세미나(14) 켤레근의 성질

복이차식 실계수방정식의 한 근이 $p+qi$이면 그 켤레근 $p-qi$와 반수근 $-p-qi$및 그 켤레근 $-p+qi$도 근이다.

[관련 문제]

① x에 대한 사차방정식 $x^4-3x^2+k=0$의 네 근 중 두 근의 합이 1이 된다고 할 때, k를 구하여라. (단, k는 실수)

② 사차 방정식 $x^4+ax^2+b=0$의 한 근이 $p+qi$일 때, 다음 중 사차방정식 $x^4+ax^2+b=0$의 모든 근의 곱과 항상 같은 것은? (단, a, b, p, q는 0이 아닌 실수이다.)

① p^2-q^2 ② p^2+q^2 ③ $(p^2-q^2)^2$ ④ $(p^2+q^2)^2$ ⑤ $(p^2-q^2)(p^2+q^2)$

일반 풀이

① 주어진 사차방정식이 x에 대한 복이차식이므로 방정식의 네 근을 $\pm\alpha$, $\pm\beta$라 할 수 있다.
따라서 $X=x^2$일 때 X에 대한 이차방정식
$X^2-3X+k=0$의 두 근은 α^2, β^2이다.
근과 계수의 관계에서 $\alpha^2+\beta^2=3$, $\alpha^2\beta^2=k$
또한, 두 근의 합이 1이므로 $\alpha+\beta=1$이라 해도 일반성을 잃지 않는다.
$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$
⇨$1^2=3+2\alpha\beta$⇨$\alpha\beta=-1$ $\therefore$ $k=(\alpha\beta)^2=1$

② 사차방정식 $x^4+ax^2+b=0$의 한 근이 $p+qi$이고 계수가 모두 실수이므로 $p-qi$도 근이다.
이때 주어진 방정식의 한 근을 α라 하면

$$\alpha^4+a\alpha+b=(-\alpha)^4+a(-\alpha)^2+b=0$$

이므로 $-\alpha$도 근이다. 따라서 주어진 방정식의 근은

$$p+qi,\ p-qi,\ -p+qi,\ -p-qi$$

이므로 모든 근의 곱은

$$(p+qi)(p-qi)(-p+qi)(-p-qi)$$
$$=(p^2+q^2)(p^2+q^2)=(p^2+q^2)^2$$

참고 – 사차방정식의 근과 계수와의 관계

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$의 네 근이 α, β, γ, δ

㉠ $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-\dfrac{b}{a}$

㉡ $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\dfrac{c}{a}$

㉢ $\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-\dfrac{d}{a}$

㉣ $\alpha\beta\gamma\delta=\dfrac{e}{a}$

랑데뷰 풀이

① k가 실수이고 두 근의 합이 1이므로
네 근은 $\dfrac{1}{2}+qi$, $\dfrac{1}{2}-qi$, $-\dfrac{1}{2}+qi$, $-\dfrac{1}{2}-qi$
라 할 수 있다. (q는 복소수) 근과 계수와의 관계에서
$2q^2-\dfrac{1}{2}=-3$에서 $q^2=-\dfrac{5}{4}$이고
$\left(\dfrac{1}{4}+q^2\right)\left(\dfrac{1}{4}+q^2\right)=k$에서 $k=1$
⇨$k=1$이면 방정식 $x^4-3x^2+1=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.
$x^4-3x^2+1=0$의 네 실근은 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}$이다. 한편, $q^2=-\dfrac{5}{4}$에서
$q=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}i$이므로
네 근 $\dfrac{1}{2}+qi$, $\dfrac{1}{2}-qi$, $-\dfrac{1}{2}+qi$, $-\dfrac{1}{2}-qi$에 대입하면 일치함을 확인할 수 있다.

② 실계수 복이차 방정식이므로 네 근이
$p+qi$, $p-qi$, $-p-qi$, $-p+qi$이고 네 근의 곱은
$(p^2+q^2)(p^2+q^2)=(p^2+q^2)^2$이다.

설명

a, b, c가 실수이고
$ax^4+bx^2+c=0$의 한 근이 $p+qi$이면
(i) 실계수 방정식에서 복소수가 한 근이므로 켤레근에 의하여 $p-qi$도 근이다.

(2)번 [다른 풀이]-최재영T

$\frac{3}{2}x^2+2xy=k$ (단, k는 실수이다.)로 두자.

$2xy=k-\frac{3}{2}x^2$이므로 $y=\frac{k}{2x}-\frac{3}{4}x$이다.

$y^2=\frac{k^2}{4x^2}+\frac{9}{16}x^2-2\times\frac{k}{2x}\times\frac{3}{4}x$이고,

$y^2=5-x^2$이므로,

$5-x^2=\frac{k^2}{4x^2}+\frac{9}{16}x^2-\frac{3k}{4}$이다.

이를 정리하면 $\frac{25}{16}x^2+\frac{k^2}{4x^2}-\frac{3k}{4}-5=0$이고,

$\frac{25}{16}x^2+\frac{k^2}{4x^2}=\frac{3k}{4}+5$이다.

산술기하 평균에 따라 $\frac{25}{16}x^2+\frac{k^2}{4x^2}\geq 2\sqrt{\frac{25k^2}{64}}$가 성립하므로,

$\frac{3k}{4}+5\geq 2\sqrt{\frac{25k^2}{64}}=\frac{5}{4}\times|x|$가 성립한다.

(i) $k\geq 0$ 일 때,

$\frac{3k}{4}+5\geq\frac{5}{4}k$이므로, $10\geq k$이다.

k의 최댓값은 10이다.

(ii) $k<0$ 일 때,

$\frac{3k}{4}+5\geq -\frac{5}{4}k$이므로, $k\geq -\frac{5}{2}$이다.

k의 최솟값은 $-\frac{5}{2}$이다.

(2)번 [다른 풀이]-장정보T

실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=5$일 때,

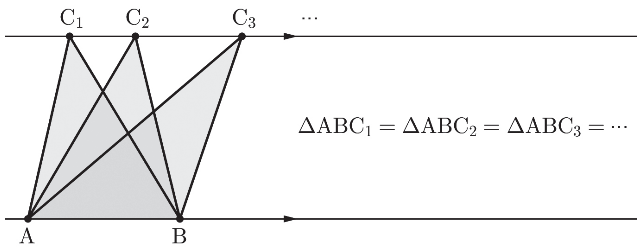
$\frac{3}{2}x^2+2xy$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

$x=\sqrt{5}\cos\theta$, $y=\sqrt{5}\sin\theta$라 하자.

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2}x^2+2xy\\
&=\frac{3}{2}\times 5\cos\theta+10\cos\theta\sin\theta\\
&=\frac{15}{2}\cos^2\theta+5\sin 2\theta\\
&=\frac{15}{2}\times\frac{1+\cos\theta}{2}+5\sin 2\theta\\
&=\frac{15}{4}(1+\cos 2\theta)+5\sin 2\theta\\
&=\frac{15}{4}\cos 2\theta+5\sin 2\theta+\frac{15}{4}\\
&=\sqrt{\frac{225}{16}+25}\,\sin(2\theta+\alpha)+\frac{15}{4}\\
&=\frac{25}{4}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{15}{4}
\end{aligned}$$

최댓값 $M=\frac{25}{4}+\frac{15}{4}=10$

최솟값 $m=-\frac{25}{4}+\frac{15}{4}=-\frac{5}{2}$

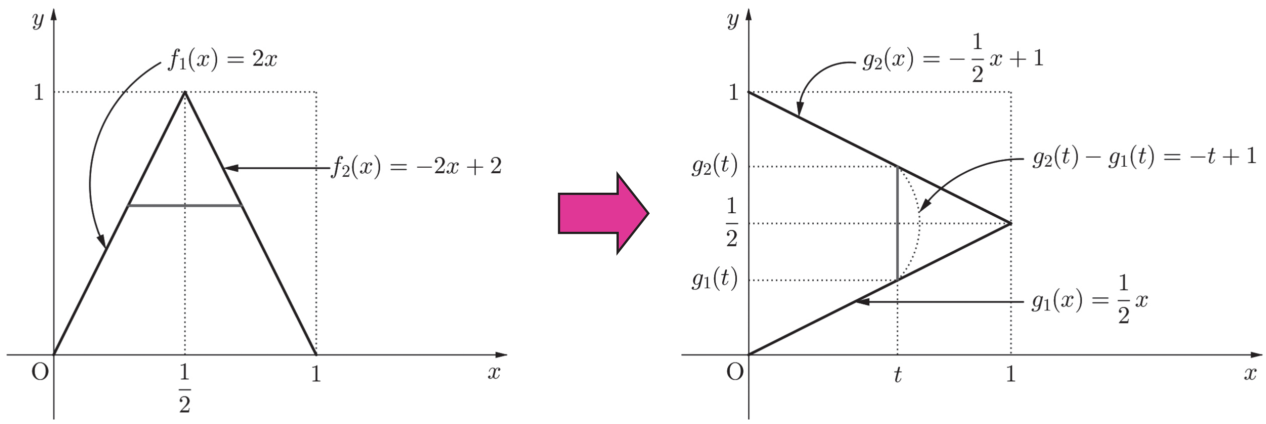


위 그림에서 밑변의 길이가 고정이고 높이가 같은 모든 삼각형의 넓이는 같다.

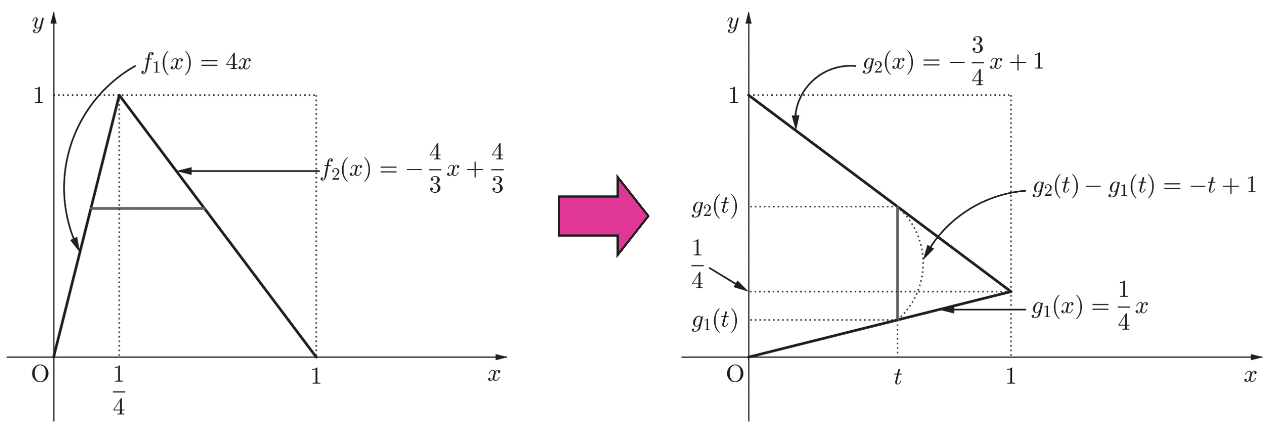
① 함수에서 적용해 보도록 하자.

$y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}$이다. 그림과 같이 $y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$의 $y=x$에 대칭인 함수를 각각 $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$라 할 때, $x=t$ $(0\le t\le 1)$에서의 y값의 차이는 $-t+1$이다. 따라서 $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^1(-t+1)dt=\left[-\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^1=\frac{1}{2}$로 생각할 수 있다.



$f_1(x)=4x$, $f_2(x)=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$으로 설정해도 $y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}$이다. 같은 과정으로 $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$와 설정후 y값의 차를 구해보면 항상 $-t+1$으로 같다는 것을 알 수 있다.



고난도 문항에 적용사례

[2020년 10월 모의고사 가형 29번]

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) $a < b < c \le 20$
(나) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

랑데뷰 풀이

$x \ge 1$, $y \ge 1$인 x, y에 대하여
$b = a + x$, $c = a + x + y$라 할 수 있다.
$c \le 20$이므로 $a + x + y \le 20$이다. …㉠
$a + x + y + w = 20$
$(a \ge 1, x \ge 1, y \ge 1, w \ge 0)$
$a = a' + 1$, $x = x' + 1$, $y = y' + 1$라 두면
$(a' \ge 0, x' \ge 0, y' \ge 0)$
$a' + x' + y' + w = 17$
그러므로 만족하는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{H}_{17} = {}_{20}\mathrm{C}_3 = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$$

(나)에서 $a + b > c$이므로
$a + a + x > a + x + y$에서 $a > y$이다.
㉠에서 만족하는 경우의 수에는 $a > y$, $a = y$, $a < y$인 경우가 있고 대칭성에 의해 $a > y$, $a < y$인 경우는 같은 경우의 수가 된다. 따라서 1140에서 $a = y$인 경우를 제외한 뒤 반으로 나누면 되겠다.
그러므로 $a + b > c$인 경우는 $2a + x > a + x + y$인 경우이고 $a > y$이다.
대칭에 의해 $a > y$인 경우와 $a < y$인 경우는 같은 경우의 수가 나오므로 $a = y$인 경우의 수를 구한 뒤 제외하자.
$a + x + y \le 20$
$2a + x \le 20$
$2a + x + w = 20$
$2a + x' + w = 19$
$a = 1$일 때 $x' + w = 17 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_{17} = {}_{18}\mathrm{C}_1 = 18$
$a = 2$일 때 $x' + w = 15 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_{15} = {}_{16}\mathrm{C}_1 = 16$
⋮
$a = 9$일 때 $x' + w = 1 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_1 = {}_2\mathrm{C}_1 = 2$
따라서 $2 \times (1 + 2 + \cdots + 9) = 90$
그러므로 $\dfrac{1140 - 90}{2} = 525$ ←정답

[랑데뷰 제작 문항]

다음 조건을 만족시키는 20이하의 네 자연수 a_1, a_2, a_3, a_4의 모든 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4)의 개수를 구하시오.

(가) $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$인 네 자연수 a_1, a_2, a_3, a_4에 대하여 임의의 두 수의 차는 3이상이다.
(나) $a_1 + a_4 \le 29$

랑데뷰 풀이

$a \ge 1$, $x \ge 3$, $y \ge 3$, $z \ge 3$인
자연수 a, x, y, z에 대하여
$a_1 = a$
$a_2 = a + x$
$a_3 = a + x + y$
$a_4 = a + x + y + z$
라 할 수 있다.
$a_4 \le 20$이므로
$a + x + y + z \le 20$이다.…㉠
$u \ge 0$인 정수에 대하여
$a + x + y + z + u = 20$로 해석할 수 있다.
$a' + x' + y' + z' + u = 10$
$a' \ge 0$, $x' \ge 0$, $y' \ge 0$, $u' \ge 0$
따라서
조건 (가)를 만족하는 전체 경우의 수는

$${}_5\mathrm{H}_{10} = {}_{14}\mathrm{C}_4 = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1001$$

한편, $a_4 = 20$일 때, a_1 의 최댓값은 11이므로
$a_1 + a_4 \le 31$이다.
(나)에서 $a_1 + a_4 = 2a + x + y + x \le 29$
의 여사건은 $30 \le 2a + x + y + z \le 31$이고
㉠에서 $a \le 11$이고
$(10, 3, 3, 4)$, $(10, 3, 4, 3)$, $(10, 4, 3, 3)$
$(11, 3, 3, 3)$로 4가지 뿐이다.
따라서 $1001 - 4 = 997$ ←정답

세미나(212) 독립사건의 고찰

독립사건의 고찰 (전사건과 공사건에 대하여)

독립사건 : 두 사건 A와 B에서 한 사건의 결과가 다른 사건에 영향을 주지 않을 때 A와 B를 독립사건이라 한다.
종속사건 : 두 사건 A와 B에서 한 사건의 결과가 다른 사건에 영향을 줄 때 A와 B를 종속사건이라 한다.

는 수식을 표현한 의미일 뿐 독립사건과 종속사건은 수식으로 정의되어 있다.

생각1

$P(B|A)=P(B|A^C)=P(B)$이면 사건 A와 B는 독립사건이다.

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$, $P(B|A^C)=\dfrac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}$에서

사건 A가 전사건일 때는 $P(A^C)=0$
사건 A가 공사건일 때는 $P(A)=0$ 이므로
$P(B|A)$ 또는 $P(B|A^C)$이 수학적으로 정의되지 않는다.
따라서
두 사건 A, B에 대하여 두 사건 A와 B가 독립인지 종속인지 파악할 때는 전제조건이 $0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$이다. ⇨ [교과서 조건]
따라서 어떤 사건과 전사건, 어떤 사건과 공사건에 대해서는 독립사건을 다루지 않는다.

생각2

두 사건 A와 B가 독립일 때의 수식의 정의를 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$으로 본다면 사건 A와 B가 전사건 또는 공사건일 때도 정의된다고 할 수 있다.
예를 들어
A가 공사건이면 $P(A)=0$, $P(A\cap B)=0$이므로 $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0$이 성립하므로 두 사건은 독립이다.
A가 전사건이면 $P(A)=1$, $P(A\cap B)=P(B)$이므로 $P(A\cap B)=P(A)P(B)=P(B)$이 성립하므로 두 사건은 독립이다. ⇨ 위키피디아

추가설명1 -우성근T

분수로 유도된 표현(생각1)이 더 직관적으로 보이지만 선호되는 정의 방식은 아니다. 왜냐하면 $P(A)$ 또는 $P(B)$가 0이면 정의가 되지 않기 때문이다. 게다가 선호되는 정의식 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$은 A가 B에 독립일 때, B 또한 A에 독립이라는 대칭성을 더 명확하게 한다.

추가설명2

교과서의 정의 두 사건의 독립일 조건 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ (단, $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$)

유승희T : 교과서의 정의가 좀 어색하네요.
장세완T : 교과서 내용대로 본다면 공사건은 독립, 종속을 정의하지 않는다가 맞는거 같아요.
유승희T : 그런데 몇몇 출제자 분들이 공사건도 독립사건에 포함된다고 하셔서 문제네요.
김은수T : 교과서대로 가는게 맞다고 봅니다. 교육부 가이드라인을 지킨 거라고 봐서요.
우성근T : 두 사건 A, B의 독립은 사건 A의 사건 B에 대한 조건부확률과 사건 A의 확률이 같다에서 출발하였는데, 이 정의는 B가 공사건일 때를 포함하지 못하는 한계가 있었던 것으로 보입니다. 위에서 정의된 독립의 의미를 그대로 수용하면서 사건 B가 공사건인 경우만을 추가하는 가장 좋은 방법이 곱사건의 확률을 통한 방법이었기에 곱사건을 이용한 정의로 확장되었다고 판단하는 것이 옳을 듯 합니다.
유승희T : 이런 문제가 수능이나 평가원문제에서 나온적은 없는 것 같은데 내신이나 모의고사 만드시는 분들이 낸 것이 있어서...그 분들은 공사건도 등호를 만족한다고 하셔서 반박을 못했네요.
우성근T : 그분들 말씀이 틀린건 아니라고 봐요. 그렇게들 배우셨을테니 교육과정을 정확히 확인한게 아니라면 상식처럼 공사건도 독립이 된다라고 알고 계실거에요. 그래서 전 학생들에게 이야기할 땐 공사건에 대해서도 일반적으로 교집합의 확률공식을 만족하니깐 독립으로 본다고 이야기를 해 왔어요.

결론 ⇨ 공사건은 모든 사건과 독립이다. 하지만 현행 고교과정에서는 공사건을 독립사건에서 다루지 않으니 현행 평가원 시험에는 나오지 않는다.

세미나(226) 이차곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

이차곡선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x^2 \to x_1 x,\ y^2 \to y_1 y,\ x \to \frac{x_1+x}{2},\ y \to \frac{y_1+y}{2}$$

$$xy \to \frac{y_1 x + x_1 y}{2}$$

[관련 문제]

$y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

랑데뷰 풀이

$xy=1$에서 $x_1=2,\ y_1=\dfrac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은 $\dfrac{\frac{1}{2}x+2y}{2}=1$ $\therefore\ y=-\dfrac{1}{4}x+1$

설명

이차곡선 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+Exy+F=0 \cdots$ ㉠ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$이 있다.

$(x_1,\ y_1)$을 ㉠에 대입하면 $Ax_1^2+By_1^2+Cx_1+Dy_1+Ex_1y_1+F=0 \cdots$ ㉡ 이 성립한다.

㉠의 양변을 미분하면 $2Ax+2By\dfrac{dy}{dx}+C+D\dfrac{dy}{dx}+E\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)=0$이고

$(2Ax+Ey+C)+(Ex+2By+D)\dfrac{dy}{dx}=0$에서 이 식에 $(x_1,\ y_1)$을 대입하면

$(2Ax_1+Ey_1+C)+(Ex_1+2By_1+D)\dfrac{dy}{dx}=0$이다.

따라서 ㉠ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$(2Ax_1+Ey_1+C)(x-x_1)+(Ex_1+2By_1+D)(y-y_1)=0 \leftarrow (\div 2)$

$$\left(Ax_1+E\frac{y_1}{2}+\frac{C}{2}\right)(x-x_1)+\left(E\frac{x_1}{2}+By_1+\frac{D}{2}\right)(y-y_1)=0$$

$$Ax_1(x-x_1)+By_1(y-y_1)+C\left(\frac{x-x_1}{2}\right)+D\left(\frac{y-y_1}{2}\right)+E\left(\frac{y_1(x-x_1)+x_1(y-y_1)}{2}\right)=0$$

$$Ax_1x+By_1y+C\left(\frac{x}{2}\right)+D\left(\frac{y}{2}\right)+E\left(\frac{y_1x+x_1y}{2}\right)-\left\{Ax_1^2+By_1^2+C\left(\frac{x_1}{2}\right)+D\left(\frac{y_1}{2}\right)+E\left(\frac{2x_1y_1}{2}\right)\right\}=0$$

$$Ax_1x+By_1y+C\left(\frac{x_1+x}{2}\right)+D\left(\frac{y_1+y}{2}\right)+E\left(\frac{y_1x+x_1y}{2}\right)-\left\{Ax_1^2+By_1^2+Cx_1+Dy_1+Ex_1y_1\right\}=0$$

㉡에서 $Ax_1^2+By_1^2+Cx_1+Dy_1+Ex_1y_1=-F$이다.

$$\therefore\ Ax_1x+By_1y+C\left(\frac{x_1+x}{2}\right)+D\left(\frac{y_1+y}{2}\right)+E\left(\frac{y_1x+x_1y}{2}\right)+F=0 \cdots ㉢$$

따라서 ㉠, ㉢에서 이차곡선위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x^2 \to x_1x,\ y^2 \to y_1y,\ x \to \frac{x_1+x}{2},\ y \to \frac{y_1+y}{2},\ xy \to \frac{y_1x+x_1y}{2}$$

을 대입하여 구할 수 있다.