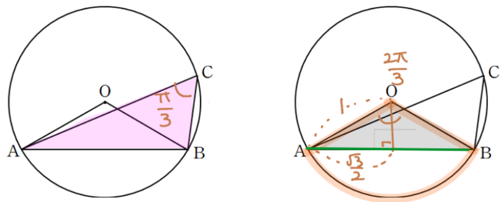


지석T처럼 머리쓰는법

세 점 A, B, C을 지나는 원의 중심을 O라 하고
부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ라 하면 (단, $0<\theta<\pi$)
조건 (가)에 의하여 $\theta=\frac{2\pi}{3}$이다.



이때 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면
호 AB와 두 선분 BC, CA로 둘러싸인 부분의 넓이는



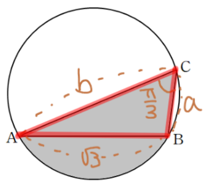
$\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin\frac{\pi}{3}+\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times1\times\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{5}{12}\pi$이다.

$\frac{\sqrt{3}}{4}(ab-1)+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{12}\pi$

$\frac{\sqrt{3}}{4}(ab-1)=\frac{\pi}{12}$

$ab=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+1$

이때 $\overline{AB}=2\overline{OA}\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여



$a^2+b^2=3+2ab\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+4$이다.

즉, $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

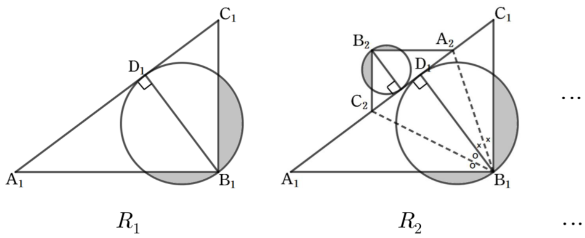
$=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+4+2\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+1\right)$

$=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+6$

17. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=\frac{3}{2}$이고 $\angle A_1B_1C_1=90^\circ$인 직각삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 점 B_1에서 선분 C_1A_1에 내린 수선의 발을 D_1이라 하고 선분 B_1D_1을 지름으로 하는 원을 그리고, 이 원의 내부와 삼각형 $A_1B_1C_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 각 $C_1B_1D_1$, $A_1B_1D_1$의 이등분선이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 각각 A_2, C_2라 하자. 선분 A_2C_2를 빗변으로 하고 나머지 두 변이 선분 A_1B_1 또는 선분 B_1C_1과 평행하도록 삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 원을 그리고, 원의 내부와 삼각형 $A_2B_2C_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{14}\left(\pi-\frac{36}{25}\right)$ ② $\frac{3}{14}\left(\pi-\frac{36}{25}\right)$ ③ $\frac{5}{14}\left(\pi-\frac{36}{25}\right)$
④ $\frac{1}{14}\left(\pi-\frac{48}{25}\right)$ ⑤ $\frac{3}{14}\left(\pi-\frac{48}{25}\right)$

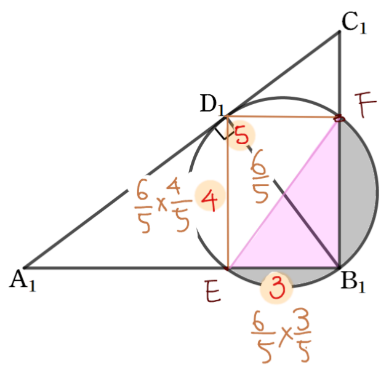
지석T처럼 머리쓰는법

(step1) S_1의 값 구하기

$\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=\frac{3}{2}$, $\overline{C_1A_1}=\frac{5}{2}$이고, → 3 : 4 : 5 직각△

삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_1D_1B_1$, $B_1D_1C_1$이 닮음이므로

$\overline{B_1D_1}=\frac{6}{5}$이다.



이 원이 선분 A_1B_1, B_1C_1과 만나는 점을 각각 E, F라 하면

$\overline{D_1E} = \overline{B_1D_1}\times\sin(\angle D_1B_1E) = \frac{6}{5}\times\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

$\overline{D_1F} = \overline{B_1D_1}\times\sin(\angle D_1B_1F) = \frac{6}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{18}{25}$

이고, $\overline{D_1E}=\overline{B_1F}$, $\overline{D_1F}=\overline{B_1E}$이므로

삼각형 EB_1F의 넓이는

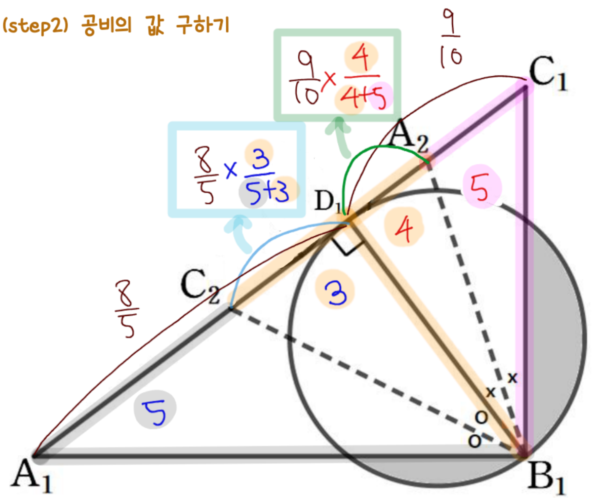
$\frac{1}{2}\times\frac{24}{25}\times\frac{18}{25} = \frac{216}{625}$이다.

그림 R_1에 그린 원의 넓이는

$\left(\frac{3}{5}\right)^2\pi$

$\therefore S_1=\frac{1}{2}\times\frac{9}{25}\pi-\frac{216}{625} = \frac{9}{50}\left(\pi-\frac{48}{25}\right)$

(step2) 공비의 값 구하기



선분 B_1A_2가 각 $C_1B_1D_1$의 이등분선이므로

$\overline{C_1A_2}:\overline{A_2D_1} = \overline{B_1C_1}:\overline{B_1D_1} = 5:4$ 에서

$\overline{A_2D_1}=\overline{C_1D_1}\times\frac{4}{9} = \frac{9}{10}\times\frac{4}{9} = \frac{2}{5}$

선분 B_1C_2가 각 $A_1B_1D_1$의 이등분선이므로

$\overline{A_1C_2}:\overline{C_2D_1} = \overline{A_1B_1}:\overline{B_1D_1} = 5:3$에서

$\overline{C_2D_1}=\overline{A_1D_1}\times\frac{3}{8} = \frac{8}{5}\times\frac{3}{8} = \frac{3}{5}$

$\therefore\ \overline{A_2C_2} = \frac{2}{5}+\frac{3}{5} = 1$

그림 R_2에 선분 A_2C_2를 빗변으로 하는 삼각형과

삼각형 $A_1B_1C_1$은 닮음이고,

닮음비 $= \overline{A_1C_1}:\overline{A_2C_2} = \frac{5}{2}:1 = 5:2$

넓이의 비 $=$ 25:4

공비 $= \frac{4}{25}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{9}{50}\left(\pi-\frac{48}{25}\right)}{1-\frac{4}{25}} = \frac{3}{14}\left(\pi-\frac{48}{25}\right)$

18. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되는 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x>0$인 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. (나) $f(1)=2$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}$

ㄴ. $x\geq 2$인 모든 실수 x에 대하여 $2g(x)f'(g(x))=x$이면 $f(4)=4$이다.

ㄷ. $f(2)=4$이고, $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{g(x)}dx=a$라 하면 $\displaystyle\int_1^2\left\{\frac{2f(t)}{t^2}-\frac{f'(t)}{t}\right\}dt=a$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

지석T처럼 머리쓰는법

ㄱ. 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(f(x))=x$ 에서 $g'(f(x))f'(x)=1$

이므로 $x=1$을 대입하면

조건 (나)에서 $f(1)=2$이므로

$g'(f(1))f'(1)=g'(2)f'(1)=1$이다. (참)

ㄴ.

$g(x)f'(g(x))=\dfrac{x}{2}$

$\Leftrightarrow$ $g(x)f'(g(x))g'(x)=\dfrac{x}{2}g'(x)$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2}{x}$

양변을 적분하면

$\ln g(x) = 2\ln x+C = \ln(\alpha x^2)$ (단, C는 적분상수이고, $\alpha=e^C$이다.)

$f(1)=2$에서 $g(2)=1$이므로

$g(2)=\alpha\times 2^2=1$, $\alpha=\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ $g(x)=\dfrac{1}{4}x^2$ $(x\geq 2)$

이때, $g(4)=4$이므로 $f(4)=4$이다. (참)

ㄷ. $\displaystyle\int_1^2\left\{\frac{2f(t)}{t^2}-\frac{f'(t)}{t}\right\}dt=2\int_1^2\frac{f(t)}{t^2}dt-\int_1^2\frac{f'(t)}{t}dt$이고,

$\displaystyle\int_1^2\frac{f(t)}{t^2}dt=-\left[\frac{f(t)}{t}\right]_1^2+\int_1^2\frac{f'(t)}{t}dt=0+\int_1^2\frac{f'(t)}{t}dt$

이므로

$\displaystyle\int_1^2\left\{\frac{2f(t)}{t^2}-\frac{f'(t)}{t}\right\}dt=\int_1^2\frac{f'(t)}{t}dt$이고,

이때, $f(t)=s$라 하면 $t=g(s)$, $f'(t)=\dfrac{ds}{dt}$이고, $f(1)=2$, $f(2)=4$이므로

$\displaystyle\int_1^2\frac{f'(t)}{t}dt=\int_2^4\frac{1}{g(s)}ds=a$ 이다.

$\therefore$ $\displaystyle\int_1^2\left\{\frac{2f(t)}{t^2}-\frac{f'(t)}{t}\right\}dt=a$이다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

[다른 풀이]

ㄴ. $h(x)=2xf'(x)$라 하면

$h(g(x))=x$이므로

$g^{-1}(x)=h(x)$이다. 따라서

$f(x)=2xf'(x)$이다.

조건 (가), (나)에 의하여 $x\geq 1$에서 $f(x)>0$이므로

$\dfrac{1}{2x}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 에서 양변을 적분하면

$\ln f(x)=\dfrac{1}{2}\ln 2x+C$ (단, C는 적분상수)이다.

이때, 조건 (나)에서 $\ln f(1)=\dfrac{1}{2}\ln 2+C=\ln 2$이므로 $C=\dfrac{1}{2}\ln 2$이다.

즉, $\ln f(x)=\dfrac{1}{2}\ln 4x$에서 $\ln f(4)=\dfrac{1}{2}\ln 16=\ln 4$이다.

$\therefore$ $f(4)=4$ (참)

19. 한 개의 동전을 연속해서 던져 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 게임을 한다.

> (가) 앞면이 나온 뒤 뒷면이 나오면 1점을 얻는다.
> (나) 뒷면이 나온 뒤 앞면이 나오면 2점을 얻는다.
> (다) 앞면 또는 뒷면이 연속해서 나오면 점수를 얻지 않는다.

동전을 5번 던지면서 위의 규칙에 따라 얻은 점수의 합이 3 이하일 때, 점수의 합이 홀수일 확률은? [4점]

① $\frac{7}{11}$ ② $\frac{15}{22}$ ③ $\frac{8}{11}$ ④ $\frac{17}{22}$ ⑤ $\frac{9}{11}$

지석T처럼 머리쓰는법

동전을 5번 던져 얻은 점수의 합이 k인 경우의 수를 a_k라 하자.

i) k=0일 때

모두 앞면 또는 뒷면이 나와야 하므로

$a_0=2$

ii) k=1일 때

(앞면 a번)(뒷면 b번)과 같은 순서로 나와야 하므로

경우의 수는 방정식 $a+b=5$를 만족시키는

자연수 a, b의 순서쌍 (a,b)의 개수와 같다.

$a_1 = {}_2H_{5-2} = {}_4C_3 = 4$

iii) k=2일 때

(뒷면 a번)(앞면 b번)과 같은 순서로 나와야 하므로

ii)와 같이 생각하면

$a_2 = {}_2H_{5-2} = {}_4C_3 = 4$

iv) k=3일 때

(앞면 a번)(뒷면 b번)(앞면 c번) 또는

(뒷면 a번)(앞면 b번)(뒷면 c번)과 같은 순서로 나와야 하고

경우의 수는 각각 방정식 $a+b+c=5$를 만족시키는

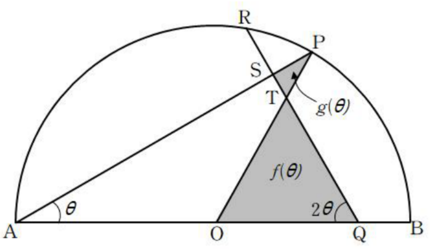
자연수 a, b, c의 순서쌍 (a,b,c)의 개수와 같으므로

$a_3 = 2\times{}_3H_{5-3} = 2\times{}_4C_2 = 12$

i)~iv)에 의하여 구하는 확률은

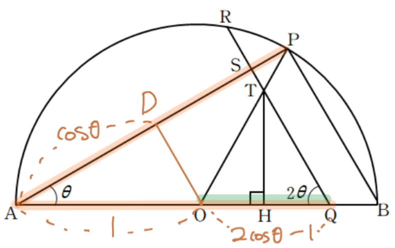
$$\frac{a_1+a_3}{a_0+a_1+a_2+a_3} = \frac{4+12}{2+4+4+12} = \frac{8}{11}$$

20. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 선분 AB위의 점 Q를 $\overline{AP}=\overline{AQ}$가 되도록 잡고, 호 AB 위의 점 R를 $2\angle PAB=\angle RQA$가 되도록 잡는다. 선분 QR이 두 선분 AP, OP와 만나는 점을 각각 S, T라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 OTQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PST의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.) [4점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

지석T처럼 머리쓰는법

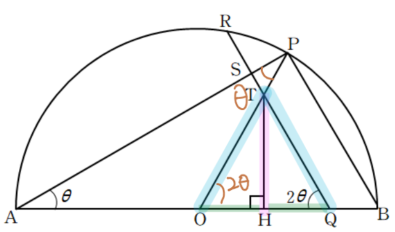


$\overline{AO}=1$이고, $\angle AOD=\frac{\pi}{2}$이므로,

$\overline{AP}=\overline{AQ}=2\cos\theta$

$\overline{AO}=1$ 이므로

$\overline{OQ}=2\cos\theta-1$



또한 $\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 $\angle OAP=\angle OPA=\theta$에서 $\angle POQ=2\theta$이다.

즉, 삼각형 OTQ는 $\overline{TO}=\overline{TQ}$인 이등변삼각형이다.

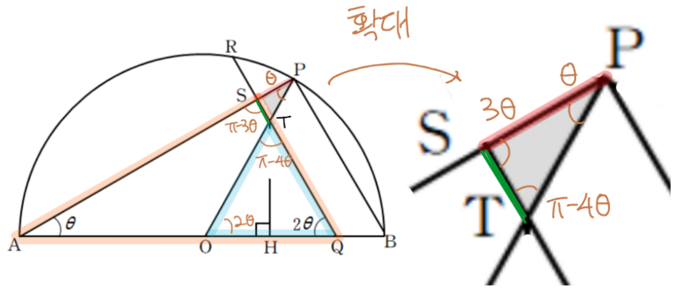
이때, 점 T에서 선분 OQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OQ}=2\cos\theta-1$ 에서 $\overline{HQ}=\frac{1}{2}(2\cos\theta-1)$ 이고,

$\overline{TH}=\overline{HQ}\tan2\theta=\frac{1}{2}\tan2\theta(2\cos\theta-1)$ 이다.

따라서

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OQ}\times\overline{TH}=\frac{1}{4}\tan2\theta(2\cos\theta-1)^2$ 이다.



또한 $\angle SAQ=\theta$, $\angle AQS=2\theta$에서 $\angle PST=3\theta$ 이고,

$\angle PTS=\pi-4\theta$ 이므로 삼각형 PST에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{PT}}{\sin(\angle PST)}=\frac{\overline{PS}}{\sin(\angle PTS)}$,

$\frac{\overline{PT}}{\sin3\theta}=\frac{\overline{PS}}{\sin(\pi-4\theta)}=\frac{\overline{PS}}{\sin4\theta}$

$\therefore\ \overline{PT}=\overline{PS}\times\frac{\sin3\theta}{\sin4\theta}$

$\overline{AP}=\overline{AQ}=2\cos\theta$ 이므로 삼각형 ASQ에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AS}}{\sin(\angle AQS)}=\frac{\overline{AQ}}{\sin(\angle ASQ)}$,

$\frac{\overline{AS}}{\sin2\theta}=\frac{2\cos\theta}{\sin(\pi-3\theta)}$, $\overline{AS}=\frac{2\cos\theta\sin2\theta}{\sin3\theta}$

$\therefore\ \overline{PS}=2\cos\theta-\frac{2\cos\theta\sin2\theta}{\sin3\theta}=2\cos\theta\times\left(1-\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}\right)$

따라서

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PS}\times\overline{PT}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times\overline{PS}^2\times\frac{\sin3\theta}{\sin4\theta}\times\sin\theta$

$=2\cos^2\theta\times\left(1-\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}\right)^2\times\frac{\sin3\theta}{\sin4\theta}\times\sin\theta$

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\cos^2\theta\times\left(1-\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}\right)^2\times\frac{\sin3\theta}{\sin4\theta}\times\sin\theta}{\frac{1}{4}\tan2\theta(2\cos\theta-1)^2}$

$=8\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos^2\theta\times\left(1-\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}\right)^2\times\frac{\sin3\theta}{\sin4\theta}}{(2\cos\theta-1)^2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\tan2\theta}$

$=8\times\frac{1^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{3}{4}}{(2-1)^2}\times\frac{1}{2}$

$=8\times\frac{\frac{1}{9}\times\frac{3}{4}}{1}\times\frac{1}{2}$

$=8\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{3}$

21. 음이 아닌 실수 t에 대하여 $x=0$부터 $x=k$ $(k \geq 0)$까지 곡선 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$의 길이가 t가 되도록 하는 k의 값을 $f(t)$라 하고, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ -f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

> $-m<x<m$인 모든 실수 x에 대하여
> $\displaystyle\int_{-x}^{x}\{|g(s)-a|-b\}ds=0$ (a, b는 양의 상수)이
> 되도록 하는 양수 m의 최댓값이 $\dfrac{3}{4}$이다.

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 4$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

지석T처럼 머리쓰는법

(step1) 함수 f(t) 파악하기

$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$에서 $y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 이므로

$x=0$부터 $x=k$ $(k\geq 0)$까지 곡선 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$의 길이는

$$\int_0^k\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx=\int_0^k\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx = \left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^k$$
$$=\frac{e^k-e^{-k}}{2}$$

이때, $x=0$부터 $x=k$ $(k\geq 0)$까지

곡선 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$의 길이가 t가 되도록 하는

k의 값이 $f(t)$이므로

$\therefore t=\dfrac{e^{f(t)}-e^{-f(t)}}{2}$ $(t\geq 0)$

그런데 $t=f^{-1}(f(t))$이므로

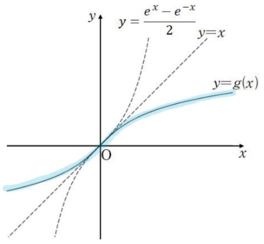
$\therefore f^{-1}(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ $(t\geq 0)$

(step2) 함수 g(x) 파악하기

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ -f(-x) & (x<0) \end{cases}$ 이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점대칭이고

그 그래프는 아래 그림과 같다.



$x\geq 0$일 때,

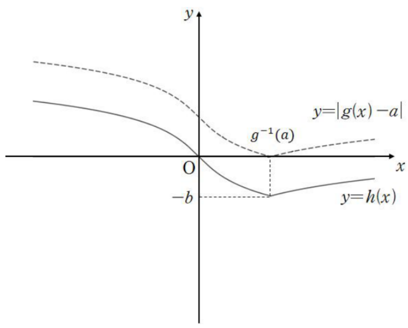
$g^{-1}(x) = f^{-1}(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $(x\geq 0)$ 인데,

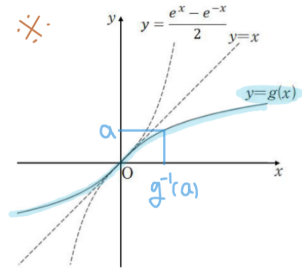
함수 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$의 그래프도 원점대칭이므로

$\therefore g^{-1}(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ (x는 모든 실수)

(step3) 함수 |g(x)-a|-b 파악하기

함수 $h(x) = |g(x)-a|-b$라 하면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.





$-m<x<m$인 모든 실수 x에 대하여

$\displaystyle\int_{-x}^{x}\{|g(s)-a|-b\}ds=0$ (a, b는 양의 상수)

이 되도록 하는 양수 m의 최댓값이 $\dfrac{3}{4}$이기 위해서는

구간 $\left[-\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$에서만 함수 $y=h(x)$가

점 $(0,0)$에 대하여 대칭이어야 한다.

따라서 ① $h(0)=0$이고, ② $g^{-1}(a)=\dfrac{3}{4}$이어야 한다.

① $h(0)=0$

$\Leftrightarrow |g(0)-a|-b=0$

$\Leftrightarrow |-a|-b=0$

$\Leftrightarrow a=b$

② $f^{-1}(a)=\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^a-e^{-a}}{2}=\dfrac{3}{4}$,

$\Leftrightarrow 2e^a-2e^{-a} = 3$,

$\Leftrightarrow 2(e^a)^2-3e^a-2 = (2e^a+1)(e^a-2) = 0$

$\Leftrightarrow e^a=2$

따라서 $a=b=\ln 2$이다.

$\therefore a+b = 2\ln 2 = \ln 4$

단답형

22. $\ln 2\int_0^2 2^x\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

$\ln2\int_0^2 2^x dx=\ln2\left[\frac{2^x}{\ln2}\right]_0^2$

$= 4-1 = 3$

23. 등차수열 $\{a_n\}$ 대하여 $a_{10}-a_7=18$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차를 구하시오. [3점]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}-a_7=3d=18$

$\therefore d=6$

24. 함수 $f(x)=2e^{x^2+2x}$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = 2e^{x^2+2x}$ 이므로

$f'(x)=2(2x+2)e^{x^2+2x}$

$\therefore f'(0)=4$이다.

25. 로그방정식 $(\log_3 x)^2-4\log_3 x-12=0$의 두 근을 각각 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. [3점]

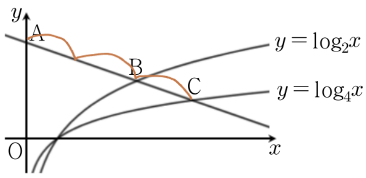
$(\log_3 x+2)(\log_3 x-6)=0$

$\log_3 x=-2$ $\therefore x=3^{-2}$

$\log_3 x=6$ $\therefore x=3^6$

$\therefore \alpha\beta = 3^{-2+6} = 3^4 = 81$

26. 그림과 같이 점 A(0, 3)을 지나는 직선이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_4 x$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C가 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점일 때, 두 점 B, C의 x좌표의 곱을 구하시오. [4점]



지석T처럼 머리쓰는법

점 B의 좌표를 $(b, \log_2 b)$라 하자.

선분 AB를 3:1로 외분하는 점 C의

x좌표는 $\frac{3\times b-1\times 0}{3-1}=\frac{3b}{2}$,

y좌표는 $\frac{3\times\log_2 b-1\times 3}{3-1}=\frac{3\log_2 b-3}{2}=\frac{3}{2}\log_2\frac{b}{2}$이다.

이때 점 C는 곡선 $y=\log_4 x$ 위의 점이므로

$\frac{3}{2}\log_2\frac{b}{2}=\log_4\frac{3b}{2}$를 정리하면

$\frac{3}{2}\log_2\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\log_2\frac{3b}{2}$,

$3\log_2\frac{b}{2}=\log_2\frac{3b}{2}$,

$\left(\frac{b}{2}\right)^3=\frac{3b}{2}$,

$b^2=12$이다.

따라서 두 점 B, C의 x좌표의 곱은

$\therefore b\times\frac{3b}{2}=\frac{3}{2}b^2=\frac{3}{2}\times 12=18$

27. 확률변수 X와 Y는 평균이 각각 m, $m+2$이고 표준편차가 모두 5인 정규분포를 따른다.

$$P(X \le 2) - P(0 \le Y \le 4) = 0.0228$$

이 성립할 때, 표준정규분포표를 이용하여 m의 값을 구하시오. [4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

지석T처럼 머리쓰는법

확률변수 X는 정규분포 $N(m, 5^2)$을 따르고,

확률변수 Y는 정규분포 $N(m+2, 5^2)$을 따르므로 $Y=X+2$이 성립한다.

$P(X \le 2) - P(0 \le Y \le 4) = P(X \le 2) - P(0 \le X+2 \le 4)$

$= P(X \le 2) - P(-2 \le X \le 2)$

$= P(X \le -2)$

$= P\left(Z \le \frac{-2-m}{5}\right)$

$= 0.0228$

이때 $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$에서

$P(Z \le -2) = P(Z \ge 2)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.5 - 0.4772$

$= 0.0228$

이므로 $\frac{-2-m}{5} = -2$에서 $m=8$이다.

28. 첫째항이 a이고 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+2}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ \dfrac{a_n+3}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_m = a_{m+1}$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값이 6이 되도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

지석T처럼 머리쓰는법

i) a_6이 짝수일 때

$a_6 = a_7$에서 $a_6 = \frac{a_6+2}{2}$이므로 $a_6 = 2$이다.

또한 $a_5 \ne 2$이어야 하므로 a_5는 홀수이어야 한다.

따라서 $a_6 = \frac{a_5+3}{2}$에서 $a_5 = 2a_6 - 3 = 1$이다.

이때 $a_5 = 1$이면 $a_4 = 0$ 또는 $a_4 = -1$이므로

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

ii) a_6이 홀수일 때

$a_6 = a_7$에서 $a_6 = \frac{a_6+3}{2}$이므로 $a_6 = 3$이다.

이때 $a_5 \ne 3$이어야 하므로 a_5는 짝수이어야 한다.

따라서 $a_6 = \frac{a_5+2}{2}$에서 $a_5 = 2a_6 - 2 = 4$이다.

$a_5 = 4$일 때 4 이하의 자연수 n에 대하여

$$a_n = \begin{cases} 2a_{n+1} - 2 & (a_{n+1}\text{이 짝수인 경우}) \\ 2a_{n+1} - 3 & (a_{n+1}\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

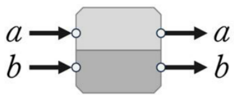
이 성립하므로 a_4, a_3, a_2, a_1의 값을 나열하면 다음과 같다.

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
4	6	10	18	34
				33
			17	32
				31
		9	16	⋮
			15	
	5	8	14	
			13	
		7	12	
				⋮
			11	20
				19

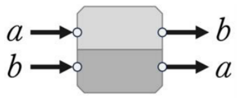
i), ii)에 의하여 구하는 모든 a의 값의 합은

$\frac{19+34}{2} \times 16 = 424$이다.

29. 그림은 왼쪽의 입력 신호 a, b를 오른쪽으로 전달하여 신호를 출력하는 장치를 표현한 것이다. 장치는 [그림1]처럼 입력된 신호가 변하지 않은 채로 출력하기도 하고, [그림2]처럼 입력된 신호가 변하여 출력하기도 한다.



[그림1]

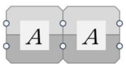


[그림2]

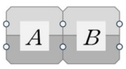
장치는 A, B 두 가지 종류가 있다. 장치 A는 [그림1]과 같이 출력할 확률은 $\frac{1}{2}$이고, [그림2]와 같이 출력할 확률도 마찬가지로 $\frac{1}{2}$이다. 장치 B는 [그림1]과 같이 출력할 확률은 $\frac{1}{3}$이고, [그림2]와 같이 출력할 확률은 $\frac{2}{3}$이다.
이런 A, B 두 종류의 장치 중 4개를 선택하여 일렬로 연결한다. 이 때 출력 결과가 변하지 않을 확률이 가장 높은 배열 상태에서, 출력 결과가 변하지 않을 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이며, 각 장치는 독립적으로 작동한다.) [4점]

지석T처럼 머리쓰는법

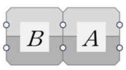
(step1) 장치가 2개만 연결되는 걸 예로 들어보자.
{출력 결과가 변하지 않을 확률}
= {2 장치 모두 출력 결과를 변화시키지 않을 확률}
+ {2 장치 모두 출력 결과를 변화시킬 확률}

ⅰ)  인 경우

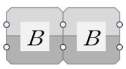
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

ⅱ)  인 경우

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

ⅲ)  인 경우

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

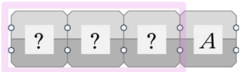
ⅳ)  인 경우

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

위의 결과를 보면 A가 하나라도 들어가는 경우 확률은 $\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

(step2) 원리를 파악하자.
각 장치는 독립적으로 작동하므로
장치가 어떠한 순서로 연결되어있든 각 장치별 개수 구성이 같다면
출력 결과가 변하지 않을 확률은 같다.
(예를 들어, A-A-B-B이든 B-B-A-A이든 확률은 동일하다.)

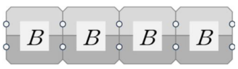
ⅰ) 연결한 4개의 장치 중 장치 A가 1개 이상 있는 경우
어떤 배열 상태이든 장치 A가 맨 뒤에 있다고 해도
확률값은 동일하다.



앞의 세 개의 장치를 거쳐서 출력결과가
변하지 않을 확률을 p,
변할 확률을 1-p라고 하면,
마지막 장치 A까지 거쳐서 출력결과가 변하지 않을 확률은

$$p\left(\frac{1}{2}\right)+(1-p)\left(\frac{1}{2}\right)=(p+1-p)\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ⅱ) 연결한 4개의 장치 중 장치 A가 없는 경우



출력 결과가 변하지 않을 확률은

{4장치 모두 출력 결과를 변화시키지 않을 확률}
+ {4장치 중 2장치만 출력 결과를 변화시킬 확률}
+ {4장치 모두 출력 결과를 변화시킬 확률}

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{41}{81}$$

$\frac{41}{81}>\frac{1}{2}$ 이므로 구하고자 하는 확률은

$\therefore\ \frac{q}{p}=\frac{41}{81}$, $p+q=122$

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 도함수를 갖는 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-1<x<0$에서 $f'(f(x))=\frac{1}{4}(x+2)$이다.
>
> (나) $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)\le f'(x_2)$이다.

1보다 큰 양수 a에 대하여 구간 $[-1, 0]$에서 $f(x)=a-\frac{1}{x+2}$이다. 좌표평면의 제1사분면에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}\ln2$가 오직 한 점에서만 만나도록 하는 a의 최댓값이 $p+q\ln6$일 때, $121(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln6$은 무리수이다.) [4점]

주의!

$-1<x<0$에서

$f(x)=a-\frac{1}{x+2}$이고 $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$이지만

$f'(f(x))\neq\frac{1}{\left\{\left(a-\frac{1}{x+2}\right)+2\right\}^2}$ 이다.

범위에 포함되지 않음

$-1<x<0$ 에서

$a-1<a-\frac{1}{x+2}<a-\frac{1}{2}$

$0<f(x)<a-\frac{1}{2}$ $(\because a>1)$

이기 때문이다.

지석T처럼 머리쓰는법

(step1) 문제 해결의 방향 설정하기

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}\ln2$가 제1사분면에서 만나도록 하는 a의 값을 구하는 것이므로 $x\geq0$에서의 $y=f(x)$ 그래프에 대한 정보를 파악해야 한다.

(step2) 구간 $[-1,0]$에서 $f(x)=a-\frac{1}{x+2}$ 단서 활용하기

$-1<x<0$에서 $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$ 이므로

위 단서로 도출할 수 있는 $x\geq0$에서의 $y=f(x)$에 대한 정보는

$\therefore f(0)=a-\frac{1}{2}$이고 $f'(0)=\frac{1}{4}$이다.

(step3) 조건 (가) 활용하기

$-1<x<0$에서 $f'(f(x))=\frac{1}{4}(x+2)$는

$t=f(x)$ 라고 치환하면

$f'(f(x))=f'(t)$ 인데

$a-1<a-\frac{1}{x+2}<a-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0<a-1<f(x)<a-\frac{1}{2}$ $(\because a>1)$

$\Leftrightarrow 0<a-1<t<a-\frac{1}{2}$

이므로

$x\geq0$에서의 $y=f(x)$ 그래프에 대한 정보를 구하기 위하여 활용할 수 있다.

$f(x)=a-\frac{1}{x+2}=t \Leftrightarrow x+2=\frac{1}{a-t}$

$f'(t)=\frac{1}{4(a-t)}$

$f(t)=-\frac{1}{4}\ln(a-t)+C$

그러므로 $a-1<x<a-\frac{1}{2}$에서

$\therefore f(x)=-\frac{1}{4}\ln(a-x)+C$, $f'(x)=\frac{1}{4(a-x)}$

(이때, $f(x)$, $f'(x)$ 모두 연속이므로 위의 식이 $a-1\leq x\leq a-\frac{1}{2}$에서도 성립한다.)

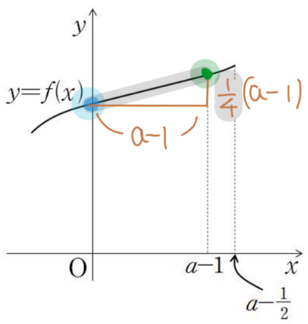
$\therefore f(a-1)=-\frac{1}{4}\ln1+C=C$이고 $f'(a-1)=\frac{1}{4}$이다.

(step4) 조건 (나) 활용하기

$0<a-1$이고 $f'(0)=f'(a-1)=\frac{1}{4}$이므로, 아래의 조건 (나)에 의해

구간 $[0, a-1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는

기울기가 $\frac{1}{4}$인 직선의 일부이다.



$f(a-1)=f(0)+\frac{1}{4}(a-1)=\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}(a-1)=\frac{5}{4}a-\frac{3}{4}$

$\therefore C=\frac{5}{4}a-\frac{3}{4}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{4}\ln(a-x)+\frac{5}{4}a-\frac{3}{4}$ (단, $a-1\leq x\leq a-\frac{1}{2}$)

다음 페이지에 계속!

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 도함수를 갖는 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-1 < x < 0$에서 $f'(f(x)) = \dfrac{1}{4}(x+2)$이다.
>
> (나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1) \le f'(x_2)$이다.

1보다 큰 양수 a에 대하여 구간 $[-1, 0]$에서 $f(x) = a - \dfrac{1}{x+2}$이다. 좌표평면의 제1사분면에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{3}{4}\ln 2$가 오직 한 점에서만 만나도록 하는 a의 최댓값이 $p + q\ln 6$일 때, $121(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 6$은 무리수이다.) [4점]

지석T처럼 머리쓰는법 ✎ 앞 페이지에 이어서

(step5) 제 1사분면에서 두 그래프가 한 점에서 만날 때

$f'(a-1) = \dfrac{1}{4}$, $f'\left(a-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$이고

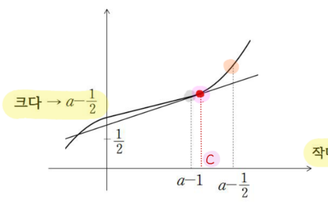
$\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}$이므로

좌표평면의 제1사분면에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $g(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{3}{4}\ln 2$가 오직 한 점에서만 만나도록 하는 a의 최댓값을 가지는 건,

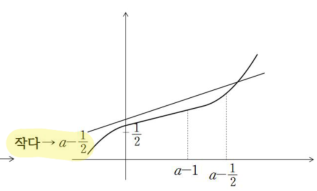
$a-1 < c < a-\dfrac{1}{2}$를 만족시키는 상수 c에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=c$에서 접할 때이다.

i) 접할 때



ii) 접하지 않을 때



(step6) 두 그래프가 접하는 것 활용하기

따라서 아래 두 식이 성립한다.

㉠ $f'(c) = g'(c)$

㉡ $f(c) = g(c)$

㉠ $f'(c) = g'(c)$

$f'(c) = \dfrac{1}{4(a-c)}$이고 $g'(c) = \dfrac{1}{3}$이므로

$\therefore a-c = \dfrac{3}{4}$, $c = a - \dfrac{3}{4}$

㉡ $f(c) = g(c)$

$f(c) = -\dfrac{1}{4}\ln(a-c) + \dfrac{5}{4}a - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{4}a - \dfrac{3}{4}$이고

$g(c) = \dfrac{1}{3}c + \dfrac{3}{4}\ln 2 = \dfrac{1}{3}\left(a - \dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{3}{4}\ln 2$이므로

$-\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{4}a - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{3}\left(a - \dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{3}{4}\ln 2$

$\dfrac{11}{12}a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\ln 2 + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3}{4}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\ln 2 + \dfrac{1}{4}\ln 3 - \dfrac{2}{4}\ln 2$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\ln 6$

$\therefore a = \dfrac{6}{11} + \dfrac{3}{11}\ln 6$

$\therefore 121(p+q) = 99$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.