# 확률과 통계

## 총정리

Jung

# THEME 1. 중복순열

## 1. 중복순열의 뜻과 계산

순열 VS 중복순열

$_{n}P_{r}$ — n: 서로다른 n개 / r: 그중 r개 선택 (순서 O)

$\underset{1개}{\underline{n개}} \times \underset{2개}{\underline{n-1개}} \times \underset{3개}{\underline{n-2개}} \cdots \times \underset{r개}{\underline{n-(r-1)개}}$

$= \frac{n!}{r!}$

$_{n}\Pi_{r}$ — n: 서로다른 n종류 / r: 그중 r개 선택 (순서 O)

n 종류에서 뽑는 것이기 때문에
갯수는 상관 없고,
종류의 가짓수가 중요!!

$\underset{1개}{\underline{n}} \times \underset{2개}{\underline{n}} \times \underset{3개}{\underline{n}} \times \underset{4개}{\underline{n}} \cdots \times \underset{r개}{\underline{n}} = n^r$

## 2. 중복순열의 여러가지 상황

그릇의 구별여부

빈그릇의 유무

### 1) 분할의 상황정리

서로 다른 공 5개 → 서로 같은 그릇 3개

1st. 빈그릇 X

$5 = 3 + \underbrace{1 + 1}_{순서없애주기} \quad \frac{_5C_3 \times {_2C_1} \times {_1C_1}}{2!}$

$= \underbrace{2 + 2}_{순서 없애주기} + 1 \quad \frac{_5C_2 \times {_3C_2} \times {_1C_1}}{2!}$

→ 25

2nd. 빈그릇 O

$5 = 5 \rightarrow {_5C_5}$

$= 4 + 1 \rightarrow {_5C_4} \times {_1C_1}$

$= 3 + 2 \rightarrow {_5C_3} \times {_2C_2}$

$= 3 + 1 + 1$

$= 2 + 2 + 1$

→ 25

"몰빵 가능"

서로 다른 공 5개 → 서로 다른 그릇 3개

1st. 빈그릇 X

△ □ ○

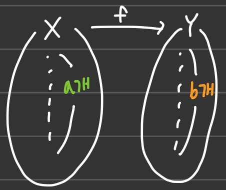
$5 = 3 + 1 + 1$

$= 2 + 2 + 1$

2nd. 빈그릇 O


$\therefore 3^5 = {_3\Pi_5}$ (3: 3종류, 5: 5개)

## remark 함수의 개수




① 모든 함수 f의 개수

$_b\Pi_a$ → a개가 들어갈 곳이 b종류 있다 → $b^a$

② 상수함수 f의 개수

b가지.

③ $a \le b$ 일 때, 일대일 함수 f의 개수

$_bP_a$

④ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 또는 $f(x_1) > f(x_2)$인 함수 f의 개수

$_bC_a$ $(a \le b)$ [순서는 자동설정]

⑤ 치역의 원소의 개수가 2인 함수 f의 개수

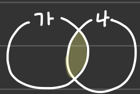
$_bC_2 (2^a - 2)$ $(a \ge 2,\ b \ge 2)$

$_bC_2$: 치역이 될 2가지 선택

$2^a$: 정의역 a개가 치역 2자리에 들어감

$2$: 몰빵되는 2가지 경우

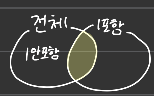
### 2) ~을 포함하는 중복순열 → 여사건




구하는 것 : 가 ∩ 나
= 가 − 나$^c$

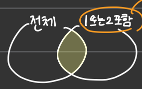
1~5를 중복 사용, 3자리 자연수

① 1을 포함하는 자연수의 개수




∴ 전체 −(1포함)$^c$
$= 5^3 - 4^3$

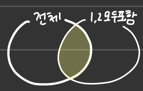
② 1또는 2를 포함




1포함 ∪ 2포함

전체 −(1또는 2포함)$^c$
= 전체 − (1포 ∪ 2포)$^c$
= 전체 − (1포 X ∩ 2포 X)
$= 5^3 - 3^3$ (나머지 3개만 포함)

③ 1.2를 모두 포함




전체 −(1포 ∩ 2포)$^c$
= 전체 − (1포 X ∪ 2포 X)
$= 5^3 - (4^3 + 4^3 - 3^3)$

몰방가능

# THEME 2. 같.있.순

## 1. 같있순의 뜻과 계산

a a a b b → $\dfrac{5!}{3!\,2!}$ (전체) (순서무시)

3! 2!

**remark** 같있순 VS 조합

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2 → 일렬로 배열 = $\dfrac{n!}{3!\,4!}$

□□□□□□□ → 7자리 中 1 자리 4개 선택 = $_7C_4$
(2자리는 남은거로 자동 선택됨)
→ 7자리 中 2 자리 3개 선택 = $_7C_3$

→ 같있순에서 2종류 배열 ⇒ 조합이 편리할수도!

**remark** 같있순 VS 중복순열

중복 허용할 때 < ① 중복순열 (무조건 얘로 생각하지 말기!) ② case 분류 → 같있순

ex) 1, 2, 3 에서 중복을 허용하여 4자리 자연수. 같은 수는 2번까지만 사용 가능

A,A,B,C → $_3C_1 \times \dfrac{4!}{2!}$
A,A,B,B → $_3C_2 \times \dfrac{4!}{2!\,2!}$
+ = 54

ex) 똑같상자 14개. 2or3개씩 운반

$14 = 2+2+2+2+2+2+2$ → 1가지
$= 2+2+2+2+3+3$ → $\dfrac{6!}{4!\,2!}$ = 15가지
$= 2+3+3+3+3$ → $\dfrac{5!}{4!}$ = 5가지
21

## 2. 같있순의 여러가지 상황

### 1) 순서가 정해진 배열

① 전체 中 r개의 순서가 정해진 배열의 경우의 수
↳ 순서가 정해진것들 = 같은것들로 보기 (넣으면 순서가 자동으로 결정되므로)

ex) 1뒤에 2, 2뒤에 3 이 오는경우 (1~6 일렬배열) $\dfrac{6!}{3!}$

ex) 1뒤에 2, 3뒤에 4 $\dfrac{6!}{2!\,2!}$

② 서로 다른 n개에서 순서가 정해진 r개 선택
↳ $_nC_r$ (r개 선택 = 순서는 자동결정됨)

ex) 1,2,3,4,5 에서 3개를 선택하여 세자리자연수 a b c (a<b<c)
$\Rightarrow {}_5C_3$

### 2) 최단거리로 가는 경우의 수

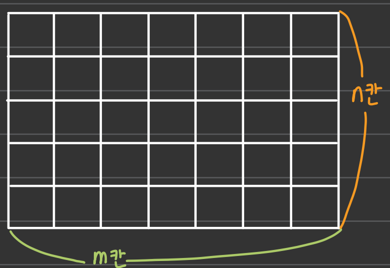
→ m개 ↑ n개

$\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$

응용

(정육면체 쌓여져 있는경우)

→ m ↗ n ↓ l $\dfrac{(m+n+l)!}{m!\,n!\,l!}$




**remark** 경로의 모양 훼손

→ 합의 법칙 이용

# THEME 3. 원순열

## 1. 원순열의 뜻

원순열은 순열의 확장판

순열에서 위치가 아니라 관계를 고려하여 경우의 수 계산

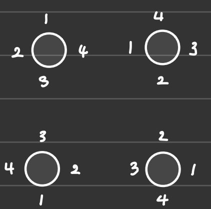
"회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다"

## 2. 원순열의 수의 계산

✿ 계산법 선택 ✿

- 특정 조건 X → 순열 ÷ 회전일치
- 특정조건 O → 우선배치 × 순열

1) (순열) ÷ $\boxed{\text{(회전하여 일치하는 경우의 수)}}$




$\dfrac{4!}{4}$

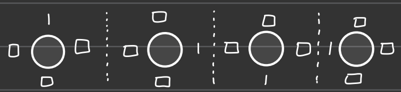
① 정n각형 → ÷n

② 정n각형과 정2n각형 → ÷n

③ 직사각형 → ÷2

④ 180° 회전 → ÷2

2) (우선배치) × (순열)

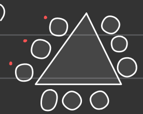



→ 4명中 아무나 한 곳에 앉히기 → 나머지 3명자리 3!

↳ 1가지

∴ 1×3!

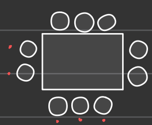
ex)



9명中 아무나 1명 앉히기 → 나머지 8명 앉히기 8!

→ 3가지

∴ 3×8!



10명 中 아무나 1명 앉히기 → 나머지 9명 앉히기 9!

↳ 5가지

∴ 5×9!