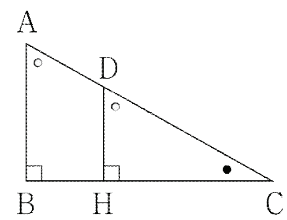
주제 14 등비급수와 평면도형: 직각삼각형의 닮음

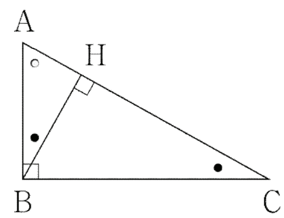
다음의 네 경우에서 직각삼각형의 닮음을 발견할 수 있어야 한다.

(1) 직각삼각형 ABC의 빗변 AC 위의 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



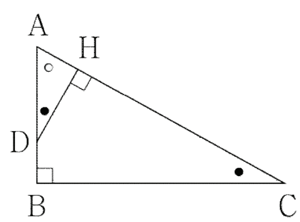
위의 그림에서
$\triangle \mathrm{ABC} \sim \triangle \mathrm{DHC}$

(2) 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 빗변 AC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



위의 그림에서
$\triangle \mathrm{ABC} \sim \triangle \mathrm{AHB} \sim \triangle \mathrm{BHC}$

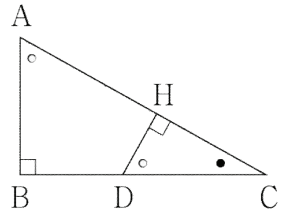
(3) 직각삼각형 ABC의 변 AB 위의 점 D에서 빗변 AC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



위의 그림에서
$\triangle \mathrm{ABC} \sim \triangle \mathrm{AHD}$

(4) 직각삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 D에서 빗변 AC에 내린 수선의 발을

H라고 하자.



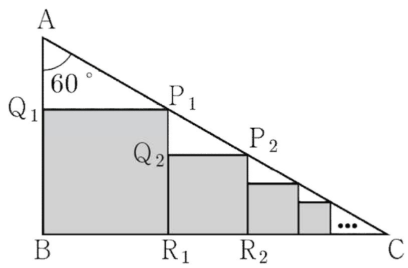
위의 그림에서

$\triangle ABC \sim \triangle DHC$

교과서 예제를 함께 풀어보자.

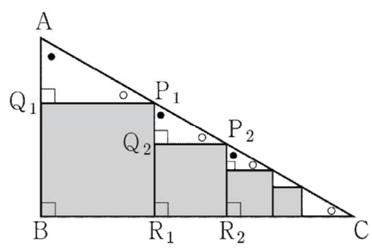
예제 10

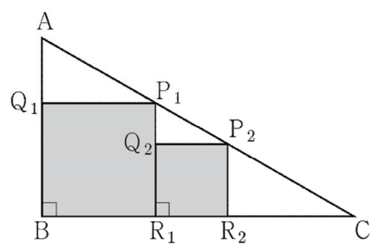
$\overline{AB}=1$, $\angle CAB=60^\circ$, $\angle ABC=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 내부에 정사각형 $P_1Q_1BR_1$, $P_2Q_2R_1R_2$, $\cdots$을 한없이 만들자. 이 정사각형들의 넓이의 합을 구하시오.



풀이

정사각형 $P_1Q_1BR_1$의 한 변의 길이를 x로 두자.





(단, $\bullet=60^\circ$, $\circ=30^\circ$)

$\overline{AB}$, $\overline{P_1R_1}$, $\overline{P_2R_2}$, $\cdots$중에서 어느 두 선분도 서로 평행하므로

평행선의 성질에 의하여

$\angle AP_1Q_1=\angle P_1P_2Q_2=\angle P_2P_3Q_3=\cdots=\circ$

(동위각끼리 서로 같다.)

$\angle P_1AQ_1=\angle P_2P_1Q_2=\angle P_3P_2Q_3=\cdots=\bullet$

(동위각끼리 서로 같다.)

$\overline{AQ_1}=1-x$, $\overline{Q_1P_1}=x$

직각삼각형 AQ_1P_1에서 삼각비의 정의에 의하여

$\dfrac{\overline{Q_1P_1}}{\overline{AQ_1}}=\tan 60^\circ$ 즉, $\dfrac{x}{1-x}=\sqrt{3}$ 풀면 $x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

$(\square P_1Q_1BR_1\text{의 넓이})=x^2=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$

두 직각삼각형 ABC, P_1R_1C의 닮음비가 $1:x(=\overline{AB}:\overline{P_1R_1})$이므로 두 정사각형 $P_1Q_1BR_1$, $P_2Q_2R_1R_2$의 넓이의 비는 $1:x^2$이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여 구하는 값은

$\dfrac{x^2}{1-x^2}=\dfrac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}$

답 $\dfrac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}$

위의 과정에서 사용된 평면기하의 성질은 다음과 같다. (사용되지 않았더라도 연관된 성질까지 공부해보자.)

〈동위각, 엇각〉

아래 그림과 같이 한 평면 위에서 서로 다른 두 직선 l, m이 한 직선 n과 만나서 생기는 8개의 교각 중에서

$\angle a$와 $\angle e$, $\angle b$와 $\angle f$

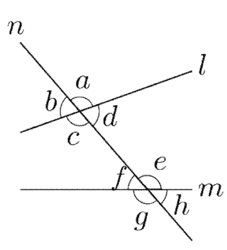
$\angle c$와 $\angle g$, $\angle d$와 $\angle h$

와 같이 서로 같은 위치에 있는 두 각을 동위각이라고 한다.

또

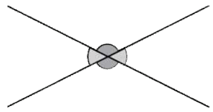
$\angle c$와 $\angle e$, $\angle d$와 $\angle f$

와 같이 서로 엇갈린 위치에 있는 두 각을 엇각이라고 한다.



〈맞꼭지각의 성질〉

두 직선이 한 점에서 만날 때 생기는 네 각 중 서로 마주보는 두 각을 맞꼭지각이라고 한다. 아래 그림처럼 맞꼭지각의 크기는 서로 같다.

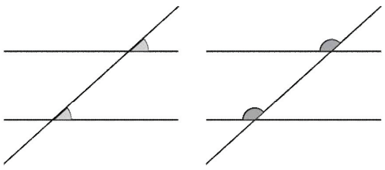


〈평행선과 동위각〉

한 평면 위에서 서로 다른 두 직선이 한 직선과 만날 때,

❶ 두 직선이 평행하면 동위각의 크기는 같다.

❷ 동위각의 크기가 같으면 두 직선은 평행하다.

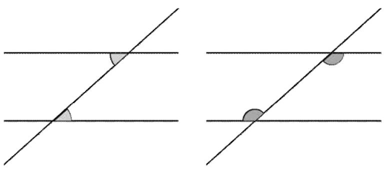


〈평행선과 엇각〉

한 평면 위에서 서로 다른 두 직선이 한 직선과 만날 때,

❶ 두 직선이 평행하면 엇각의 크기는 같다.

❷ 엇각의 크기가 같으면 두 직선은 평행하다.

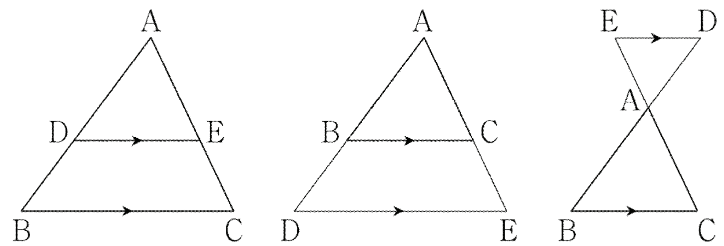


〈삼각형에서 평행선에 의하여 생기는 선분의 길이의 비〉

삼각형 ABC에서 변 BC에 평행한 직선과 두 변 AB, AC 또는 그 연장선의 교점을 각각 D, E라고 하면

❶ $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$

❷ $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$

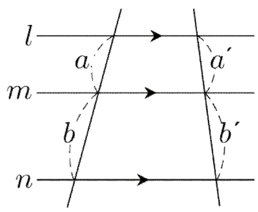


〈평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비〉

세 개 이상의 평행선이 다른 두 직선과 만날 때, 평행선 사이에 생기는 선분의 길이의 비는 같다.

즉, 아래 그림에서 $l//m//n$이면

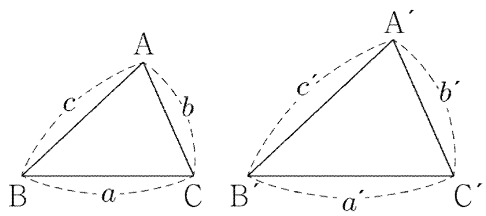
$a:b=a':b'$



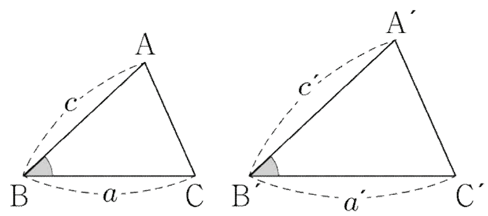
〈삼각형의 닮음조건〉

두 삼각형 ABC와 A′B′C′은 다음 각 경우에 닮은 도형이다.

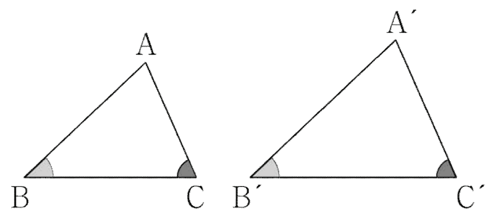
❶ 세 쌍의 대응변의 길이의 비가 같을 때



❷ 두 쌍의 대응변의 길이의 비가 같고 그 끼인각의 크기가 같을 때



❸ 두 쌍의 대응각의 크기가 각각 같을 때



〈평면도형에서 닮음의 성질〉

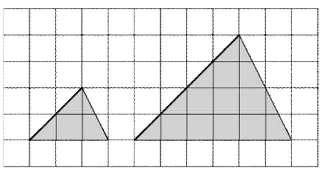
닮은 두 평면도형에서

❶ 대응변의 길이의 비는 일정하다.

❷ 대응각의 크기는 각각 같다.

〈닮은 두 평면도형의 넓이의 비〉

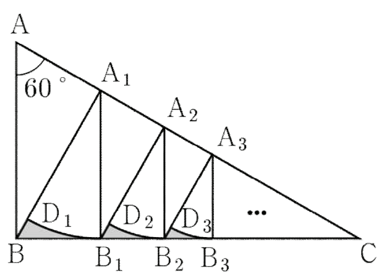
닮은 두 평면도형의 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.



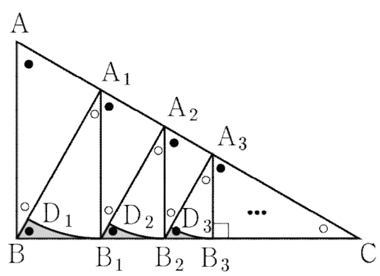
위의 문제를 응용한 아래의 문제를 풀어보자.

예제 11

$\overline{AB}=1$, $\angle CAB=60^\circ$, $\angle ABC=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 A_1, 점 A_1에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 B_1이라 하고, $\overline{A_1D_1}=\overline{A_1B_1}$이 되도록 점 D_1을 선분 A_1B 위에 잡자. 두 선분 D_1B와 BB_1 및 호 B_1D_1으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라고 하자. 점 B_1에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 A_2, 점 A_2에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, $\overline{A_2D_2}=\overline{A_2B_2}$가 되도록 점 D_2를 선분 A_2B_1 위에 잡자. 두 선분 D_2B_1과 B_1B_2 및 호 B_2D_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라고 하자. 마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수에 대하여 점 B_{n-1}에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 A_n, 점 A_n에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 B_n이라 하고, $\overline{A_nD_n}=\overline{A_nB_n}$가 되도록 점 D_n을 선분 A_nB_{n-1} 위에 잡자. 두 선분 D_nB_{n-1}와 $B_{n-1}B_n$ 및 호 B_nD_n으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라고 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오.



풀이



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

$\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, …중에서 어느 두 선분도 서로 평행하므로

평행선의 성질에 의하여

$\angle A_1AB=\angle A_2A_1B_1=\angle A_3A_2B_2=\cdots=$● (동위각끼리 서로 같다.)

$\angle ABA_1=\angle B_1A_1B=\angle A_1B_1A_2=\cdots=$○ (엇각끼리 서로 같다.)

옆의 그림에서
$\triangle ABC \sim \triangle BA_1C$
$\sim \triangle A_1B_1C$
$\sim \triangle B_1A_2C$
$\sim \cdots$
임이 한 눈에 보여야 한다.

직각삼각형 ABA_1에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\overline{A_1B}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

직각삼각형 A_1BB_1에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\overline{BB_1}=\frac{\sqrt{3}}{4},\ \overline{A_1B_1}=\frac{3}{4}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식과 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S_1=$($\triangle A_1BB_1$의 넓이)$-$($\triangledown A_1D_1B_1$의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{4}-\pi\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{30}{360}=\frac{3\sqrt{3}}{32}-\frac{3}{64}\pi$$

두 직각삼각형 ABC, A_1B_1C의 닮음비가 $1:\frac{3}{4}$이므로

$$S_1:S_2=1:\left(\frac{3}{4}\right)^2 \text{ 즉, } S_2=\frac{9}{16}S_1$$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{3}}{32}-\frac{3}{64}\pi$이고, 공비가 $\frac{9}{16}(=r)$인 등비수열이다.

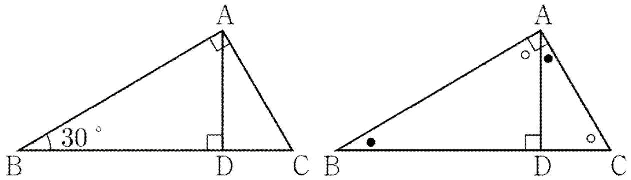
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{S_1}{1-r}=\frac{6\sqrt{3}-3\pi}{28}$$

답 $\frac{6\sqrt{3}-3\pi}{28}$

참고

$\angle CAB=90^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라고 하자.



(단, ●$=30^\circ$, ○$=60^\circ$)

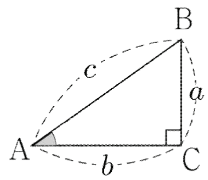
다음의 수학적 사실은 수능에서 자주 출제되니 알아두어야 한다. (증명도 할 수 있어야 한다.)

❶ 세 삼각형 CBA, ABD, CAD는 서로 닮음이다.
❷ 세 선분 BD, AD, DC의 길이는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

위의 풀이 과정에서 사용된 평면기하의 성질은 다음과 같다.

〈삼각비〉

$\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서

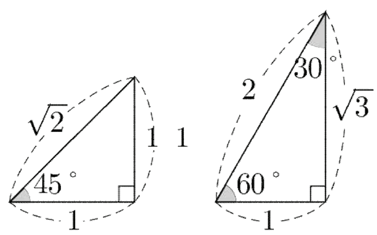


❶ $\sin A = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{a}{c}$ ❷ $\cos A = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{b}{c}$

❸ $\tan A = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{a}{b}$

〈특수각의 삼각비의 정의〉

30°, 45°, 60° 의 삼각비의 값



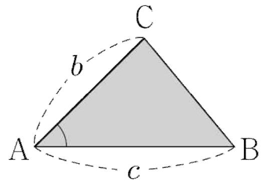
A / 삼각비	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

〈삼각형의 넓이〉

삼각형 ABC에서 두 변의 길이 b, c와 그 끼인 각 $\angle$A의 크기를 알 때, 삼각형 ABC의 넓이 S는 다음과 같다.

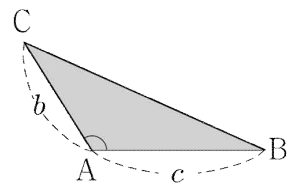
❶ $\angle$A가 예각인 경우

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$



❷ $\angle$A가 둔각인 경우

$S=\frac{1}{2}bc\sin(180^\circ-A)$



〈원의 둘레의 길이와 넓이〉

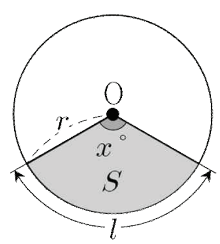
반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$l=2\pi r$, $S=\pi r^2$

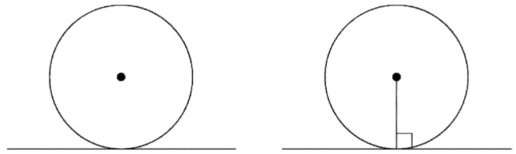
〈부채꼴의 호의 길이와 넓이〉

반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 x°인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

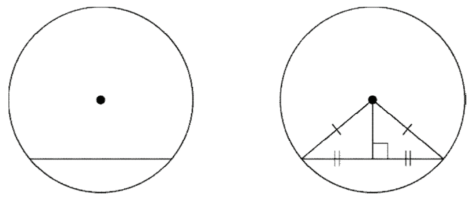
$l=2\pi r\times\frac{x}{360}$, $S=\pi r^2\times\frac{x}{360}$



원과 접선이 주어지면 다음과 같이 보조선을 그으면 된다.



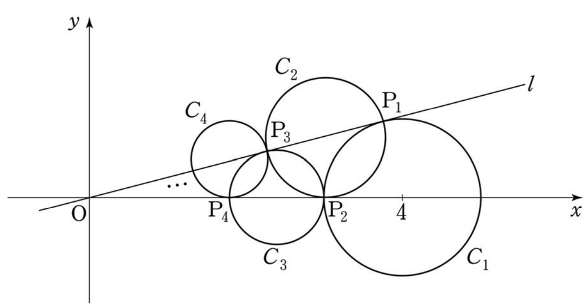
원과 현이 주어지면 다음과 같이 보조선을 그으면 된다.



이제 아래의 문제를 풀어보자.

문제 37

좌표평면에 원 C_1 : $(x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자. 중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.) [4점](2009-가형 14/나형14)

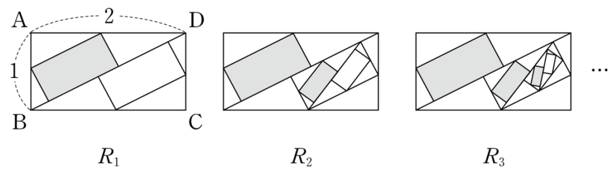


① $\frac{3}{2}\pi$　② 2π　③ $\frac{5}{2}\pi$

④ 3π　⑤ $\frac{7}{2}\pi$

문제 38

직사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$이다. 그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 대각선에 의하여 만들어지는 두 직각삼각형의 내부에 두 변의 길이의 비가 1 : 2인 두 직사각형을 긴 변이 대각선 위에 놓이면서 두 직각삼각형에 각각 내접하도록 그리고, 새로 그려진 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 새로 그려진 두 직사각형 중 색칠되어 있지 않은 직사각형에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점](2014(6)-A형18)



① $\frac{37}{61}$ ② $\frac{38}{61}$ ③ $\frac{39}{61}$

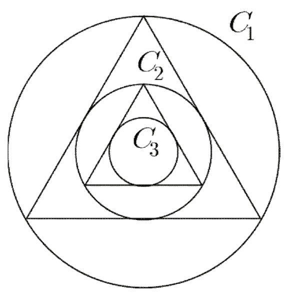
④ $\frac{40}{61}$ ⑤ $\frac{41}{61}$

주제 15

등비급수와 평면도형: 평면도형의 결정조건/성질과 보조선, 삼각형의 3심

문제 39

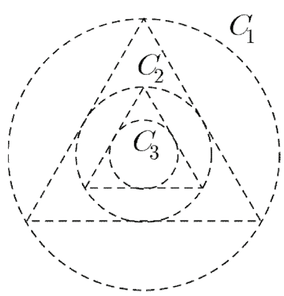
아래 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원 C_1에 내접하는 정삼각형을 그리고, 이 정삼각형의 내접원을 C_2라고 하자. 또 원 C_2에 내접하는 정삼각형을 그리고, 이 정삼각형의 내접원을 C_3이라고 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 원 C_1, C_2, C_3, $\cdots$의 넓이의 합을 구하여라.



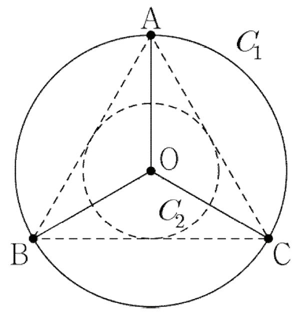
✪ 평면도형의 결정조건/성질과 보조선

평면도형에서 보조선을 긋는 연습을 해보자.

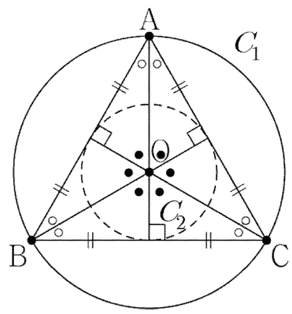
❶ 우선 문제에서 주어진 모든 도형이 실선이 아닌 점선으로 그려졌다고 생각하자.



❷ 원 C_1의 중심을 O라 하고, 이를 찍자.(원의 중심을 결정!) 원 C_1에 내접하는 삼각형의 세 꼭짓점을 A, B, C라 하고 세 선분 OA, OB, OC를 긋자.(원의 반지름을 결정!) 비로소 원 C_1이 결정되었으므로 점선을 실선으로 바꾸자.

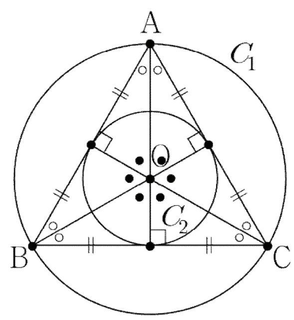


❸ 정삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 이등변삼각형의 성질(두 밑각의 크기가 같다. 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.)을 모두 표시한다. 비로소 정삼각형 ABC가 결정되었으므로 점선을 실선으로 바꾸자.



(단, ●=60°, ○=30°)

❹ ❷, ❸에서 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심과 반지름이 결정되었으므로, 즉 원 C_2가 결정되었으므로 점선을 실선으로 바꾸자.



위와 같이 평면도형의 정의와 성질을 그림에 모두 나타내어야 한다.

위의 과정에서 사용된 평면기하의 성질은 다음과 같다.

〈이등변삼각형의 정의〉

이등변삼각형은 두 변의 길이가 같은 삼각형이다.

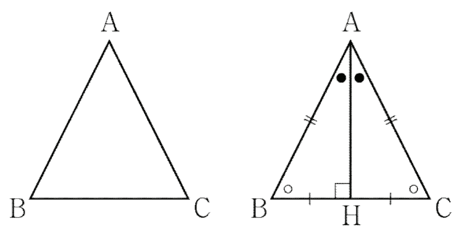
〈이등변삼각형의 성질〉

❶ 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다. ❷ 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

〈이등변삼각형이 되는 조건〉

두 내각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.

이등변삼각형의 정의와 성질에 따라 보조선을 긋고, 각의 크기와 선분의 길이에 대한 정보를 시각화하면 다음과 같다. (문제에서 왼쪽 그림이 주어지면 오른쪽 그림처럼 보조선을 긋고, 각과 길이에 대한 정보를 표시해야 한다.)

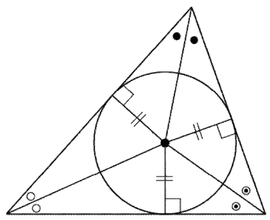


(단, ●+○=90°)

이제 삼각형의 3심을 복습하자.

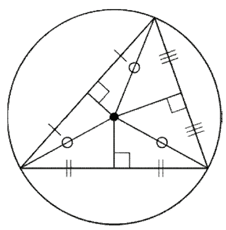
〈삼각형의 내심〉

❶ 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점(내심)에서 만난다.
❷ 삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리는 같다.



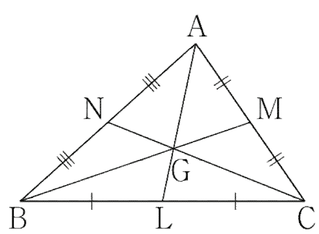
〈삼각형의 외심〉

❶ 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.
❷ 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.



〈삼각형의 무게중심〉

❶ 삼각형의 세 중선은 한 점(무게중심)에서 만난다.
❷ 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 나눈다.
즉, 아래 삼각형 ABC에서
$\overline{AG} : \overline{GL} = \overline{BG} : \overline{GM} = \overline{CG} : \overline{GN} = 2 : 1$



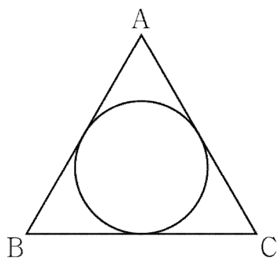
※ (중요) 정삼각형의 경우 내심, 외심, 무게중심이 일치한다.

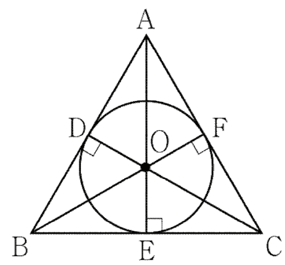
주제 16 내접원의 반지름의 길이

이등변삼각형이나 직각삼각형이 아닌 경우 삼각형의 넓이로 내접원의 반지름의 길이를 구하는 것이 일반적이다.
직각삼각형의 경우 길이의 합을 이용하여 내접원의 반지름의 길이를 구하는 것이 빠르다.

• 정삼각형의 경우

정삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이
(단, 한 변의 길이는 2이다.)





내접원의 중심을 O, 점 O에서 세 선분 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자. 정삼각형의 내접원의 중심과 무게중심은 일치하므로, 점 O는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

직각삼각형 ABE의 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{AE}=\sqrt{3}$

무게중심의 성질에 의하여

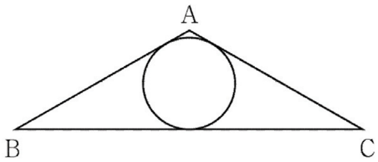
$\overline{AO}:\overline{OE}=2:1$이므로 $\overline{OE}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

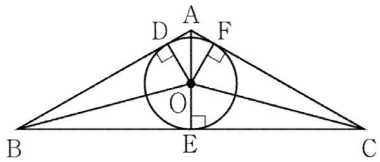
물론 삼각형의 넓이의 합과 선분의 길이의 합을 이용하여 반지름의 길이를 구해도 좋다.

- **이등변삼각형의 경우**

이등변삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이

(단, $\angle \mathrm{CAB}=120^\circ$, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=2$)





내접원의 중심을 O, 점 O에서 세 선분 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자.

직각삼각형 ABE에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{AE}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{AE}}-\overline{\mathrm{OE}}=1-r$

직각삼각형 OAD에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{OD}}}{\overline{\mathrm{AO}}}=\sin 60^\circ$ 즉, $\dfrac{r}{1-r}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

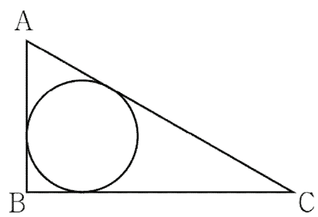
정리하면 $r=2\sqrt{3}-3$

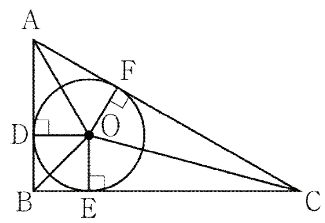
물론 삼각형의 넓이의 합과 선분의 길이의 합을 이용하여 반지름의 길이를 구해도 좋다.

- **직각삼각형의 경우**

직각삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이

(단, $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle \mathrm{CAB}=60^\circ$, $\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$)





내접원의 중심을 O, 점 O에서 세 선분 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자.

(넓이)

($\triangle$ABC의 넓이)=($\triangle$OAB의 넓이)+($\triangle$OBC의 넓이)
+($\triangle$OCA의 넓이)

즉, $\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\times r\times 1+\dfrac{1}{2}\times r\times\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\times r\times 2$

정리하면 $r=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

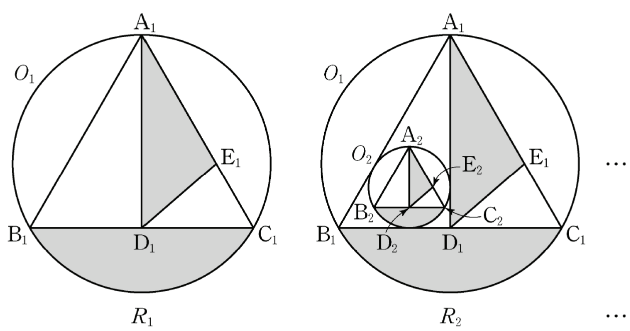
(길이)

$\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{FC}=\overline{AD}+\overline{CE}=(\overline{AB}-\overline{DB})+(\overline{CB}-\overline{EB})$

즉, $2=(1-r)+(\sqrt{3}-r)$ 정리하면 $r=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

문제 40

그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 점 A_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 D_1이라 하고, 선분 A_1C_1을 $2:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하자. 점 A_1을 포함하지 않는 호 B_1C_1과 선분 B_1C_1로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $A_1D_1E_1$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 삼각형 $A_1B_1D_1$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 점 A_2에서 선분 B_2C_2에 내린 수선의 발을 D_2, 선분 A_2C_2를 $2:1$로 내분하는 점을 E_2라 하자. 점 A_2를 포함하지 않는 호 B_2C_2와 선분 B_2C_2로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $A_2D_2E_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점](2018(9)-나형18)



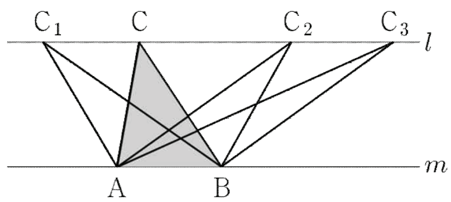
① $\dfrac{16(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$　② $\dfrac{16(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$

③ $\dfrac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$　④ $\dfrac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{69}$

⑤ $\dfrac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$

주제 17 등비급수와 평면도형: 넓이(분할과 여집합)(1)

두 직선 l, m이 서로 평행할 때, 직선 m 위의 서로 다른 두 점 A, B, 직선 l 위의 서로 다른 네 점 $\mathrm{C_1}$, C, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{C_3}$에 대하여 네 삼각형 $\mathrm{C_1AB}$, CAB, $\mathrm{C_2AB}$, $\mathrm{C_3AB}$의 넓이는 모두 같다. 이는 수능에 자주 출제되므로 반드시 알아두자.



위의 정리를 이용하여 아래의 문제를 풀어보자.

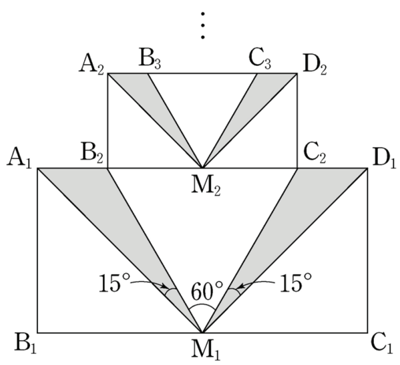
〈문제41〉
위의 문제를 풀고 [참고]를 반드시 읽어보자. 분할과 여집합으로 넓이를 구하는 방법을 예시를 통하여 설명하였다.

문제 41

$\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하고, 선분 A_1D_1 위에 $\angle A_1M_1B_2=\angle C_2M_1D_1=15^\circ$, $\angle B_2M_1C_2=60^\circ$가 되도록 두 점 B_2, C_2를 정한다. 삼각형 $A_1M_1B_2$의 넓이와 삼각형 $C_2M_1D_1$의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 $\overline{B_2C_2}=2\overline{A_2B_2}$인 직사각형이 되도록 그림과 같이 두 점 A_2, D_2를 정한다. 선분 B_2C_2의 중점을 M_2라 하고, 선분 A_2D_2 위에 $\angle A_2M_2B_3=\angle C_3M_2D_2=15^\circ$, $\angle B_3M_2C_3=60^\circ$가 되도록 두 점 B_3, C_3을 정한다. 삼각형 $A_2M_2B_3$의 넓이와 삼각형 $C_3M_2D_2$의 넓이의 합을 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점](2011-가형10/나형10)



① $\dfrac{2+\sqrt{3}}{6}$　② $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$　③ $\dfrac{4+\sqrt{3}}{9}$

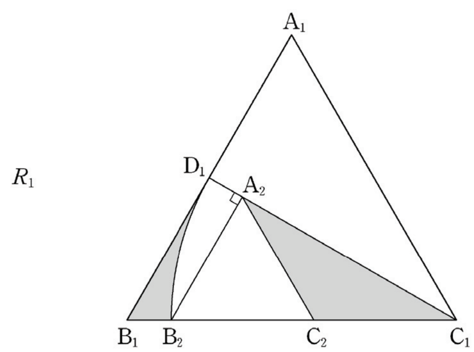
④ $\dfrac{5-\sqrt{3}}{5}$　⑤ $\dfrac{7-\sqrt{3}}{8}$

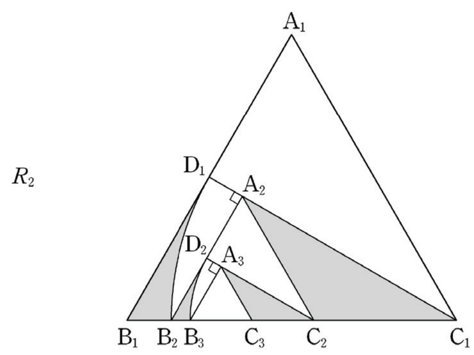
문제 42

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 A_1B_1의 중점을 D_1이라 하고, 선분 B_1C_1 위의 $\overline{C_1D_1}=\overline{C_1B_2}$인 점 B_2에 대하여 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1D_1B_2$를 그린다. 점 B_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 A_2, 선분 C_1B_2의 중점을 C_2라 하자. 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_1A_2C_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 A_2B_2의 중점을 D_2라 하고, 선분 B_2C_2 위의 $\overline{C_2D_2}=\overline{C_2B_3}$인 점 B_3에 대하여 중심이 C_2인 부채꼴 $C_2D_2B_3$을 그린다. 점 B_3에서 선분 C_2D_2에 내린 수선의 발을 A_3, 선분 C_2B_3의 중점을 C_3이라 하자. 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 D_2B_3으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_2A_3C_3$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점](2018-나형19)





① $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{56}$ ② $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$ ③ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{56}$

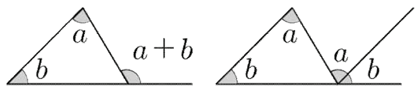
④ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{52}$ ⑤ $\dfrac{15\sqrt{3}-4\pi}{52}$

다음은 위의 문제를 풀 때 사용된 평면기하의 성질 중의 하나이다.

〈삼각형의 내각과 외각의 성질〉

❶ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이다.

❷ 삼각형의 한 외각의 크기는 이와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

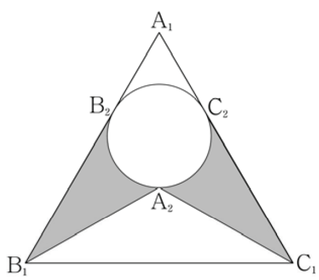


〈문제43〉
이 문제는 넓이의 분할과 길이의 분할을 모두 소재로 하고 있다.

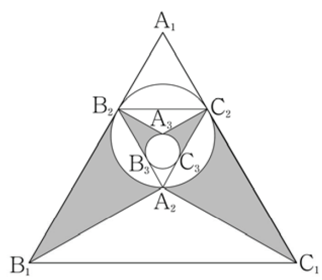
문제 43

그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 무게중심을 A_2, 점 A_2를 지나는 원과 두 변 A_1B_1, A_1C_1의 접점을 각각 B_2, C_2라 하자. 호 A_2B_2, 선분 B_2B_1, 선분 B_1A_2와 호 A_2C_2, 선분 C_2C_1, 선분 C_1A_2로 둘러싸인 부분인  모양의 도형을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 삼각형 $A_2B_2C_2$의 무게중심을 A_3, 점 A_3을 지나는 원과 두 변 A_2B_2, A_2C_2의 접점을 각각 B_3, C_3이라 하자. 그림 R_1에 호 A_3B_3, 선분 B_3B_2, 선분 B_2A_3과 호 A_3C_3, 선분 C_3C_2, 선분 C_2A_3으로 둘러싸인 부분인  모양의 도형을 색칠하고 추가하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 삼각형 $A_3B_3C_3$의 무게중심을 A_4, 점 A_4를 지나는 원과 두 변 A_3B_3, A_3C_3의 접점을 각각 B_4, C_4라 하자. 그림 R_2에 호 A_4B_4, 선분 B_4B_3, 선분 B_3A_4와 호 A_4C_4, 선분 C_4C_3, 선분 C_3A_4로 둘러싸인 부분인  모양의 도형을 색칠하고 추가하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 R_n, 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

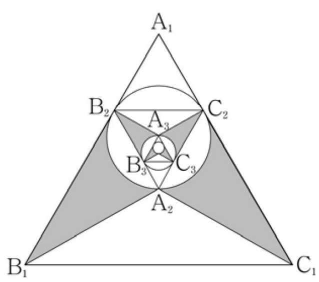
[4점](2015(10)고3-A형20/B형17)



R_1



R_2



R_3

…

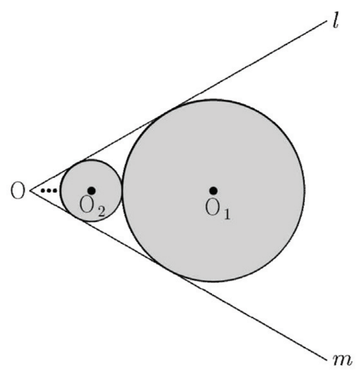
① $\dfrac{21\sqrt{3}-4\pi}{16}$ ② $\dfrac{7\sqrt{3}-2\pi}{16}$ ③ $\dfrac{21\sqrt{3}-4\pi}{8}$
④ $\dfrac{7\sqrt{3}-2\pi}{8}$ ⑤ $\dfrac{21\sqrt{3}-2\pi}{8}$

주제 18 등비급수와 평면도형: 원과 접선

이 주제에 대한 대표적인 문제를 풀어보자.

예제 12

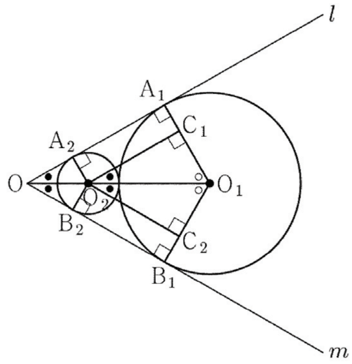
아래 그림처럼 점 O에서 만나는 두 반직선 l, m이 이루는 예각의 크기는 60°이다. 중심이 O_1인 원 C_1은 두 반직선 l, m에 동시에 접하고, 중심이 O_2인 원 C_2는 두 반직선 l, m 및 원 C_1에 동시에 접한다고 하자. 2 이상의 자연수 n에 대하여 중심이 O_n인 원 C_n은 두 반직선 l, m 및 원 C_{n-1}에 동시에 접한다. 원 C_n의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오. (단, 원 C_1의 반지름의 길이는 2이다.)



풀이

점 O_1에서 두 반직선 l, m에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1, 점 O_2에서 두 반직선 l, m에 내린 수선의 발을 각각 A_2, B_2, 점 O_2에서 두 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1$, $\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1$에 내린 수선의 발을 각각 C_1, C_2라고 하자. 그리고 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라고 하자. 이때, $r_1=2$이다.

(원의 정의, 원과 직선의 위치 관계(접선), 두 원의 위치 관계(외접)의 정의와 성질(결정조건)에 따라 보조선을 긋고, 각의 크기에 대한 정보를 시각화하면 다음과 같다.)



(단, ●＝30°, ○＝60°)

직각삼각형 $O_1C_1O_2$에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\frac{\overline{O_1C_1}}{\overline{O_2O_1}}=\cos 60^\circ \quad \text{즉,} \quad \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}=\frac{1}{2}$$

정리하면

$$r_2=\frac{1}{3}r_1(\text{닮음비})\to S_2=\frac{1}{9}S_1(\text{넓이의 비})$$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n(\text{닮음비})\to S_{n+1}=\frac{1}{9}S_n(\text{넓이의 비})$$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 4π이고, 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

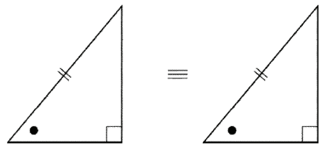
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{4\pi}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}\pi$$

답 $\frac{9}{2}\pi$

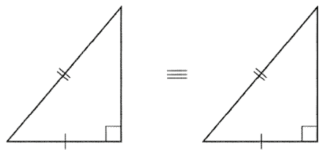
위의 문제의 풀이과정에서 사용된 평면기하의 성질은 다음과 같다.

〈직각삼각형의 합동 조건〉

❶ 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동이다. (RHA합동)



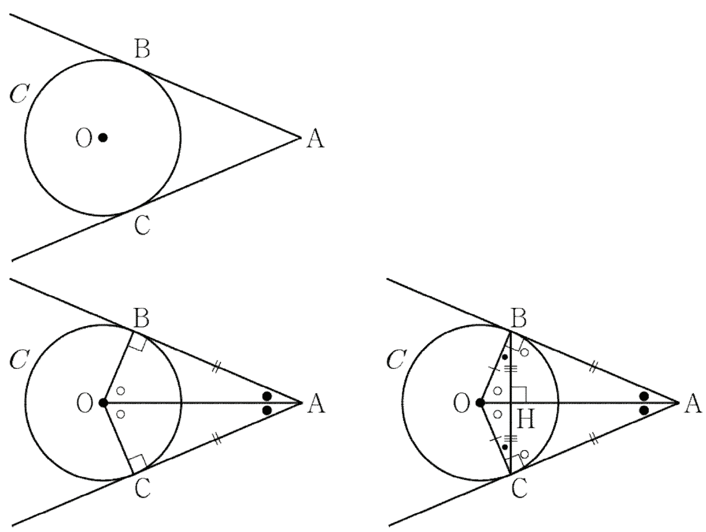
❷ 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동이다. (RHS합동)



〈접선의 길이〉

원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

직각삼각형의 합동 조건과 접선의 길이에 대한 성질에 따라 보조선을 긋고, 각의 크기와 선분의 길이에 대한 정보를 시각화하면 다음과 같다. (문제에서 왼쪽 그림이 주어지면 오른쪽 그림처럼 보조선을 긋고, 각과 길이에 대한 정보를 표시해야 한다.)

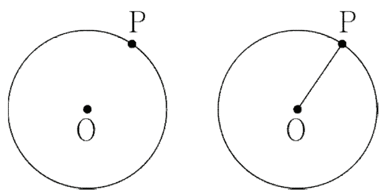


(단, ●+○=90°)

주제 19 등비급수와 평면도형: 원의 정의, 원과 현

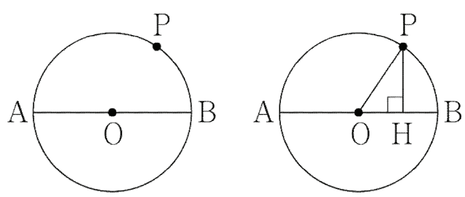
- 원의 정의

아래 그림처럼 중심이 O인 원 위의 점 P가 주어지면 선분 OP를 긋는다. 이때, $\overline{\mathrm{OP}}$는 원 O의 반지름이다.



아래 그림처럼 중심이 O이고, 지름이 AB인 원 위의 점 P가 주어지면 점 P에서 선분 AB에 수선을 내린다. 이때, 수선의 발을 H라고 하자.
피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{OH}}^2 + \overline{\mathrm{HP}}^2$, 즉 $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OH}}^2 + \overline{\mathrm{HP}}^2}$

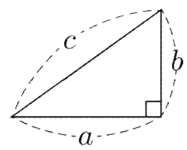
이처럼 직각삼각형이 주어지면 '피타고라스의 정리' 또는 '삼각비의 정의'를 적용해야 함을 반드시 기억해야 한다.



만약 직각삼각형 POH에서 ∠POH가 30°, 45°, 60°와 같은 특수각이면 삼각비의 정의를 이용하여 반지름의 길이를 구하면 된다. 하지만 직각삼각형의 직각이 아닌 한 각이 특수각이 아니라면 삼각비를 적용할 수 없으므로 피타고라스의 정리를 이용하여 반지름의 길이를 구해야 한다.

〈피타고라스의 정리〉

직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면
$c^2 = a^2 + b^2$
이 성립한다.

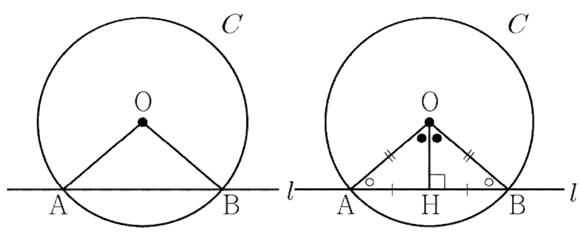


• 원과 현

〈원의 중심과 현의 수직이등분선 사이의 관계〉

❶ 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.
❷ 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

원의 중심과 현에 대한 성질에 따라 보조선을 긋고, 각의 크기와 선분의 길이에 대한 정보를 시각화하면 다음과 같다. (문제에서 왼쪽 그림이 주어지면 오른쪽 그림처럼 보조선을 긋고, 각과 길이에 대한 정보를 표시해야 한다.)



(단, $\bullet + \circ = 90^\circ$)

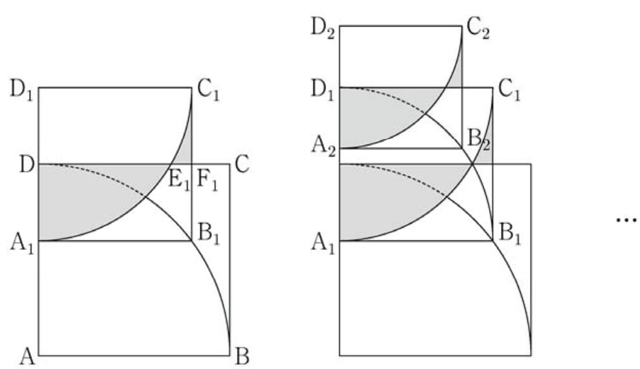
원의 정의의 관점에서 아래의 문제를 풀어보자.

문제 44

그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD에 중심이 A이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 ABD를 그린다. 선분 AD를 $3:2$로 내분하는 점을 A_1, 점 A_1을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 BD와 만나는 점을 B_1이라 하자. 선분 A_1B_1을 한 변으로 하고 선분 DC와 만나도록 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$을 그린 후, 중심이 D_1이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $D_1A_1C_1$을 그린다. 선분 DC가 호 A_1C_1, 선분 B_1C_1과 만나는 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 DA_1, DE_1과 호 A_1E_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 E_1F_1, F_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에 중심이 A_1이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $A_1B_1D_1$을 그린다. 선분 A_1D_1을 $3:2$로 내분하는 점을 A_2, 점 A_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 호 B_1D_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 선분 A_2B_2를 한 변으로 하고 선분 D_1C_1과 만나도록 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점](2020-나형18)



R_1 R_2 ⋯

① $\frac{50}{3}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ ② $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

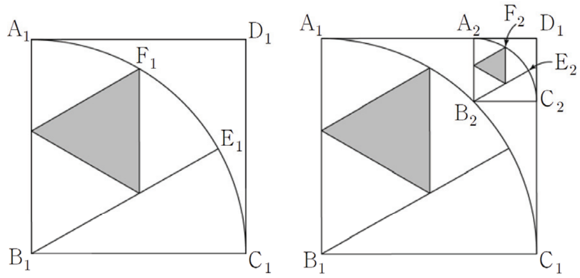
③ $\frac{50}{3}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$ ④ $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

⑤ $\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

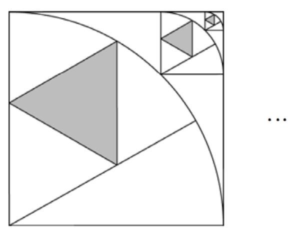
문제 45

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 중심을 B_1, 선분 B_1C_1을 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $B_1C_1A_1$을 그린다. 부채꼴 $B_1C_1A_1$의 호 C_1A_1을 삼등분하는 두 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 선분 B_1E_1을 그린다. 점 F_1을 한 꼭짓점으로 하고 부채꼴 $B_1E_1A_1$에 내접하는 정삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 점 D_1과 부채꼴 $B_1C_1A_1$의 호 C_1A_1을 이등분하는 점 B_2를 대각선의 양 끝점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_1$을 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_1$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 정삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (단, $\angle A_nB_nE_n = 60°$이다.) [4점](2016(9)고2-가형20/나형21)



R_1　　R_2



R_3　　…

① $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$　② $\dfrac{4\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$

③ $\dfrac{4\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{21}$　④ $\dfrac{5\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$

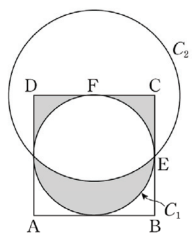
⑤ $\dfrac{5\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{21}$

문제 46

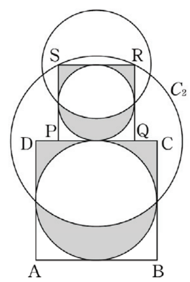
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 이 정사각형에 내접하는 원을 C_1이라 하자. 원 C_1이 변 BC, CD와 접하는 점을 각각 E, F라 하고, 점 F를 중심으로 하고 점 E를 지나는 원을 C_2라 하자. 원 C_1의 내부와 원 C_2의 외부의 공통부분인 모양의 도형과, 원 C_1의 외부와 원 C_2의 내부 및 정사각형 ABCD의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 꼭짓점이 변 CD 위에 있고 나머지 두 꼭짓점이 정사각형 ABCD의 외부에 있으면서 원 C_2 위에 있는 정사각형 PQRS를 그리고, 이 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양과 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

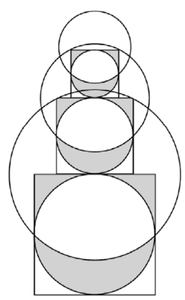
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점](2017(3)고3-나형19)



R_1



R_2



…

R_3 …

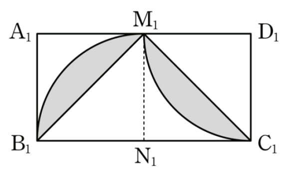
① $\dfrac{26-5\pi}{6}$ ② $\dfrac{28-5\pi}{6}$ ③ $\dfrac{30-5\pi}{6}$

④ $\dfrac{32-5\pi}{6}$ ⑤ $\dfrac{34-5\pi}{6}$

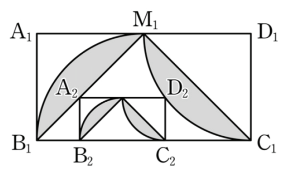
〈문제47〉
삼각비를 이용할 수 없다면? 바로 피타고라스의 정리를 이용할 생각을 해야 한다. 이는 수능 시험에서 매우 중요하다.

문제 47

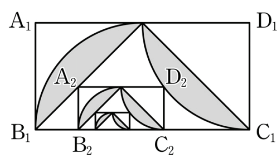
직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자. 중심이 N_1, 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $N_1M_1B_1$을 그리고, 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $D_1M_1C_1$을 그린다. 부채꼴 $N_1M_1B_1$의 호 M_1B_1과 선분 M_1B_1로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$의 호 M_1C_1과 선분 M_1C_1로 둘러싸인 부분인 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2, 호 M_1C_1 위의 점 D_2와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2} : \overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점](2014-A형17/B형15)



R_1



R_2



R_3

⋯

⋯

① $\frac{25}{19}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$　② $\frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$　③ $\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$
④ $\frac{25}{22}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$　⑤ $\frac{25}{23}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

주제 20 등비급수와 평면도형: 넓이(분할과 여집합)(2)

한 도형의 넓이를 여러 개의 작은 도형의 넓이의 합으로 구할 수도 있다.
즉, $S=S_1+S_2+S_3$
이때, S의 값을 공식을 이용하여 바로 구할 수 없기 때문에 S_1, S_2, S_3의 값을 구해서 모두 합하는 것이다.

한 도형의 넓이를 이 도형을 포함하는 더 큰 도형의 넓이에서 여집합에 해당하는 도형의 넓이를 빼서 구할 수도 있다.
즉, $S=(S+T)-T$
이때, S의 값을 공식을 이용하여 바로 구할 수 없기 때문에 $S+T$, T의 값을 구해서 빼는 것이다.

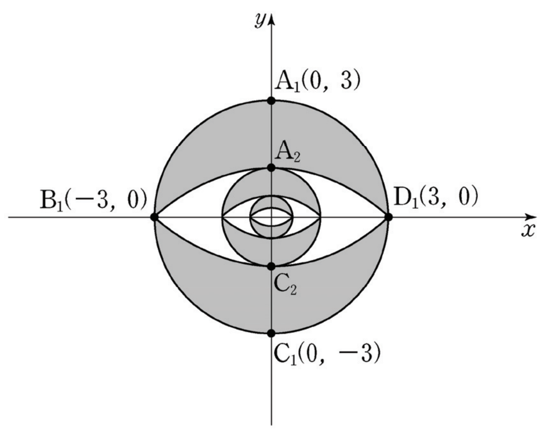
이에 해당하는 문제를 풀어보자.

〈문제48〉
이 문제를 풀고 해설을 읽어보자. 도형의 넓이를 구할 때, 분할과 여집합이 어떻게 사용되는지를 알 수 있을 것이다.

〈문제48〉
작은 원이 큰 원에 내접할 때, 두 원의 중심과 접점은 한 직선 위에 있다.

문제 48

그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_1을 그리고, 원 O_1이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $A_1(0,\ 3)$, $B_1(-3,\ 0)$, $C_1(0,\ -3)$, $D_1(3,\ 0)$이라 하자. 두 점 B_1, D_1을 모두 지나고 두 점 A_1, C_1을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_1의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_2, A_2라 하자. 호 $B_1A_1D_1$과 호 $B_1A_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $B_1C_1D_1$과 호 $B_1C_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1이라하자.
선분 A_2C_2를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고, 원 O_2가 x축과 만나는 두 점을 각각 B_2, D_2라 하자. 두 점 B_2, D_2를 모두 지나고 두 점 A_2, C_2를 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_3, A_3이라 하자. 호 $B_2A_2D_2$과 호 $B_2A_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 호 $B_2C_2D_2$과 호 $B_2C_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2이라하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $B_nA_nD_n$과 호 $B_nA_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $B_nC_nD_n$과 호 $B_nC_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$의 값은? [4점](2010-가형15/나형15)



① $6(\sqrt{2}+1)$ ② $6(\sqrt{3}+1)$ ③ $6(\sqrt{5}+1)$
④ $9(\sqrt{2}+1)$ ⑤ $9(\sqrt{3}+1)$

〈문제49〉
이 문제를 풀고 해설을 읽어보자. 도형의 넓이를 구할 때, 분할과 여집합이 어떻게 사용되는지를 알 수 있을 것이다.

〈문제49〉
작은 원이 큰 원에 내접할 때, 두 원의 중심과 접점은 한 직선 위에 있다.

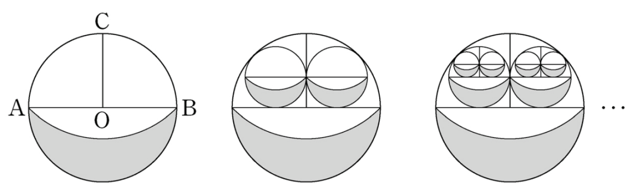
문제 49

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자. 점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 새로 생긴 2개의 원의 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점](2013-가형14/나형14)



R_1　　R_2　　R_3　　…

① $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{7}$　② $\dfrac{5+3\sqrt{2}}{7}$　③ $\dfrac{5+4\sqrt{2}}{7}$

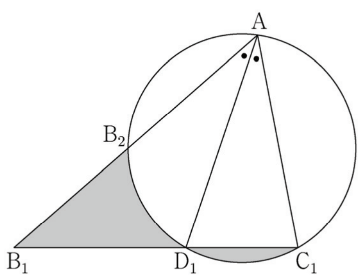
④ $\dfrac{5+5\sqrt{2}}{7}$　⑤ $\dfrac{5+6\sqrt{2}}{7}$

주제 21 등비급수와 평면도형: 사인법칙, 코사인법칙

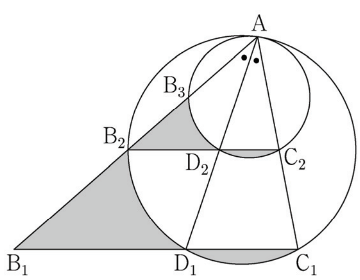
문제 50

그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자. 세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점](2021(6)−가형20)

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$

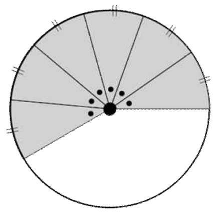
④ $\dfrac{18\sqrt{3}}{46}$ ⑤ $\dfrac{39\sqrt{3}}{46}$

위의 문제 풀이에 사용된 평면도형의 성질은 다음과 같다.

〈중심각의 크기와 호의 길이, 부채꼴의 넓이 사이의 관계〉

❶ 한 원에서 크기가 같은 중심각에 대한 호의 길이와 부채꼴의 넓이는 각각 같다.

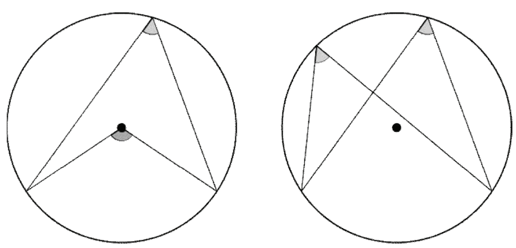
❷ 한 원에서 호의 길이와 부채꼴의 넓이는 중심각의 크기에 정비례한다.



〈원주각과 중심각 사이의 관계〉

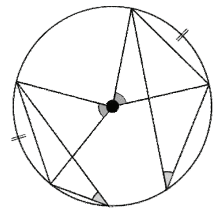
❶ 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{2}$배이다.

❷ 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.



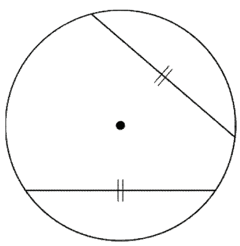
〈원주각의 크기와 호의 길이 사이의 관계〉

❶ 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.
❷ 한 원에서 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이는 같다.



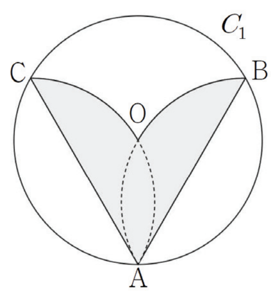
〈원의 중심과 현의 길이 사이의 관계〉

❶ 한 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.
❷ 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

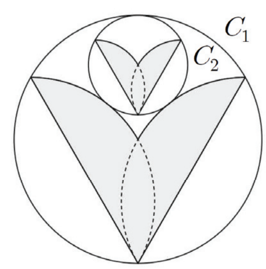


문제 51

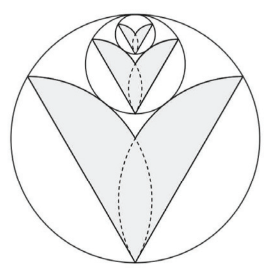
그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1이 있다.
원 C_1 위의 한 점 A를 잡고, 원 C_1과 반지름의 길이가 같고 두 점 O, A를 지나는 두 원이 원 C_1과 만나는 점 중에서 점 A가 아닌 점을 각각 B, C라 할 때, 선분 CA, 선분 AB, 호 BO, 호 OC로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 원 C_1, 호 BO, 호 OC와 모두 접하는 원 C_2를 그린 후 원 C_2에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점](2014(11)고2-B형21)



R_1



R_2



R_3

…

…

① $\frac{22}{63}\pi$　② $\frac{23}{63}\pi$　③ $\frac{8}{21}\pi$

④ $\frac{25}{63}\pi$　⑤ $\frac{26}{63}\pi$

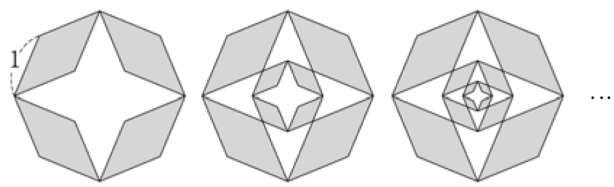
문제 52

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정팔각형의 이웃한 두 변을 변으로 하는 4개의 평행사변형을 서로 겹치지 않게 그리고, 이 평행사변형 4개를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻는 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 가장 작은 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그리진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻는 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻는 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점](2014(9)-B형18)



R_1　　　R_2　　　R_3　　　…

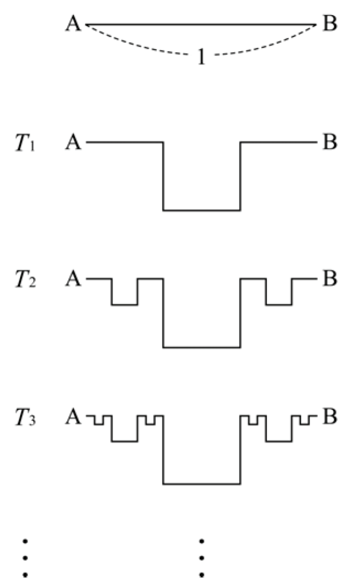
① $2+\sqrt{2}$　② $1+2\sqrt{2}$　③ $3+\sqrt{2}$
④ $1+3\sqrt{2}$　⑤ $4+\sqrt{2}$

주제 22 등비급수와 평면도형: 도형의 개수가 등비수열로 증가하는 경우

〈문제53〉
이 문제는 '각 시행에서 새롭게 만들어지는 도형의 개수가 기하급수적으로 증가하는 기하적 상황'을 다루고 있다.
도형 T_1에서 새롭게 만들어진 ⊔ 모양의 도형의 개수는 2^0이다.
도형 T_2에서 새롭게 만들어진 ⊔ 모양의 도형의 개수는 2^1이다.
도형 T_3에서 새롭게 만들어진 ⊔ 모양의 도형의 개수는 2^2이다.
⋮
도형 T_n에서 새롭게 만들어진 ⊔ 모양의 도형의 개수는 2^{n-1}이다.
이 문제를 풀고 해설집의 [참고]를 읽어보자.

문제 53

길이가 1인 선분 AB가 있다. 그림과 같이 선분 AB를 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_1이라 하자.
T_1의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 두 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_2라 하자.
T_2의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 네 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속 반복하여 n번째 만든 도형을 T_n이라 하고, T_n에 있는 모든 선분의 길이의 총합을 l_n이라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값은? [4점](2007(3)고3-가형29/나형29)



① 3　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{11}{3}$
④ 4　⑤ $\frac{13}{3}$

문제 54

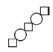
그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD의 대각선 BD의 5등분점을 점 B에서 가까운 순서대로 각각 P_1, P_2, P_3, P_4라 하고, 선분 BP_1, $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$, $\mathrm{P}_4\mathrm{D}$를 각각 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$, $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$를 각각 지름으로 하는 원을 그린 후,  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

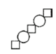
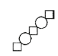
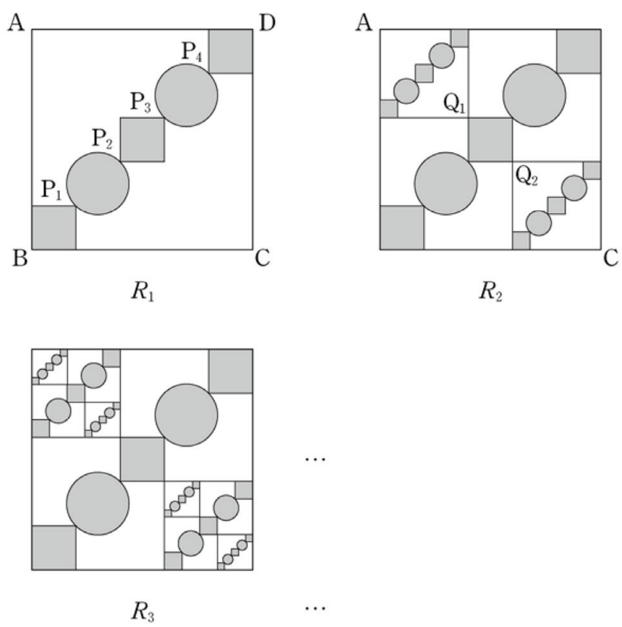
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$을 대각선으로 하는 정사각형의 꼭짓점 중 점 A와 가장 가까운 점을 Q_1, 점 C와 가장 가까운 점을 Q_2라 하자. 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 2개의 정사각형 안에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻은 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점](2016-A형15/B형13)



① $\dfrac{24}{17}(\pi+3)$　② $\dfrac{25}{17}(\pi+3)$　③ $\dfrac{26}{17}(\pi+3)$

④ $\dfrac{24}{17}(2\pi+1)$　⑤ $\dfrac{25}{17}(2\pi+1)$

주제 23 등비급수와 평면도형: 평행사변형과 마름모

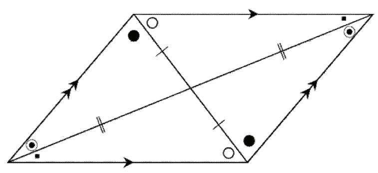
등비급수와 평면도형에서 평행사변형과 마름모는 자주 출제되지는 않는다. 일단 아래의 정의와 성질들을 알아두기는 하자.

〈평행사변형의 정의〉

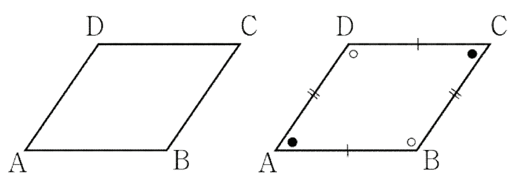
❶ 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.
❷ 평행사변형의 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.
❸ 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.

〈평행사변형이 되는 조건〉

다음 조건 중 어느 하나를 만족시키는 사각형은 평행사변형이다.
❶ 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.
❷ 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
❸ 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
❹ 한 쌍의 대변이 평행하고, 그 길이가 같다.
❺ 두 대각선이 서로를 이등분한다.



문제에서 왼쪽 그림이 주어지면 오른쪽 그림처럼 보조선을 긋고, 각과 길이에 대한 정보를 표시해야 한다.



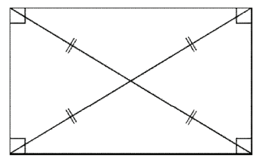
(단, ●+○=180°)

〈직사각형의 정의〉

직사각형은 네 각의 크기가 모두 같은 사각형이므로 평행사변형이다. 따라서 직사각형은 평행사변형의 성질을 모두 만족시킨다.

〈직사각형의 성질〉

직사각형의 두 대각선은 길이가 같고, 서로를 이등분한다.



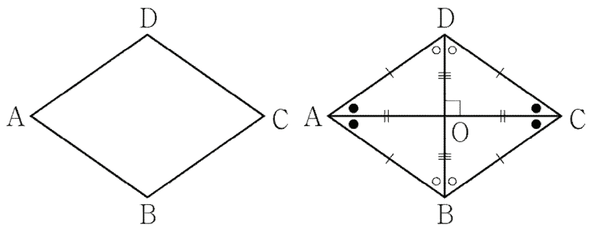
〈마름모의 정의〉

마름모는 네 변의 길이가 모두 같은 사각형이므로 평행사변형이다. 따라서 마름모는 평행사변형의 성질을 모두 만족시킨다.

〈마름모의 성질〉

마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

문제에서 왼쪽 그림이 주어지면 오른쪽 그림처럼 보조선을 긋고, 각과 길이에 대한 정보를 표시해야 한다.



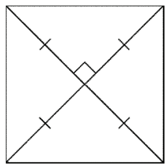
(단, ●+○=90°)

〈정사각형의 정의〉

정사각형은 네 각의 크기가 모두 같고 네 변의 길이가 모두 같은 사각형이므로, 직사각형과 마름모의 성질을 모두 만족시킨다.

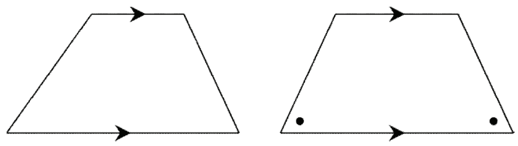
〈정사각형의 성질〉

정사각형의 두 대각선은 길이가 같고, 서로를 수직이등분한다.



〈사다리꼴의 정의〉

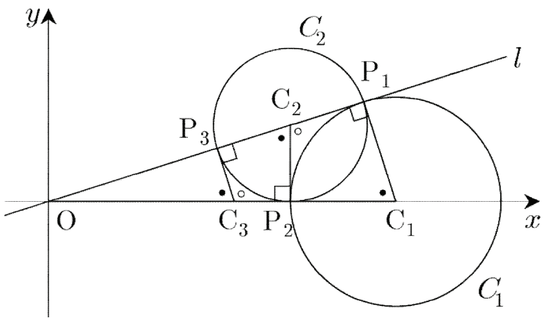
사다리꼴은 한 쌍의 대변이 평행한 사각형이다. 특히 사다리꼴 중에서 아랫변의 양 끝 각의 크기가 같은 사다리꼴을 등변사다리꼴이라고 한다.



37 | 답 ③

[풀이1]

원의 접선은 접점을 지나는 반지름에 수직이므로 아래 그림과 같이 보조선을 그어야 한다.



(단, $\bullet + \circ = 180^\circ$)

위의 그림처럼 삼각형

$\mathrm{OC_1P_1}$, $\mathrm{OC_2P_2}$, $\cdots$, $\mathrm{OC}_n\mathrm{P}_n$, $\cdots$

은 모두 닮음이다.

삼각형 $\mathrm{OC_1P_1}$의 각 변의 길이는

$\overline{\mathrm{OC_1}} = 4$, $\overline{\mathrm{C_1P_1}} = 1$, $\overline{\mathrm{OP_1}} = \sqrt{15}$

이고, 삼각형 $\mathrm{OC_2P_2}$에서 $\overline{\mathrm{OP_2}} = 3$이므로

두 삼각형 $\mathrm{OC_1P_1}$, $\mathrm{OC_2P_2}$의 닮음비는

$\overline{\mathrm{OP_1}} : \overline{\mathrm{OP_2}} = \sqrt{15} : 3$

이는 두 원 C_1, C_2의 닮음비와 같다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

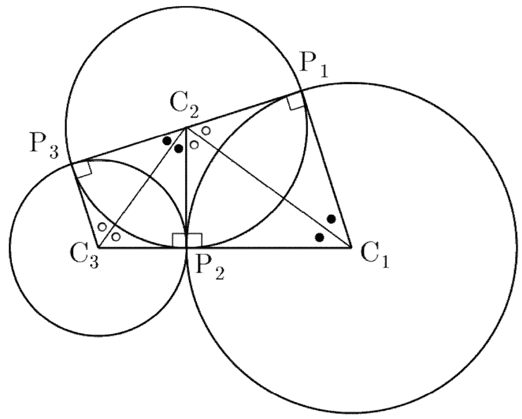
$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{1-\left(\dfrac{3}{\sqrt{15}}\right)^2} = \frac{5}{2}\pi$$

답 ③

[풀이2]

자연수 n에 대하여 원 C_n의 중심을 C_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.

직선 l이 점 P_1에서 원 C_1에 접하므로 점 C_1에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_1이다. 마찬가지의 이유로 점 C_2에서 x축에 내린 수선의 발은 P_2, 점 C_3에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_3이다.



직각삼각형의 RHS합동에 의하여

$\triangle \mathrm{C_1P_1C_2} \equiv \triangle \mathrm{C_1P_2C_2}$, $\triangle \mathrm{C_2P_3C_3} \equiv \triangle \mathrm{C_2P_2C_3}$

(여기서 두 사각형 $\mathrm{C_1P_1C_2P_2}$와 $\mathrm{C_2P_3C_3P_2}$는 서로 닮음임을 알 수 있다.)

삼각형의 AA닮음에 의하여

$\triangle \mathrm{C_1P_2C_2} \sim \triangle \mathrm{C_2P_2C_3}$

이므로

$\overline{\mathrm{C_1P_2}} : \overline{\mathrm{P_2C_2}} = \overline{\mathrm{C_2P_2}} : \overline{\mathrm{P_2C_3}}$ 즉, $r_1 : r_2 = r_2 : r_3$

정리하면 $r_2^2 = r_1 r_3$

등비중항의 정의에 의하여

r_2는 r_1과 r_3의 등비중항이므로

세 수 r_1, r_2, r_3은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

세 수 r_n, r_{n+1}, r_{n+2}는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

다시 말하면 $\{r_n\}$은 등비수열이다.

원 C_1의 방정식에서

$r_1 = 1$ $\cdots$ ㉠

직선 l의 방정식을

l: $y = kx$ (단, k는 양의 상수)

점 $(4, 0)$과 직선 l 사이의 거리가 1이므로

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\dfrac{4k}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ 풀면 $k = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$

직선 l의 방정식은

l: $y = \dfrac{\sqrt{15}}{15}x$

점 P_2의 좌표는 $(3, 0)$이므로 직선 l의 방정식에

$x=3$을 대입하면

$y=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 즉, $r_2=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 수열 $\{r_n\}$의 귀납적 정의는

$r_1=1$, $r_{n+1}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}r_n$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 r_n은

$r_n=\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)^{n-1}\ (n\geq 1)$

일반항 S_n은

$S_n=\pi\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\ (n\geq 1)$

등비급수의 합의 공식에 의하여

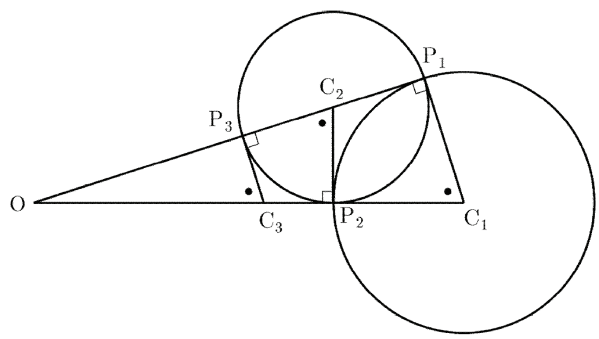
$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\pi}{1-\dfrac{3}{5}}=\dfrac{5}{2}\pi$

답 ③

[풀이3]

자연수 n에 대하여 원 C_n의 중심을 C_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.

직선 l이 점 P_1에서 원 C_1에 접하므로 점 C_1에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_1이다. 마찬가지의 이유로 점 C_2에서 x축에 내린 수선의 발은 P_2이다.



서로 닮음인 두 직각삼각형 $\mathrm{OC_1P_1}$과 $\mathrm{OC_2P_2}$에 대하여

$\overline{\mathrm{OC_1}}:\overline{\mathrm{C_1P_1}}=\overline{\mathrm{OC_2}}:\overline{\mathrm{C_2P_2}}$

대입하면

$4:1=\sqrt{15}-r_2:r_2$

풀면

$r_2=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

마찬가지의 방법으로

서로 닮음인 두 직각삼각형 $\mathrm{OC_2P_2}$과 $\mathrm{OC_3P_3}$에서

$r_3=\dfrac{3}{5}$

$\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{r_3}{r_2}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$이므로 등비수열의 정의에서

세 수 r_1, r_2, r_3은 이 순서대로 공비가 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$인 등비수열을 이룬다.

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

세 수 r_n, r_{n+1}, r_{n+2}는 이 순서대로 공비가 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$인 등비수열을 이룬다.

수열 $\{r_n\}$의 귀납적 정의는

$r_1=1$, $r_{n+1}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}r_n$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 r_n은

$r_n=\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)^{n-1}\ (n\geq 1)$

일반항 S_n은

$S_n=\pi\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\ (n\geq 1)$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\pi}{1-\dfrac{3}{5}}=\dfrac{5}{2}\pi$

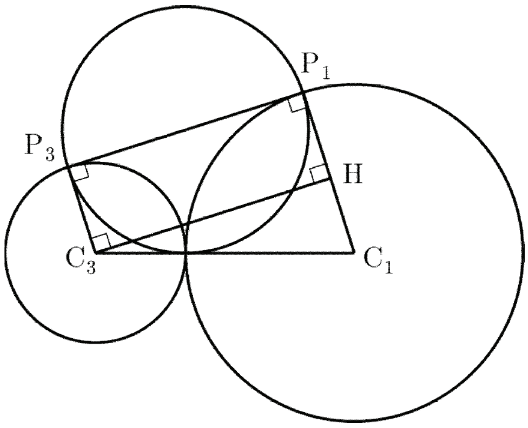
답 ③

[참고]

수열 $\{r_n\}$이 등비수열임을 다음과 같이 보여도 좋다.

자연수 n에 대하여 원 C_n의 중심을 C_n, 반지름의 길이를 r_n, 점 C_3에서 선분 $\mathrm{P_1C_1}$에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

직선 l이 점 P_1에서 원 C_1에 접하므로 점 C_1에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_1이다. 마찬가지의 이유로 점 C_3에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_3이다.



직각삼각형 C_1HC_3에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{C_3C_1}^2 = \overline{C_1H}^2 + \overline{HC_3}^2$

$(r_1 + r_3)^2 = (r_1 - r_3)^2 + (2r_2)^2$

정리하면

$r_2^2 = r_1 r_3$

등비중항의 정의에 의하여

r_2는 r_1과 r_3의 등비중항이므로

세 수 r_1, r_2, r_3은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

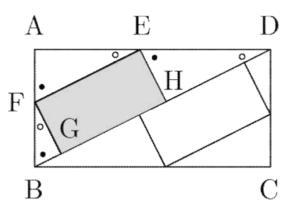
세 수 r_n, r_{n+1}, r_{n+2}는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

다시 말하면 $\{r_n\}$은 등비수열이다.

38 ㅣ답 ④

[풀이1]

아래 그림처럼 그림 R_1의 어둡게 색칠된 직사각형의 네 꼭짓점을 E, F, G, H라고 하자. 그리고 이 직사각형의 이웃한 두 변의 길이를 각각 k, $2k$라고 하자.



직각삼각형 ABD의 세 변의 길이의 비는

$\overline{AB} : \overline{BD} : \overline{DA} = 1 : \sqrt{5} : 2$

이고,

$\triangle ABD \sim \triangle GBF \sim \triangle AFE$

이므로

$\overline{AF} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}k$, $\overline{FB} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}k$

에서

$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}k + \dfrac{\sqrt{5}}{2}k = 1$

풀면 $k = \dfrac{2\sqrt{5}}{9}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{2k^2}{1-k^2} = \dfrac{40}{61}$

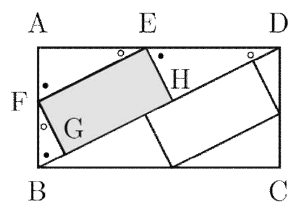
답 ④

[풀이2]

아래 그림과 같이 그림 R_1에서 새롭게 그려진 두 직사각형 중

한 직사각형의 꼭짓점을 각각 E, F, G, H라고 하자.

그리고 $\overline{FG} = x$로 두자.



직각삼각형 ABD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{BD} = \sqrt{\overline{DA}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{5}$

두 삼각형 ABD, GBF는 두 쌍의 대응각의 크기가 같으므로 AA닮음이다.

$\overline{BF} : \overline{FG} = \sqrt{5} : 2 = \overline{BD} : \overline{DA}$

정리하면

$\overline{BF} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}x$ $\cdots$ ㉠

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{EF} = 2\overline{FG} = 2x$

두 삼각형 ABD, AFE는 두 쌍의 대응각의 크기가 같으므로 AA닮음이다.

$\overline{AF} : \overline{FE} = 1 : \sqrt{5} = \overline{AB} : \overline{BD}$

정리하면

$\overline{AF} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}x$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = \dfrac{9\sqrt{5}}{10}x = 1$ 즉, $x = \dfrac{2\sqrt{5}}{9}$

음이 아닌 정수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$a_n=$(그림 R_n에서 새롭게 그려지는 직사각형 한 개의 넓이)

(단, $a_0=2$)

서로 닮음인 두 직사각형 ABCD, EFGH의 닮음비는

$1:\frac{2\sqrt{5}}{9}$이므로

$$a_1=\left(\frac{2\sqrt{5}}{9}\right)^2 a_0$$

자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$$a_{n+1}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{9}\right)^2 a_n (n\geq 1)$$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_0=2,\ a_{n+1}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{9}\right)^2 a_n (n\geq 0)$$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 a_n은

$$a_n=2\left(\frac{20}{81}\right)^n (n\geq 0)$$

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$이므로 일반항 S_n은 첫째항이 $\frac{40}{81}$이고 공비가 $\frac{20}{81}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

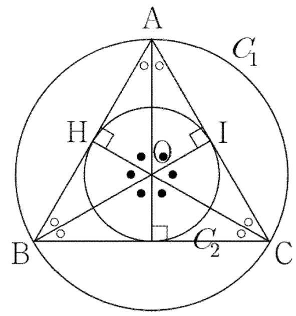
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{40}{81}}{1-\frac{20}{81}}=\frac{40}{61}$$

답 ④

39 | 답 $\frac{64}{3}\pi$

[풀이]

원 C_1의 중심을 O, 원 C_1에 내접하는 삼각형의 세 꼭짓점을 각각 A, B, C, 점 O에서 두 선분 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자.



(단, ○$=30^\circ$, ●$=60^\circ$)

원의 정의에 의하여

$\overline{OH}=\overline{OI}$

이므로 두 삼각형 OAH, OAI는 RHS합동이다.

$$\angle OAH=\angle OAI=\frac{1}{2}\angle CAB=30^\circ$$

삼각형의 세 내각의 합은 180° 이므로

$\angle AOH=\angle AOI=60^\circ$

직각삼각형 OAH에서 특수각의 삼각비에 의하여

$$\cos(\angle AOH)=\frac{\overline{OH}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{OH}}{4}$$

즉, $\frac{1}{2}=\frac{\overline{OH}}{4}$에서 $\overline{OH}=2$(=원 C_2의 반지름)

마찬가지의 방법으로 원 C_3, C_4, C_5, $\cdots$의 반지름의 길이를 구하면 각각

$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 4이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

일반항 r_n은 $r_n=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{3-n}$

원 C_n의 넓이를 S_n이라고 하면

$$S_n=\pi r_n^2=\pi\cdot 4^{3-n}=16\pi\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

구하는 합을 S라고 하자.

등비급수의 합의 공식에 의하여

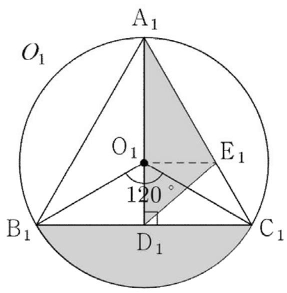
$$S=\frac{16\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{64}{3}\pi$$

답 $\frac{64}{3}\pi$

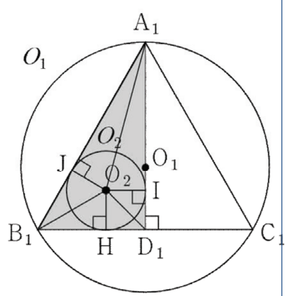
40 | 답 ③

[풀이1]

삼각형 $A_1B_1C_1$의 무게중심을 O_1, 원 O_2의 중심을 O_2, 점 O_2에서 세 선분 B_1D_1, D_1A_1, A_1B_1에 내린 수선의 발을 각각 H, I, J라고 하자. 이때, 점 O_1은 삼각형 $A_1B_1C_1$의 외심이다.



R_1



R_2

두 직선 O_1E_1, B_1C_1이 평행하므로

두 삼각형 $O_1D_1E_1$, $O_1C_1E_1$의 넓이는 같다.

그러므로 두 삼각형 $A_1D_1E_1$, $A_1O_1C_1$의 넓이는 같다.

그런데 두 삼각형 $A_1O_1C_1$, $O_1B_1C_1$의 넓이도 같으므로

$S_1 = (\triangledown O_1B_1C_1\text{의 넓이}) = \dfrac{4\pi}{3}$

그림 R_2에서 원 O_2의 반지름의 길이를 r이라고 하자.

$(\triangle A_1B_1D_1$의 넓이$)=(\triangle A_1B_1O_2$의 넓이$)$

$+(\triangle O_2B_1D_1$의 넓이$)+(\triangle D_1A_1O_2$의 넓이$)$

즉, $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{r(2\sqrt{3}+\sqrt{3}+3)}{2}$

$r = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

두 원 O_1, O_2의 닮음비는

$2 : \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4\pi}{3}}{1-\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$$

답 ③

[풀이2]

두 원 O_1, O_2의 중심을 각각 O_1, O_2, 점 O_2에서 세 선분 B_1D_1, D_1A_1, A_1B_1에 내린 수선의 발을 각각 H, I, J라고 하자.

원의 정의에 의하여

$\overline{O_1A_1} = \overline{O_1B_1} = \overline{O_1C_1}$

이므로 점 O_1은 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 외심이다. 그런데 정삼각형의 외심과 무게중심은 일치하므로, 점 O_1은 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 무게중심이다.

무게중심의 성질과 삼각비의 정의에 의하여

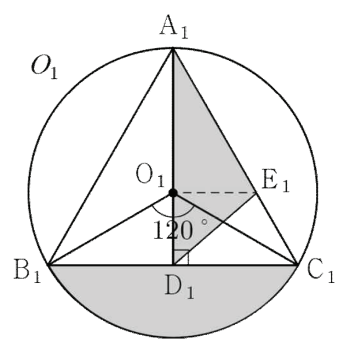
$\overline{A_1D_1} = \overline{A_1O_1} \times \dfrac{3}{2} = 3$,

$\overline{B_1D_1} = \dfrac{\overline{A_1D_1}}{\tan 60^\circ} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$,

$\overline{A_1B_1} = \dfrac{\overline{A_1D_1}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$a_n =$(그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 넓이)



세 삼각형 $O_1A_1B_1$, $O_1B_1C_1$, $O_1C_1A_1$은

서로 SSS합동이므로

$\angle C_1O_1B_1 = \dfrac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$

부채꼴의 넓이와 삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$a_1 = ((\triangledown O_1B_1C_1\text{의 넓이}) - (\triangle O_1B_1C_1\text{의 넓이}))$

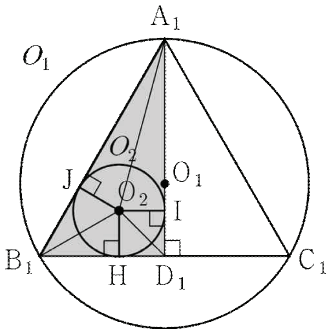
$+(\triangle A_1D_1E_1\text{의 넓이})$

$= \left(\dfrac{1}{2} \times 2^2 \times \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{1}{2} \times 2^2 \times \sin(180^\circ - 120^\circ)\right)$

$+ \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3 = \dfrac{4}{3}\pi (= S_1)$

$(\because \overline{A_1E_1}=\frac{2}{3}\overline{A_1C_1}$에서

$(\triangle A_1D_1E_1$의 넓이$)=\frac{2}{3}\times(\triangle A_1D_1C_1$의 넓이$))$



삼각형의 내심의 성질에 의하여

$\overline{O_2H}=\overline{O_2I}=\overline{O_2J}$

원 O_2의 반지름의 길이를 r이라고 하자.

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\triangle A_1B_1D_1$의 넓이$)=(\triangle O_2B_1D_1$의 넓이$)$

$+(\triangle O_2D_1A_1$의 넓이$)+(\triangle O_2A_1B_1$의 넓이$)$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r+\frac{3}{2}r+\sqrt{3}r$

정리하면

$r=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

도형의 닮음비와 넓이비의 관계에 의하여

$\frac{a_2}{a_1}=\left(\frac{r}{2}\right)^2=\frac{6-3\sqrt{3}}{8}$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=\frac{4}{3}\pi,\ a_{n+1}=\frac{6-3\sqrt{3}}{8}a_n$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로 등비급수의 합을 구하는 공식에 의하여

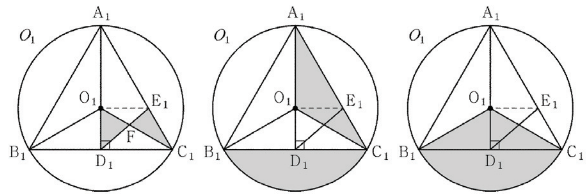
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{6-3\sqrt{3}}{8}}=\frac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$$

답 ③

[참고1] ★

$a_1(=S_1)$을 다음과 같은 방법으로 간단하게 구할 수 있다.

두 선분 O_1C_1, E_1D_1의 교점을 F라고 하자.



삼각형의 무게중심의 성질과 문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{A_1O_1}:\overline{O_1D_1}=2:1=\overline{A_1E_1}:\overline{E_1C_1}$

평행선의 성질의 역에 의하여

$\overline{O_1E_1}//\overline{D_1C_1}$

이므로

$(\triangle O_1D_1C_1$의 넓이$)=(\triangle E_1D_1C_1$의 넓이$)$

즉, $(\triangle O_1D_1F$의 넓이$)=(\triangle E_1C_1F$의 넓이$)$

이므로

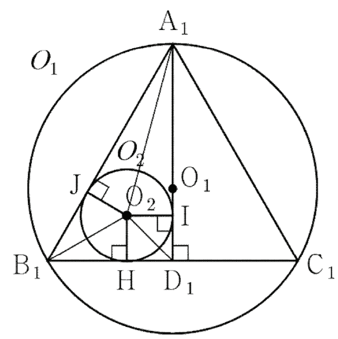
$(\triangle A_1D_1E_1$의 넓이$)=(\triangle A_1O_1C_1$의 넓이$)$

그런데 두 삼각형 $A_1O_1C_1$, $C_1O_1B_1$은 서로 SSS합동이므로

$\therefore\ a_1=(\triangledown O_1B_1C_1$의 넓이$)$

[참고2] ★

원 O_2의 반지름의 길이를 다음과 같이 구할 수 있다.



삼각형의 내심의 성질에 의하여

$\overline{O_2H}=\overline{O_2I}=\overline{O_2J}$

다음과 같은 RHS합동이 성립한다.

$\triangle O_2B_1H\equiv\triangle O_2B_1J$

$\triangle O_2HD_1\equiv\triangle O_2ID_1$

$\triangle O_2IA_1\equiv\triangle O_2JA_1$

그러므로

$\overline{A_1B_1}=\overline{A_1J}+\overline{JB_1}=\overline{A_1I}+\overline{B_1H}$

$=(\overline{A_1D_1}-r)+(\overline{B_1D_1}-r)$

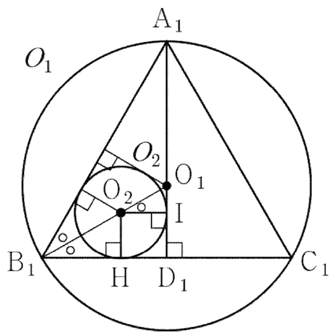
즉, $2\sqrt{3}=(3-r)+(\sqrt{3}-r)$

정리하면

$\therefore\ r=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

[참고3]

원 O_2의 반지름의 길이를 다음과 같이 구할 수 있다.



(단, ○$=30^\circ$)

정삼각형의 내심, 외심, 무게중심은 일치하므로 O_1은 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 내심이다.

내심의 정의에 의하여

점 O_1은 $\angle \mathrm{A_1B_1C_1}$의 이등분선 위에 있고,

점 O_2는 $\angle \mathrm{A_1B_1D_1}$의 이등분선 위에 있으므로

세 점 B_1, O_2, O_1은 한 직선 위에 있다.

$\overline{\mathrm{O_2I}}//\overline{\mathrm{B_1D_1}}$이므로 평행선의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{O_1O_2I}=\angle \mathrm{O_1B_1D_1}=30^\circ$ (동위각)

직각삼각형 $\mathrm{O_1O_2I}$에서 삼각비의 정의에 의하여

$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{\mathrm{IO_1}}}{\overline{\mathrm{O_2I}}}=\dfrac{1-r}{r}$ 즉, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1-r}{r}$

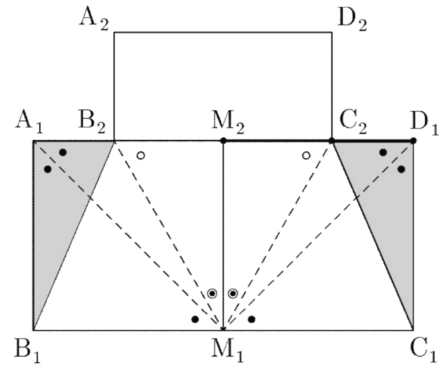
정리하면

$\therefore\ r=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

41 | 답 ②

[풀이1]

우선 아래 그림과 같이 각을 결정하자.



(단, ●$=45^\circ$, ○$=60^\circ$, ◉$=30^\circ$)

직각삼각형 $\mathrm{M_2M_1C_2}$에서

$\overline{\mathrm{M_2C_2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

이므로

$S_1=2\times(\triangle \mathrm{C_2C_1D_1}$의 넓이)

$=2\times\dfrac{1}{2}\times1\times\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

두 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$, $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 닮음비는

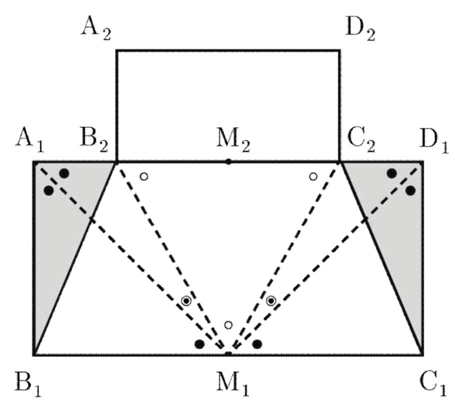
$\overline{\mathrm{M_2D_1}}:\overline{\mathrm{M_2C_2}}=1:\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

답 ②

[풀이2]



(단, ●$=45^\circ$, ○$=60^\circ$, ◉$=15^\circ$)

점 M_1은 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 중점이므로

$\overline{\mathrm{B_1M_1}}=\overline{\mathrm{M_1C_1}}=1$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{A_1B_1}=\overline{B_1M_1}$

직사각형의 정의에 의하여

$\angle A_1B_1M_1=90^\circ$

직각이등변삼각형 $A_1B_1M_1$에서

$\angle M_1A_1B_1=45^\circ$ 이므로 $\angle B_2A_1M_1=45^\circ$

$\triangle A_1M_1B_2$에서 $\angle B_2$의 외각의 크기는

$\angle C_2B_2M_1=\angle B_2A_1M_1+\angle A_1M_1B_2=60^\circ$

마찬가지의 방법으로

$\angle B_2C_2M_1=60^\circ$

정삼각형의 정리에 의하여 $\triangle B_2M_1C_2$는 정삼각형이다.

이등변삼각형의 성질에 의하여

$\triangle B_2M_1C_2$에서 $\angle M_1$의 이등분선 $\overline{M_1M_2}$는

$\overline{B_2C_2}$를 수직이등분한다.

직각삼각형 $B_2M_1M_2$에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{B_2M_2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 $\overline{B_2C_2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $\cdots$ ㉠

두 삼각형 $A_1M_1B_2$, $D_1M_1C_2$는 ASA 합동이므로

$\overline{A_1B_2}=\overline{D_1C_2}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{A_1B_2}=\overline{D_1C_2}=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle A_1M_1B_2$의 넓이)=($\triangle A_1B_1B_2$의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{A_1B_1}\times\overline{A_1B_2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$

마찬가지의 방법으로

($\triangle C_2M_1D_1$의 넓이)$=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$

이므로

$S_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$

서로 닮음인 두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는 $\sqrt{3}:1$이므로

$S_2=\dfrac{1}{3}S_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$S_{n+1}=\dfrac{1}{3}S_n$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$이고 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이다.

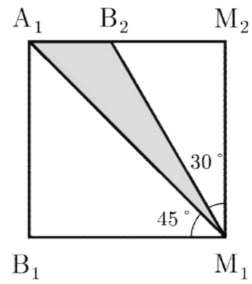
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

답 ②

[참고]

$\triangle A_1M_1B_2$의 넓이는 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.

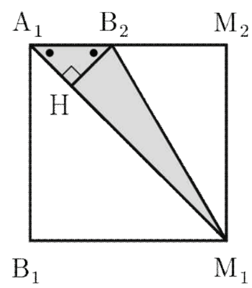


삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle A_1M_1B_2$의 넓이)=($\square A_1B_1M_1M_2$의 넓이)

$-$($\triangle A_1B_1M_1$의 넓이)$-$($\triangle B_2M_1M_2$의 넓이)

$=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$



점 B_2에서 선분 A_1M_1에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\triangle A_1HB_2$는 직각이등변삼각형이다.

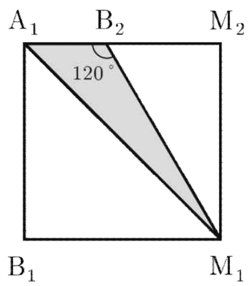
$\triangle A_1HB_2$에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{B_2H}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle A_1M_1B_2$의 넓이)

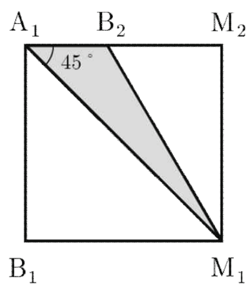
$= \frac{1}{2} \times \overline{A_1M_1} \times \overline{B_2H} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$



삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle A_1M_1B_2$의 넓이)

$= \frac{1}{2} \times \overline{A_1B_2} \times \overline{B_2M_1} \times \sin 120° = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$



삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

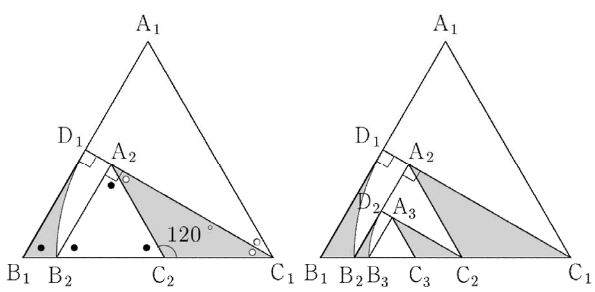
($\triangle A_1M_1B_2$의 넓이)

$= \frac{1}{2} \times \overline{A_1B_2} \times \overline{A_1M_1} \times \sin 45° = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$

42 | 답 ②

[풀이1]

정삼각형의 성질, 평행선의 성질(동위각, 엇각)을 이용하면 아래 그림과 같이 각(●, ○)을 결정할 수 있다.



R_1　　　　R_2

(단, ●$= 60°$, ○$= 30°$)

직각삼각형 $A_2B_2C_1$에서

$\overline{B_2C_1} = 2\,\overline{A_2B_2}$

이고, $\overline{B_2C_2} = \overline{C_2C_1}$ 이므로

$\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2}$

그런데 $\angle A_2B_2C_2 = 60°$ 이므로

$\triangle A_2B_2C_2$는 정삼각형이다.

$S_1 =$($\triangle D_1B_1C_1$의 넓이)$-$($\triangledown C_1D_1B_2$의 넓이)

$+$($\triangle A_2C_2C_1$의 넓이)

$= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{64}$

그림 R_2에서 두 삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$의 닮음비는

$\overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_2} = 1 : \frac{\sqrt{3}}{4}$

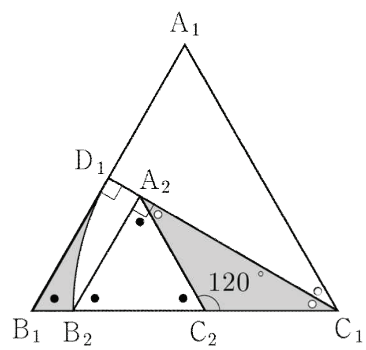
이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{64}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$$

답 ②

[풀이2]

그림 R_n에서 새롭게 색칠된 두 영역의 넓이의 합을 a_n이라고 하자.



(단, •$= 60°$, ○$= 30°$ 이다.)

• 삼각형 $A_2B_2C_2$가 정삼각형임을 보이자.

이등변삼각형의 성질에 의하여

정삼각형 $A_1B_1C_1$의 $\angle C_1$의 이등분선은

밑변 A_1B_1을 수직이등분한다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\angle C_1$의 이등분선은 C_1D_1이고,

$\angle C_1D_1B_1 = 90°$, $\angle B_1C_1D_1 = 30°$ 이다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\angle C_1A_2B_2=90^\circ$
즉, $\angle C_1D_1B_1=\angle C_1A_2B_2$ (동위각)
이므로, 두 직선 D_1B_1, A_2B_2는 평행하다.
$\angle A_2B_2C_2=\angle A_1B_1C_1=60^\circ$ (동위각)
직각삼각형 $B_1C_1D_1$에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$\dfrac{\overline{C_1D_1}}{\overline{B_1C_1}}=\sin 60^\circ \left(=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 즉, $\overline{C_1D_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(또는 직각삼각형 $B_1C_1D_1$에서 피타고라스의 정리를 이용해도 좋다.)
원의 정의에 의하여

$\overline{C_1B_2}=\overline{C_1D_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

직각삼각형 $C_1B_2A_2$에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$\dfrac{\overline{B_2A_2}}{\overline{C_1B_2}}=\sin 30^\circ \left(=\dfrac{1}{2}\right)$ 즉, $\overline{B_2A_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{B_2C_2}=\dfrac{1}{2}\overline{B_2C_1}=\dfrac{\sqrt{4}}{3}$

삼각형 $A_2B_2C_2$에 대하여
$\overline{A_2B_2}=\overline{B_2C_2}$, $\angle A_2B_2C_2=60^\circ$
이므로, 이등변삼각형의 성질과 '삼각형의 내각의 합은 180° 이다' 에 의하여
$\angle B_2C_2A_2=\angle C_2A_2B_2=60^\circ$

따라서 삼각형 $A_2B_2C_2$는 한 변의 길이가 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$인 정삼각형이다.

• 수열 $\{a_n\}$의 첫 번째 항과 공비를 구하자.
삼각형과 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여
$a_1=(\triangle D_1B_1C_1$의 넓이$)-(\triangledown C_1D_1B_2$의 넓이$)$
$+(\triangle A_2C_2C_1$의 넓이$)$

$=\dfrac{1}{2}\overline{C_1D_1}\,\overline{D_1B_1}-\dfrac{1}{2}\times\overline{C_1D_1}^2\times\dfrac{\pi}{6}$

$+\dfrac{1}{2}\overline{A_2C_2}\,\overline{C_2C_1}\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\dfrac{\pi}{12}$

$+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{3\sqrt{3}}{64}$

두 삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$의 닮음비가 $1:\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이므로, 넓이의 비는 $1:\dfrac{3}{16}$이다. 즉, 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\dfrac{3}{16}$이다.

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=\dfrac{\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{3\sqrt{3}}{64}$, $a_{n+1}=\dfrac{3}{16}a_n$(단, $n\geq 1$)

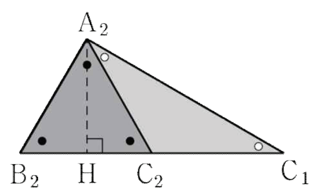
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{16}+\frac{3\sqrt{3}}{64}}{1-\frac{3}{16}}$$

$$=\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$$

답 ②

[참고] ★
점 A_2에서 선분 B_2C_1에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, $\bullet=60^\circ$, $\circ=30^\circ$ 이다.)
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\triangle A_2C_2C_1$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}\overline{C_2C_1}\,\overline{A_2H}$

$=\dfrac{1}{2}\overline{B_2C_2}\,\overline{A_2H}=(\triangle A_2B_2C_2$의 넓이$)$

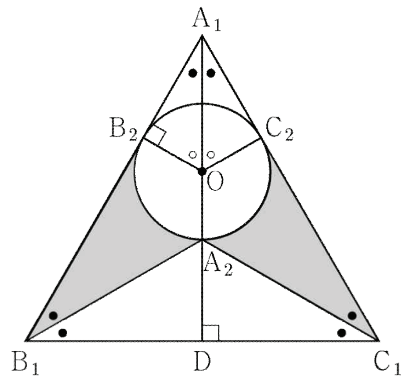
$(\because \overline{B_2C_2}=\overline{C_2C_1})$
따라서 삼각형 $A_2C_2C_1$의 넓이를 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{64}$

로 대신해도 좋다.

43 | 답 ①

[풀이]
그림 R_1에서 그려진 원의 중심을 O, 점 A_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 D라고 하자. 그리고 원 O의 반지름의 길이를 r이라고 하자.



(단, ● $=30^\circ$, ○ $=60^\circ$)
직각삼각형 A_1B_1D에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{A_1D}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

무게중심의 성질에 의하여

$\overline{A_1A_2}=\frac{2}{3}\overline{A_1D}=\sqrt{3}$, $\overline{A_2D}=\frac{1}{3}\overline{A_1D}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

원의 정의에 의하여

$\overline{OA_2}=\overline{OB_2}(=r)$이므로

$\overline{A_1O}=\overline{A_1A_2}-\overline{OA_2}=\sqrt{3}-r$

직각삼각형 A_1OB_2에서 삼각비의 정의에 의하여

$\frac{\overline{OB_2}}{\overline{A_1O}}=\cos 60^\circ$ 즉, $\frac{r}{\sqrt{3}-r}=\frac{1}{2}$에서 $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$

삼각형의 넓이와 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$\frac{1}{2}S_1=$(△A_1B_1D의 넓이)−(△A_1OB_2의 넓이)
−(⌔OB_2A_2의 넓이)−(△A_2B_1D의 넓이)

$=\frac{9\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{9}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$=\frac{7\sqrt{3}}{12}-\frac{\pi}{9}$

즉, $S_1=\frac{7\sqrt{3}}{6}-\frac{2\pi}{9}$

두 삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$에 외접하는 원의 반지름의 길이는 각각 $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로
두 삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$의 닮음비는 $3:1$이다.

$S_1:S_2=3^2:1^1$이므로 $S_2=\frac{1}{9}S_1$이다.

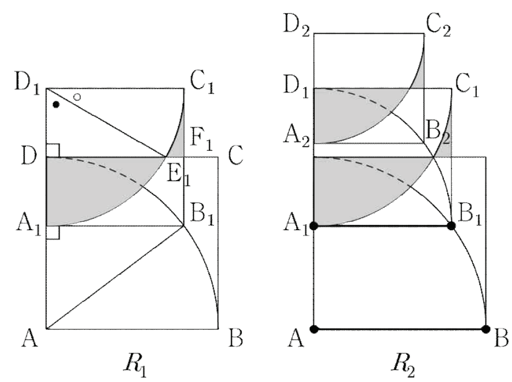
수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{7\sqrt{3}}{6}-\frac{2\pi}{9}$이고, 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열이다.
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{7\sqrt{3}}{6}-\frac{2\pi}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{21\sqrt{3}-4\pi}{16}$$

답 ①

44 | 답 ⑤

[풀이]



(단, ● $=60^\circ$, ○ $=30^\circ$)
점 A_1은 선분 AD의 $3:2$ 내분점이므로

$\overline{AA_1}=3$, $\overline{A_1D}=2$

직각삼각형 AB_1A_1에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{A_1B_1}=4$

즉, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이는 4이다.

$\overline{DD_1}=\overline{A_1D_1}-\overline{A_1D}=2$, $\overline{D_1E_1}=4$(∵ 원의 정의)

이므로 직각삼각형 D_1DE_1에서

$\angle E_1D_1D=60^\circ$ ($\angle C_1D_1F_1=30^\circ$),

$\overline{DE_1}=2\sqrt{3}$

$S_1=$(⌔$D_1A_1E_1$의 넓이)+(□$D_1DF_1C_1$의 넓이)
$-2\times$(△D_1DE_1의 넓이)−(⌔$D_1E_1C_1$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times 4^2\times\frac{\pi}{3}+2\times 4$

$-2\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2}\times 4^2\times\frac{\pi}{6}$

$=\frac{4}{3}\pi+8-4\sqrt{3}$

그림 R_1의 모양의 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진 모양의 도형의 닮음비는

$\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=5:4$

이므로, 넓이의 비는 $25:16$이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi+8-4\sqrt{3}}{1-\frac{16}{25}}$$

$$=\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

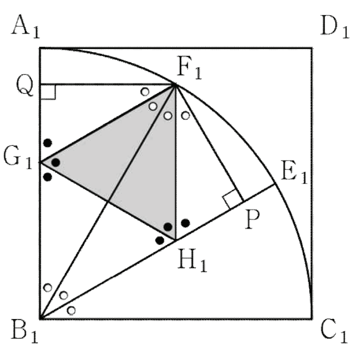
답 ⑤

45 | 답 ②

[풀이]

그림 R_n에서 새롭게 그려진 정삼각형의 넓이를 a_n이라고 하자.

그림 R_1의 색칠된 정삼각형이 두 선분 A_1B_1, B_1E_1과 만나는 점을 각각 G_1, H_1, 점 F_1에서 두 선분 A_1B_1, B_1E_1에 내린 수선의 발을 각각 Q, P라고 하자.



R_1

(단, $\bullet=60^\circ$, $\circ=30^\circ$)

호 C_1A_1을 삼등분하는 두 점이 각각 E_1, F_1이므로

$\angle A_1B_1F_1=\angle F_1B_1E_1=\angle E_1B_1C_1=30^\circ$

두 직각삼각형 F_1QB_1, F_1PB_1은 서로 RHA합동이므로

$\overline{F_1Q}=\overline{F_1P}$ $\cdots$ ㉠

두 직각삼각형 F_1G_1Q, F_1H_1P는 서로 RHS합동이므로

$\overline{G_1Q}=\overline{H_1P}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{B_1G_1}=\overline{B_1H_1}$

그런데 $\angle G_1B_1H_1=60^\circ$ 이므로

삼각형 $G_1B_1H_1$는 정삼각형이다.

이제 위의 그림과 같이 각각의 각의 크기를 정할 수 있다.

직각삼각형 F_1B_1P에서 삼각비의 정의에 의하여

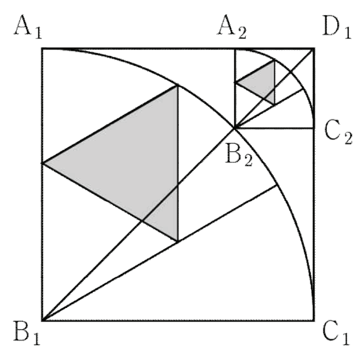
$\overline{F_1P}=\overline{B_1F_1}\sin 30^\circ=1$

직각삼각형 F_1H_1P에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{F_1P}=\overline{F_1H_1}\sin 60^\circ$ 즉, $\overline{F_1H_1}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

정삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$a_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



R_2

그림 R_2에서 새롭게 그려진 정사각형의 대각선의 길이를 구하자.

$\overline{B_2D_1}=\overline{B_1D_1}-\overline{B_1B_2}=2\sqrt{2}-2$

그림 R_2의 큰 정사각형의 대각선의 길이와 작은 정사각형의 대각선의 길이의 비는 $2\sqrt{2}:(2\sqrt{2}-2)$이므로

$a_1:a_2=(2\sqrt{2})^2:(2\sqrt{2}-2)^2$

즉, $a_2=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}a_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$$a_{n+1} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}a_n$$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{3},\ a_{n+1} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}a_n$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$이므로

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$$

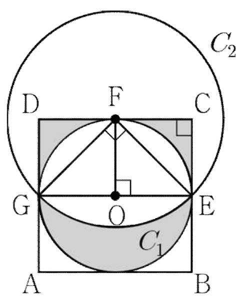
답 ②

46 | 답 ③

[풀이]

그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 넓이와  모양의 도형의 넓이의 합을 a_n이라고 하자.

원 C_1의 중심을 O, 원 C_1이 변 DA와 접하는 점을 G라고 하자.



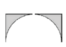
R_1

$\angle \mathrm{OEC} = \angle \mathrm{ECF} = \angle \mathrm{CFO} = 90^\circ$ 에서

$\angle \mathrm{FOE} = 90^\circ$ 이므로 네 각의 크기가 모두 같은 사각형 FOEC는 직사각형이다.

원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{OE}}$이므로

직사각형 FOEC는 정사각형이다.

(그림 R_1에서  모양의 도형의 넓이)

$= 2\times\{(\square\mathrm{FOEC}$의 넓이$)-(\triangledown\mathrm{FOE}$의 넓이$)\}$

$= 2-\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 FOE에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{FE}} = \sqrt{2}$

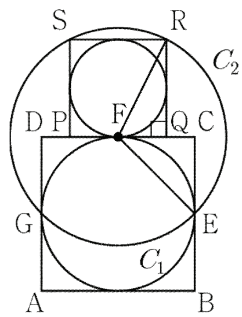
(그림 R_1에서  모양의 도형의 넓이)

$=$(원 C_1의 넓이$)-\{(\triangledown\mathrm{FGE}$의 넓이$)+2\times($호 FE와 현 FE로 둘러싸인 활꼴의 넓이$)\}$

$= \pi-(\pi-1) = 1$

$a_1 = 2-\frac{\pi}{2}+1 = 3-\frac{\pi}{2}(=S_1)$

정사각형 PQRS에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r이라고 하자.



R_2

직각삼각형 RFQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{RF}} = \sqrt{\overline{\mathrm{RQ}}^2+\overline{\mathrm{QF}}^2} = \sqrt{5}r$

점 R은 원 C_2 위에 있으므로

원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FR}} = \overline{\mathrm{FE}}$ 즉, $\sqrt{5}r = \sqrt{2}$

풀면

$$r = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

두 정사각형 ABCD, PQRS에 내접하는 두 원의 반지름의 비가 $1 : \frac{\sqrt{10}}{5}$이므로

$a_1 : a_2 = 1^2 : \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2$ 즉, $a_2 = \frac{2}{5}a_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$$a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n$$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_1 = 3-\frac{\pi}{2},\ a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$이므로

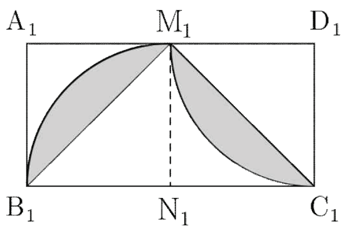
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3-\frac{\pi}{2}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{30-5\pi}{6}$$

답 ③

47 | 답 ③

[풀이1]

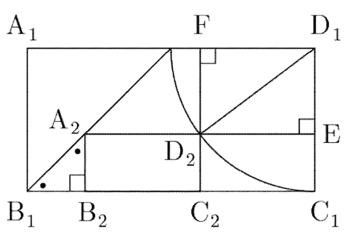


R_1

$\frac{S_1}{2}$=(▽$B_1N_1M_1$의 넓이)−(△$B_1N_1M_1$의 넓이)

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$, $S_1=\frac{\pi}{2}-1$

점 D_2에서 두 선분 C_1D_1, D_1A_1에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자.



R_2

(단, ●$=45°$)

$\overline{A_2B_2}=x$로 두자.

$\overline{D_2E}=\overline{B_1C_1}-\overline{B_1B_2}-\overline{B_2C_2}$

$=2-x-2x=2-3x$

$\overline{ED_1}=\overline{C_1D_1}-\overline{B_2A_2}=1-x$

직각삼각형 D_1D_2E에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{D_1D_2}=\sqrt{(2-3x)^2+(1-x)^2}=1$

양변을 제곱하여 정리하면

$5x^2-7x+2=0$, $(5x-2)(x-1)=0$

풀면 $x=\frac{2}{5}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

답 ③

[풀이2]

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

a_n=(그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형 한 개의 넓이)

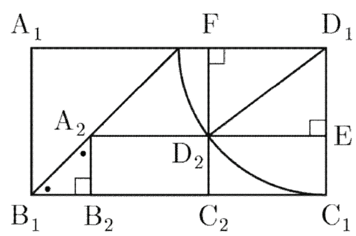
부채꼴과 삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$\frac{a_1}{2}$=(부채꼴 $N_1M_1B_1$의 넓이)−(△$N_1M_1B_1$의 넓이)

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$이므로 $a_1=\frac{\pi}{2}-1$

점 D_2에서 두 선분 A_1D_1, D_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 F, E라고 하자.

그리고 $\overline{A_2B_2}=x$로 두자. (단, $0<x<1$)



△$A_2B_1B_2$는 $\overline{B_1B_2}=\overline{B_2A_2}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{B_1B_2}=x$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{B_2C_2}=2x$

$\overline{D_2E}=\overline{C_2C_1}=\overline{B_1C_1}-\overline{B_1B_2}-\overline{B_2C_2}=2-3x$ ⋯ ㉠

$\overline{ED_1}=\overline{C_1D_1}-\overline{C_1E}=1-x$ ⋯ ㉡

원의 정의에 의하여

$\overline{D_1D_2}=1$ ⋯ ㉢

직각삼각형 D_1D_2E에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{D_1D_2}^2=\overline{D_1E}^2+\overline{ED_2}^2$

㉠, ㉡, ㉢을 대입하면

$1=(1-x)^2+(2-3x)^2$

정리하면

$5x^2-7x+2=0$

좌변을 인수분해하면

$(5x-2)(x-1)=0$

$0<x<1$이므로 $x=\dfrac{2}{5}$

서로 닮음인 두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는 $1:\dfrac{2}{5}$이므로

$a_2=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2a_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$a_{n+1}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=\dfrac{\pi}{2}-1$, $a_{n+1}=\dfrac{4}{25}a_n(n\ge 1)$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 a_n은

$a_n=\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\left(\dfrac{4}{25}\right)^{n-1}(n\ge 1)$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로 일반항 S_n은 첫째항이 $\dfrac{\pi}{2}-1$이고 공비가 $\dfrac{4}{25}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

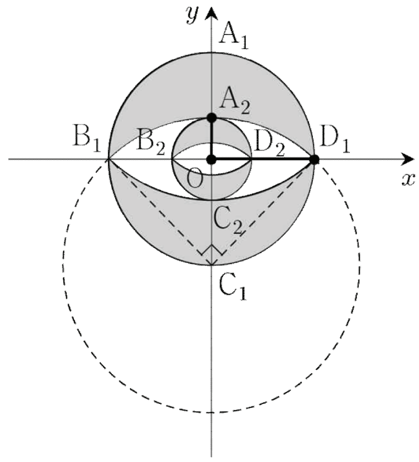
등비급수의 합의 공식에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-1}{1-\dfrac{4}{25}}=\dfrac{25}{21}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$

답 ③

48 | 답 ④

[풀이1]



$S_1=$(반원 $A_1B_1D_1$의 넓이)

$-$(♡$B_1C_1D_1$의 넓이)$+$($\triangle B_1C_1D_1$의 넓이)

$=\dfrac{\pi}{2}\cdot 3^2-\dfrac{\pi}{4}\cdot(3\sqrt{2})^2+\dfrac{1}{2}(3\sqrt{2})^2$

$=9$에서 $S_1+T_1=18$

위의 그림에서 큰 원과 작은 원의 닮음비는

$\overline{OD_1}:\overline{OA_2}=3:(3\sqrt{2}-3)=1:\sqrt{2}-1$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)=\dfrac{18}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=9(\sqrt{2}+1)$

답 ④

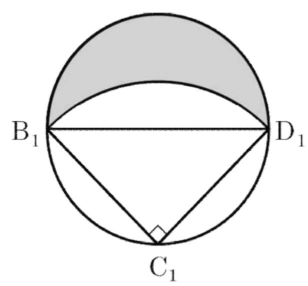
[풀이2] ★

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{A_1B_1}=\overline{B_1C_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{D_1A_1}=3\sqrt{2}$

정사각형의 정의에 의하여

□$A_1B_1C_1D_1$은 정사각형이므로 $\angle B_1C_1D_1=90^\circ$



(호 $B_1A_2D_1$과 현 B_1D_1로 둘러싸인 활꼴의 넓이)

$=$(사분원 $C_1D_1B_1$의 넓이)$-$(직각삼각형 $B_1C_1D_1$의 넓이)

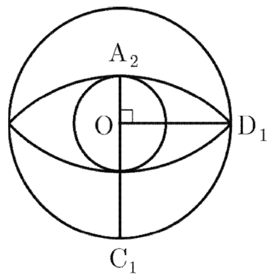
$=\dfrac{9}{2}\pi-9$

S_1=(선분 B_1D_1을 지름으로 하는 반원의 넓이)
−(호 $B_1A_2D_1$과 현 B_1D_1로 둘러싸인 활꼴의 넓이)

$=\frac{9}{2}\pi-\left(\frac{9}{2}\pi-9\right)=9$

그런데 호 $B_1A_1D_1$과 호 $B_1A_2D_1$로 둘러싸인 도형과 호 $B_1C_1D_1$과 호 $B_1C_2D_1$로 둘러싸인 도형은 x축에 대하여 서로 대칭이므로 넓이가 같다. 즉, $T_1=9$

한편 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.



$\frac{r_2}{r_1}=\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OD_1}}=\frac{\overline{C_1A_2}-\overline{C_1O}}{\overline{OD_1}}=\frac{3\sqrt{2}-3}{3}=$
$\sqrt{2}-1$

이므로 넓이의 비는

$\frac{S_2}{S_1}=\frac{T_2}{T_1}=(\sqrt{2}-1)^2$ 즉, $\frac{S_2+T_2}{S_1+T_1}=3-2\sqrt{2}$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$\frac{S_{n+1}+T_{n+1}}{S_n+T_n}=3-2\sqrt{2}$

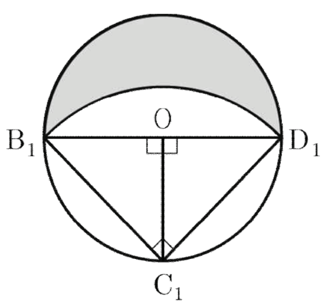
수열 $\{S_n+T_n\}$은 첫째항이 18이고 공비가 $3-2\sqrt{2}$인 등비수열이다. 등비급수의 합의 공식에 의하여

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)=\frac{18}{1-(3-2\sqrt{2})}=9(\sqrt{2}+1)$

답 ④

[참고]

S_1의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.



(사분원 OB_1C_1의 넓이)$=\frac{9}{4}\pi$

(직각삼각형 OB_1C_1의 넓이)$=\frac{9}{2}$

(호 B_1C_1과 현 B_1C_1로 둘러싸인 두 활꼴 중에서 작은 활꼴의 넓이)$=\frac{9}{4}\pi-\frac{9}{2}$ $\cdots$㉠

마찬가지의 방법으로

(호 C_1D_1과 현 C_1D_1로 둘러싸인 두 활꼴 중에서 작은 활꼴의 넓이)$=\frac{9}{4}\pi-\frac{9}{2}$ $\cdots$㉡

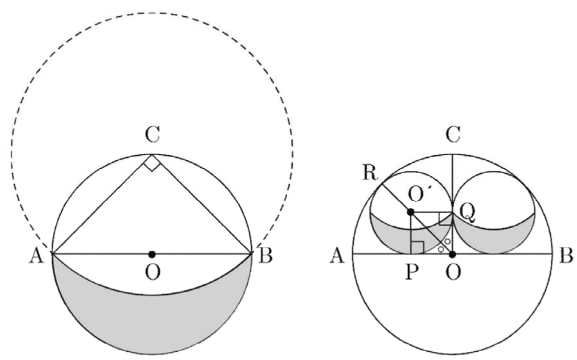
(사분원 $B_1C_1D_1$의 넓이)$=\frac{9}{2}\pi$ $\cdots$㉢

S_1=(원 O_1의 넓이)−(㉠+㉡+㉢)$=9$

49 | 답 ③

[풀이1]

그림 R_2에서 새롭게 그려진 작은 원(왼쪽)의 중심을 O′, 점 O′에서 두 선분 AO, OC에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, 반직선 OO′가 원 O와 만나는 점을 R이라고 하자. 이때, 사각형 POQO′는 정사각형이다.



R_1 R_2

(단, ○ = 45°)

S_1=(선분 AB를 지름으로 하는 반원의 넓이)
−(♡ABC의 넓이)+(△ABC의 넓이)

$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+1=1$

그림 R_2에서 새롭게 그려진 두 개의 작은 원의 반지름의 길이를 r라고 하자.

$\dfrac{\overline{\mathrm{O'P}}}{\overline{\mathrm{OO'}}} = \sin\dfrac{\pi}{4}$, 즉 $\dfrac{r}{1-r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

풀면 $r = \sqrt{2}-1$

그림 R_1의  모양의 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 닮음비는 $1 : r^2$이고, 각 단계마다 새롭게 그려지는  모양의 도형의 개수는 2배가 되므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-(\sqrt{2}-1)^2\cdot 2} = \frac{5+4\sqrt{2}}{7}$$

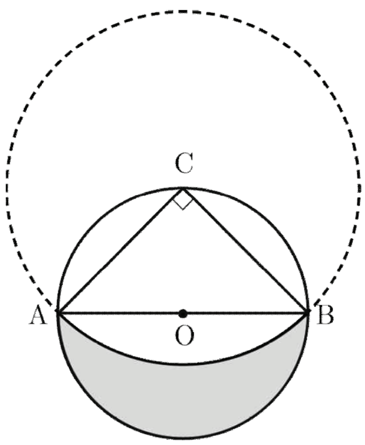
답 ③

[풀이2]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

a_n=(그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형 한 개의 넓이)

b_n=(그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 개수)



R_1

선분 AB가 원 O의 지름이므로

$\angle \mathrm{BCA} = 90^\circ$

원의 정의에서

$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}}$

이고

$\angle \mathrm{AOC} = \angle \mathrm{BOC} = 90^\circ$

이므로

두 직각삼각형 AOC, BOC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{CA}} = \overline{\mathrm{CB}}$

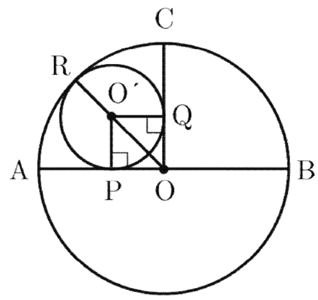
원의 정의에 의하여 점 C를 중심으로 하고 선분 CA를 반지름으로 하는 원은 점 B를 지난다.

a_1=(선분 AB를 지름으로 하는 반원의 넓이)

+(△ABC의 넓이)−(부채꼴 ABC의 넓이)

$= \dfrac{\pi}{2} + 1 - \dfrac{\pi}{2} = 1$

그림 R_2에서 새롭게 그려진 2개의 원 중에서 왼쪽 원의 중심을 O′이라 하고, 이 원의 반지름의 길이를 r이라고 하자. 그리고 반직선 OO′이 원 O와 만나는 점을 R, 점 O′에서 두 선분 OA, OC에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 하자.



R_2

□O′POQ의 네 내각의 크기가 모두 같으므로

□O′POQ는 직사각형이다.

그런데 원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{O'P}} = \overline{\mathrm{O'Q}}$

이므로 □O′POQ는 정사각형이다.

두 직각삼각형 O′PO, O′QO는 RHS합동이므로

$\angle \mathrm{POO'} = \angle \mathrm{QOO'} = 45^\circ$

직각삼각형에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{OR}} = \overline{\mathrm{OO'}} + \overline{\mathrm{O'R}} = \dfrac{\overline{\mathrm{O'P}}}{\sin 45^\circ} + \overline{\mathrm{O'R}}$

$=(\sqrt{2}+1)r = 1$ 즉, $r = \sqrt{2}-1$

그림 R_2에서 큰 원과 작은 원의 지름의 길이의 비가 $1 : \sqrt{2}-1$이므로

$a_2 = (\sqrt{2}-1)^2 a_1$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} = (\sqrt{2}-1)^2 a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = (3-2\sqrt{2})a_n (n \ge 1)$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 a_n은

$a_n = (3-2\sqrt{2})^{n-1} (n \ge 1)$

수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는

$b_1=1,\ b_{n+1}=2b_n(n\ge 1)$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 b_n은

$b_n=2^{n-1}(n\ge 1)$

일반항 a_nb_n은

$a_nb_n=(6-4\sqrt{2})^{n-1}(n\ge 1)$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$이므로 일반항 S_n은 첫째항이 1이고 공비가

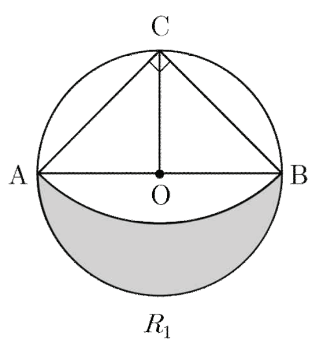
$6-4\sqrt{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{1-(6-4\sqrt{2})}=\dfrac{5+4\sqrt{2}}{7}$

답 ③

[참고1]



$a_1=$(원 O의 넓이)

$-$(호 AC와 현 AC으로 둘러싸인 활꼴의 넓이)

$-$(호 BC와 현 BC으로 둘러싸인 활꼴의 넓이)

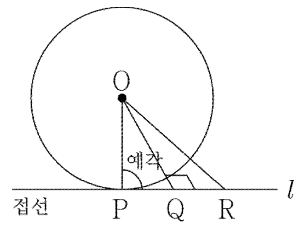
$-$(부채꼴 ABC의 넓이)

$=\pi-2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{\pi}{2}=1$

[참고2]

원의 중심에서 접선에 내린 수선의 발이 접점과 일치함을 증명해보자.

원 O 위의 점 P에서의 접선을 l, 원 O의 중심 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Q라고 하자.



점 Q가 점 P가 아니라고 가정하면

$\angle\mathrm{OQP}=90^\circ$

이므로 $\angle\mathrm{OPQ}$는 예각이다.

두 직각삼각형 OPQ, ORQ가 서로 합동이 되도록 점 R을 직선 l 위에 잡으면 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OR}}$이다.

원의 정의에 의하여 점 R은 원 O 위의 점이다.

직선 l이 원 O와 서로 다른 두 점 P, R에서 만나므로 이는 가정에 모순이다.

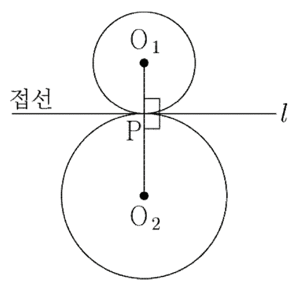
따라서 두 점 P, Q는 서로 일치한다.

다시 말하면 원의 중심에서 접선에 내린 수선의 발은 접점과 일치한다.

[참고3]

두 원이 서로 접할 때, 두 원의 중심과 접점이 한 직선 위에 있음을 증명해보자.

두 원 O_1, O_2가 점 P에서 동시에 접한다고 하자. 그리고 두 원 O_1, O_2 위의 점 P에서의 접선을 l이라고 하자. (이때, 두 접선은 일치한다.)



$\overline{\mathrm{O_1P}}\perp l$, $\overline{\mathrm{O_2P}}\perp l$

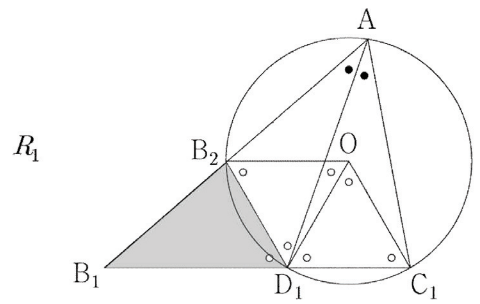
이므로 세 점 O_1, P, O_2는 한 직선 위에 있다.

따라서 두 원이 서로 접할 때, 두 원의 중심과 접점은 한 직선 위에 있다.

50 | 답 ①

14) [풀이1]

그림 R_1에서 그려진 원의 중심을 O라고 하자.



(단, ○$=60^\circ$, ●$=30^\circ$)

우선 선분 B_1C_1의 길이를 구하자.

코사인법칙에 의하여

$\overline{B_1C_1}=\sqrt{3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos60^\circ}=\sqrt{7}$

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle C_1OD_1=60^\circ\ (=2\angle C_1AD_1)$,

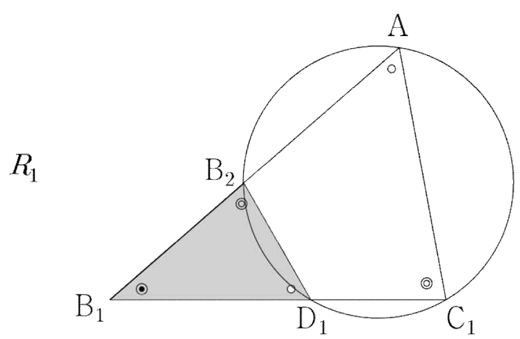
$\angle D_1OB_2=60^\circ\ (=2\angle D_1AB_2)$

원의 정의와 이등변삼각형의 성질에 의하여

두 삼각형 OD_1C_1, OB_2D_1은 서로 합동인 정삼각형이다.

그런데 $\angle C_1AB_1=\angle B_2D_1B_1=60^\circ$ 이므로

두 삼각형 C_1AB_1, $B_2D_1B_1$은 서로 닮음이다. (아래 그림)



(단, ○$=60^\circ$)

이제 $\overline{D_1C_1}=r$로 두자.

이때, 선분 D_1C_1의 길이는 원 O의 반지름의 길이와 같다.

$\overline{AB_1}:\overline{AC_1}=\overline{B_1D_1}:\overline{D_1B_2}$

즉, $3:2=\sqrt{7}-r:r$, $r=\dfrac{2}{5}\sqrt{7}$

이때, 다음을 알 수 있다.

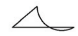
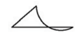
$\overline{D_1B_2}=\dfrac{2}{5}\sqrt{7}$, $\overline{B_1D_1}=\dfrac{3}{5}\sqrt{7}$,

$\overline{B_1B_2}=\dfrac{7}{5}$, $\overline{B_2A}=\dfrac{8}{5}$

S_1의 값을 구하면

$S_1=\dfrac{1}{2}\overline{B_1D_1}\,\overline{D_1B_2}\sin60^\circ=\dfrac{21\sqrt{3}}{50}$

$\overline{B_2A}=\dfrac{8}{5}$이므로 $\overline{B_1A}:\overline{B_2A}=15:8$

그러므로 그림 R_1의  모양의 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 넓이의 비는 $1:\left(\dfrac{8}{15}\right)^2$이다.

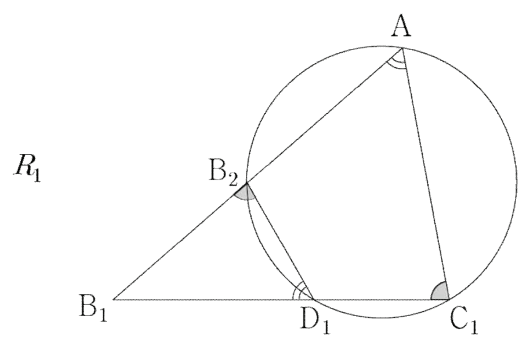
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\dfrac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\left(\dfrac{8}{15}\right)^2}=\frac{27\sqrt{3}}{46}$$

답 ①

[참고1]

중학교 수학3 원주각 단원에서는 아래의 그림을 연습문제에서 다룬다.

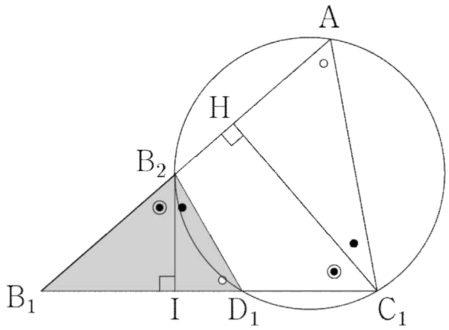


[참고2]

다음과 같은 방법으로 원 O의 반지름의 길이 r을 구해도 좋다.

점 C_1에서 선분 AB_1에 내린 수선의 발을 H, 점 B_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 I라고 하자. 이때, 각각의 각이 아래 그림처럼 결정된다.

R_1



(단, ○$=60^\circ$, ●$=30^\circ$)

특수각의 삼각비와 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{HB_1}=2(\because \overline{AH}=1)$, $\overline{HC_1}=\sqrt{3}$, $\overline{B_1C_1}=\sqrt{7}$

두 삼각형 HB_1C_1, IB_1B_2는 서로 닮음이므로

$\overline{B_1I}:\overline{IB_2}=\overline{B_1H}:\overline{HC_1}$

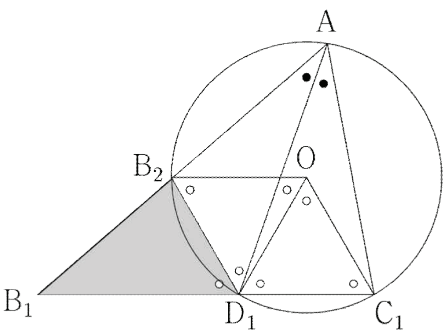
즉, $\sqrt{7}-\frac{3}{2}r:\frac{\sqrt{3}}{2}r=2:\sqrt{3}$

$\therefore\ r=\frac{2}{5}\sqrt{7}$

[풀이2]

그림 R_1에서 그려진 원의 중심을 O라고 하자.

R_1



(단, ○$=60^\circ$, ●$=30^\circ$)

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle C_1OD_1=60^\circ(=2\angle C_1AD_1)$,

$\angle D_1OB_2=60^\circ(=2\angle D_1AB_2)$

원의 정의와 이등변삼각형의 성질에 의하여

두 삼각형 OD_1C_1, OB_2D_1은 서로 합동인 정삼각형이다.

코사인법칙에 의하여

$\overline{B_1C_1}=\sqrt{3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos60^\circ}=\sqrt{7}$

그런데

$\overline{AB_1}:\overline{AC_1}=\overline{B_1D_1}:\overline{D_1C_1}=3:2$

($\because$ 각의 이등분선 정리(만약 이 정리를 모른다면 [참고3]의 방법을 따르면 된다.))

이므로

$\overline{B_1D_1}=\frac{3}{5}\sqrt{7}$, $\overline{D_1C_1}=\frac{2}{5}\sqrt{7}$

이제 S_1의 값을 구하면

$$S_1=\frac{1}{2}\overline{B_1D_1}\,\overline{D_1B_2}\sin60^\circ=\frac{21\sqrt{3}}{50}$$

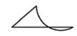
한편 코사인법칙에 의하여

$\overline{B_1B_2}^2=\overline{B_1D_1}^2+\overline{D_1B_2}^2-\overline{B_1D_1}\,\overline{D_1B_2}\cos60^\circ$

$=\left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2-2\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\frac{2\sqrt{7}}{5}\frac{1}{2}$

$=\frac{49}{25}$, 즉 $\overline{B_1B_2}=\frac{7}{5}$

이때, $\overline{B_2A}=\frac{8}{5}$이므로 $\overline{B_1A}:\overline{B_2A}=15:8$

그러므로 그림 R_1의  모양의 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 넓이의 비는 $1:\left(\frac{8}{15}\right)^2$이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\left(\frac{8}{15}\right)^2}=\frac{27\sqrt{3}}{46}$$

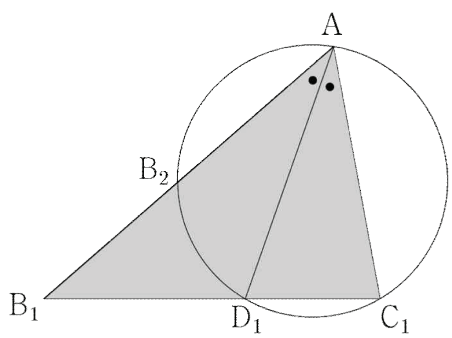
답 ①

[참고3]

다음과 같이 원 O의 반지름의 길이를 구해도 좋다.

원 O의 반지름의 길이를 r이라고 하자.

R_1



$\overline{AD_1}=x$로 두자.

($\triangle AB_1C_1$의 넓이)

$=(\triangle AB_1D_1$의 넓이$)+(\triangle AD_1C_1$의 넓이$)$

즉, $\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times(3+2)\times x\times\sin30^\circ$

$x=\frac{6\sqrt{3}}{5}$

삼각형 AD_1C_1에서 코사인법칙에 의하여

$r^2=2^2+\left(\frac{6\sqrt{3}}{5}\right)^2-2\times2\times\frac{6\sqrt{3}}{5}\times\cos30^\circ$

$\therefore\ r=\frac{2\sqrt{7}}{5}$

[참고4] 교육과정 외

선분 B_1B_2의 길이는 다음과 같이 구해도 좋다.

할선정리에 의하여

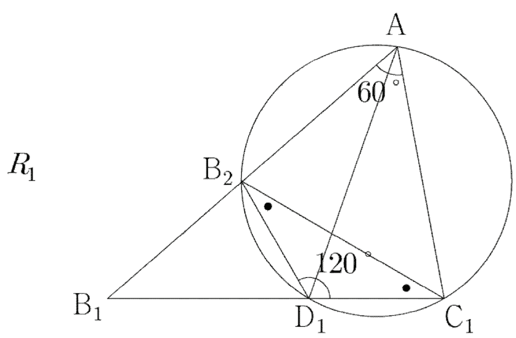
$\overline{B_1D_1}\times\overline{B_1C_1}=\overline{B_1B_2}\times\overline{B_1A}$, 즉

$\frac{3}{5}\sqrt{7}\times\sqrt{7}=\overline{B_1B_2}\times3\ \ \therefore\ \overline{B_1B_2}=\frac{7}{5}$

[참고5]

선분 AB_2의 길이를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\overline{D_1C_1}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$까지는 유도했다고 하자.



(단, ●$=30^\circ$)

$\overline{AB_2}=x$로 두자.

삼각형 $B_2D_1C_1$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{B_2C_1}=\frac{2\sqrt{21}}{5}\left(=\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\sqrt{3}\right)$

$(1:1:\sqrt{3}$의 비율관계를 암기해두는 편이 낫긴 하다.)

삼각형 AB_2C_1에서 코사인법칙에 의하여

$\left(\frac{2\sqrt{21}}{5}\right)^2=2^2+x^2-2\times2\times x\times\cos60^\circ$

정리하면

$x^2-2x+\frac{16}{25}=0,\ \left(x-\frac{8}{5}\right)\left(x-\frac{2}{5}\right)=0$

$\therefore\ x=\frac{8}{5}$, 즉 $\overline{AB_2}=\frac{8}{5}$

($\because$ 만약 $x=\frac{2}{5}$이면 $\overline{B_2B_1}=\frac{13}{5}$이고,

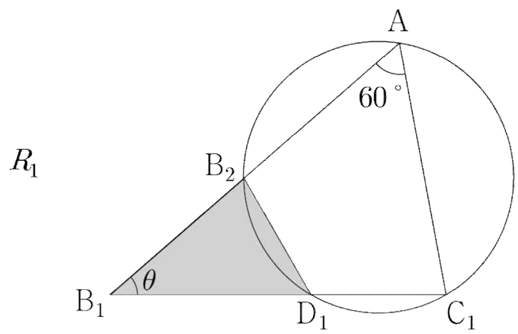
$\overline{B_1B_2}:\overline{B_2A}=13:2$이므로 문제에서 주어진 그림과 맞지 않는다.)

[참고6]

삼각형 $B_2B_1D_1$의 넓이를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\overline{B_1D_1}=\frac{3}{5}\sqrt{7}$, $\overline{B_1B_2}=\frac{7}{5}$

까지 유도했다고 하자.



$\angle B_2B_1D_1=\theta$로 두자.

삼각형 AB_1C_1에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{7}}{\sin60^\circ}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\therefore$ ($\triangle B_2B_1D_1$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\frac{7}{5}\times\frac{3}{5}\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

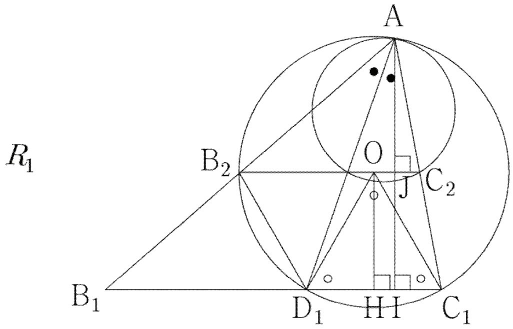
$=\frac{21\sqrt{3}}{50}$

[참고7]

$\overline{AB_1}:\overline{AB_2}=15:8$임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

$\overline{D_1C_1}=\frac{2}{5}\sqrt{7}$

까지 유도했다고 하자.



(단, ○$=60^\circ$, ●$=30^\circ$)

두 점 A, O에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 I, H, 점 A에서 선분 B_2O의 연장선에 내린 수선의 발을 J라고 하자.

정삼각형 OD_1C_1에서

$\overline{OH}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

($\triangle AB_1C_1$의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\overline{AI}$에서

$\overline{AI}=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$

$\overline{AJ}=\overline{AI}-\overline{OH}=\dfrac{8\sqrt{21}}{35}$

두 삼각형 AB_2C_2, AB_1C_1의 닮음비는

$\overline{AJ}:\overline{AI}=\dfrac{8\sqrt{21}}{35}:\dfrac{3\sqrt{21}}{7}=8:15$

이므로

$\therefore\ \overline{AB_1}:\overline{AB_2}=15:8$

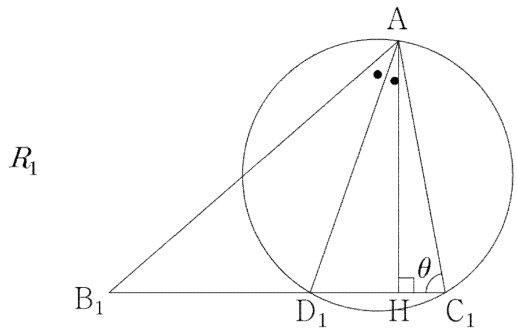
[참고8]

각의 이등분선 정리를 이용하지 않고 원 O의 반지름의 길이를 구할 수도 있다.

$\overline{B_1C_1}=\sqrt{7}$

까지 유도했다고 하자.

점 A에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle AC_1D_1=\theta$로 두자.



(단, ●$=30^\circ$)

($\triangle AB_1C_1$의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\sin60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times(3+2)\times\overline{AD_1}\times\sin30^\circ$

$\overline{AH}=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$, $\overline{AD_1}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

직각삼각형 AC_1H에서 삼각비의 정의에 의하여

$\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

삼각형 AD_1C_1에서 사인법칙에 의하여

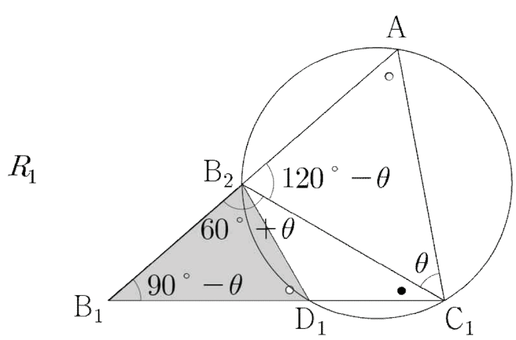
$\dfrac{\overline{D_1C_1}}{\sin30^\circ}=\dfrac{\overline{AD_1}}{\sin\theta}$

$\therefore\ \overline{D_1C_1}=\dfrac{2}{5}\sqrt{7}$

[참고9]

다음과 같이 원 O의 반지름의 길이 r을 결정할 수 있다.

$\angle B_2C_1A=\theta$로 두면 다른 각들의 크기는 아래 그림과 같다.



(단, ○$=60^\circ$, ●$=30^\circ$)

삼각형 AB_2C_1에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}\,r}{\sin 60^\circ}=\frac{2}{\sin(120^\circ-\theta)}$$

정리하면

$$r=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta} \quad \cdots ㉠$$

($\because$ 삼각함수의 덧셈정리)

삼각형 $B_2B_1C_1$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}\,r}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{7}}{\sin(60^\circ+\theta)}$$

정리하면

$$r=\frac{\sqrt{7}\cos\theta}{\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)} \quad \cdots ㉡$$

($\because$ 삼각함수의 덧셈정리)

㉠, ㉡을 연립하면

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$에서 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{7}}$

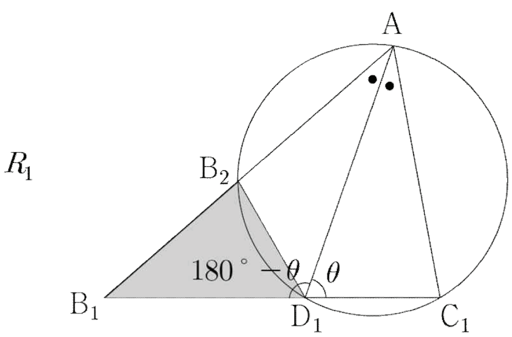
이를 ㉠에 대입하면

$$\therefore\ r=\frac{2\sqrt{7}}{5}$$

[참고10]

다음과 같이 원 O의 반지름의 길이 r을 결정할 수 있다.

$\angle AD_1C_1=\theta$로 두자.



(단, $\bullet=30^\circ$)

두 삼각형 AB_1D_1, AD_1C_1 각각에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{7}-r}{\sin 30^\circ}=\frac{3}{\sin(180^\circ-\theta)},\ \frac{r}{\sin 30^\circ}=\frac{2}{\sin\theta}$$

정리하면

$$\frac{3}{2}=(\sqrt{7}-r)\sin\theta,\ \sin\theta=\frac{1}{r}$$

연립하면

$$\frac{3}{2}r=(\sqrt{7}-r)$$

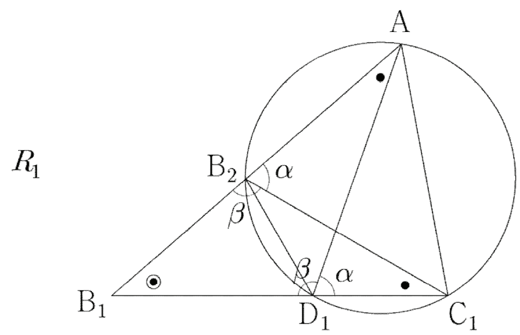
$$\therefore\ r=\frac{2\sqrt{7}}{5}$$

[참고11]

할선의 정리의 증명 과정을 이용하여 선분 B_1B_2의 길이를 구할 수도 있다.

$\overline{B_1D_1}=\frac{3}{5}\sqrt{7}$, $\overline{D_1C_1}=\frac{2}{5}\sqrt{7}$

까지 유도했다고 하자.



(단, $\bullet=30^\circ$, $\alpha+\beta=180^\circ$)

위의 그림처럼 호 AC_1의 원주각을 α,

$\beta=180^\circ-\alpha$라고 하면

$\angle B_1D_1A=\angle B_1B_2C_1=\beta$

이므로 두 삼각형 B_1D_1A, $B_1B_2C_1$은 서로 닮음이다.

$\overline{C_1B_1}:\overline{B_1B_2}=\overline{AB_1}:\overline{B_1D_1}$

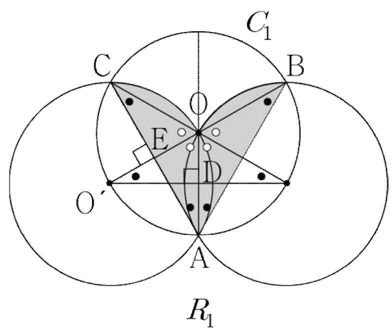
즉, $\sqrt{7}:\overline{B_1B_2}=3:\frac{3\sqrt{7}}{5}$

$$\therefore\ \overline{B_1B_2}=\frac{7}{5}$$

51 | 답 ④

[풀이]

선분 OA의 중점을 D, 점 D를 지나고 선분 OA에 수직인 직선이 원 C_1과 만나는 두 점 중에서 왼쪽 점을 O′, 두 선분 OO′, AC의 교점을 E라고 하자. 이때, 점 O′는 왼쪽 원의 중심이고, 점 E는 마름모 OCO′A의 두 대각선의 교점이다.



R_1

(단, ○$=60^\circ$, ●$=30^\circ$)

직각삼각형 $\mathrm{OO'D}$에서 $\overline{\mathrm{OO'}}=2\overline{\mathrm{OD}}$이므로

$\angle \mathrm{DOO'}=60^\circ$ (=○)

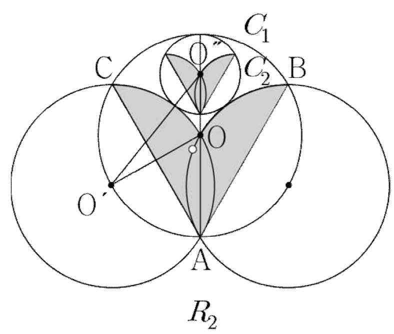
이등변삼각형 OCA에서

$\angle \mathrm{EOC}=60^\circ$ (=○)

그리고 삼각형의 세 내각의 합이 180°임을 이용하면 나머지 각(●)을 결정할 수 있다.

$$S_1=2\times\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

원 C_2의 중심과 반지름의 길이를 각각 $\mathrm{O''}$, r이라고 하자.



R_2

(단, ○$=60^\circ$)

삼각형 $\mathrm{O''O'O}$에서 코사인 법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{O'O''}}^2=\overline{\mathrm{OO'}}^2+\overline{\mathrm{OO''}}^2-2\overline{\mathrm{OO'}}\,\overline{\mathrm{OO''}}\cos120^\circ$$

$$(1+r)^2=(1-r)^2+1^2+2(1-r)\frac{1}{2}$$

풀면 $r=\frac{2}{5}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{3}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{25}{63}\pi$$

답 ④

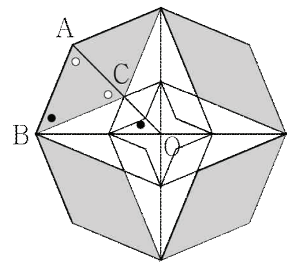
52

| 답 ①

[풀이1]

코사인법칙을 이용하여 문제를 해결하자.

그림 R_1의 정팔각형의 대각선이 만나는 점을 O라고 하자. 그리고 두 점 A, B는 그림 R_1의 정팔각형의 꼭짓점이고, 점 C는 그림 R_2에서 새롭게 그려진 정팔각형의 꼭짓점이다.



(단, $2\times$○$=135^\circ$, ●$=45^\circ$)

$$S_1=8\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$$

$\overline{\mathrm{AC}}=x$로 두자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=1^2+1^2-2\cdot1^2\cdot\cos45^\circ=2-\sqrt{2}$

서로 닮음인 두 삼각형 ABC, BOA에 대하여

$1:x=\overline{\mathrm{OB}}:1$, 즉 $\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{x}$, $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{x}-x$

그림 R_1의 정팔각형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진 작은 정팔각형의 닮음비는

$\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{x}:\frac{1}{x}-x$

$=1:1-x^2=1:\sqrt{2}-1$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=2+\sqrt{2}$$

답 ①

[풀이2]

정팔각형의 한 내각의 크기를 θ°라고 하면

$8\theta^\circ=(8-2)\times180^\circ$에서 $\theta^\circ=135^\circ$

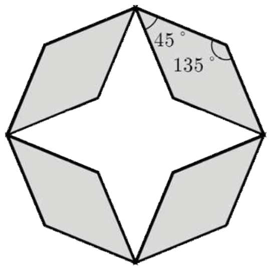


그림 R_1에서 주어진 한 평행사변형의 이웃하는 두 내각의 크기는 각각 $45°$, $135°$ 이다.

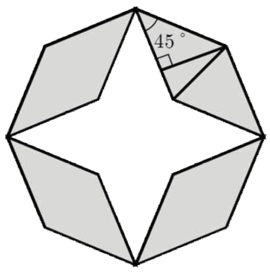


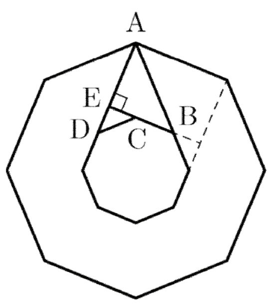
그림 R_1에서 주어진 한 평행사변형의 넓이는

$$2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin45°\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로

$$S_1=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

아래 그림과 같이 점 A, B, C, D를 그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 꼭짓점이라 하고, 점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 E라고 하자.



정팔각형의 한 외각의 크기는 $45°$ 이므로

$\angle \mathrm{ABE}=45°$

$\angle \mathrm{EAB}=$(정팔각형의 한 내각의 크기)

$-2\times$(평행사변형의 서로 다른 두 내각 중 예각의 크기)

$=135°-2\times45°=45°$

$\triangle\mathrm{ABE}$는 $\angle \mathrm{BEA}=90°$ 인 직각이등변삼각형이다.

정팔각형의 한 외각의 크기는 $45°$ 이므로

$\angle \mathrm{CDE}=\angle \mathrm{DCE}=45°$

$\triangle\mathrm{CDE}$는 $\angle \mathrm{DEC}=90°$ 인 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=x$로 두자. 즉, 그림 R_2에서 주어진 작은 정팔각형의 한 변의 길이를 x라고 두자.

직각삼각형 ABE에서 특수각의 삼각비에 의하여

$$\overline{\mathrm{BE}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cdots ㉠$$

한편

$$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{DC}}\times\sin45°$$

$$=x+\frac{\sqrt{2}}{2}x \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$x+\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

풀면

$$x=\sqrt{2}-1$$

그림 R_2의 큰 정팔각형과 작은 정팔각형의 닮음비는 $\sqrt{2}-1$이므로 그림 R_2의 4개의 큰 평행사변형의 넓이의 합에 대한 4개의 작은 평행사변형의 넓이의 합의 비는 $(\sqrt{2}-1)^2$이다.

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{2}$이고 공비가 $(\sqrt{2}-1)^2$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

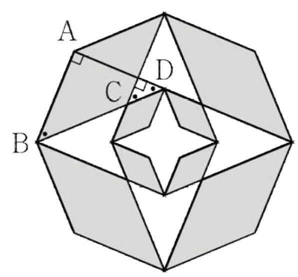
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=2+\sqrt{2}$$

답 ①

[참고1]

다음과 같은 방법으로 그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 닮음비를 유도할 수도 있다.

아래 그림처럼 그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 꼭짓점 중에서 4개의 꼭짓점을 각각 A, B, C, D라고 하자.



직각이등변삼각형 ABD에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}-1$

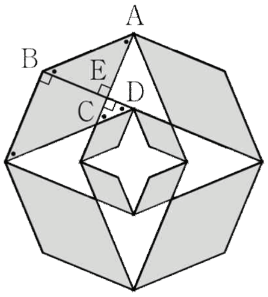
(그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 닮음비)

$$=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\sqrt{2}-1$$

[참고2]

다음과 같은 방법으로 그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 닮음비를 유도할 수도 있다.

아래 그림처럼 그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 꼭짓점 중에서 4개의 꼭짓점을 각각 A, B, C, D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라고 하자.



직각이등변삼각형 ABE에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{BE}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{ED}}=\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{BE}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

직각이등변삼각형 CDE에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{2}-1$

(그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 닮음비)

$$=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\sqrt{2}-1$$

[풀이3]

정팔각형의 한 내각의 크기를 θ° 라고 하면

$8\theta^\circ=(8-2)\times 180^\circ$ 에서 $\theta^\circ=135^\circ$

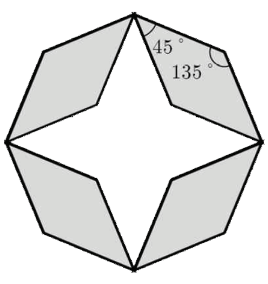


그림 R_1에서 주어진 한 평행사변형의 이웃하는 두 내각의 크기는 각각 45°, 135° 이다.

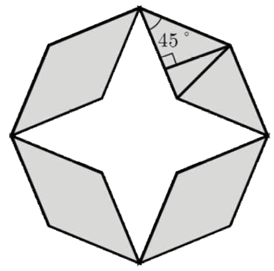


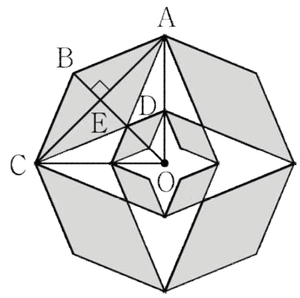
그림 R_1에서 주어진 한 평행사변형의 넓이는

$$2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin 45^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로

$$S_1=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

아래 그림처럼 그림 R_1의 정팔각형의 외접원의 중심을 O, 한 평행사변형의 네 꼭짓점을 각각 A, B, C, D라 하고, 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 E라고 하자. 이때, 그림 R_2의 작은 정팔각형의 외접원의 중심은 O이다.



평행사변형 ABCD의 이웃하는 두 변의 길이가 같으므로

평행사변형 ABCD는 마름모이다.

마름모의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{ED}}$

$\overline{\mathrm{OA}}=x$로 두자. 즉, 그림 R_1의 정팔각형의 외접원의 반지름의 길이를 x라고 두자.

두 이등변삼각형 AOB, BOC는 서로 합동이고

$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$ 이므로 $\angle\mathrm{AOB}=45^\circ$ 이다.

직각삼각형 AOE에서 특수각의 삼각비에 의하여

$$\overline{\mathrm{OE}}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

이므로

$$\overline{\mathrm{EB}}=\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OE}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}x$$

$$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OE}}-\overline{\mathrm{DE}}=(\sqrt{2}-1)x$$

그림 R_2의 큰 정팔각형과 작은 정팔각형의 닮음비는 $\sqrt{2}-1$이므로 그림 R_2의 4개의 큰 평행사변형의 넓이의 합에 대한 4개의 작은 평행사변형의 넓이의 합의 비는 $(\sqrt{2}-1)^2$이다.

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{2}$이고 공비가 $(\sqrt{2}-1)^2$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

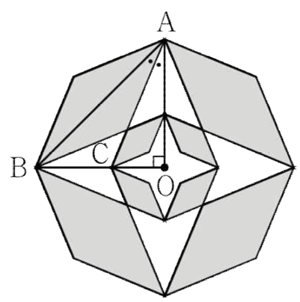
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = 2+\sqrt{2}$$

답 ①

[참고3]

다음과 같은 방법으로 그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 닮음비를 유도할 수도 있다.

아래 그림처럼 그림 R_1에서 주어진 정팔각형의 외접원의 중심을 O, 그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 꼭짓점 중에서 3개의 꼭짓점을 각각 A, B, C라고 하자. 이때, 그림 R_2에서 주어진 작은 정팔각형의 외접원의 중심은 O이다.



선분 AC는 $\angle \mathrm{OAB}$의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AO}} = \overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{CO}}$

직각이등변삼각형 ABO에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AO}} = \sqrt{2} : 1$

이므로

$\overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{CO}} = \sqrt{2} : 1$

(그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 닮음비)

$$= \frac{\overline{\mathrm{CO}}}{\overline{\mathrm{BO}}} = \frac{\overline{\mathrm{CO}}}{\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CO}}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

[풀이4] 교육과정 외 (이중근호)

정팔각형의 한 내각의 크기를 θ°라고 하면

$8\theta^\circ = (8-2)\times 180^\circ$에서 $\theta^\circ = 135^\circ$

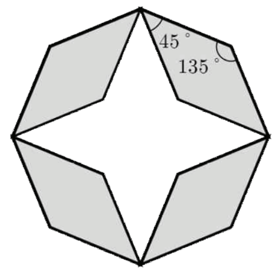


그림 R_1에서 주어진 한 평행사변형의 이웃하는 두 내각의 크기는 각각 45°, 135°이다.

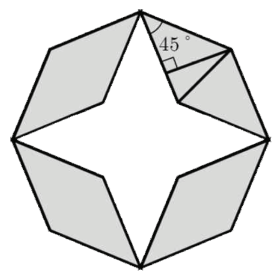


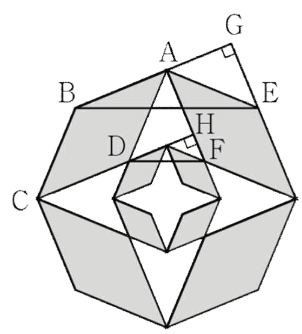
그림 R_1에서 주어진 한 평행사변형의 넓이는

$$2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin 45^\circ\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로

$$S_1 = 4\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

아래 그림처럼 그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 꼭짓점 중에서 6개의 꼭짓점을 각각 A, B, C, D, E, F라고 하자. 그리고 점 E에서 직선 BA에 내린 수선의 발을 G, 점 D에서 선분 AF에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\angle \mathrm{EAG} = 180^\circ - \angle \mathrm{EAB}$

$= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

직각삼각형 EAG에서 특수각의 삼각비에 의하여

$$\overline{\mathrm{AG}} = \overline{\mathrm{EG}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

선분 BG의 길이는

$\overline{BG}=\overline{BA}+\overline{AG}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 BGE에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{BE}=\sqrt{\overline{BG}^2+\overline{EG}^2}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $\cdots$㉠

$\angle DAF=135^\circ-(\angle BAD+\angle EAF)=45^\circ$

직각삼각형 ADH에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{DH}=\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

선분 HF의 길이는

$\overline{HF}=\overline{AF}-\overline{AH}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 DFH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{DF}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HF}^2}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{\overline{DF}}{\overline{BE}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$

(←이중근호는 교육과정 외)

그림 R_2의 큰 정팔각형과 작은 정팔각형의 닮음비는 $\sqrt{2}-1$이므로 그림 R_2의 4개의 큰 평행사변형의 넓이의 합에 대한 4개의 작은 평행사변형의 넓이의 합의 비는 $(\sqrt{2}-1)^2$이다.

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{2}$이고 공비가 $(\sqrt{2}-1)^2$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

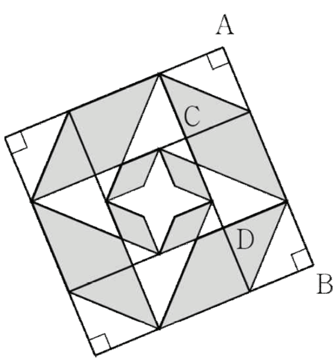
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{2\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=2+\sqrt{2}$

답 ①

[참고4]

다음과 같은 방법으로 그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 닮음비를 유도할 수도 있다.

네 점 A, B, C, D가 다음 그림과 같다고 하자.



(그림 R_2에서 주어진 두 정팔각형의 닮음비)

$=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}-1$

53 | 답 ①

[풀이]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$a_n=$(그림 T_n에서 새롭게 그려진 세로 방향의 선분 한 개의 길이)

$b_n=$(그림 T_n에서 새롭게 그려진 세로 방향의 선분의 개수)

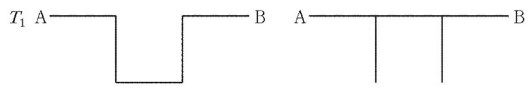


그림 T_1에서 가로 방향의 모든 성분의 길이의 합은 1이고,

$a_1=\dfrac{1}{3}$, $b_1=2$

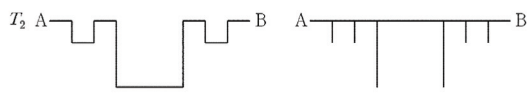


그림 T_2에서 가로 방향의 모든 성분의 길이의 합은 1이고,

$a_2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$, $b_2=2^2$

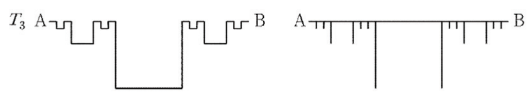


그림 T_3에서 가로 방향의 모든 성분의 길이의 합은 1이고,

$a_3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$, $b_3=2^3$

⋮

이상에서 다음과 같이 추론할 수 있다.

그림 T_n에서 가로 방향의 모든 성분의 길이의 합은 1이고,

$a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n=2^n$

$l_n=1+\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} l_n = 1 + \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 3$$

답 ①

[참고]

위의 풀이에서

$$\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{a_1 b_1}{1-r_a r_b}$$

(단, $r_a = \frac{1}{3}$, $r_b = 2$)

임을 알 수 있다. 여기서 r_a는 두 도형의 닮음비이고, r_b는 새롭게 생기는 도형의 개수의 비이다.

일반적으로 다음이 성립한다.

길이의 합을 구하는 등비급수 문제의 경우

$$l = \frac{a_1 b_1}{1-r_a r_b}$$

여기서 r_a는 두 도형의 닮음비이고, r_b는 새롭게 생기는 도형의 개수의 비이다.

넓이의 합을 구하는 등비급수 문제의 경우

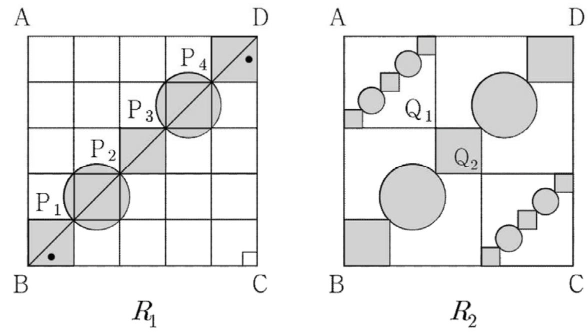
$$S = \frac{a_1 b_1}{1-r_a r_b}$$

여기서 r_a는 두 도형의 넓이의 비이고, r_b는 새롭게 생기는 도형의 개수의 비이다.

54 | 답 ②

[풀이1]

아래의 그림처럼 보조선을 그으면 문제에서 주어진 상황을 보다 명확하게 이해할 수 있다.

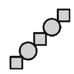
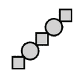
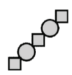


(단, ●$=45°$)

$S_1 = 3\times$(한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이)

$+2\times$(반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원의 넓이)

$=3+\pi$

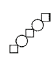
그림 R_2의 큰  모양의 도형과 작은  모양의 도형의 닮음비는 $2:5$이고, 각 단계마다 새롭게 그려지는  모양의 도형의 개수는 2배가 되므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

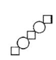
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3+\pi}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2\times 2} = \frac{25}{17}(\pi+3)$$

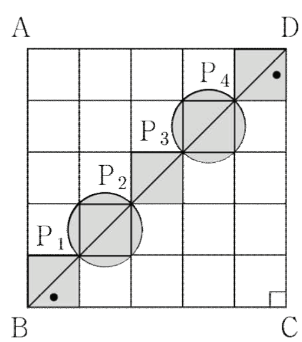
답 ②

[풀이2]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$a_n=$(그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형 한 개의 넓이)

$b_n=$(그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 개수)



정사각형 ABCD에서 정사각형의 정의에 의하여

$\angle \mathrm{BCD}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$

직각이등변삼각형 BCD에서

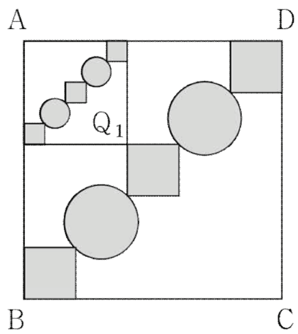
$\angle \mathrm{DBC}=45^{\circ}$

선분 BP_1을 대각선으로 하는 정사각형의 네 변이 대각선 BP_1과 이루는 각은 각각 45°이므로 선분 BP_1을 대각선으로 하는 정사각형의 네 변은 각각 선분 AD 또는 선분 DC에 평행하다.

그림 R_1에서 새롭게 그려지는 서로 합동인 3개의 정사각형의 한 변의 길이는 1이고, 그림 R_1에서 새롭게 그려지는 서로 합동인 2개의 원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$a_1=3\times 1^2+2\times\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=3+\pi$$

그리고 $b_1=1$



선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형의 네 변이 대각선 AQ_1과 이루는 각은 각각 45°이므로 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형의 네 변은 각각 선분 BC 또는 선분 CD에 평행하다. 이때, 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이는 2이므로 정사각형 ABCD와 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형의 닮음비는 $5:2$이다.

닮음비와 넓이의 비 사이의 관계에 의하여

$a_2=\left(\frac{2}{5}\right)^2 a_1$ 그리고 $b_2=2b_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$a_{n+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^2 a_n$이고 $b_{n+1}=2b_n$

수열 $\{a_nb_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_1b_1=3+\pi,\ a_{n+1}b_{n+1}=\frac{8}{25}a_nb_n$$

일반항 a_nb_n은 $a_nb_n=(3+\pi)\left(\frac{8}{25}\right)^{n-1}\ (n\geq 1)$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$이므로 일반항 S_n은 첫째항이 $3+\pi$이고 공비가 $\frac{8}{25}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3+\pi}{1-\frac{8}{25}}=\frac{25}{17}(\pi+3)$$

답 ②