이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

2015 개정 교육과정에서 달라지는 점은

- 수학 Ⅰ

지수함수와 로그함수: 두 대단원 ‘지수와 로그’, ‘지수함수와 로그함수’가 결합
삼각함수: 사인법칙, 코사인법칙의 귀환 & sec, csc, cot가 미적분 과목으로 이동
수열: 주기함수 관련 문제 출제 가능

- 수학Ⅱ

함수의 극한과 연속: 주기함수 관련 문제 출제 가능
미분: 주기함수 관련 문제 출제 가능
적분: 주기함수 관련 문제 출제 가능 & 구분구적분 퇴출

- 미적분

수열의 극한: 사인법칙, 코사인법칙, 삼각함수의 덧셈정리 관련 문제 출제 가능
미분법: 매개변수의 미분법, 음함수의 미분법의 귀환
적분법: 구분구적법은 이과 전용

- 확률과 통계

경우의 수: 순열, 조합 고1 과정으로 이동, 분할(정수/자연수) 퇴출
확률: 변화 없음
통계: 모비율 퇴출

- 기하

이차곡선: 기울기가 주어진 접선의 공식 귀환 & 사인법칙, 코사인 법칙 관련 문제 출제 가능
평면벡터: 라디안이 아닌 육십분법 사용 & 벡터의 내적의 정의를 성분으로 함
공간도형과 공간좌표: 공간벡터, 공간에서의 벡터의 방정식 퇴출

2021 수능에서 보여준 출제 경향

- 가형14(미적분): 등비급수 평면기하 응용문제에서 사인법칙, 코사인법칙이 출제된다는 관성을 깨는 문제. (삼각함수의 덧셈정리 출제)
- 가형20(미적분): 정적분+점 대칭성으로 즐겨 출제되던 문제를 정적분+선 대칭성으로 바꿈. 그래프의 개형을 무시하고 계산만 하면 시간 안에 풀 수 없는 문제.
- 가형29(확률과 통계): 이 정도의 경우 구분을 하는 문제를 출제하겠다. 라는 의지를 보여주는 문제.
- 가형30(미적분): 합성함수의 그래프의 개형을 그려서 극대극소 판단할 수 있는지를 평가하는 문제. 그리고 삼차함수의 그래프의 개형에서 방정식을 유도할 때 계산을 단축할 수 있는지도 관건.

- 나형20(수학2): 5차 이상의 다항함수의 그래프의 개형은 교육과정 외이므로 4차 함수의 그래프의 개형으로 접근해야 함. 풀이의 선택을 평가하는 문제.
- 나형30(수학2): |곡선-직선|의 미분가능성에 대한 전형적인 문제.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 ‘교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구’ 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

구성

▸ **‘이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 수학Ⅰ+수학Ⅱ’** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 676개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2020년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2021학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2021학년도 (학년도 기준)

▸ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▸ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
대단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

▸ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 ‘기본개념’ 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 ‘실전이론’ 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 ‘기본개념’, ‘실전이론’, ‘(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정’ 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목 차

수학 I

수학 II

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록

A. 지수함수와 로그함수

A001

○○
(2001경찰대(1차)–공통5)

$\log_c b\times\log_b a=2$, $\log_b c\times\log_c a=3$일 때,

$\log_c a\times\log_a b$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

A002

○○
(2002사관(1차)–문과1)

실수 x, y에 대하여 a, b를 각각 $a=9^x$, $b=3^y$이라 할 때, $\log_a\sqrt{b}$를 x와 y로 나타내면? (단, $x\neq 0$) [2점]

① $\frac{y}{4x}$ ② $\frac{y}{3x}$ ③ $\frac{2y}{3x}$

④ $\frac{3y}{4x}$ ⑤ $\frac{2y}{x}$

A003

○○
(2003(10)고2–가형29)

함수 $y=4^x+4^{-x}-2(2^x+2^{-x})+5$의 최솟값을 구하시오. [4점]

A004

○○○
(2004(6)고2–나형15)

두 부등식 $1\leq x<2^{10}$, $0\leq y\leq\log_2 x$를 만족시키는 정수 x, y에 대하여 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 다음과 같이 구하였다.

> 자연수 k에 대하여 부등식 $2^{k-1}\leq x<2^k$을 만족시키는 정수 x의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
>
> 이 $\boxed{\text{(가)}}$ 개의 각각의 x에 대하여
>
> $\log_2 2^{k-1}=k-1$, $\log_2 2^k=k$이므로
>
> $0\leq y\leq\log_2 x$를 만족시키는 정수 y의 개수는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.
>
> 따라서 $2^{k-1}\leq x<2^k$인 범위에서 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}\times\boxed{\text{(나)}}$이다.
>
> 그런데 자연수 k는 1부터 $\boxed{\text{(다)}}$ 까지의 값을 취할 수 있으므로 각각의 k값을 대입하여 그 합을 구하면 9217이다.

위에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	2^k	$k-1$	10
②	2^k-1	k	10
③	2^{k-1}	$k+1$	9
④	2^{k-1}	k	10
⑤	2^{k+1}	k	9

A005

○○
(2005(6)고2-가형29)

1이 아닌 세 자연수 a, b, c에 대하여 등식

$$a^2=b^3=c^4=k$$

를 만족하는 k의 값들 중 최소인 수를 p라 할 때, $\log_4 p$의 값을 구하시오. [4점]

A006

○○
(2005(4)고3-나형16)

0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여

$a+b+c=0$이고 $3^a=x$, $3^b=y$, $3^c=z$이다.

이때, $\log_x yz+\log_y zx+\log_z xy$의 값은? [3점]

① -3　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 3

A007

○○
(2005사관(1차)-문과16)

다음은 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 할 때, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$이면

$$\frac{\log_2 p}{p}+\frac{\log_2 q}{q}\le 1$$

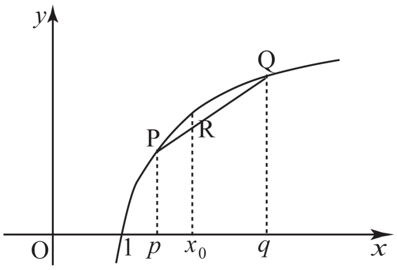
임을 증명한 것이다.

〈증명〉

$pq=\boxed{\text{(가)}}$이므로

$$\frac{\log_2 p}{p}+\frac{\log_2 q}{q}=\frac{q\log_2 p+p\log_2 q}{pq}$$

$$=\frac{q\log_2 p+p\log_2 q}{\boxed{\text{(가)}}} \qquad \cdots ㉠$$



$\overline{\mathrm{PQ}}$를 $p:q$로 내분하는 점을 $\mathrm{R}(x_0,\ y_0)$라 하면

$$x_0=\boxed{\text{(나)}},\ y_0=\frac{q\log_2 p+p\log_2 q}{p+q} \qquad \cdots ㉡$$

그런데 곡선 $y=\log_2 x$는 $\boxed{\text{(다)}}$이므로

$y_0\le \log_2 x_0$이다.

따라서 ㉠, ㉡에서

$$\frac{\log_2 p}{p}+\frac{\log_2 q}{q}\le 1$$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$p+q$	2	위로 볼록
②	$-p-q$	3	위로 볼록
③	$p+q$	3	위로 볼록
④	$-p-q$	2	아래로 볼록
⑤	$p+q$	3	아래로 볼록

A008

○○
(2005(7)고3-나형11)

다음은 $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$과 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$의 대소 관계를 알아보는 과정이다.

$(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}-(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{2})^{\boxed{(\text{가})}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

$\{(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-(\sqrt{3})^{\boxed{(\text{나})}}\}$

그런데 $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\boxed{(\text{다})}(\sqrt{3})^{\boxed{(\text{나})}}$이고

$(\sqrt{2})^{\boxed{(\text{가})}}>0$, $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}>0$이므로

$(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}-(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}\boxed{(\text{다})}0$

$\therefore\ (\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\boxed{(\text{다})}(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$<$
②	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$>$
③	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$	$<$
④	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$	$>$
⑤	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$	$<$

A009

○○
(2005(4)고3-가형14)

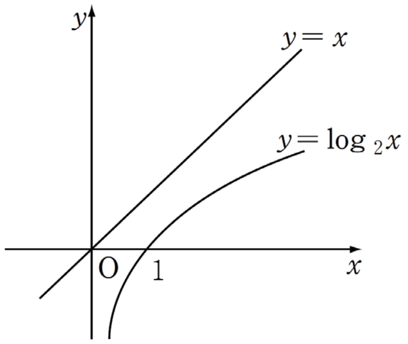
$y=10^x$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, $y=\log x$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하였더니 두 함수의 그래프가 두 점에서 만났다. 이 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{9}+2\log 3$ ② $\frac{1}{9}+3\log 3$ ③ $9-\log 3$
④ $9-2\log 3$ ⑤ $9+\log 3$

A010

○○
(2005(4)고3-가형9)

두 함수 $y=x$와 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



ㄱ. $\dfrac{\log_2 x}{x}<1$

ㄴ. $\dfrac{\log_2 x}{x-1}<1\ (x\neq 1)$

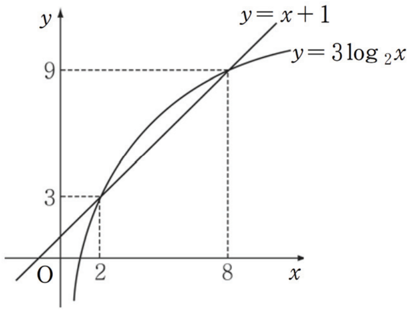
ㄷ. $\dfrac{\log_2 (x+1)}{x}<1\ (x\neq 0)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A011

○○
(2005(4)고3-가형16)

두 함수 $y=x+1$과 $y=3\log_2 x$의 그래프를 이용하여 부등식 $2^{x+2}<(x+1)^3$을 만족시키는 x의 범위를 구하면 $\alpha<x<\beta$이다. 이때, $\alpha+\beta$의 값은? [4점]



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

A012

○○
(2005(3)고3-나형19)

$abc=24$인 세 실수 a, b, c가 있다. $2^a=3^2$, $3^b=5^3$일 때, 5^c의 값을 구하시오. [3점]

A013

○○
(2005(7)고3-나형30)

두 함수 $y=\log_4(x+p)+q$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+p)+q$의 역함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 한다. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 4)$에서 만나도록 두 실수 p, q의 값을 정할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. [4점]

A014

○○
(2005(7)고3-나형15)

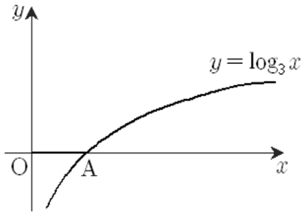
임의의 실수 x에 대하여 부등식 $2^{x+1}-2^{\frac{x+4}{2}}+a\geq 0$이 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A015

○○
(2006(4)고3-가형6)

함수 $y=\log_3 x$의 그래프가 x축과 만나는 점을 A라 하자. $y=\log_3(x+a)$의 그래프가 선분 OA를 x축의 양의 방향으로 3만큼, y축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동한 선분과 만날 때, a의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, O은 원점이다.) [3점]



① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

A016

○○
(2006(6)고2-가형18)

집합 $A=\{(x,\ y)\mid y=\log_3 x,\ x$는 양수$\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $(a,\ b)\in A$이면 $(3a,\ b+1)\in A$이다.
ㄴ. $\left(\dfrac{a}{3},\ b\right)\in A$이면 $(a,\ b-1)\in A$이다.
ㄷ. $(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in A$이면 $(ac,\ b+d)\in A$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A017

○○
(2006(3)고3-가형27)

x에 대한 방정식

$$4^x-a\times 2^{x+1}+a^2-a-6=0$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위는? [3점]

① $a>-6$ ② $-6<a<-2$
③ $a>0$ ④ $-2<a<3$
⑤ $a>3$

A018

○○
(2006(6)고2-나형3)

$\log_3 18=p$일 때, $\log_2 54$를 p로 나타낸 것은? [2점]

① $\dfrac{p}{p-1}$ ② $\dfrac{p+1}{p-2}$ ③ $\dfrac{p+2}{p-3}$
④ $\dfrac{p+3}{p-4}$ ⑤ $\dfrac{p+4}{p-5}$

A019

○○
(2006(3)고3-가형26)

실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 보기에서 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\log_{a^2-a+2}(a^2+1)$
ㄴ. $\log_{2|a|+1}(a^2+1)$
ㄷ. $\log_{a^2+2}(a^2-2a+1)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A020

○○

(2006(3)고3–나형5)

집합

$$A=\left\{x \,\middle|\, x=\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{n}},\ n\text{은 0이 아닌 정수}\right\}$$

의 원소 중 자연수인 것의 개수는? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

A021

○○

(2006(9)고2–나형7)

$\log_{|x|}(x+3)(5-x)$가 정의되기 위한 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

A022

○○

(2006(11)고2–가형12/나형12)

100의 모든 양의 약수들을 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_9$라 할 때, $\log a_1+\log a_2+\log a_3+\ \cdots\ +\log a_9$의 값은? [4점]

① 9　② 10　③ 11
④ 12　⑤ 13

A023

○○

(2006사관(1차)–문과18)

1 보다 큰 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 두 등식

$$\begin{cases} a^2b^3=64 \\ 3(\log_a c)^2-2(\log_b c)^2=-(\log_a c)(\log_b c) \end{cases}$$

이 성립하도록 하는 두 수 a와 b에 대하여 $\log_2 ab$의 값은? [4점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

A024

○
(2006(11)고2–가형5/나형5)

거듭제곱근의 성질 중 항상 옳은 것을 보기에서 모두 고르면? (단, $a>0$, $a\neq 1$) [3점]

ㄱ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[4]{a}$
ㄴ. $(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[12]{a}$
ㄷ. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\sqrt[6]{a^5}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A025

○○○
(2006(1차)경찰대–공통18)

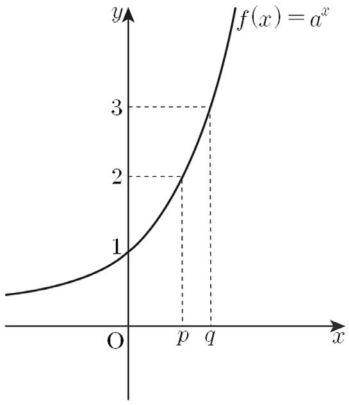
두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$와 직선 $x=32$로 둘러싸인 영역에 포함되는 x, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는? (단, 경계 위의 점은 제외한다.)

① 29 ② 31 ③ 33
④ 35 ⑤ 37

A026

○○
(2007(11)고2–가형13)

그림은 $f(x)=a^x\,(a>1)$의 그래프이다.



함수 $g(x)$가 $g(f(x))=x$를 만족시킬 때, $g(12)$의 값을 p, q로 나타내면? (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.) [3점]

① $p+q$ ② $p+2q$ ③ $p+3q$
④ $2p+q$ ⑤ $2p+3q$

A027

○○
(2007(7)고3–가형10)

함수 $f(x)=\log_a x$, $g(x)=\log_b x$가
$0<x<1$에서 $f(x)>g(x)$이 성립하기 위한 조건으로 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $1<b<a$
ㄴ. $0<a<b<1$
ㄷ. $0<a<1<b$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A028

○○
(2007(9)고2–나형20)

이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 실근 α, β에 대하여

$$\log_2(\alpha+\beta)=\log_2\alpha+\log_2\beta-1$$

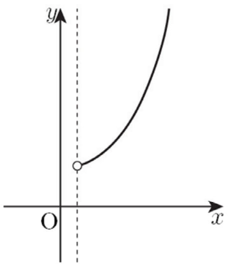
이 성립할 때, $q-p$의 최솟값은? (단, p, q는 실수이다.) [4점]

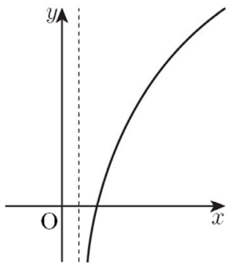
① 18　② 24　③ 30
④ 36　⑤ 42

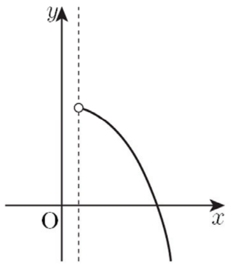
A029

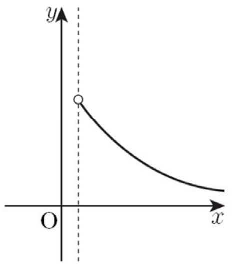
○○
(2007(11)고2–가형21)

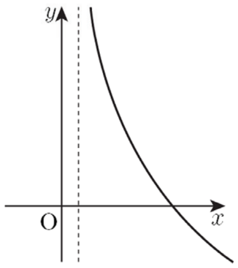
함수 $f(2^x)=-\log_3 x$일 때, $y=f(x)$의 그래프의 개형은? [4점]

①


②


③


④


⑤


A030

○○
(2007(4)고3–나형10)

두 수 $\sqrt{\dfrac{2^a\cdot5^b}{2}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{2^a\cdot5^b}{5}}$ 이 모두 자연수일 때, $a+b$의 최솟값은? (단, a, b는 자연수이다.) [4점]

① 2　② 3　③ 5
④ 7　⑤ 9

A031

○○
(2007(6)고2–가형3)

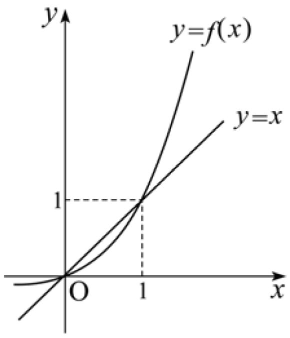
임의의 양수 a, b에 대하여 $a^2b\times\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}}$ 을 간단히 하면? [3점]

① $a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{5}{3}}$　② $a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{3}}$　③ $a^{\frac{5}{3}}b^2$
④ a^2b^2　⑤ $a^2b^{\frac{7}{3}}$

A032

○○
(2007(3)고3-가형10)

그림은 함수 $f(x)=2^x-1$의 그래프와 직선 $y=x$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위에 임의로 두 점을 잡아 그 두 점의 x좌표를 각각 a, $b\,(0<a<b)$라 할 때, 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



ㄱ. $0<a<1$이면 $f(a)<a$
ㄴ. $b-a<2^b-2^a$
ㄷ. $b(2^a-1)<a(2^b-1)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A033

○○
(2007(7)고3-가형5)

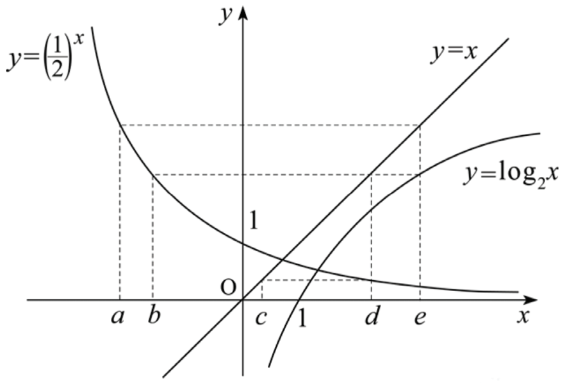
로그함수 $f(x)=\log_a x$에 대하여 $f(m)=2$, $f(n)=3$일 때, $f^{-1}(7)$의 값을 m, n으로 올바르게 나타낸 것은? (단, f^{-1}는 f의 역함수) [3점]

① mn^2 ② m^2n ③ m^2n^2
④ m^2n^3 ⑤ m^3n^2

A034

○○
(2007(10)고3-나형6)

그림은 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다.
옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은? (단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.) [4점]



ㄱ. $\left(\frac{1}{2}\right)^d=c$
ㄴ. $a+d=0$
ㄷ. $ce=1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A035

○○
(2007(9)고2-가형8)

양의 실수 a와 2 이상의 정수 n에 대하여 항상 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\sqrt[n]{a^{2n}}=a^2$
ㄴ. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[2n]{a}=\sqrt[3n]{a}$
ㄷ. $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n+1]{a}=\sqrt[n(n+1)]{a}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A036

○○
(2007(11)고2–나형6)

$2^{x+2y}=a$, $2^{x-y}=b$일 때, 2^{x+y}을 a와 b로 나타내면? [3점]

① $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$　② $\sqrt[3]{\dfrac{b}{a^2}}$　③ $\sqrt{ab}$
④ $\sqrt[3]{ab^2}$　⑤ $\sqrt[3]{a^2b}$

A037

○○
(2007(4)고3–나형4)

1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $a=b^2=c^3$이 성립할 때, $\log_a b+\log_b c+\log_c a$의 값은? [3점]

① $\dfrac{23}{6}$　② $\dfrac{25}{6}$　③ $\dfrac{29}{6}$
④ $\dfrac{31}{6}$　⑤ $\dfrac{35}{6}$

A038

○○
(2007(10)고3–나형27)

두 집합

$$A=\left\{x \mid 2^{x(x-3a)}<2^{a(x-3a)}\right\},$$
$$B=\left\{x \mid \log_3(x^2-2x+6)<2\right\}$$

에 대하여 $A\cap B=A$가 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는? [3점]

① $-1\le a\le 0$　② $-1\le a\le \dfrac{1}{3}$　③ $-\dfrac{1}{3}\le a\le 1$
④ $\dfrac{1}{3}\le a\le 3$　⑤ $1\le a\le 3$

A039

○○
(2008(7)고3–가형13)

1이 아닌 양수 a, $b(a>b)$에 대하여 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=b^x$라 하자. 양수 n에 대하여 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(n)>g(n)$
ㄴ. $f(n)<g(-n)$이면 $a>1$이다.
ㄷ. $f(n)=g(-n)$이면 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=g\left(-\dfrac{1}{n}\right)$이다.

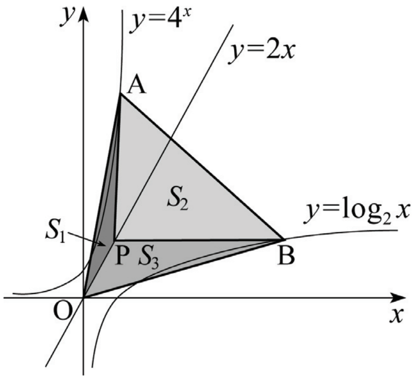
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A040

○○
(2008(10)고3–가형16)

제1사분면에서 직선 $y=2x$ 위의 한 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 A라 하고, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B라 하자. 이때, 세 삼각형 OPA, PAB, OPB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자.

$S_1 : S_2 : S_3 = 3 : k : 7$일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① 17　② 18　③ 19
④ 20　⑤ 21

A041

○○○
(2008(9)고2–가형28)

양의 실수 k에 대하여 k의 네제곱근 중 실수인 것을 a, b $(a>b)$라 하고, k의 세제곱근 중 실수인 것을 c, $-k$의 세제곱근 중 실수인 것을 d라 한다.

이때, $\log_2 \frac{c}{a} = \log_2 \frac{b}{d} + 1$을 만족하는 k의 값을 구하시오. [4점]

A042

○○
(2008사관(1차)–문과1)

1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 $a^2\sqrt[5]{b}=1$이 성립할 때, $\log_a \frac{1}{ab}$의 값은? [2점]

① -9　② -3　③ 3
④ 5　⑤ 9

A043

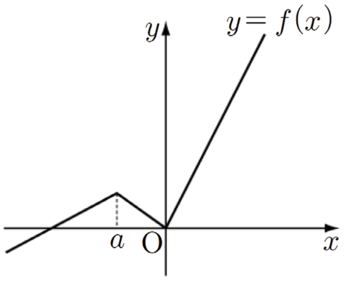
○○
(2009사관(1차)–문과25)

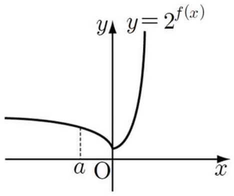
세 실수 a, b, c가 $ab=12$, $bc=8$, $2^a=27$을 만족시킬 때, 4^c의 값을 구하시오. [2점]

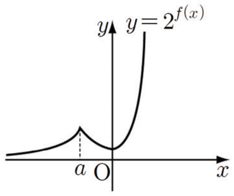
A044

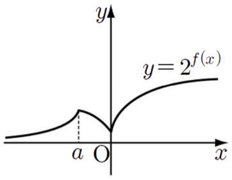
○○
(2009(11)고2−가형11)

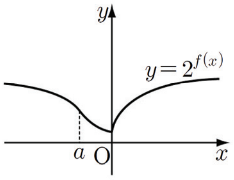
함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $y=2^{f(x)}$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은? [4점]

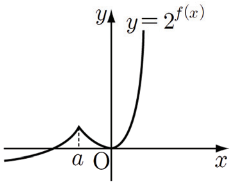


①


②


③


④


⑤


A045

○○○
(2009(11)고2−가형28)

집합 $\{2^n \mid n$은 20 이하의 자연수$\}$에서 서로 다른 두 수 a, b를 임의로 선택할 때, $\log_a b$가 정수가 되는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]

A046

○○○
(2009(6)고2−가형8)

집합 $X=\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\{\sqrt{x} \mid x\in X,\ \sqrt{x}\text{는 실수}\}$$
$$B=\{\sqrt[3]{x} \mid x\in X,\ \sqrt[3]{x}\text{는 실수}\}$$

라 하자. 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 곱은? [3점]

① $2^{\frac{1}{2}}$
② $2^{\frac{2}{3}}$
③ $2^{\frac{5}{6}}$
④ 2
⑤ $2^{\frac{7}{6}}$

A047

○○

(2009(9)고2-나형5)

1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여, a^2은 b의 세제곱근이고 c^3은 b의 네제곱근이다.

$\log_a b+\log_b c=\dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

① 81 ② 82 ③ 83
④ 84 ⑤ 85

A048

○○

(2009(7)고3-가형13)

정의역이 $x<4$인 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$) [3점]

ㄱ. $x_1+x_2>0$
ㄴ. $x_1y_1+x_2y_2<0$
ㄷ. $|x_1y_2|-|x_2y_1|>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A049

○○

(2009(7)고3-나형18)

$a>0$, $a\neq1$에 대하여 $\left\{\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}}\times\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6=a^k$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

A050

○○

(2009경찰대(1차)-공통5)

다음이 성립할 때, $\dfrac{x}{y}$의 값은?

$$\log x+\log 3=2\log(2x-3y)-\log y$$

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 3
④ $\dfrac{10}{3}$ ⑤ 5

A051

○○○
(2009사관(1차)–문과18)

함수 $f(x)=|2^x-2|$의 그래프 위의 세 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$, $(c,\ f(c))$가 $0<a<b<c$와 $f(a)>f(b)>f(c)$를 만족할 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $0<c<1$
ㄴ. $0<f(a)+f(b)+f(c)<3$
ㄷ. 방정식 $f(x)-a=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

A052

○○
(2010(3)고3–가형4)

부등식 $a^{x-1}<a^{2x+1}$의 해가 $x<-2$일 때, 부등식

$$\log_a(x-2)<\log_a(4-x)$$

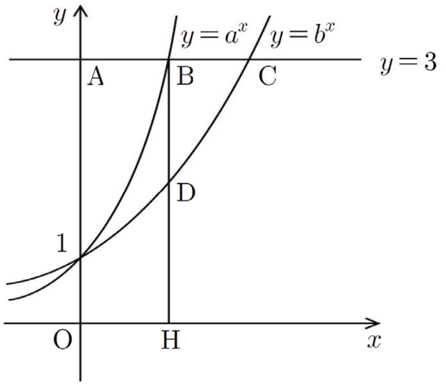
의 해는? (단, 상수 a는 1이 아닌 양수이다.) [3점]

① $2<x<3$ ② $3<x<4$ ③ $2<x<4$
④ $x<3$ ⑤ $x>3$

A053

○○
(2010(6)고2–가형6)

그림과 같이 직선 $y=3$이 $x=0$, $y=a^x$, $y=b^x$(단, $1<b<a$)의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{BH}}$가 $y=b^x$의 그래프와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{DH}}}$의 값은? [3점]



① $\sqrt{2}-1$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A054

○○
(2010(11)고2–가형6)

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^a=\log_2 a$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^b=\log_3 b$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^c=\log_3 c$일 때, 양수 a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]

① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$
④ $c<a<b$ ⑤ $c<b<a$

A055

○○
(2010(11)고2-가형11)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.
(나) $f(x)=\begin{cases} 4^{-x+1}-1 & (0 \le x < 1) \\ 4^{x-1}-1 & (1 \le x < 2) \end{cases}$

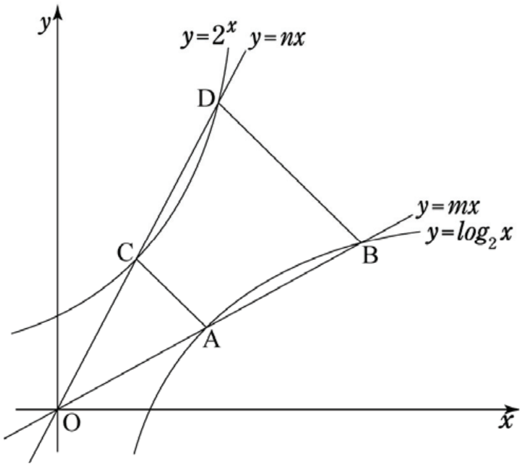
함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프와 만나는 점의 개수는? [4점]

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

A056

○○
(2010(7)고3-나형12)

그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=mx$의 두 교점을 A, B라 하고, 함수 $y=2^x$의 그래프와 직선 $y=nx$의 두 교점을 C, D라 하자. 사각형 ABDC는 등변사다리꼴이고 삼각형 OBD의 넓이는 삼각형 OAC의 넓이의 4배일 때, $m+n$의 값은? (단, O는 원점) [3점]



① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3
④ $\frac{10}{3}$　⑤ 4

A057

○○
(2010(10)고3-나형10)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-2 \le x \le 0$일 때, $f(x)=\lvert x+1\rvert-1$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$

$-10 \le x \le 10$에서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프의 교점의 개수는? [4점]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

A058

○○
(2011(6)고2-가형21)

두 함수

$f(x)=-x^2+2x+1$, $g(x)=a^x\,(a>0,\ a \ne 1)$

이 있다. $-1 \le x \le 2$에서 두 함수 $f(g(x))$, $g(f(x))$의 최댓값이 같아지도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　③ $\sqrt{2}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

A059

○○
(2011(6)고2-가형28)

모든 실수 x에 대하여 지수부등식

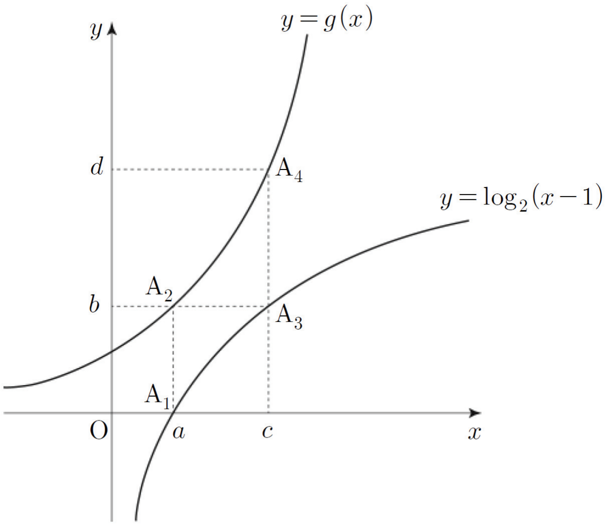
$$5^{2x} \geq k \cdot 5^{x} - 2k - 5$$

가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $\alpha \leq k \leq \beta$이다. $|\alpha\beta|$의 값을 구하시오. [4점]

A060

○○
(2011(11)고2-나형30)

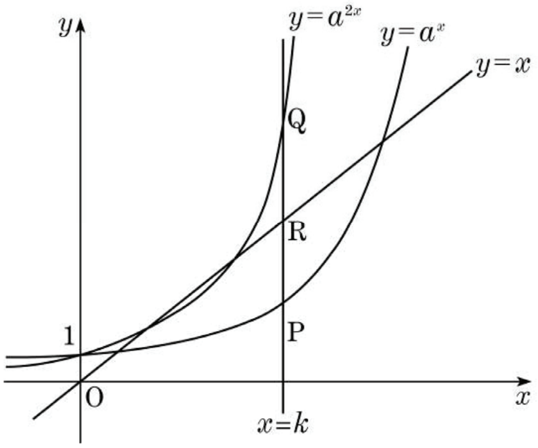
그림과 같이 함수 $y=\log_2(x-1)$과 그 역함수 $y=g(x)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-1)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 $\mathrm{A}_1(a,\ 0)$, 점 A_1을 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 $\mathrm{A}_2(a,\ b)$라 하자. 점 A_2를 지나고 x축에 평행한 직선이
함수 $y=\log_2(x-1)$의 그래프와 만나는 점을 $\mathrm{A}_3(c,\ b)$, 점 A_3을 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 $\mathrm{A}_4(c,\ d)$라 하자.
이때, $\log_{(b-1)}(c-1)(d-1)$의 값을 구하시오. [4점]



A061

●●●
(2011(3)고3-가형14)

그림과 같이 지수함수 $y=a^x$와 $y=a^{2x}$의 그래프는 직선 $y=x$와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다. $y=a^x$의 그래프, $y=a^{2x}$의 그래프와 직선 $x=k$의 교점을 각각 P, Q라 하고 직선 $y=x$와 직선 $x=k$의 교점을 R라 하자.



$k=2$이면 두 점 Q와 R가 일치할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>1$) [4점]

ㄱ. $k=4$이면 두 점 Q와 R가 일치한다.
ㄴ. $\overline{\mathrm{PQ}}=12$이면 $\overline{\mathrm{QR}}=8$이다.
ㄷ. $\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{8}$을 만족시키는 실수 k의 값의 개수는 2이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A062

○○○

(2011(10)고3-나형26)

x에 대한 로그방정식

$$(\log x+\log 2)(\log x+\log 4)=-(\log k)^2$$

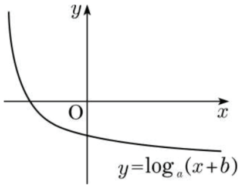
이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 k의 값의 범위가 $\alpha<k<\beta$일 때, $10(\alpha^2+\beta^2)$의 값을 구하시오. [4점]

A063

○○

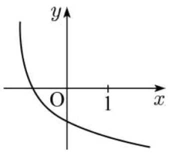
(2011(6)고2-가형15)

함수 $y=\log_a(x+b)(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프가 그림과 같다.

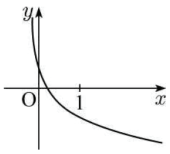


이때, 함수 $y=\log_b(x+a)$의 그래프로 알맞은 것은? [4점]

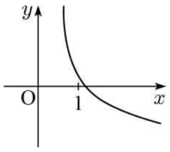
①



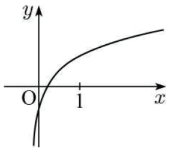
②



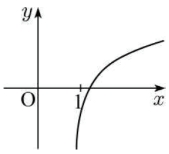
③



④



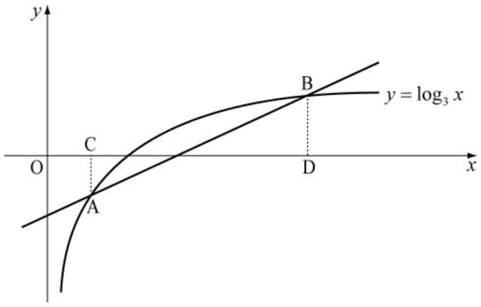
⑤



A064

○○
(2011(9)고2−가형25/나형25)

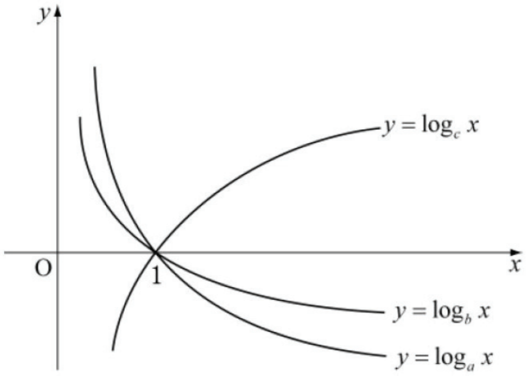
그림과 같이 곡선 $y=\log_3 x$와 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이 두 점 A, B에서 만나고 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{OC}}:\overline{\mathrm{OD}}=1:9$일 때, 선분 CD의 길이를 구하시오. [3점]



A065

○○
(2011(9)고2−가형9)

그림은 세 양수 a, b, c를 밑으로 하는 로그함수의 그래프이다.



$a^{x_1}=b^{x_2}=c^{x_3}>1$일 때, x_1, x_2, x_3의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]

① $x_1>x_2>x_3$ ② $x_2>x_1>x_3$ ③ $x_2>x_3>x_1$
④ $x_3>x_1>x_2$ ⑤ $x_3>x_2>x_1$

A066

○○
(2012(11)고2−A형9/B형9)

좌표평면에서 지수함수 $y=a\cdot 3^x\,(a\neq 0)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1,\ -6)$을 지난다. 이때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A067

○○
(2012사관(1차)−문과12)

x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{cases}\log_3 x+\log_2 \dfrac{1}{y}=1\\[2mm] \log_9 3x+\log_{\frac{1}{2}} y=1-\dfrac{k}{2}\end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha\leq\beta$를 만족시키는 정수 k의 최댓값은? [3점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

A068

○○○
(2012사관(1차)-문과23)

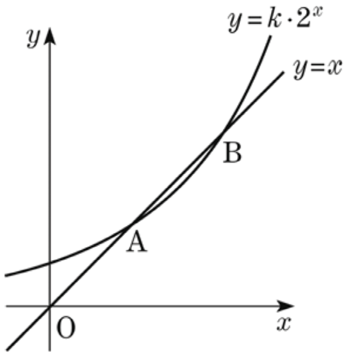
$0<a<b<1$일 때, 직선 $y=1$이 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_b x$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고 직선 $y=-1$이 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_b x$의 그래프와 만나는 점을 R, S라 하자. 네 직선 PS, PR, QS, QR의 기울기를 각각 α, β, γ, δ라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [4점]

① $\delta<\alpha<\beta<\gamma$
② $\gamma<\alpha<\delta<\beta$
③ $\gamma<\alpha<\beta<\delta$
④ $\gamma<\alpha=\delta<\beta$
⑤ $\alpha=\delta<\beta<\gamma$

A069

○○
(2012(6)고2-A형16)

두 함수 $y=k\cdot 2^x$과 $y=x$의 그래프가 그림과 같이 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 점 A가 선분 OB의 중점일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{1}{6}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$
⑤ $\frac{5}{6}$

A070

○○
(2012(6)고2-B형8)

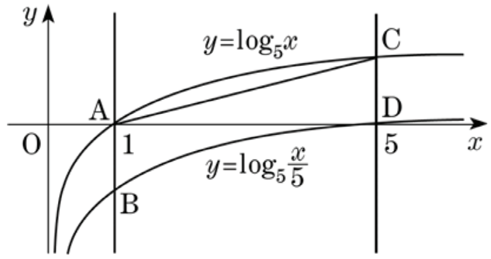
등식 $x^5y^3=5^{15}$을 만족시키는 양의 실수 x, y에 대하여 $m\log_5 x+15\log_5 y$가 일정한 값을 가질 때, 실수 m의 값은? [3점]

① 3
② 5
③ 15
④ 20
⑤ 25

A071

○○
(2012(6)고2-B형16)

그림과 같이 두 곡선 $y=\log_5 x$, $y=\log_5 \frac{x}{5}$가 직선 $x=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 또, 두 곡선이 직선 $x=5$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 곡선 $y=\log_5 x$와 두 선분 AD, DC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S, 곡선 $y=\log_5 \frac{x}{5}$와 세 선분 BA, AC, CD로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 할 때 $S+T$의 값은? [4점]

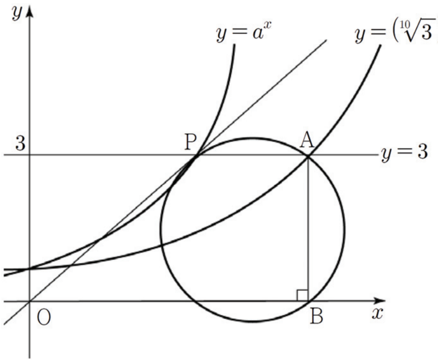


① 4
② 6
③ 8
④ 10
⑤ 12

A072

○○
(2012(9)고2-A형21)

그림과 같이 지수함수 $y=(\sqrt[10]{3})^x$의 그래프가 직선 $y=3$과 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 두 점 A, B를 지나는 원이 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=3$의 교점 P에서 직선 OP에 접하도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? (단, $a>\sqrt[10]{3}$) [4점]



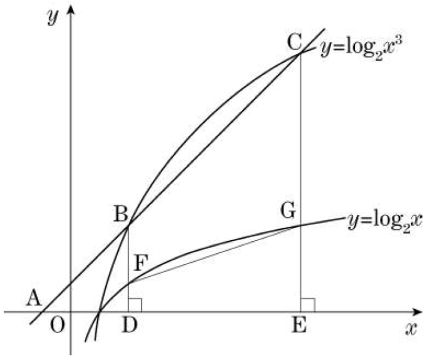
① $3^{\frac{8}{9}}$ ② $3^{\frac{10}{9}}$ ③ $3^{\frac{13}{9}}$

④ $3^{\frac{16}{9}}$ ⑤ $3^{\frac{20}{9}}$

A073

○○○
(2012(3)고3-가형29/나형29)

그림과 같이 x축 위의 한 점 A를 지나는 직선이 곡선 $y=\log_2 x^3$과 서로 다른 두 점 B, C에서 만나고 있다. 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 두 선분 BD, CE가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 F, G라 하자. $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$이고, 삼각형 ADB의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 사각형 BFGC의 넓이를 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 0보다 작다.) [4점]



이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

1	②	2	①	3	3	4	④	5	6
6	①	7	①	8	①	9	①	10	①
11	③	12	16	13	10	14	②	15	③
16	③	17	⑤	18	②	19	①	20	④
21	②	22	①	23	④	24	③	25	⑤
26	④	27	③	28	②	29	⑤	30	④
31	②	32	③	33	②	34	⑤	35	③
36	⑤	37	②	38	③	39	③	40	⑤
41	64	42	⑤	43	81	44	②	45	46
46	⑤	47	⑤	48	③	49	17	50	③
51	⑤	52	②	53	④	54	②	55	①
56	②	57	⑤	58	①	59	25	60	19
61	②	62	25	63	④	64	4	65	⑤
66	③	67	③	68	②	69	③	70	⑤
71	②	72	②	73	24	74	⑤	75	①
76	③	77	②	78	③	79	①	80	5
81	⑤	82	③	83	6	84	10	85	4
86	④	87	②	88	9	89	③	90	④
91	②	92	⑤	93	16	94	31	95	②
96	④	97	③	98	②	99	35	100	25
101	①	102	③	103	④	104	⑤	105	①
106	40	107	④	108	③	109	193	110	③
111	②	112	28	113	16	114	⑤	115	16
116	⑤	117	②	118	127	119	⑤	120	①
121	7	122	②	123	12	124	①	125	⑤
126	①	127	64	128	12	129	②	130	⑤
131	60	132	11	133	75	134	54	135	5
136	②	137	①	138	②	139	④	140	⑤
141	②	142	⑤	143	⑤	144	45	145	24
146	⑤	147	②	148	12	149	75	150	①
151	①	152	12	153	⑤	154	③	155	973
156	①	157	①	158	②				

B 삼각함수

1	④	2	③	3	①	4	②	5	④
6	35	7	192	8	④	9	①	10	⑤
11	②	12	13	13	②	14	⑤	15	50
16	②	17	③	18	①	19	④	20	10
21	③	22	⑤	23	①	24	⑤	25	④
26	150	27	⑤	28	⑤	29	③	30	103
31	②	32	50	33	④	34	②	35	②
36	④	37	30	38	①	39	①	40	②
41	③	42	10	43	9	44	④	45	③
46	②	47	⑤	48	5	49	⑤	50	192
51	10	52	8	53	①	54	⑤	55	②
56	②	57	⑤	58	①	59	③	60	20
61	50	62	①	63	②	64	14	65	①
66	①	67	110	68	10	69	④	70	49
71	②	72	④	73	③	74	80	75	40
76	④	77	②	78	63	79	⑤	80	480
81	⑤	82	⑤	83	③	84	③		

C 수열

1	87	2	⑤	3	④	4	183	5	①
6	⑤	7	105	8	④	9	④	10	③
11	⑤	12	⑤	13	③	14	①	15	⑤
16	②	17	①	18	②	19	⑤	20	②
21	①	22	150	23	①	24	64	25	④
26	⑤	27	324	28	195	29	③	30	⑤
31	⑤	32	②	33	225	34	⑤	35	315
36	④	37	⑤	38	②	39	①	40	496
41	⑤	42	245	43	13	44	③	45	④
46	②	47	271	48	512	49	⑤	50	192
51	②	52	③	53	27	54	①	55	③
56	③	57	②	58	④	59	③	60	③
61	③	62	②	63	544	64	370	65	③
66	603	67	②	68	①	69	⑤	70	⑤
71	④	72	③	73	⑤	74	⑤	75	570
76	①	77	120	78	308	79	④	80	120
81	⑤	82	②	83	①	84	214	85	⑤
86	④	87	②	88	95	89	670	90	675
91	51	92	⑤	93	①	94	④	95	5
96	③	97	33	98	①	99	③	100	⑤
101	①	102	②	103	②	104	252	105	24
106	616	107	11	108	③	109	②	110	⑤
111	②	112	①	113	553	114	42	115	80
116	18	117	③	118	26	119	①	120	①
121	427	122	123	123	235	124	①	125	65
126	200	127	④	128	18	129	8	130	③
131	⑤	132	435	133	16	134	84	135	①
136	9	137	①	138	④	139	③	140	②
141	132	142	26	143	29	144	③	145	27
146	8	147	128	148	67	149	200	150	26
151	④	152	④	153	13	154	⑤	155	142
156	36	157	①	158	64	159	273	160	⑤
161	242	162	477	163	①	164	③	165	13
166	⑤	167	79	168	④	169	④	170	169
171	③	172	①	173	④	174	③	175	525
176	③	177	17	178	164	179	②	180	③
181	③	182	①	183	⑤	184	②	185	①
186	①	187	②	188	10	189	395	190	②
191	282								

D 함수의 극한과 연속

1	②	2	15	3	④	4	④	5	⑤
6	21	7	④	8	④	9	32	10	③
11	④	12	④	13	②	14	②	15	③
16	⑤	17	⑤	18	16	19	12	20	③
21	②	22	③	23	③	24	56	25	③
26	⑤	27	③	28	②	29	④	30	19
31	60	32	2	33	19	34	4	35	①
36	①	37	②	38	④	39	⑤	40	②
41	⑤	42	①	43	7	44	15	45	6

E 미분

1	⑤	2	③	3	④	4	118	5	②
6	①	7	③	8	⑤	9	③	10	⑤
11	①	12	②	13	⑤	14	45	15	⑤
16	⑤	17	①	18	③	19	①	20	③
21	③	22	①	23	③	24	①	25	54
26	①	27	②	28	①	29	②	30	③
31	11	32	②	33	④	34	①	35	③
36	⑤	37	30	38	196	39	17	40	④
41	③	42	9	43	⑤	44	①	45	②
46	130	47	23	48	②	49	48	50	56
51	⑤	52	480	53	60	54	④	55	①
56	⑤	57	64	58	⑤	59	②	60	59
61	④	62	⑤	63	20	64	36	65	82
66	③	67	39	68	①	69	32	70	①
71	②	72	3	73	②	74	19	75	④
76	⑤	77	④	78	24	79	16	80	③
81	②	82	30	83	③	84	⑤	85	①
86	①	87	②	88	35	89	①	90	160
91	⑤	92	34	93	④	94	③	95	①
96	36	97	③						

F 적분

1	−1	2	③	3	②	4	⑤	5	④
6	50	7	③	8	④	9	26	10	③
11	16	12	⑤	13	①	14	27	15	①
16	12	17	54	18	②	19	④	20	③
21	①	22	④	23	⑤	24	③	25	200
26	⑤	27	17	28	⑤	29	4	30	28
31	①	32	⑤	33	⑤	34	②	35	64
36	④	37	②	38	②	39	27	40	②
41	32	42	①	43	⑤	44	250	45	④
46	20	47	⑤	48	⑤	49	20	50	①
51	36	52	137	53	③	54	20	55	④
56	⑤	57	②	58	⑤	59	⑤	60	⑤
61	9	62	⑤	63	35	64	①	65	57
66	⑤	67	②	68	⑤	69	25	70	⑤
71	21	72	340	73	80	74	②	75	④
76	③	77	⑤	78	②	79	⑤	80	12
81	37	82	③	83	432	84	②	85	80
86	②	87	①	88	②	89	50	90	21
91	③	92	②	93	8	94	⑤	95	41
96	④	97	②	98	13	99	④	100	④
101	17								

해설 목차

수학 I

수학 II

A 지수함수와 로그함수

1	②	2	①	3	3	4	④	5	6
6	①	7	①	8	①	9	①	10	①
11	③	12	16	13	10	14	②	15	③
16	③	17	⑤	18	②	19	①	20	④
21	②	22	①	23	④	24	③	25	⑤
26	④	27	③	28	②	29	⑤	30	④
31	②	32	③	33	②	34	⑤	35	③
36	⑤	37	②	38	③	39	③	40	⑤
41	64	42	⑤	43	81	44	②	45	46
46	⑤	47	⑤	48	③	49	17	50	③
51	⑤	52	②	53	④	54	②	55	①
56	②	57	⑤	58	①	59	25	60	19
61	②	62	25	63	④	64	4	65	⑤
66	③	67	③	68	②	69	③	70	⑤
71	②	72	②	73	24	74	⑤	75	①
76	③	77	②	78	③	79	①	80	5
81	⑤	82	③	83	6	84	10	85	4
86	④	87	②	88	9	89	③	90	④
91	②	92	⑤	93	16	94	31	95	②
96	④	97	③	98	②	99	35	100	25
101	①	102	③	103	④	104	⑤	105	①
106	40	107	④	108	③	109	193	110	③
111	②	112	28	113	16	114	⑤	115	16
116	⑤	117	②	118	127	119	⑤	120	①
121	7	122	②	123	12	124	①	125	⑤
126	①	127	64	128	12	129	②	130	⑤
131	60	132	11	133	75	134	54	135	5
136	②	137	①	138	②	139	④	140	⑤
141	②	142	⑤	143	⑤	144	45	145	24
146	⑤	147	②	148	12	149	75	150	①
151	①	152	12	153	⑤	154	③	155	973
156	①	157	①	158	②				

A001 ㅣ답 ②

[풀이]

$\log_a b = t$, $\log_a c = s$로 두자.

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\log_c b \times \log_b a$

$= \dfrac{\log_a b}{\log_a c} \times \dfrac{1}{\log_a b} = \dfrac{1}{s} = 2$ 즉, $s = \dfrac{1}{2}$

$\log_b c \times \log_c a$

$= \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \times \dfrac{1}{\log_a c} = \dfrac{1}{t} = 3$ 즉, $t = \dfrac{1}{3}$

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\therefore\ \log_c a \times \log_a b$

$= \dfrac{1}{\log_a c} \times \log_a b = \dfrac{t}{s} = \dfrac{2}{3}$

답 ②

A002 ㅣ답 ①

[풀이]

로그의 밑의 변환의 공식과 로그의 성질에 의하여

$\log_a \sqrt{b} = \dfrac{\log_3 \sqrt{b}}{\log_3 a} = \dfrac{\log_3 b}{2\log_3 a}$

$= \dfrac{\log_3 3^y}{2\log_3 9^x} = \dfrac{y\log_3 3}{2x\log_3 9} = \dfrac{y}{4x}$

답 ①

A003 ㅣ답 3

[풀이]

$2^x + 2^{-x} = t$로 두자.

산술기하절대부등식에 의하여

$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x 2^{-x}} = 2$

(단, 등호는 $x = 0$일 때 성립한다.)

주어진 함수는

$y = t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2$

(단, $t \geq 2$)

주어진 함수의 최솟값은 3이다.

이때, $t = 2$이다.

답 3

A004 ㅣ답 ④

[풀이]

자연수 k에 대하여 부등식 $2^{k-1} \leq x < 2^k$을 만족시키는 정수 x의 개수는 $\boxed{2^{k-1}}(= 2^k - 2^{k-1})$이다.

이 $\boxed{2^{k-1}}$ 개의 각각의 x에 대하여

$\log_2 2^{k-1} = k-1$, $\log_2 2^k = k$이므로

(즉, $k - 1 \leq \log_2 x < k$이므로)

$0 \leq y \leq \log_2 x$를 만족시키는 정수 y의 개수는 $\boxed{k}$이다.

($\because$ y가 가질 수 있는 값은 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$이다.)

따라서 $2^{k-1} \leq x < 2^k$인 범위에서 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 $\boxed{2^{k-1}} \times \boxed{k}$이다.

그런데 자연수 k는 1부터 $\boxed{10}$ 까지의 값을 취할 수 있으므로 각각의 k값을 대입하여 그 합을 구하면 9217이다.

(가): 2^{k-1}

(나): k

(다): 10

답 ④

A005 | 답 6

[풀이]

k는 제곱수인 동시에 세제곱수인 동시에 네제곱수이다.

2, 3, 4의 최소공배수는 12이므로

$k = 2^{12},\ 3^{12},\ 4^{12},\ \cdots$

$p = 2^{12}$이므로

$\therefore\ \log_4 p = \log_4 2^{12} = \dfrac{12}{2} = 6$

답 6

A006 | 답 ①

[풀이]

로그의 정의에 의하여

$\log_3 x = a,\ \log_3 y = b,\ \log_3 z = c$

로그의 밑의 변환의 공식과 로그의 성질에 의하여

$\therefore\ \log_x yz + \log_y zx + \log_z xy$

$= \dfrac{\log_3 y + \log_3 z}{\log_3 x} + \dfrac{\log_3 z + \log_3 x}{\log_3 y} + \dfrac{\log_3 x + \log_3 y}{\log_3 z}$

$= \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} + \dfrac{a+b}{c}$

$= \dfrac{-a}{a} + \dfrac{-b}{b} + \dfrac{-c}{c}$ ($\because$ $a+b+c=0$)

$= -3$

답 ①

A007 | 답 ①

[풀이]

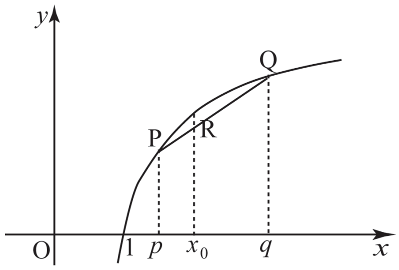
〈증명〉

$pq = \boxed{p+q}$이므로

($\because$ $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\ \ \dfrac{p+q}{pq} = 1$)

$\dfrac{\log_2 p}{p} + \dfrac{\log_2 q}{q} = \dfrac{q\log_2 p + p\log_2 q}{pq}$

$= \dfrac{q\log_2 p + p\log_2 q}{\boxed{p+q}}$ $\cdots$ ㉠



$\overline{\mathrm{PQ}}$를 $p:q$로 내분하는 점을 $\mathrm{R}(x_0,\ y_0)$라 하면

$x_0 = \dfrac{2pq}{p+q} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}} = \boxed{2}$,

$y_0 = \dfrac{q\log_2 p + p\log_2 q}{p+q}$ $\cdots$ ㉡

그런데 곡선 $y = \log_2 x$는 $\boxed{\text{위로 볼록}}$이므로

$y_0 \leq \log_2 x_0$이다.

따라서 ㉠, ㉡에서

$\dfrac{q\log_2 p + p\log_2 q}{p+q} \leq 1 = \log_2 2$

즉, $\dfrac{q\log_2 p + p\log_2 q}{pq} \leq 1$

$\therefore\ \dfrac{\log_2 p}{p} + \dfrac{\log_2 q}{q} \leq 1$

(가): $p+q$

(나): 2

(다): 위로 볼록

답 ①

A008 | 답 ①

[풀이]

$(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} \times (\sqrt{3})^{\sqrt{2}} - (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \times (\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

$= (\sqrt{2})^{\boxed{\sqrt{2}}} \times (\sqrt{3})^{\sqrt{2}} \left\{ (\sqrt{2})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - (\sqrt{3})^{\boxed{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \right\}$

(이때, 우변을 전개하여 좌변과 비교하면 된다.)

그런데 $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \boxed{<} (\sqrt{3})^{\boxed{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$이고

($\because$ $\sqrt{2} < \sqrt{3}$)

$(\sqrt{2})^{\boxed{\sqrt{2}}} > 0,\ (\sqrt{3})^{\sqrt{2}} > 0$이므로

$(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} \times (\sqrt{3})^{\sqrt{2}} - (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \times (\sqrt{3})^{\sqrt{3}} \boxed{<} 0$

$\therefore\ (\sqrt{2})^{\sqrt{3}} \times (\sqrt{3})^{\sqrt{2}} \boxed{<} (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \times (\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

(가): $\sqrt{2}$

(나): $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(다): $<$

답 ①

A009 | 답 ①

[풀이]

지수함수 $y=10^x$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 함수

$y=10^{x-k}$

의 그래프와 일치한다.

로그함수 $y=\log x$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 함수

$y=\log x+k$

의 그래프와 일치한다.

$y=10^{x-k}$을 x에 대하여 풀면

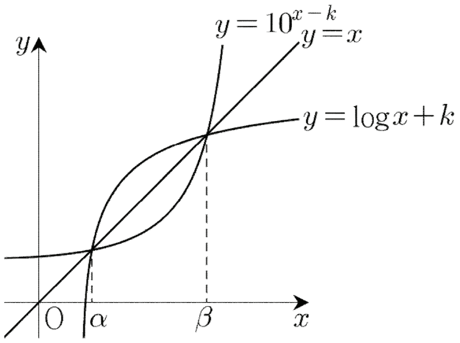
$x=\log y+k$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log x+k$

이므로 두 함수 $y=10^{x-k}$와 $y=\log x+k$는 서로 역함수이다.

두 함수 $y=10^{x-k}$와 $y=\log x+k$는 증가함수이므로, 두 함수의 그래프가 만나는 두 점은 모두 직선 $y=x$ 위에 있다. 이 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라고 하자. (단, $\alpha<\beta$)



문제에서 주어진 조건에 의하여 두 점 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$ 사이의 거리는 $\sqrt{2}$이므로 두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}$

정리하면

$\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\sqrt{2}$ 즉, $\beta-\alpha=1$ …㉠

두 점 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$는 모두 곡선 $y=\log x+k$ 위에 있으므로

$\alpha=\log\alpha+k$, $\beta=\log\beta+k$ …㉡

위의 두 식을 변변히 빼서 정리하면

$\beta-\alpha=\log\dfrac{\beta}{\alpha}$

즉, $\log\dfrac{\beta}{\alpha}=1$에서 $\beta=10\alpha$ …㉢

㉠, ㉢을 연립하면

$\alpha=\dfrac{1}{9}$, $\beta=\dfrac{10}{9}$

이를 ㉡에 대입하면

$\dfrac{1}{9}=\log\dfrac{1}{9}+k$

정리하면

$\therefore\ k=\dfrac{1}{9}+2\log 3$

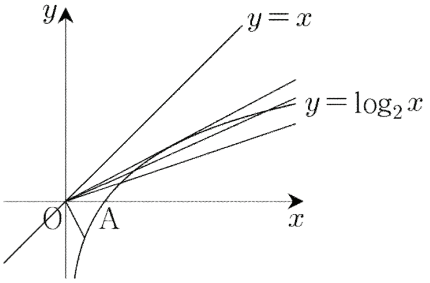
답 ①

A010 | 답 ①

[풀이]

$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{P}(x,\ \log_2 x)$, $\mathrm{Q}(x,\ \log_2(x+1))$으로 두자.

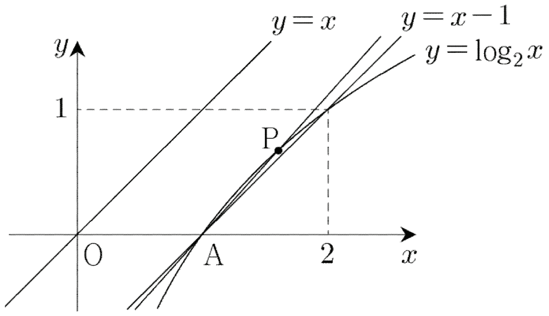
▸ ㄱ. (참)



위의 그림에서 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 임의의 점 P에 대하여 직선 OP의 기울기는 1보다 작다.

즉, $\dfrac{\log_2 x-0}{x-0}<1$, $\dfrac{\log_2 x}{x}<1$

▸ ㄴ. (거짓)



위의 그림처럼 점 P의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작으면 직선 AP의 기울기가 1보다 크다.

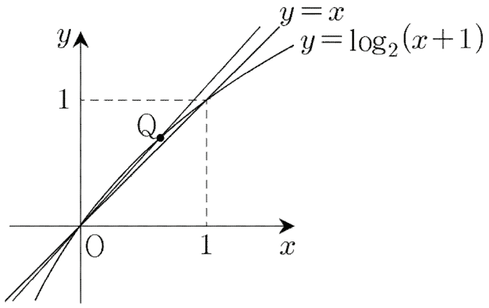
즉, $1<x<2$이면 $\dfrac{\log_2 x-0}{x-1}>1$, $\dfrac{\log_2 x}{x-1}>1$

따라서 보기 ㄴ에서 주어진 부등식은 항상 성립하는 것이 아니

다.

▸ ㄷ. (거짓)

곡선 $y=\log_2 x$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 일치한다.



위의 그림처럼 점 Q의 x좌표가 0보다 크고 1보다 작으면 직선 OQ의 기울기가 1보다 크다.

즉, $0<x<1$이면 $\dfrac{\log_2(x+1)-0}{x}>1$,

$\dfrac{\log_2(x+1)}{x}>1$

따라서 보기 ㄷ에서 주어진 부등식은 항상 성립하는 것이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

A011 ㅣ답 ③

[풀이]

$2<x<8 \Leftrightarrow 3\log_2 x > x+1$,

$\log_2 x^3 > x+1,\ x^3 > 2^{x+1}$

이제 $x=t+1$로 두면

$1<t<7 \Leftrightarrow 2^{t+2} < (t+1)^3$

$\therefore\ \alpha=1,\ \beta=7,\ \alpha+\beta=8$

답 ③

A012 ㅣ답 16

[풀이]

$3=2^{\frac{a}{2}}$, $5=3^{\frac{b}{3}}$이므로 $5=2^{\frac{ab}{6}}$

$\therefore\ 5^c=2^{\frac{abc}{6}}=2^{\frac{24}{6}}=2^4=16$

답 16

A013 ㅣ답 10

[풀이]

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 모두 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$f(1)=4,\ g(1)=4$

역함수의 성질에 의하여

$f^{-1}(4)=1,\ g^{-1}(4)=1$

이므로

$f^{-1}(4)=\log_4(4+p)+q=1$ …㉠

$g^{-1}(4)=\log_{\frac{1}{2}}(4+p)+q=1$

위의 두 식을 변변히 빼면

$\log_4(4+p)-\log_{\frac{1}{2}}(4+p)=0$

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\dfrac{1}{2}\log_2(4+p)+\log_2(4+p)=0$

정리하면

$\log_2(4+p)=0$

로그의 정의에 의하여

$4+p=2^0=1$이므로 $p=-3$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$q=1$

$\therefore\ p^2+q^2=10$

답 10

A014 ㅣ답 ②

[풀이]

$2^{\frac{x}{2}}=t$로 두자. 이때, $t>0$이다.

문제에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$2t^2-4t\geq -a$(단, $t>0$)

$t>0$일 때,

$2t^2-4t=2(t-1)^2-2\geq -2$

(단, 등호는 $t=1$일 때 성립한다.)

이므로

$-a\leq -2$ 즉, $a\geq 2$이어야 한다.

답 ②

A015 ㅣ답 ③

[풀이]

곡선 $y=\log_3 x$의 x절편이 1이므로 $\mathrm{A}(1,\ 0)$이다.

두 점 O, A를 평행이동시킨 점을 각각 O′, A′라고 하면

$O'(3,\ 2)$, $A'(4,\ 2)$

곡선 $y=\log_3(x+a)$가 선분 $O'A'$와 만나려면

$\log_3(3+a)\le 2$, $\log_3(4+a)\ge 2$

이어야 한다. 각각을 풀면

$a\le 6$, $a\ge 5$, 즉 $5\le a\le 6$

따라서 구하는 값은 11이다.

답 ③

A016

|답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$(a,\ b)\in A$이면 $b=\log_3 a$이므로

$b+1=\log_3 a+1=\log_3 3a$에서

$(3a,\ b+1)\in A$

▸ ㄴ. (거짓)

$\left(\frac{a}{3},\ b\right)\in A$이면 $b=\log_3\frac{a}{3}$이므로

$b-1=\log_3\frac{a}{3}-1=\log_3\frac{a}{9}$에서

$\left(\frac{a}{9},\ b-1\right)\in A$

왜냐하면 $\frac{a}{9}=a$이면 $a=0$인데, 이는 a가 양수라는 조건에 맞지 않는다.

(물론 $(a,\ b+1)\in A$임을 보여도 좋다.)

▸ ㄷ. (참)

$(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in A$이면

$b=\log_3 a$, $d=\log_3 c$에서 $b+d=\log_3 ac$이므로

$(ac,\ b+d)\in A$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A017

|답 ⑤

[풀이]

$2^x=t$로 두면 문제에서 주어진 방정식은

$t^2-2at+(a-3)(a+2)=0$ (단, $t>0$)

t에 대한 이차방정식의 서로 다른 두 양의 실근을 각각 α, β라고 하자.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a>0$에서 $a>0$

$\alpha\beta=(a-3)(a+2)>0$에서 $a<-2$ 또는 $a>3$

a에 대한 연립부등식을 풀면

$\therefore\ a>3$

답 ⑤

A018

|답 ②

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$\log_3 18=\log_3 2\times 3^2=2+\log_3 2$

이므로 $p=2+\log_3 2$

로그의 성질과 로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\therefore\ \log_2 54=\log_2 2\times 3^3=1+3\log_2 3$

$=1+\frac{3}{\log_3 2}=1+\frac{3}{p-2}=\frac{p+1}{p-2}$

답 ②

A019

|답 ①

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

로그의 밑의 조건을 생각하자.

$a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이고,

방정식 $a^2-a+2=1$은 실근을 갖지 않으므로

$(\because\ a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0)$

로그의 밑의 조건을 만족시킨다.

로그의 진수의 조건을 생각하자.

$a^2+1>0$이므로

로그의 진수의 조건을 만족시킨다.

▸ ㄴ. (거짓)

로그의 밑의 조건을 생각하자.

$2|a|+1>0$이지만,

방정식 $2|a|+1=1$은 실근 $a=0$을 가지므로

로그의 밑의 조건을 만족시키지 않는다.

▸ ㄷ. (거짓)

로그의 진수의 조건을 생각하자.

$a^2-2a+1=(a-1)^2\ge 0$이므로

$a=1$이면 진수가 0이다.

즉, $a=1$은 로그의 진수의 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

A020

|답 ④

[풀이]

지수법칙에 의하여

$x=2^{-\frac{8}{n}}$이 자연수가 되는 정수 n은 -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8이다.

그런데 n이 1, 2, 4, 8이면 x는 자연수가 아니고, n이 -8, -4, -2, -1이면 x는 자연수이다.

$n=-8$일 때, $x=2$

$n=-4$일 때, $x=4$

$n=-2$일 때, $x=16$

$n=-1$일 때, $x=256$

따라서 구하는 경우의 수는 4이다.

답 ④

A021

|답 ②

[풀이]

로그의 밑의 조건에서

$|x|>0$(즉, $x\neq 0$),

$|x|\neq 1$(즉, $x\neq -1$, $x\neq 1$)

로그의 진수의 조건에서

$(x+3)(5-x)>0$

풀면

$-3<x<5$

정수 x는 -2, 2, 3, 4이다.

답 ②

A022

|답 ①

[풀이]

$100=2^2 5^2$이므로 100의 양의 약수를 모두 쓰면

$2^0\times 5^0$, $2^1\times 5^0$, $2^2\times 5^0$,

$2^0\times 5^1$, $2^1\times 5^1$, $2^2\times 5^1$,

$2^0\times 5^2$, $2^1\times 5^2$, $2^2\times 5^2$

로그의 성질에 의하여

$\therefore\ \log a_1+\log a_2+\log a_3+\ \cdots\ +\log a_9$

$=\log a_1\times a_2\times a_3\times\ \cdots\ \times a_9$

$=\log 2^{3(0+1+2)}\times 5^{3(0+1+2)}$

$=\log 10^9=9$

답 ①

A023

|답 ④

[풀이]

$\log_2 a=A$, $\log_2 b=B$, $\log_2 c=C$

로 두자.

이때, $a>1$, $b>1$, $c>1$이므로

$A>0$, $B>0$, $C>0$이다.

첫 번째 등식을 변형하자.

로그의 성질에 의하여

$\log_2 a^2 b^3=2\log_2 a+3\log_2 b$

$=2A+3B=6$ $\cdots$ ㉠

두 번째 등식을 변형하자.

로그의 성질에 의하여

$$3\left(\frac{\log_2 c}{\log_2 a}\right)^2-2\left(\frac{\log_2 c}{\log_2 b}\right)^2=-\left(\frac{\log_2 c}{\log_2 a}\right)\left(\frac{\log_2 c}{\log_2 b}\right)$$

$$\frac{3C^2}{A^2}-\frac{2C^2}{B^2}=-\frac{C^2}{AB}$$

양변을 $C^2(\neq 0)$으로 나누면

$$\frac{3}{A^2}-\frac{2}{B^2}=-\frac{1}{AB}$$

양변에 $A^2B^2(\neq 0)$을 곱하면

$3B^2-2A^2=-AB$

변형하면

$3B^2+AB-2A^2=0$, $(3B-2A)(B+A)=0$

풀면

$B=\frac{2}{3}A$ ($\because B\neq -A$) $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$A=\frac{3}{2}$, $B=1$

로그의 성질에 의하여

$\therefore\ \log_2 ab=\log_2 a+\log_2 b=A+B=\frac{5}{2}$

답 ④

A024

|답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

거듭제곱근의 성질에 의하여

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{a}}}=\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{a}\,\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}=\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}$$

▸ ㄴ. (거짓)

$(\sqrt[3]{a})^4 = \sqrt[3]{a^4} \neq \sqrt[12]{a}$

예를 들어 $a=8$일 때,

$(\sqrt[3]{a})^4=16 \neq \sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{a}$

(∵ 유리수가 무리수일 수 없다. 이 역도 성립한다.)

▶ ㄷ. (참)

$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^4}\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^5}} = \sqrt[6]{a^5}$

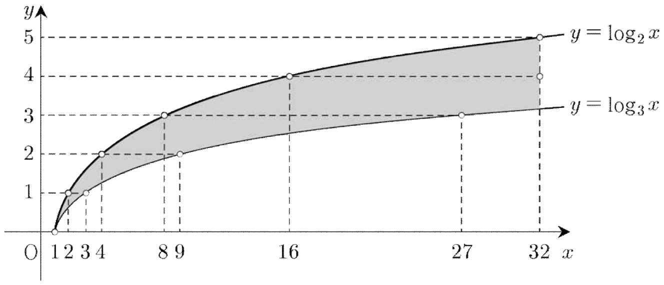
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A025 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 영역을 좌표평면에 표현하면 다음과 같다.



y좌표가 1인 격자점의 개수: $3^1-2^1-1=0$

y좌표가 2인 격자점의 개수: $3^2-2^2-1=4$

y좌표가 3인 격자점의 개수: $3^3-2^3-1=18$

y좌표가 4인 격자점의 개수: $32-2^4-1=15$

따라서 구하는 값은 $0+4+18+15=37$이다.

답 ⑤

A026 | 답 ④

[풀이]

역함수의 성질에 의하여

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

즉, $g(x)=\log_a x$ (단, $a>1$)

문제에서 주어진 그림에서

$a^p=2$, $a^q=3$, 즉 $p=\log_a 2$, $q=\log_a 3$

$\therefore\ g(12)=\log_a 12=2\log_a 2+\log_a 3=2p+q$

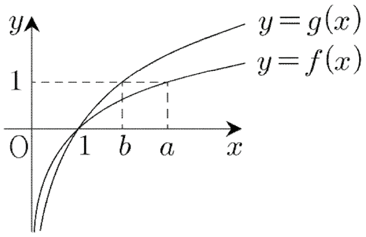
답 ④

A027 | 답 ③

[풀이]

▶ ㄱ. (참)

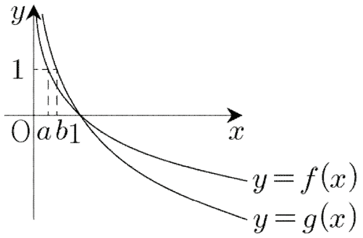
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<x<1$에서 $f(x)>g(x)$이다.

▶ ㄴ. (거짓)

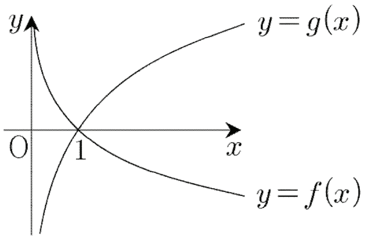
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<x<1$에서 $f(x)<g(x)$이다.

▶ ㄷ. (참)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<x<1$에서 $f(x)>g(x)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A028 | 답 ②

[풀이]

이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=p^2-4q\geq 0$ ⋯㉠

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$

로그의 성질에 의하여

$\log_2(\alpha+\beta)=\log_2\frac{\alpha\beta}{2}$,

$\log_2(-p)=\log_2\frac{q}{2}$, 즉

$-p=\frac{q}{2}$, $q=-2p$ (단, $p<0$, $q>0$) ⋯㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$p^2+8p\geq 0 \Leftrightarrow p\leq -8(\because p<0)$

$q-p=-3p$이므로

$\therefore\ q-p\geq 24$

답 ②

A029

|답 ⑤

[풀이]

$2^x=t(x>0)$로 두면 $x=\log_2 t$이므로

$f(t)=-\log_3(\log_2 t)$ (단, $t>1$)

$t(>1)$가 증가할 때, 양수 $\log_2 t$는 증가하므로

$f(t)$는 감소한다.

그런데 $f(2)=0$이므로 곡선 $y=f(t)$의 x절편은 2이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 ⑤와 같이 그려진다.

답 ⑤

A030

|답 ④

[풀이]

지수법칙에 의하여

$$\sqrt{\frac{2^a\cdot 5^b}{2}}=2^{\frac{a-1}{2}}5^{\frac{b}{2}},\ \sqrt[3]{\frac{2^a\cdot 5^b}{5}}=2^{\frac{a}{3}}5^{\frac{b-1}{3}}$$

위의 두 수가 모두 자연수이어야 하므로

네 수

$2^{\frac{a-1}{2}}$, $2^{\frac{a}{3}}$, $5^{\frac{b}{2}}$, $5^{\frac{b-1}{3}}$

는 모두 자연수이다.

a는 홀수이면서 3의 배수이므로 a의 최솟값은 3이다.

b는 짝수이면서 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수이므로 b의 최솟값은 4이다.

따라서 $a+b$의 최솟값은 7이다.

답 ④

A031

|답 ②

[풀이]

지수법칙에 의하여

$$a^2b\times\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}=a^2b\times a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=a^{2-\frac{1}{3}}b^{1+\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{3}}$$

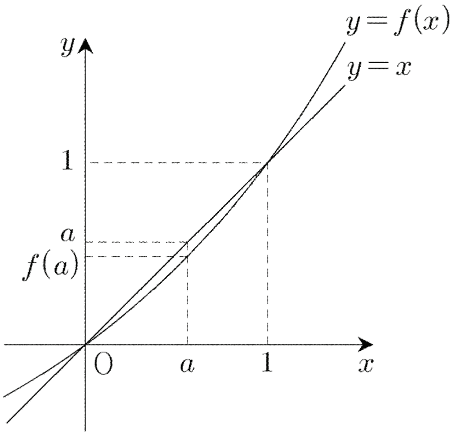
답 ②

A032

|답 ③

[풀이]

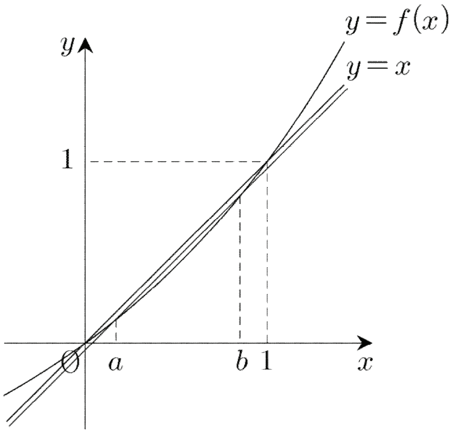
▸ ㄱ. (참)



위의 그림에서

$0<a<1$이면 $f(a)<a$

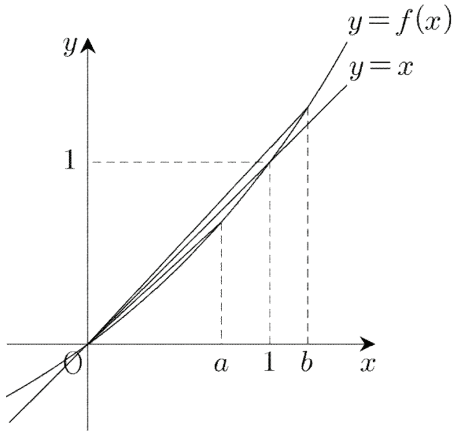
▸ ㄴ. (거짓)



위의 그림처럼 $\frac{2^b-1-(2^a-1)}{b-a}=1$인 두 양의 실수 a, b $(a<b<1)$가 존재한다.

이때, $2^b-2^a=b-a$이므로 보기에서 주어진 부등식이 항상 성립하는 것은 아니다.

▸ ㄷ. (참)



위의 그림처럼

$0<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\frac{2^a-1}{a}<\frac{2^b-1}{b}$$

양변에 $ab(>0)$을 곱하면

$\therefore\ b(2^a-1)<a(2^b-1)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A033

|답 ②

[풀이]

$f(m)=\log_a m=2$, $a^2=m$

$f(n)=\log_a n=3$, $a^3=n$

역함수의 성질에 의하여

$f^{-1}(7)=k$로 두면 $f(k)=7$

$\log_a k=7$에서 $a^7=k$

$\therefore\ k=a^7=a^{2\times2+3}=(a^2)^2a^3=m^2n$

답 ②

A034

|답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

점 $(d,\ c)$는 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 위에 있으므로

$$c=\left(\frac{1}{2}\right)^d$$

▸ ㄴ. (참)

점 $(e,\ d)$는 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 있고,

점 $(a,\ e)$는 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 위에 있으므로

$d=\log_2 e$, $e=\left(\frac{1}{2}\right)^a (\Leftrightarrow a=-\log_2 e)$

$\therefore\ a+d=0$

▸ ㄷ. (참)

$$ce=\left(\frac{1}{2}\right)^d\left(\frac{1}{2}\right)^a=2^{-(a+d)}=1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A035

|답 ③

[풀이]

지수법칙을 적용하여 문제를 해결하자.

▸ ㄱ. (참)

$$\sqrt[n]{a^{2n}}=a^{\frac{2n}{n}}=a^2$$

▸ ㄴ. (거짓)

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[2n]{a}=a^{\frac{1}{n}}a^{\frac{1}{2n}}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}}=a^{\frac{3}{2n}}=\sqrt[2n]{a^3}$$

그런데 모든 자연수 n에 대하여

$\sqrt[2n]{a^3}$와 $\sqrt[3n]{a}$가 같은 것은 아니므로

$\therefore\ \sqrt[n]{a}\sqrt[2n]{a}\neq\sqrt[3n]{a}$

(예를 들어 $n=2$, $a=2^{12}$이면

$\sqrt[n]{a}\sqrt[2n]{a}=\sqrt[2n]{a^3}=2^9$, $\sqrt[3n]{a}=2^2$이다.)

▸ ㄷ. (참)

$$\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n+1]{a}$$

$$=a^{\frac{1}{n}}\div a^{\frac{1}{n+1}}=a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}=a^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$=\sqrt[n(n+1)]{a}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A036

|답 ⑤

[풀이]

우선 아래의 항등식을 만족시키는 두 상수 m, n의 값을 결정하자.

$m(x+2y)+n(x-y)=x+y$

정리하면

$(m+n)x+(2m-n)y=x+y$

$m+n=1$, $2m-n=1$

m, n에 대한 연립방정식을 풀면

$m=\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$

지수법칙에 의하여

$\therefore\ 2^{x+y} = (2^{x+2y})^{\frac{2}{3}} \times (2^{x-y})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{a^2 b}$

답 ⑤

A037 | 답 ②

[풀이]

거듭제곱근의 성질과 유리수 지수의 정의에 의하여

$b = a^{\frac{1}{2}},\ c = a^{\frac{1}{3}}$

로그의 밑의 변환의 공식과 로그의 성질에 의하여

$\therefore\ \log_a b + \log_b c + \log_c a$

$= \dfrac{\log b}{\log a} + \dfrac{\log c}{\log b} + \dfrac{\log a}{\log c}$

$= \dfrac{\log a^{\frac{1}{2}}}{\log a} + \dfrac{\log a^{\frac{1}{3}}}{\log a^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{\log a}{\log a^{\frac{1}{3}}}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = \dfrac{25}{6}$

답 ②

A038 | 답 ③

[풀이]

집합 A에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$2^{x(x-3a)} < 2^{a(x-3a)}$

밑이 1보다 크므로

$x(x-3a) < a(x-3a)$

정리하면

$(x-a)(x-3a) < 0$

풀면

$a > 0$일 때, $a < x < 3a$ …㉠

$a < 0$일 때, $3a < x < a$ …㉡

$a = 0$일 때, 부등식은 $x^2 < 0$이고, 이를 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다. 왜냐하면 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 0$이기 때문이다.

따라서 $A = \varnothing$ 이다. …㉢

집합 B에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$\log_3(x^2 - 2x + 6) < \log_3 9$

밑이 1보다 크므로

$x^2 - 2x + 6 < 9$ 즉, $x^2 - 2x - 3 < 0$

좌변을 인수분해하면

$(x-3)(x+1) < 0$

풀면

$-1 < x < 3$ …㉣

한편 아래의 필요충분조건이 성립한다.

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

㉠과 ㉣에서 $-1 \leq a,\ 3a \leq 3$

정리하면 $0 < a \leq 1 (\because a > 0)$

㉡과 ㉣에서 $-1 \leq 3a,\ a \leq 3$

정리하면 $-\dfrac{1}{3} \leq a < 0 (\because a < 0)$

㉢과 ㉣에서 $a = 0$이고, $\varnothing = A \subset B$

따라서 a의 범위는

$-\dfrac{1}{3} \leq a \leq 1$

답 ③

A039 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$\dfrac{a}{b} > 1$이므로 임의의 양수 n에 대하여

$\dfrac{f(n)}{g(n)} = \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n > 1\ \ \therefore\ f(n) > g(n)$

▸ ㄴ. (거짓)

(반례)

$a = \dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{1}{4},\ n = 2$이면

$f(n) = \dfrac{1}{4},\ g(-n) = 8$

이므로 $f(n) < g(-n)$이다.

하지만 $a < 1$이다.

▸ ㄷ. (참)

$f(n) = g(-n) \Leftrightarrow a^n = b^{-n} \Leftrightarrow a = b^{-1}$

$\Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} = b^{-\frac{1}{n}} \Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{n}\right) = g\left(-\dfrac{1}{n}\right)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A040 | 답 ⑤

[풀이]

점 P의 좌표를 $(t,\ 2t)$로 두면

$\mathrm{A}(t,\ 4^t),\ \mathrm{B}(2^{2t},\ 2t)$

이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times t\times(4^t-2t)$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times(2^{2t}-t)\times(4^t-2t)$$

$$S_3=\frac{1}{2}\times 2t\times(2^{2t}-t)$$

$S_1:S_3=3:7$이므로

$$\frac{4^t-2t}{2(4^t-t)}=\frac{3}{7},\ \text{즉 } 4^t=8t$$

$S_1:S_2=3:k$이므로

$$k=\frac{3S_2}{S_1}=\frac{3\times(4^t-t)}{t}=21$$

답 ⑤

A041 | 답 64

[풀이] ★

방정식 $x^4=k(>0)$의 네 근 중에서 실수인 두 근은 각각

$-\sqrt[4]{k}\,(=b),\ \sqrt[4]{k}\,(=a)$

방정식 $x^3=k(>0)$의 실근은

$\sqrt[3]{k}\,(=c)$

방정식 $x^3=-k(<0)$의 실근은

$\sqrt[3]{-k}\,(=-\sqrt[3]{k}=d)$

정리하면

$a=\sqrt[4]{k},\ b=-\sqrt[4]{k},\ c=\sqrt[3]{k},\ d=-\sqrt[3]{k}$

문제에서 주어진 등식에 대입하면

$$\log_2\frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[4]{k}}=\log_2\frac{-\sqrt[4]{k}}{-\sqrt[3]{k}}+1$$

지수법칙에 의하여

$$\log_2 k^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=\log_2 k^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}+1$$

로그의 성질에 의하여

$$\frac{1}{12}\log_2 k=-\frac{1}{12}\log_2 k+1$$

정리하면

$\log_2 k=6$

로그의 정의에 의하여

$\therefore\ k=2^6=64$

답 64

A042 | 답 ⑤

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$$\log_a a^2\sqrt[5]{b}=2\log_a a+\frac{1}{5}\log_a b$$

$=2+\frac{1}{5}\log_a b=0$에서

$\log_a b=-10$

로그의 성질에 의하여

$$\therefore\ \log_a\frac{1}{ab}$$

$=-\log_a a-\log_a b=-1-(-10)=9$

답 ⑤

A043 | 답 81

[풀이]

$ab=12,\ bc=8$을 연립하면

$\frac{ab}{bc}=\frac{12}{8}$에서 $\frac{a}{c}=\frac{3}{2}$

지수법칙에 의하여

$$\therefore\ 4^c=4^{\frac{2}{3}a}=(2^a)^{\frac{4}{3}}=3^{3\times\frac{4}{3}}=3^4=81$$

답 81

A044 | 답 ②

[풀이]

$x<a$일 때, $f(x)<f(a)$(양수)이므로

함수 $y=2^{f(x)}$는 증가하고, 이 함수의 그래프는 x축을 점근선으로 한다.

$a\le x<0$일 때, $f(0)=0<f(x)\le f(a)$(양수)이므로

함수 $y=2^{f(x)}$는 감소한다.

$x>0$일 때, $f(x)>0=f(0)$이므로

함수 $y=2^{f(x)}$는 증가한다.

따라서 함수 $y=2^{f(x)}$의 그래프는 ②와 같다.

답 ②

A045 | 답 46

[풀이]

문제에서 주어진 집합의 원소만을 모두 쓰면

$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^{20}$

$a=2^m$, $b=2^n$으로 두자. (단, m, n은 20 이하의 자연수이고, $m\neq n$이다.)

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\log_a b=\log_{2^m}2^n=\dfrac{n}{m}$(=정수)

$m=1$: $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 20$ (19개)
$m=2$: $n=4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 20$ (9개)
$m=3$: $n=6,\ 9,\ 12,\ \cdots,\ 18$ (5개)
$m=4$: $n=8,\ 12,\ \cdots,\ 20$ (4개)
$m=5$: $n=10,\ 15,\ 20$ (3개)
$m=6$: $n=12,\ 18$ (2개)
$m=7$: $n=14$ (1개)
$m=8$: $n=16$ (1개)
$m=9$: $n=18$ (1개)
$m=10$: $n=20$ (1개)
$m\geq 11$: 만족하는 n의 값은 없다. (0개)

따라서 구하는 경우의 수는

$19+9+5+4+3+2+1+1+1+1=46$

답 46

A046 | 답 ⑤

[풀이] ★

-2의 제곱근 중에서 실수는 없다.

-1의 제곱근 중에서 실수는 없다.

1의 제곱근 중에서 양의 실수는 1이다.

2의 제곱근 중에서 양의 실수는 $\sqrt{2}$이다.

집합 A는

$A=\{1,\ \sqrt{2}\}$

-2의 세제곱근 중에서 실수는 $-\sqrt[3]{2}$이다.

-1의 세제곱근 중에서 실수는 -1이다.

1의 세제곱근 중에서 실수는 1이다.

2의 세제곱근 중에서 실수는 $\sqrt[3]{2}$이다.

집합 B는

$B=\{-\sqrt[3]{2},\ -1,\ 1,\ \sqrt[3]{2}\}$

집합 $A\cup B$는

$A\cup B$

$=\{-\sqrt[3]{2},\ -1,\ 1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt{2}\}$

이므로 구하는 값은

$2^{2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{7}{6}}$

답 ⑤

A047 | 답 ⑤

[풀이]

a^2은 $x^3=b$의 실근이므로

$(a^2)^3=b$

c^3은 $x^4=b$의 실근이므로

$(c^3)^4=b$

로그의 성질에 의하여

$\therefore\ \dfrac{q}{p}=\log_a(a^2)^3+\log_{(c^3)^4}c$

$=\log_a a^6+\log_{c^{12}}c$

$=6+\dfrac{1}{12}=\dfrac{73}{12}$

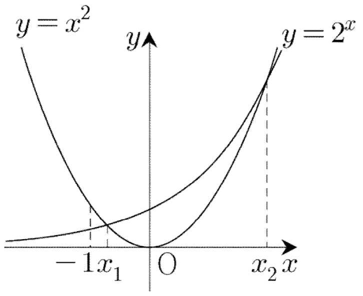
$\therefore\ p+q=85$

답 ⑤

A048 | 답 ③

[풀이]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



▸ ㄱ. (참)

$-1<x_1<0$, $x_2=2$이므로

$x_1+x_2>0$

▸ ㄴ. (거짓)

$-1<x_1y_1=x_1^3<0$이고,

$x_2y_2=2\times 4=8$이므로

$x_1y_1+x_2y_2>0$

▸ ㄷ. (참)

$|x_1y_2|-|x_2y_1|$

$=|x_1x_2^2|-|x_2x_1^2|$

$=|x_1x_2|(|x_2|-|x_1|)>0$

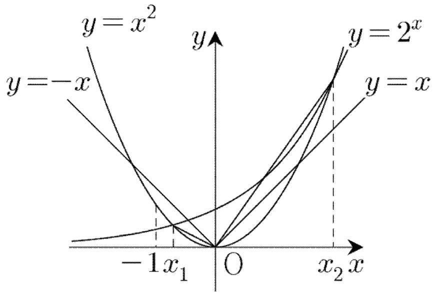
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[참고]

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 보여도 좋다.

▸ ㄷ. (참)



$|x_1y_2|-|x_2y_1|$

$=|x_1x_2|\left(\left|\dfrac{y_2}{x_2}\right|-\left|\dfrac{y_1}{x_1}\right|\right)>0$

왜냐하면 위의 그림에서 두 점 $(0,\ 0)$, $(x_1,\ y_1)$을 잇는 직선의 기울기의 절댓값은 1보다 작고,

두 점 $(0,\ 0)$, $(x_2,\ y_2)$를 잇는 직선의 기울기는 1보다 크기 때문이다.

A049 | 답 17

[풀이]

지수법칙에 의하여

$$\left\{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6$$

$$=\left(\sqrt{\frac{a^3}{a^{\frac{4}{3}}}}\times\sqrt{a^4}\right)^6$$

$$=\left(a^{\frac{1}{2}\left(3-\frac{4}{3}\right)}\times a^{\frac{4}{2}}\right)^6$$

$$=a^{6\left(\frac{5}{6}+2\right)}=a^{17}$$

$\therefore\ \ k=17$

답 17

A050 | 답 ③

[풀이]

진수의 조건에 의하여

$x>0,\ 2x-3y>0\left(\dfrac{x}{y}>\dfrac{3}{2}\right),\ y>0$

로그의 성질에 의하여

$\log 3x=\log\dfrac{(2x-3y)^2}{y}$

로그방정식을 풀면

$3x=\dfrac{(2x-3y)^2}{y}$

정리하면

$4x^2-15xy+9y^2=0$

양변을 $y^2(\neq 0)$으로 나누면

$4\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-15\dfrac{x}{y}+9=0$

$\dfrac{x}{y}=t$로 두면

$4t^2-15t+9=0$

좌변을 인수분해하면

$(4t-3)(t-3)=0$

풀면

$t=3$

$\left(\because\ t=\dfrac{3}{4}<\dfrac{3}{2}\right.$이므로 $t=\dfrac{3}{4}$은 해가 될 수 없다.)

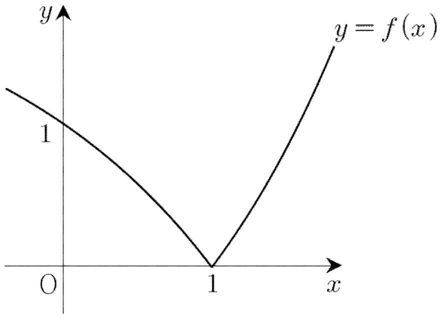
$\therefore\ \ \dfrac{x}{y}=3$

답 ③

A051 | 답 ⑤

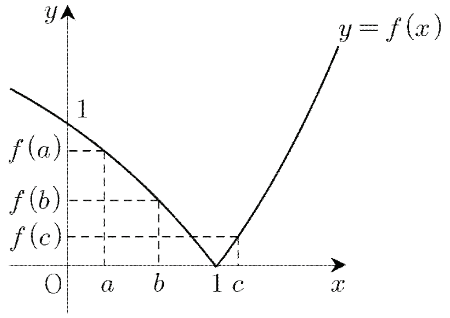
[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (거짓)

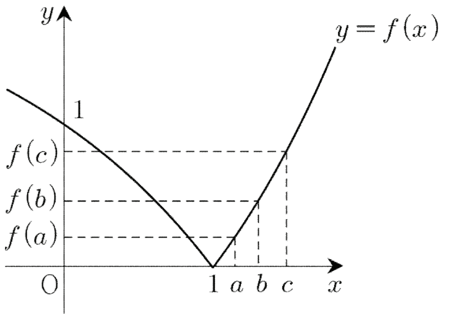
(반례)



위의 그림과 같이 $0<a<b<1<c$이지만 $f(a)>f(b)>f(c)$일 수 있다.

▸ ㄴ. (참)

$a>1$이라고 가정하자.



$a<b<c$일 때, $f(a)<f(b)<f(c)$ 이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $0<a\leq 1$이다.

$a=1$이라고 가정하자.

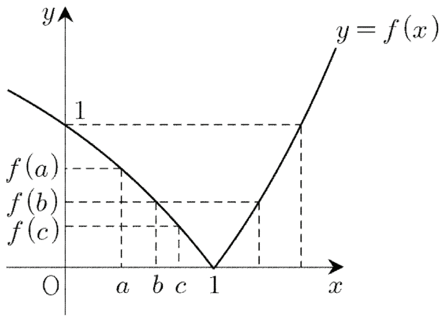
문제에서 주어진 부등식에 대입하면

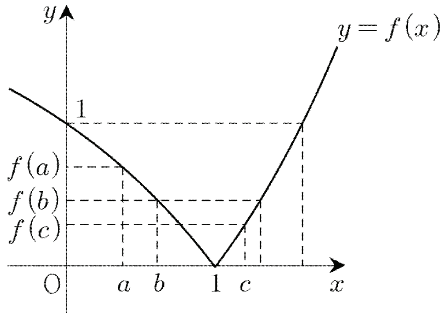
$f(a)=0>f(b)>f(c)>0$

이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $0<a<1$이다.

- (1) $b<1$인 경우





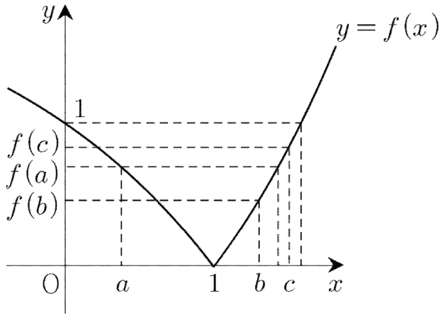
위의 그림과 같으면 문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.

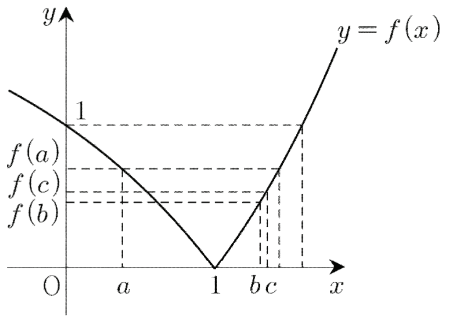
이때, $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 범위는

$0<f(a)<1$, $0<f(b)<1$, $0\leq f(c)<1$

이므로 $0<f(a)+f(b)+f(c)<3$이다.

- (2) $b>1$인 경우





구간 $(1, \infty)$에서 함수 $f(x)$가 증가하므로 $f(b)<f(c)$이다.

이는 문제에서 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.

따라서 문제에서 주어진 부등식이 성립하면 보기 ㄴ에서 주어진 부등식이 성립한다.

▸ ㄷ. (참)

$0<f(a)<1$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(a)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 방정식 $f(x)-a=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A052

| 답 ②

[풀이]

우선 문제에서 주어진 지수부등식을 풀자.

$a>1$일 때, $x-1<2x+1$ 풀면 $x>-2$

$0<a<1$일 때, $x-1>2x+1$ 풀면 $x<-2$

따라서 a의 범위는 $0<a<1$이다.

이제 로그부등식을 풀자.

진수의 조건에 의하여

$x-2>0$, $4-x>0$에서 $2<x<4$

$x-2>4-x$에서 $x>3$

$\therefore\ 3<x<4$

답 ②

A053

| 답 ④

[풀이]

두 방정식 $a^x=3$, $b^x=3$의 실근은 각각

$x=\log_a 3$, $x=\log_b 3$

점 B가 선분 AC의 중점이므로

$\log_b 3=2\log_a 3$, $\log_b 3=\log_{\sqrt{a}} 3$

$b=\sqrt{a}$, 즉 $a=b^2$

B$(\log_a 3,\ 3)$이고,

$b^{\log_a 3} = b^{\log_{b^2} 3} = b^{\log_b \sqrt{3}} = \sqrt{3}$ 이므로

D$(\log_a 3,\ \sqrt{3})$

$$\therefore\ \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{DH}}} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$$

답 ④

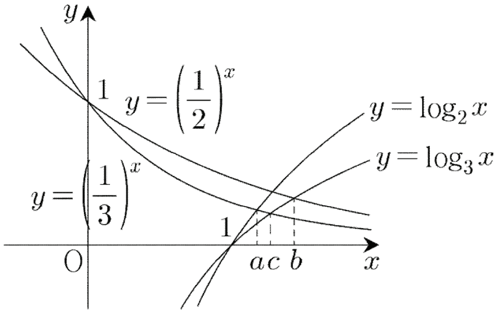
A054 | 답 ②

[풀이]

네 함수

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$

의 그래프를 한 평면 위에 그리면 아래 그림과 같다.

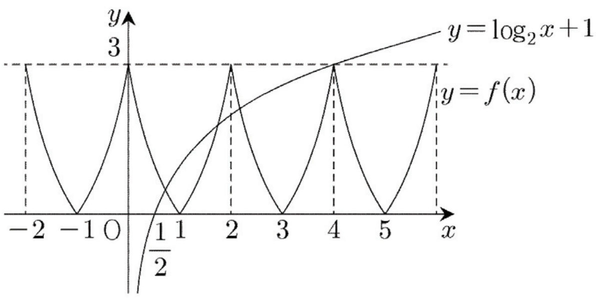


답 ②

A055 | 답 ①

[풀이]

주기가 2인 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프를 한 평면 위에 나타내면 아래 그림과 같다.



위의 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\log_2 x+1$의 교점의 개수는 4이다.

답 ①

A056 | 답 ②

[풀이]

삼각형 OBD의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 4배이므로

두 삼각형 OAC, OBD의 닮음비는 $1:2$이다.

점 A의 좌표를 $(t,\ \log_2 t)$로 두자.

점 A는 선분 OB의 중점이므로

점 B의 좌표는 $(2t,\ \log_2 2t)$이다.

그런데 (점 B의 y좌표)$=2\times$(점 A의 y좌표)

$\log_2 2t = 2\log_2 t$, $\log_2 2t = \log_2 t^2$, $2t=t^2$, $t=2$

$m=\frac{\log_2 2}{2}=\frac{1}{2}$

사각형 ABDC는 등변사다리꼴이므로

두 직선 $y=nx$, $y=mx$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, $mn=1$, $n=2$

$\therefore\ m+n=\frac{5}{2}$

답 ②

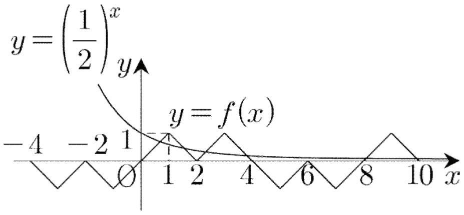
A057 | 답 ⑤

[풀이]

(나) ⇒ 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

(다) ⇒ 함수 $f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



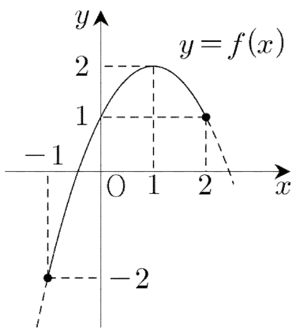
따라서 $-10 \le x \le 10$에서 두 그래프의 교점의 개수는 6이다.

답 ⑤

A058 | 답 ①

[풀이]

$-1 \le x \le 2$에서 함수 $f(x)$의 그래프는



- (1) $0<a<1$인 경우

$-1 \le x \le 2$일 때,

$-1<a^2 \le g(x) \le \dfrac{1}{a}$ $\left(\dfrac{1}{a}>1\right)$이므로

$f(g(x))$의 최댓값은 $2(=f(1))$이다.

$-1 \le x \le 2$일 때,

$-2 \le f(x) \le 2$이므로

$g(f(x))$의 최댓값은 $\dfrac{1}{a^2}$이다.

$\dfrac{1}{a^2}=2$에서 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

- (2) $a>1$인 경우

$-1 \le x \le 2$일 때,

$0<\dfrac{1}{a} \le g(x) \le a^2$ $\left(\dfrac{1}{a}<1,\ a^2>1\right)$이므로

$f(g(x))$의 최댓값은 $2(=f(1))$이다.

$-1 \le x \le 2$일 때,

$-2 \le f(x) \le 2$이므로

$g(f(x))$의 최댓값은 a^2이다.

$a^2=2$에서 $a=\sqrt{2}$

따라서 구하는 값은

$\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

답 ①

A059

| 답 25

[풀이]

$5^x=t(t>0)$로 두고

문제에서 주어진 부등식을 정리하면

$t^2-kt+2k+5 \ge 0$ (단, $t>0$)

$f(t)=t^2-kt+2k+5$로 두자.

- (1) $k<0$인 경우

$f(0) \ge 0$, 즉 $2k+5 \ge 0$

$-\dfrac{5}{2} \le k<0$

- (2) $k \ge 0$인 경우

(판별식)$=(-k)^2-4(2k+5) \le 0$,

즉, $k^2-8k-20 \le 0$, $(k-10)(k+2) \le 0$

$0 \le k \le 10$

(1), (2)에서 k의 범위는

$-\dfrac{5}{2} \le k \le 10$

$\therefore\ |\alpha\beta|=25$

답 25

A060

| 답 19

[풀이]

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=2^x+1$

$\log_2(a-1)=0$에서 $a=2$이므로 $\mathrm{A}_1(2,\ 0)$

$b=g(a)=5$이므로 $\mathrm{A}_2(2,\ 5)$

$\log_2(c-1)=b$에서 $c=33$이므로 $\mathrm{A}_3(33,\ 5)$

$d=g(c)=2^{33}+1$이므로 $\mathrm{A}_4(33,\ 2^{33}+1)$

$\therefore\ \log_{(b-1)}(c-1)(d-1)$

$=\log_{2^2}2^5\times2^{33}=\dfrac{5+33}{2}=19$

답 19

A061

| 답 ②

[풀이]

$k=2$일 때, 두 점 Q, R이 일치하므로

$a^{2\times2}=2$ 즉, $a^4=2$에서

$a=\sqrt[4]{2}\,(\because a>1)$

▸ ㄱ. (참)

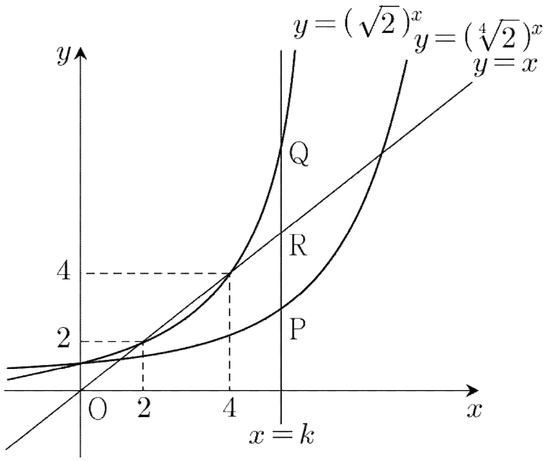
문제에서 주어진 두 지수함수의 방정식은 각각

$y=(\sqrt{2})^x$, $y=(\sqrt[4]{2})^x$

$(\sqrt{2})^4=2^{\frac{1}{2}\times4}=2^2=4$이므로

$k=4$일 때, 두 점 Q, R은 서로 일치한다.

▸ ㄴ. (참)



$k\le 4$이면 $\overline{\mathrm{PQ}}\le 3$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=12$이면 $k>4$이어야 한다.

$k>4$일 때, 점 Q의 y좌표는 점 P의 y좌표보다 크므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}=12$$

$2^{\frac{k}{4}}=t$로 두고 방정식을 정리하면

$t^2-t-12=0$, $(t-4)(t+3)=0$

풀면

$t=4(\because t>2)$ 즉, $2^{\frac{k}{4}}=4=2^2$

지수방정식을 풀면 $\frac{k}{4}=2$에서 $k=8$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{QR}}=(\sqrt{2})^8-8=16-8=8$

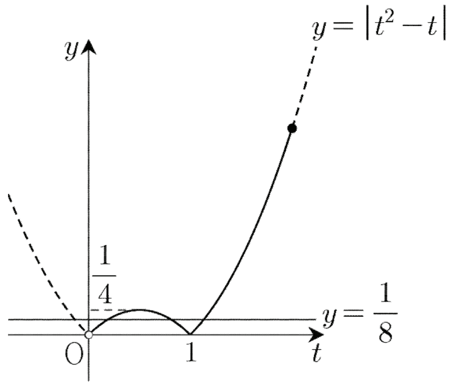
▸ ㄷ. (거짓)

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{8}$이므로 $k\le 4$이어야 한다.

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\left|2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}\right|=\frac{1}{8}$$

$2^{\frac{k}{4}}=t$로 두고 위의 등식을 정리하면

$|t^2-t|=\frac{1}{8}$(단, $0<t\le 2$)



구간 $(0,\ 2]$에서 곡선 $y=|t^2-t|$와 직선 $y=\frac{1}{8}$은 서로 다른 세 점에서 만난다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{8}$을 만족시키는 서로 다른 실수 k의 값의 개수는 3이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

A062 | 답 25

[풀이]

문제에서 주어진 방정식을 정리하면

$(\log x)^2+(\log 2+\log 4)\log x$

$+(\log 2)(\log 4)+(\log k)^2=0$

함수 $y=\log x$의 치역은 실수 전체의 집합이므로

$\log x=t$(t는 실수)로 두면

$t^2+(\log 2+\log 4)t+(\log 2)(\log 4)+(\log k)^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(\log 2+\log 4)^2-4\{(\log 2)(\log 4)+(\log k)^2\}>0$

$(\log 2-\log 4)^2-4(\log k)^2>0$

$(\log k^2)^2-(\log 2)^2<0$

$-\log 2<\log k^2<\log 2$

$\frac{1}{2}<k^2<2$

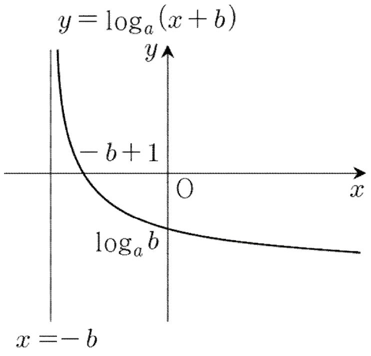
풀면 $\frac{1}{\sqrt{2}}<k<\sqrt{2}$

$\therefore\ 10(\alpha^2+\beta^2)=25$

답 25

A063 | 답 ④

[풀이]



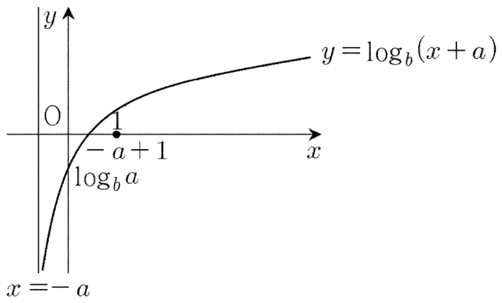
곡선 $y=\log_a(x+b)$의 x절편, y절편은 각각

$-b+1$, $\log_a b$이고, 점근선은 $x=-b$이다.

문제에서 주어진 그림에서

$-b+1<0$, $\log_a b<0$

이므로 $b>1$, $0<a<1$이다.



함수 $y=\log_b(x+a)$의 밑은 1보다 크므로, 이 함수는 증가함수이다.

곡선 $y=\log_b(x+a)$의 x절편, y절편은 각각

$-a+1$, $\log_b a$이고, 점근선은 $x=-a$이다.

$0<(x\text{절편})<1$, $(y\text{절편})<0$

이므로 곡선 $y=\log_b(x+a)$의 그래프는 ④와 같다.

답 ④

A064 | 답 4

[풀이]

점 C의 좌표를 $(k,\ 0)$으로 두면

$\overline{\mathrm{OC}}:\overline{\mathrm{OD}}=1:9$이므로

점 D의 좌표는 $(9k,\ 0)$이다.

두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(k,\ \log_3 k)$, $\mathrm{B}(9k,\ \log_3 9k)$

(직선 AB의 기울기)

$$=\frac{\log_3 9k-\log_3 k}{9k-k}=\frac{2+\log_3 k-\log_3 k}{8k}$$

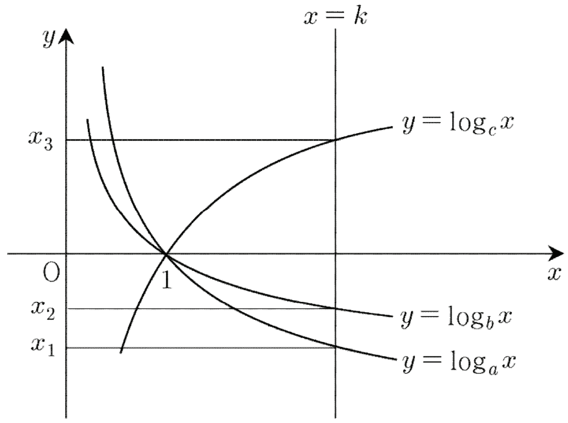
$=\dfrac{1}{4k}=\dfrac{1}{2}$에서 $k=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=8k=4$

답 4

A065 | 답 ⑤

[풀이]



$a^{x_1}=b^{x_2}=c^{x_3}=k$로 두면 $k>1$이고,

로그의 정의에 의하여

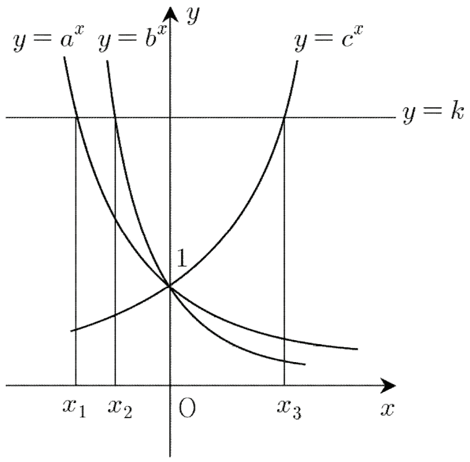
$x_1=\log_a k$, $x_2=\log_b k$, $x_3=\log_c k$

위의 그림에서

$\therefore\ x_3>x_2>x_1$

답 ⑤

[참고]



세 함수 $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$의 방정식과

직선 $y=k(k>1)$의 방정식을 연립하면

$a^x=k$, $b^x=k$, $c^x=k$

지수함수는 일대일대응이므로

위의 세 방정식의 실근은 각각 x_1, x_2, x_3이다.

즉, $a^{x_1}=b^{x_2}=c^{x_3}=k$

위의 그림에서 $x_3>x_2>x_1$임을 확인할 수 있다.

A066 | 답 ③

[풀이1]

함수 $y=a\cdot 3^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동시키면 함수

$-y=a\cdot 3^{-x}$

의 그래프와 일치한다.

함수 $-y=a\cdot 3^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시키면 함수

$-(y-3)=a\cdot 3^{-(x-2)}$

의 그래프와 일치한다.

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ -6)$을 지나므로

$-(-6-3)=a\cdot 3^{-(1-2)}$ 즉, $9=a\cdot 3$

$\therefore\ a=3$

답 ③

[풀이2]

점 $(1,\ -6)$을 y축의 방향으로 -3만큼, x축의 방향으로 -2만큼 평행이동시키면 점 $(-1,\ -9)$와 일치한다.

점 $(-1,\ -9)$를 원점에 대하여 대칭이동시키면 점 $(1,\ 9)$와 일치한다. 점 $(1,\ 9)$는 곡선 $y=a\cdot 3^{x}$ 위에 있으므로

$9=a\cdot 3^{1}$

$\therefore\ a=3$

답 ③

A067

| 답 ③

[풀이]

$\log_3 x=X$, $\log_2 y=Y$로 두자.

로그의 밑의 변환의 공식과 로그의 성질에 의하여 주어진 연립방정식은

$$X-Y=1,\ \frac{1}{2}X+\frac{1}{2}-Y=1-\frac{k}{2}$$

정리하면

$X-Y=1,\ X-2Y=1-k$

위의 연립방정식을 풀면

$X=k+1,\ Y=k$

이므로

$x=3^{k+1}(=\alpha),\ y=2^{k}(=\beta)$

문제에서 주어진 부등식에 대입하면

$3^{k+1}\le 2^{k}$

변형하면

$$3\le\left(\frac{2}{3}\right)^{k}$$

밑이 1 보다 작은 지수함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$는 감소함수이다.

그런데 $x\le -3$이면 $y\ge \frac{27}{8}=3.375$이고,

$x\ge -2$이면 $y\le \frac{9}{4}=2.25$이므로 정수 k의 최댓값은 -3이다.

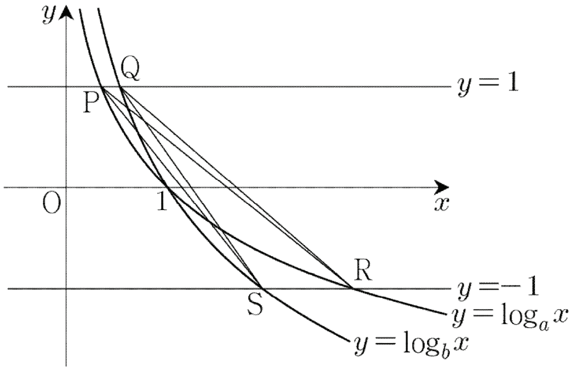
답 ③

A068

| 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 두 곡선을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



위의 그림에서

$\alpha<\beta,\ \gamma<\delta,\ \gamma<\alpha,\ \delta<\beta$

임을 확인할 수 있다.

따라서 부등식

$\gamma<\alpha<\beta,\ \gamma<\delta<\beta$

이 성립한다.

이제 α, δ의 대소 관계를 밝히자.

네 점 P, Q, R, S의 좌표는 각각

$(a,\ 1),\ (b,\ 1),\ \left(\frac{1}{a},\ -1\right),\ \left(\frac{1}{b},\ -1\right)$

위의 그림에서

$$\alpha=(\text{직선 PS의 기울기})=\frac{-2}{\frac{1}{b}-a}=\frac{-2b}{1-ab}$$

$$\delta=(\text{직선 QR의 기울기})=\frac{-2}{\frac{1}{a}-b}=\frac{-2a}{1-ab}$$

$\alpha-\delta=\frac{2(a-b)}{1-ab}<0$ 즉, $\alpha<\delta$

$\therefore\ \gamma<\alpha<\delta<\beta$

답 ②

A069

| 답 ③

[풀이]

점 A의 x좌표를 t로 두면 점 B의 x좌표는 $2t$이다.

$\mathrm{A}(t,\ k\cdot 2^{t}),\ \mathrm{B}(2t,\ k\cdot 2^{2t})$

점 B의 y좌표는 점 A의 y좌표의 2배이므로

$k\cdot 2^{2t}=2k\cdot 2^{t},\ 2^{2t}=2^{t+1},\ 2t=t+1$

$\therefore\ t=1$

점 A$(1,\ 2k)$는 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

답 ③

A070

|답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 등식을 변형하면

$5\log_5 x+3\log_5 y=15$

그런데

$m\log_5 x+15\log_5 y$

$=5\left(\dfrac{m}{5}\log_5 x+3\log_5 y\right)=$(일정)

이므로 $\dfrac{m}{5}=5$임을 알 수 있다.

$\therefore\ m=25$

답 ⑤

A071

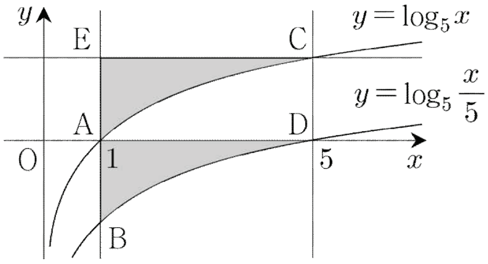
|답 ②

[풀이]

곡선 $y=\log_5 x$를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면

곡선 $y=\log_5\dfrac{x}{5}=\log_5 x-1$과 일치한다.

점 C에서 직선 AB$(x=1)$에 내린 수선의 발을 E라고 하자.



위의 그림에서 어둡게 색칠된 두 도형의 넓이가 같으므로

$S+T=$(□EADC의 넓이)+(△CAD의 넓이)

$=4\times1+\dfrac{1}{2}\times4\times1=6$

답 ②

A072

|답 ②

[풀이]

두 점 P, B의 좌표를 구하면

$\mathrm{P}(\log_a 3,\ 3)$, $\mathrm{B}(\log_{\sqrt[10]{3}}3,\ 0)(\mathrm{B}(10,\ 0))$

한편 $\angle\mathrm{PAB}=90^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{PB}}$는 원의 지름이다.

직선 OP가 점 P에서 원에 접하므로

$\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{PB}}$

(직선 OP의 기울기)×(직선 PB의 기울기)

$=\dfrac{3}{\log_a 3}\times\dfrac{-3}{10-\log_a 3}=-1$

$t=\log_a 3$으로 두고 정리하면

$t^2-10t+9=0,\ (t-1)(t-9)=0$

$t=1$ 또는 $t=9$

$\log_a 3=1:\ a=3$

$\log_a 3=9:\ a=3^{\frac{1}{9}}$

따라서 구하는 값은

$3\times3^{\frac{1}{9}}=3^{\frac{10}{9}}$

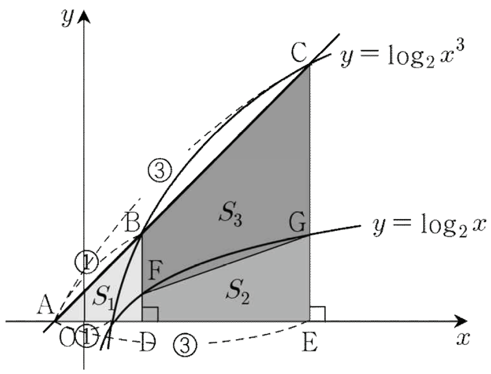
답 ②

A073

|답 24

[풀이] ★

삼각형 ABD의 넓이를 S_1, 두 사각형 FDEG, BFGC의 넓이를 각각 S_2, S_3이라고 하자.



도형의 닮음비와 넓이비의 관계에 의하여

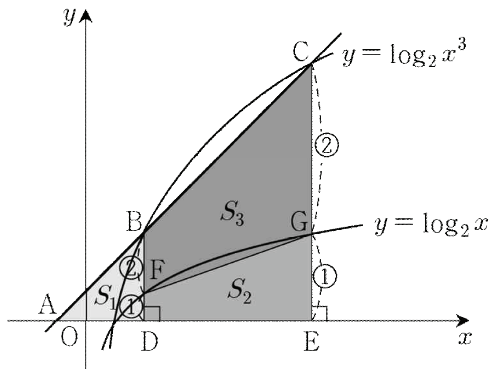
(△ABD의 넓이):(△ACE의 넓이)$=1^2:3^2$

(△ACE의 넓이)$=9\times$(△ABD의 넓이)$=\dfrac{81}{2}$

이므로

(□BDEC의 넓이)

=(△ACE의 넓이)−(△ABD의 넓이)=36



로그의 성질에 의하여 $\log_2 x^3 = 3\log_2 x$이므로

$t > 1$인 임의의 실수 t에 대하여

$\log_2 t^3 : \log_2 t = 3 : 1$

따라서 두 사각형 BFGC, FDEG에 대하여

$S_2 : S_3 = 1 : 2$

즉, $S_3 = (\square\text{BDEC의 넓이}) \times \frac{2}{3} = 24$

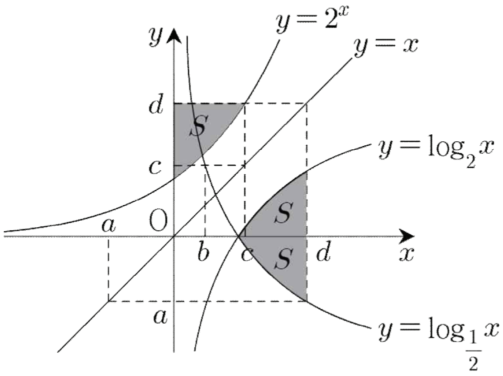
따라서 사각형 BFGC의 넓이는 24이다.

답 24

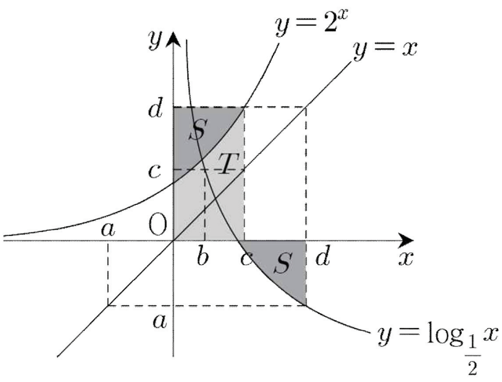
A074 |답 ⑤

[풀이]

곡선 $y=2^x$을 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 곡선 $y=\log_2 x$와 일치하고, 곡선 $y=\log_2 x$를 x축에 대하여 대칭이동시키면 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와 일치한다.



위의 그림에서 어둡게 색칠한 세 도형은 서로 합동이므로 각각의 넓이는 S로 같다.



위의 그림에서 $S+T$의 값은 이웃한 두 변의 길이가 각각 c, d인 직사각형과 일치함을 알 수 있다.

$a=-3$이면 $d=8$, $c=3$이므로

$\therefore\ S+T=24$

답 ⑤

A075 |답 ①

[풀이]

$\overline{\text{PQ}} = 2^{-a+3}+4+2^{a-5}+3 = 2^{-a+3}+2^{a-5}+7$

이므로 정사각형의 넓이를 $S(a)$라고 하자.

산술기하절대부등식에 의하여

$$S(a) = \frac{(2^{-a+3}+2^{a-5}+7)^2}{2}$$

$$\geq \frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{2^{-a+3}\times 2^{a-5}}+7\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\times 8^2 = 32$$

(단, 등호는 $2^{-a+3}=2^{a-5}$, $a=4$일 때 성립한다.)

답 ①

A076 |답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$0<x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

그런데 함수 $y=2^x$는 증가함수이므로

$2^{f(x_1)} < 2^{f(x_2)}$

▸ ㄴ. (참)

$x_1<x_2<0$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

그런데 함수 $y=\log_2 x$은 증가함수이므로

$\log_2 f(x_1) > \log_2 f(x_2)$

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서문

2015 개정 교육과정에서 달라지는 점은

- 수학 I

지수함수와 로그함수: 두 대단원 ‘지수와 로그’, ‘지수함수와 로그함수’가 결합
삼각함수: 사인법칙, 코사인법칙의 귀환 & sec, csc, cot가 미적분 과목으로 이동
수열: 주기함수 관련 문제 출제 가능

- 수학Ⅱ

함수의 극한과 연속: 주기함수 관련 문제 출제 가능
미분: 주기함수 관련 문제 출제 가능
적분: 주기함수 관련 문제 출제 가능 & 구분구적분 퇴출

- 미적분

수열의 극한: 사인법칙, 코사인법칙, 삼각함수의 덧셈정리 관련 문제 출제 가능
미분법: 매개변수의 미분법, 음함수의 미분법의 귀환
적분법: 구분구적법은 이과 전용

- 확률과 통계

경우의 수: 순열, 조합 고1 과정으로 이동, 분할(정수/자연수) 퇴출
확률: 변화 없음
통계: 모비율 퇴출

- 기하

이차곡선: 기울기가 주어진 접선의 공식 귀환 & 사인법칙, 코사인 법칙 관련 문제 출제 가능
평면벡터: 라디안이 아닌 육십분법 사용 & 벡터의 내적의 정의를 성분으로 함
공간도형과 공간좌표: 공간벡터, 공간에서의 벡터의 방정식 퇴출

2021 수능에서 보여준 출제 경향

- 가형14(미적분): 등비급수 평면기하 응용문제에서 사인법칙, 코사인법칙이 출제된다는 관성을 깨는 문제. (삼각함수의 덧셈정리 출제)
- 가형20(미적분): 정적분+점 대칭성으로 즐겨 출제되던 문제를 정적분+선 대칭성으로 바꿈. 그래프의 개형을 무시하고 계산만 하면 시간 안에 풀 수 없는 문제.
- 가형29(확률과 통계): 이 정도의 경우 구분을 하는 문제를 출제하겠다. 라는 의지를 보여주는 문제.
- 가형30(미적분): 합성함수의 그래프의 개형을 그려서 극대극소 판단할 수 있는지를 평가하는 문제. 그리고 삼차함수의 그래프의 개형에서 방정식을 유도할 때 계산을 단축할 수 있는지도 관건.

- 나형20(수학2): 5차 이상의 다항함수의 그래프의 개형은 교육과정 외이므로 4차 함수의 그래프의 개형으로 접근해야 함. 풀이의 선택을 평가하는 문제.
- 나형30(수학2): |곡선-직선|의 미분가능성에 대한 전형적인 문제.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 ‘교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구’ 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

구성

▶ **'이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 미적분'** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 409개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2020년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2021학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2021학년도 (학년도 기준)

▶ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▶ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
대단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

▶ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 ‘기본개념’ 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 ‘실전이론’ 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 ‘기본개념’, ‘실전이론’, ‘(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정’ 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목 차

미적분

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

G 수열의 극한

- 2015개정 교육과정

- 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식은 수학Ⅰ 삼각함수 단원을 따름
- 삼각형, 사각형, 원, 부채꼴의 기하학적 성질은 개정 중학교 수학 교과서를 따름
- 주기 함수 관련 문제 포함
- 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록
- 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 포함
- 라디안 표현이 포함된 문제 포함

G. 수열의 극한

G001

○○
(2003(10)고2-가형18)

다음은 실수 a, b에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)$이 수렴할 조건을 구하는 과정이다.

> 〈과정〉
>
> 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)$이 수렴하면
>
> $\lim_{n\to\infty}(a^n-b^n)=0$이다.
>
> (ⅰ) $|a|\geq 1$일 때,
>
> $\lim_{n\to\infty}a^n\left\{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=1$이다.
>
> 즉, $\frac{b}{a}=\boxed{\text{(가)}}$이다.
>
> (ⅱ) $|a|<1$일 때,
>
> $\lim_{n\to\infty}(a^n-b^n)=\lim_{n\to\infty}(-b^n)=0$이므로
>
> $\boxed{\text{(나)}}$이다.
>
> 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)$이 수렴할 조건은
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여
>
> $|a|\geq 1$일 때, $\frac{b}{a}=\boxed{\text{(가)}}$
>
> 또는
>
> $|a|<1$일 때, $\boxed{\text{(나)}}$이다.

(가), (나)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)
①	0	$\lvert b\rvert\leq 1$
②	0	$\lvert b\rvert>1$
③	1	$\lvert b\rvert\geq 1$
④	1	$\lvert b\rvert<1$
⑤	1	$\lvert b\rvert\leq 1$

G002

○○
(2003(10)고2-가형27)

수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+3}{2a_n-1}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

G003

○○○
(2003경찰대(1차)—공통21)

자연수 n에 대하여 다항함수를 $f_n(x)$라 할 때,

$f_1(x)=x+2$, $f_{n+1}(x)=\frac{d}{dx}\{2xf_n(x)\}$

이라면 $f_n(x)$의 상수항을 a_n, 일차항의 계수를 b_n이라면

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

G004

●●●
(2004경찰대(1차)-공통13)

$a_1=1$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2a_n=0$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} na_n = B \ (A,\ B\text{는 상수})$$

라 할 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)^2(a_{n+1}-a_n)$을 구하면?

① $-A-2B-1$ ② $-A-B-1$ ③ $-A-2B+1$
④ $-A+B-1$ ⑤ $A+2B-1$

G005

○○
(2004사관(1차)-문과21)

일반항이 $a_n=n\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-a\right)(n\geq 1)$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음은 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$이 존재하도록 하는 실수 a의 값과 이 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

〈과정〉

$$a_n=n\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a\right)=\frac{\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-a}{\dfrac{1}{n}}$$

이므로 이 수열이 수렴하려면

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-a\right)=\boxed{\text{(가)}}$이다.

그러므로 $a=\boxed{\text{(나)}}$이다.

따라서, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [4점]

① $1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{4}$ ② $1,\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{4}$

③ $0,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{4}$ ④ $0,\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{16}$

⑤ $0,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{16}$

G006

○○○
(2005사관(1차)-문과15)

다음은

$$a_0=\frac{\pi}{2},\ a_1=1,\ a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}a_n$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{2n+1}\leq\frac{I}{\sqrt{n}}\leq a_{2n-2}$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

가 성립할 때, I의 값을 구하는 과정이다.

〈과정〉

Ⅰ) 자연수 n에 대하여 $na_na_{n-1}=\dfrac{\pi}{2}$임을 수학적 귀납법으로 증명하면

ⅰ) $n=1$일 때, $a_1\cdot a_0=1\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 성립한다.

ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때,

$(k+1)a_{k+1}a_k=(k+1)\boxed{\text{(가)}}a_k=\dfrac{\pi}{2}$

이므로 성립한다.

Ⅱ) 수열 $\{a_n\}$이 감소하는 수열임을 수학적 귀납법으로 증명하면

⋮

중략

⋮

따라서 $a_n\geq a_{n+1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이다.

조건에서 $a_{2n+1}\leq\dfrac{I}{\sqrt{n}}\leq a_{2n-2}$이고 수열 $\{a_n\}$이 감소하는 수열이므로

$na_{2n+2}a_{2n+1}\leq\boxed{\text{(나)}}\leq na_{2n-2}a_{2n-3}$

임을 유추할 수 있다.

그러므로 Ⅰ)에 의해서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{n\pi}{2(2n+2)}\leq\boxed{\text{(나)}}\leq\frac{n\pi}{2(2n-2)}$$

따라서 $I=\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{k}{k+1}a_{k-1}$	I	$\dfrac{\pi}{2}$
②	$\dfrac{k+1}{k}a_{k-1}$	I	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

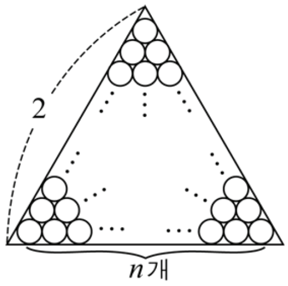
③	$\frac{k}{k+1}a_{k-1}$	I^2	$\frac{\pi}{4}$
④	$\frac{k+1}{k}a_{k-1}$	I^2	$\frac{\pi}{4}$
⑤	$\frac{k}{k+1}a_{k-1}$	I^2	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

G007

○○○
(2005(10)고3-가형16/나형11)

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 내부에 크기가 같은 원들이 첫째 행부터 차례로 한 개, 두 개, 세 개, $\cdots$, n개가 배열되어 있다. 이 원들은 서로 외접하고, 가장자리의 원들은 삼각형의 각 변에 접한다.

자연수 n의 값이 한없이 커질 때, 이 원들의 넓이의 합은 어떤 값에 한없이 가까워지는가? [4점]



① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{2}{5}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

G008

○○
(2005(4)고3-나형12)

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a는 상수) [3점]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G009

○○
(2005(7)고3-나형24)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1=2$,

$$a_{n+1}=\frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}-2a_n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$이다. 30α의 값을 구하시오. [4점]

G010

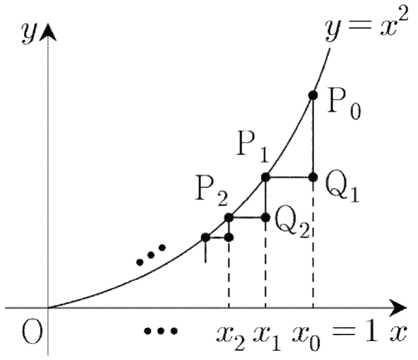
○○
(2005(3)고3–가형22)

$x_0=1,\ x_1=\dfrac{3}{4},\ x_2=\dfrac{5}{8},\ \cdots,\ x_n=\dfrac{2^n+1}{2^{n+1}},\ \cdots$

에 대하여 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}_0(1,\ 1)$과 $\mathrm{P}_n(x_n,\ x_n^2)$, $\mathrm{Q}_n(x_{n-1},\ x_n^2)(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 그림과 같이 나타낸다. 급수

$\overline{\mathrm{P_0Q_1}}+\overline{\mathrm{Q_1P_1}}+\overline{\mathrm{P_1Q_2}}+\overline{\mathrm{Q_2P_2}}+\overline{\mathrm{P_2Q_3}}+\cdots$

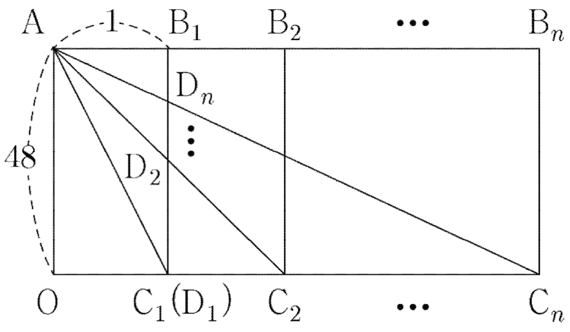
의 합을 S라 할 때, $100S$의 값을 구하시오. [4점]



G011

○○
(2005(3)고3–가형25)

그림과 같이 자연수 n에 대하여 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 48인 직사각형 $\mathrm{OAB}_n\mathrm{C}_n$이 있다. 대각선 AC_n과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 교점을 D_n이라 한다.



이때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AC}_n}-\overline{\mathrm{OC}_n}}{\overline{\mathrm{B_1D}_n}}$의 값을 구하시오. [4점]

G012

○○○
(2005(7)고3–나형14)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은? (단, α, β는 실수이고, n은 자연수이다.) [4점]

ㄱ. $a_n>b_n$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$이면 $\alpha>\beta$이다.

ㄴ. $a_n>b_n$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$이면 $\alpha>\beta$이다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$이고 $\alpha>\beta$이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n>\lim_{n\to\infty}b_n$이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　　⑤ ㄴ, ㄷ

G013

○○
(2005(7)고3–가형14)

삼차함수 $y=f(x)$가 극댓값 $\dfrac{1}{2}$, 극솟값 -2를 가질 때, 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}$$

이때, 실수 전체의 집합에서 함수 $y=g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다. α의 개수는? [4점]

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

G014

○○○
(2006(10)고3-가형14)

함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 구간 $[0,\ a_1]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x좌표를 a_2, 구간 $[0,\ a_2]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x좌표를 a_3이라고 하자. 이와 같이 계속하여 a_4, a_5, $\cdots$를 정할 때, 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은? (단, a_1, a_2, a_3, $\cdots$은 양수이다.) [4점]

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $f(a_n)>f(a_{n+1})$이다.
ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $f'(a_n)>f'(a_{n+1})$이다.
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}f'(a_n)=-3$

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G015

○○
(2006(4)고3-나형29)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\left(a_1-\frac{2}{1^2}\right)+\left(a_2-\frac{2+4}{3^2}\right)+\cdots$$
$$+\left\{a_n-\frac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n-1)^2}\right\}+\cdots$$

이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

G016

○○
(2006(9)고2-가형29)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\frac{1}{4}$이고 $na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족한다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_nS_{n+2}}$의 값을 구하시오. [4점]

G017

○○
(2006(9)고2-가형19)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이다.
ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=5$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=5$이다.
ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_nb_n\neq 0$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

G018

○○
(2006(11)고2-가형11)

수열의 극한에 대하여 항상 옳은 것을 보기에서 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha$(일정)이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0$이다.

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\beta$(일정)이면 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$이다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G019

○○
(2006(3)고3-나형28)

세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대한 옳은 설명을 보기에서 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴하면, 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=0$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$이다.

ㄷ. $a_n<b_n<c_n$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$이면, 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

G020

○○
(2006(4)고3-나형30)

등비급수

$$\cos^2\theta+\cos^2\theta\sin\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta+\cdots$$

의 합이 $\dfrac{18}{13}$일 때, $\dfrac{10}{\tan\theta}$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

G021

○○
(2006(11)고2-가형28)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n을 $|x|+|y|=n$으로 둘러싸인 좌표평면 위의 도형의 넓이라고 하자. 이때, 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{24}{a_na_{n+1}}$의 합을 구하시오. [4점]

G022

○○
(2006(9)고2-가형8)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 모두 만족할 때 a_5의 값은? [4점]

(가) $(a_{n+1})^2 = a_n a_{n+2} (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2(a_1 + a_2)$

(다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 2(a_1 + a_3)$

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

G023

○○
(2006(11)고2-가형16)

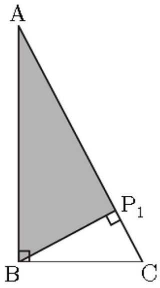
[그림1]과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 대변 AC에 내린 수선의 발을 P_1, $\triangle ABP_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

[그림2]와 같이 직각삼각형 $\triangle ABP_1$의 꼭짓점 P_1에서 대변 AB에 내린 수선의 발을 P_2, $\triangle AP_1P_2$의 넓이를 S_2라 하자.

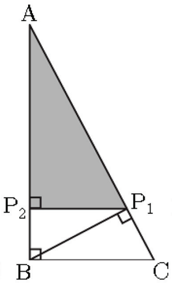
[그림3]과 같이 직각삼각형 $\triangle AP_1P_2$의 꼭짓점 P_2에서 대변 AP_1에 내린 수선의 발을 P_3, $\triangle AP_2P_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

⋮

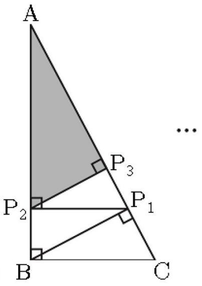
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 $\triangle AP_{n-1}P_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 점 B는 점 P_0이다.) [4점]



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

G024

○○○

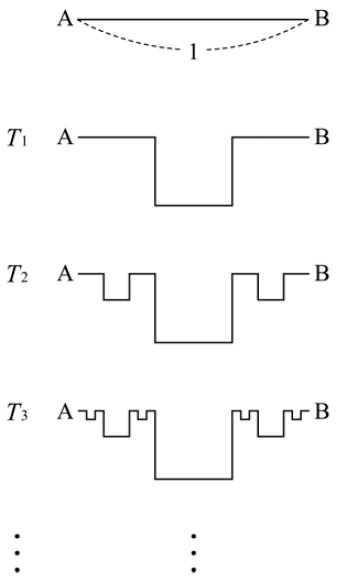
(2007(3)고3-가형29/나형29)

길이가 1인 선분 AB가 있다. 그림과 같이 선분 AB를 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_1이라 하자.

T_1의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 두 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_2라 하자.

T_2의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 네 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속 반복하여 n번째 만든 도형을 T_n이라 하고, T_n에 있는 모든 선분의 길이의 총합을 l_n이라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값은? [4점]



① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$

④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

G025

○○

(2007(3)고3-나형8)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{2}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)}$의 값은? [3점]

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

G026

○○

(2007(3)고3-나형15)

$0<x<16$일 때, 수열 $\left\{\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}x\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 자연수 x의 개수는? [4점]

G027

○○○
(2007사관(1차)-문과14)

수열 $\{S_n\}$에 대하여 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$일 때, 다음은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구하는 과정이다.

〈과정〉

모든 양의 실수 x에 대하여

$$\frac{x}{2+x}<\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2}$$

가 성립한다.

자연수 k, n $(k\le n)$에 대하여 $x=\dfrac{k}{n^2}$를 위 부등식에 대입하여 정리하면

$$\frac{k}{2n^2+k}<\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1<\frac{k}{2n^2}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}<S_n<\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

이다. 이 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\boxed{\text{(가)}}\text{이고}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4}=\boxed{\text{(나)}}$$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은? [3점]

① $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

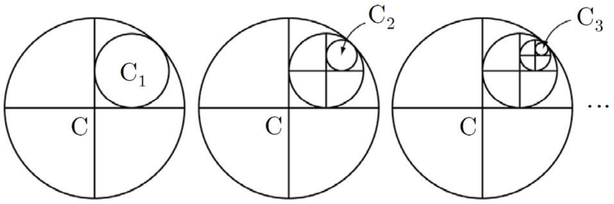
③ $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

G028

○○
(2007(4)고3-가형17)

반지름의 길이가 1인 원 C가 있다.
원 C를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_1,
원 C_1을 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_2,
원 C_2를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_3,
⋮
이와 같은 과정을 계속하여 얻어진 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}r_k$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ ⑤ 1

G029

○○
(2007(4)고3-가형5)

보기에서 수렴하는 수열을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\left\{\tan\frac{2n+1}{4}\pi\right\}$

ㄴ. $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$

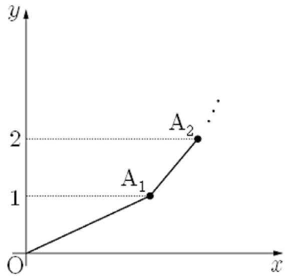
ㄷ. $\left\{\log_2 n^2-2\log_2(n+2)\right\}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G030

○○
(2007(7)고3-가형11)

자연수 n에 대하여 점 A_n은 직선 $y=n$ 위에 있다. 선분 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$의 기울기가 $\frac{3}{4}$이고, 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$의 기울기는 선분 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$의 기울기의 $\frac{4}{3}$배이다. 점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}x_n$의 값은? (단, 원점 $\mathrm{O}=\mathrm{A}_0$) [3점]

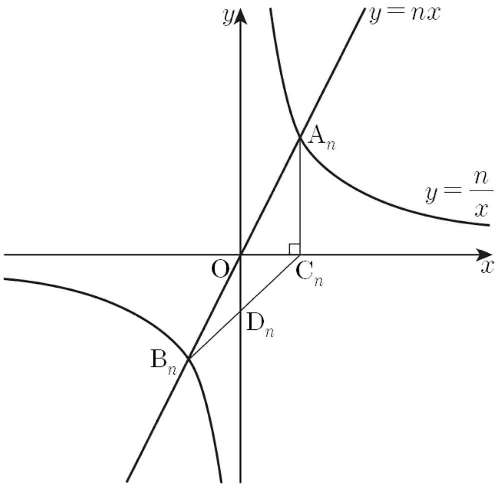


① $\frac{16}{3}$ ② 5 ③ $\frac{14}{3}$
④ $\frac{13}{3}$ ⑤ 4

G031

○○
(2007(11)고2-가형14)

그림과 같이 자연수 n에 대하여 $y=nx$, $y=\frac{n}{x}$의 그래프의 두 교점을 각각 A_n, B_n, 점 A_n에서 x축에 내린 수선의 발을 C_n, 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$와 y축과의 교점을 D_n이라 하자. 사다리꼴 $\mathrm{OD}_n\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 $\mathrm{OB}_n\mathrm{D}_n$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n+n}{S_n+n+1}$의 값은? [4점]



① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{4}{7}$
④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

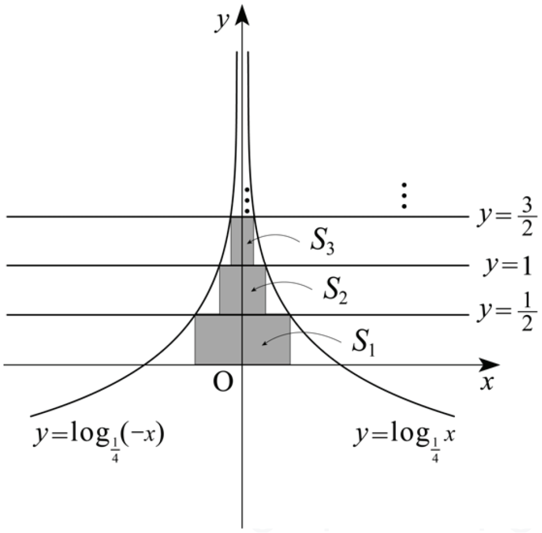
G032

○○
(2007(10)고3–가형14)

두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 x축 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_1이라 하자.

두 곡선이 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 직선 $y=\frac{1}{2}$ 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_2라 하자. 두 곡선이 직선 $y=\frac{3}{2}$과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 직선 $y=1$ 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_3이라 하자.

위와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 직사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{5}{8}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{7}{8}$
④ 1　⑤ $\frac{9}{8}$

G033

○○
(2007(3)고3–가형5)

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$이 모두 수렴할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

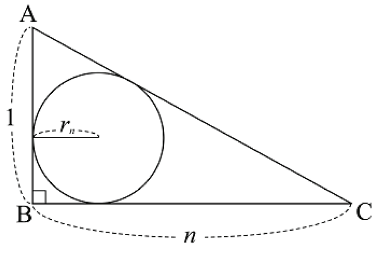
ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=1$
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G034

○○
(2007(9)고2–가형7)

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=n$, $\angle ABC=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} r_n$의 값은? (단, n은 자연수이다.) [3점]



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

G035

○○
(2007(7)고3-나형27)

수열의 극한값과 급수의 성질이다. 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다. (단, α, β는 상수)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n + b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 2b_n)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n$이 수렴한다. (단, α는 상수)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

G036

○○○
(2008사관(1차)-문과11)

세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$을 만족한다. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때, 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\{c_n\}$이 수렴하면 $\alpha = \beta$이다.

ㄴ. $\{c_n\}$이 발산하면 $\alpha < \beta$이다.

ㄷ. $\alpha = \beta = 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

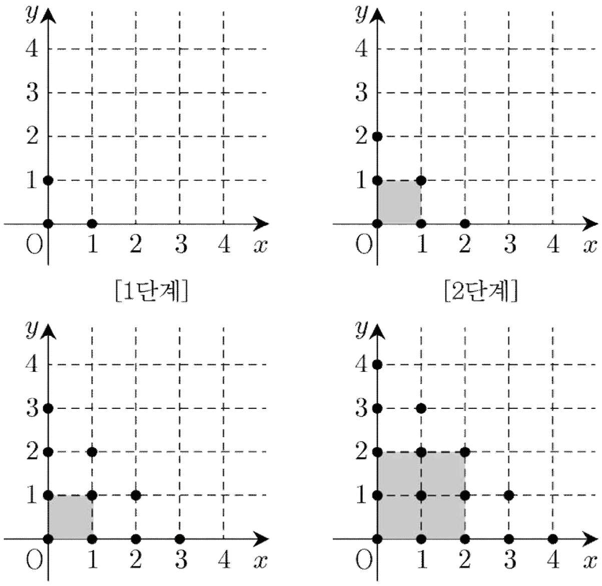
G037

○○○
(2007(10)고3-가형17/나형17)

다음과 같이 좌표평면 위에 단계별로 x좌표와 y좌표가 음이 아닌 정수인 점을 표시한다.

[1단계]에서는 원점과 x좌표와 y좌표의 합이 1인 점들을 표시하고, [2단계]에서는 [1단계]의 점에 x좌표와 y좌표의 합이 2인 점들을 추가로 표시한다.

이와 같은 방법으로 [n단계]에서는 [$n-1$단계]의 점에 x좌표와 y좌표의 합이 $n(n=2, 3, 4, \cdots)$인 점들을 추가로 표시한다.



[1단계] [2단계]
[3단계] [4단계]

⋮

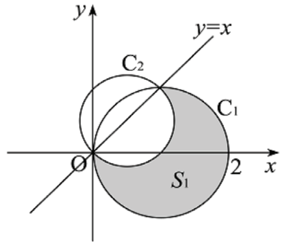
이때, [n단계]에 있는 모든 점의 개수를 a_n, [n단계]에 있는 점들을 꼭짓점으로 하는 정사각형 중에서 원점을 한 꼭짓점으로 하고 넓이가 최대인 정사각형의 내부 및 둘레에 있는 모든 점의 개수를 b_n이라 하자. 예를 들어 $a_4 = 15$, $b_4 = 9$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{b_{2n}}$의 값은? [4점]

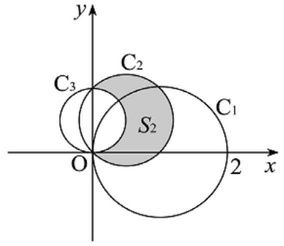
① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

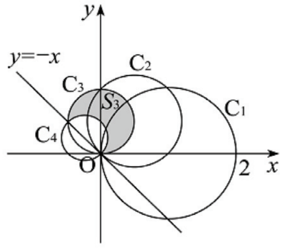
G038

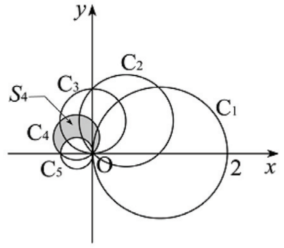
○○
(2008(3)고3-가형17)

그림과 같이 원점 O와 점 (2, 0)을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_1이라 하자. 또, 원 C_1과 직선 $y=x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_2, 원 C_2와 y축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_3이라 하자. 또, 원 C_3과 직선 $y=-x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_4, 원 C_4와 x축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_5라 하자.









이와 같은 방법으로 중심이 차례로 직선 $y=x$, y축, 직선 $y=-x$, x축, $\cdots$ 위에 있는 원 C_6, C_7, C_8, C_9, $\cdots$를 한없이 만들어갈 때, 원 C_n의 내부와 원 C_{n+1}의 외부의 공통부분(어두운 부분)의 넓이를 $S_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

① $\pi+1$　　② $\frac{3}{2}\pi$　　③ $\frac{5}{4}(\pi+1)$

④ $\frac{3}{2}(\pi+1)$　　⑤ 2π

G039

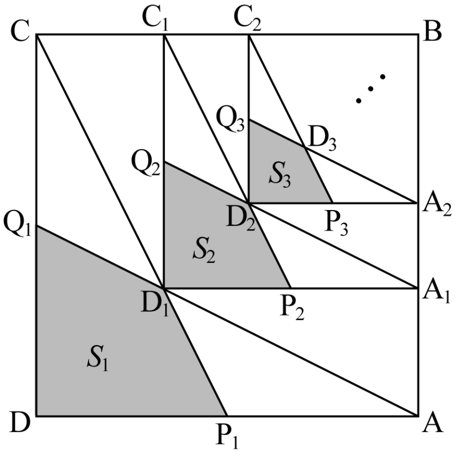
○○
(2008(10)고3-가형15)

한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 두 선분 AD, DC의 중점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 두 선분 AQ_1, CP_1의 교점을 D_1이라 하자. 이때, 사각형 $DP_1D_1Q_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

선분 BD_1을 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_1D_1A_1$이라 하자. 두 선분 A_1D_1, D_1C_1의 중점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 두 선분 A_1Q_2, C_1P_2의 교점을 D_2라 하자. 이때, 사각형 $D_1P_2D_2Q_2$의 넓이를 S_2라 하자.

선분 BD_2를 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_2D_2A_2$라 하자. 두 선분 A_2D_2, D_2C_2의 중점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 두 선분 A_2Q_3, C_2P_3의 교점을 D_3이라 하자. 이때, 사각형 $D_2P_3D_3Q_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{24}{5}$　　② $\frac{16}{3}$　　③ $\frac{27}{5}$

④ $\frac{20}{3}$　　⑤ $\frac{36}{5}$

G040

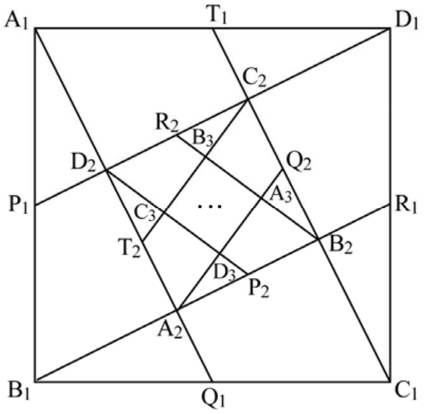
○○
(2008(9)고2-가형24)

그림과 같이 한 변의 길이가 10인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

변 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 P_1, Q_1, R_1, T_1이라 하고, 선분 A_1Q_1, B_1R_1의 교점을 A_2, 선분 B_1R_1, C_1T_1의 교점을 B_2, 선분 C_1T_1, D_1P_1의 교점을 C_2, 선분 D_1P_1, A_1Q_1의 교점을 D_2라 할 때, 사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이를 S_2라 하자.

변 A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2의 중점을 각각 P_2, Q_2, R_2, T_2라 하고, 선분 A_2Q_2, B_2R_2의 교점을 A_3, 선분 B_2R_2, C_2T_2의 교점을 B_3, 선분 C_2T_2, D_2P_2의 교점을 C_3, 선분 D_2P_2, A_2Q_2의 교점을 D_3이라 할 때, 사각형 $A_3B_3C_3D_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오. [3점]



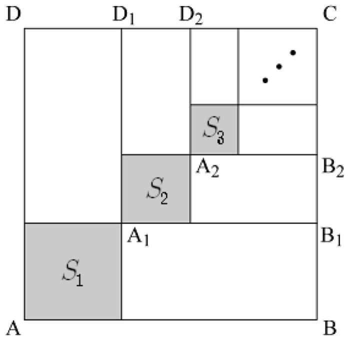
G041

○○
(2008(7)고3-가형23)

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 선분 AB와 선분 AD를 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_1, 윗부분의 정사각형을 $A_1B_1CD_1$이라 하자.

다시 정사각형 $A_1B_1CD_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 A_1D_1을 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_2, 윗부분의 정사각형을 $A_2B_2CD_2$라 하자.

이와 같은 시행을 무한히 반복할 때, $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{1}{7}$이다. m^2+n^2의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.) [4점]



G042

○○○

(2008(4)고3-나형13)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$이 수렴하면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$이다.

ㄷ. 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G043

○○

(2008(3)고3-가형26)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_1 = \frac{5}{4},\ S_n = a_n + \frac{n+3}{n+2}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

일 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

G044

○○

(2008(3)고3-나형28)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n = pa_n + 1$이 성립한다. 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, p는 1이 아닌 상수이다.) [4점]

ㄱ. $a_1 = \frac{1}{1-p}$

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

ㄷ. $p = \frac{2}{3}$이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G045

○○

(2008(7)고3-나형28)

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x-1)(\log_2 x)^n$이 수렴할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. 수렴하기 위한 x값의 범위는 $\frac{1}{2} < x < 2$이다.

ㄴ. 급수의 합이 1이 되도록 하는 x의 값은 한 개 존재한다.

ㄷ. 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log_2 x - 1}{2}\right)^n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G046

○○

(2009(9)고2-가형20)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. 두 수열 $\left\{\dfrac{a_n}{n+1}\right\}$, $\left\{\dfrac{b_n}{n}\right\}$이 모두 수렴하면 수열 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$은 수렴한다.

(단, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.)

ㄷ. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n a_n$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G047

●●●

(2009(4)고3-가형25)

원에 다음 과정을 실행한다.

[과정]

Ⅰ. 원의 지름을 $2:1$로 내분하는 점을 잡는다.

Ⅱ. 이 원에 내접하면서 Ⅰ의 내분점에서 서로 외접하는 두 개의 원을 그린다.

지름의 길이가 6인 원이 있다.

이 원에 [과정]을 실행하여 그린 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_1이라 하자.

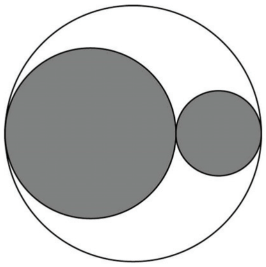
그림 C_1에서 새로 그려진 2개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 4개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_2라 하자.

그림 C_2에서 새로 그려진 4개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 8개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_3이라 하자.

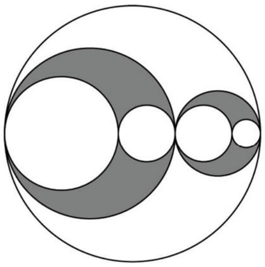
그림 C_3에서 새로 그려진 8개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 16개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_4라 하자.

이와 같은 방법으로 n번째 얻어진 그림 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}\pi$($p$와 q는 서로소인 자연수)이다.

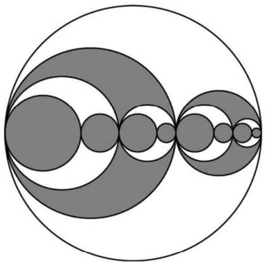
$p+q$의 값을 구하시오. (단, 모든 원의 중심은 처음 원의 한 지름 위에 있다.) [4점]



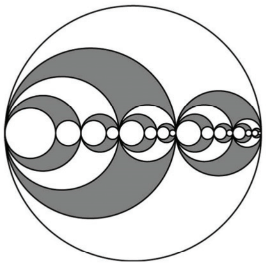
C_1



C_2



C_3



C_4

⋯

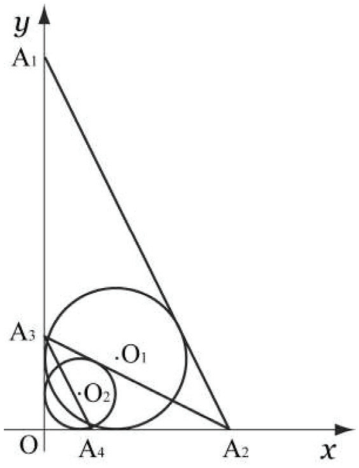
G048

○○
(2009(7)고3-가형24)

그림과 같이 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}_1(0,\ 4)$, $\mathrm{A}_2(2,\ 0)$으로 이루어진 $\triangle\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$에 내접하는 원을 O_1이라 하자. y축 위의 점 A_3이 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$의 기울기와 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle\mathrm{OA}_2\mathrm{A}_3$에 내접하는 원을 O_2라 하자.

x축 위의 점 A_4가 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$의 기울기와 선분 $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle\mathrm{OA}_3\mathrm{A}_4$에 내접하는 원을 O_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 생기는 $\triangle\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$에 내접하는 원을 O_n이라 하고, O_n의 반지름의 길이가 r_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r_n = a - 2\sqrt{b}$ (a, b는 자연수)이다. $a+b$의 값을 구하시오. [4점]



G049

○○○
(2009(3)고3-가형14)

수열 $\{(-1)^{n-1}\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 보기의 수열 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\{S_n\}$

ㄴ. $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$

ㄷ. $\left\{\dfrac{S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n}{n}\right\}$

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

G050

○○
(2009(7)고3-가형10)

모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$인 함수 $f(x)$가

$f(x) = -2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+1 \ \left(-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}\right)$이고

함수 $g(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\{1+f(x)\}^n-1}{\{1+f(x)\}^n+1}$일 때,

$g(10\sqrt{2})-g(\sqrt{3})$의 값은? [4점]

① -2　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

G 수열의 극한

1	④	2	4	3	④	4	①	5	⑤
6	⑤	7	⑤	8	⑤	9	15	10	125
11	24	12	②	13	④	14	④	15	③
16	12	17	②	18	③	19	②	20	24
21	3	22	①	23	①	24	①	25	④
26	7	27	④	28	③	29	④	30	①
31	④	32	④	33	⑤	34	①	35	④
36	②	37	②	38	①	39	①	40	125
41	10	42	②	43	①	44	③	45	⑤
46	①	47	59	48	11	49	⑤	50	⑤
51	②	52	④	53	③	54	①	55	②
56	18	57	④	58	⑤	59	12	60	19
61	25	62	②	63	④	64	④	65	③
66	①	67	①	68	①	69	②	70	12
71	10	72	③	73	③	74	④	75	④
76	②	77	①	78	③	79	②	80	④
81	①	82	47	83	③	84	②	85	④
86	④	87	⑤	88	③	89	③	90	①
91	④	92	②	93	②	94	③	95	125
96	①	97	25	98	②	99	④	100	①
101	②	102	④	103	4	104	192	105	③
106	40	107	②	108	①	109	③	110	⑤
111	②	112	①	113	③	114	④	115	27
116	②	117	⑤	118	①	119	④	120	②
121	③	122	6	123	④	124	253	125	②
126	④	127	④	128	②	129	②	130	①
131	②	132	⑤	133	②	134	④	135	④
136	①	137	⑤	138	②	139	②	140	②

H 미분법

1	14	2	③	3	⑤	4	②	5	503
6	③	7	64	8	④	9	108	10	③
11	⑤	12	9	13	⑤	14	③	15	⑤
16	⑤	17	①	18	10	19	⑤	20	②
21	②	22	⑤	23	6	24	70	25	④
26	②	27	①	28	②	29	④	30	③
31	③	32	④	33	⑤	34	⑤	35	②
36	①	37	⑤	38	3	39	③	40	8
41	17	42	③	43	②	44	④	45	①
46	⑤	47	①	48	①	49	④	50	8
51	⑤	52	30	53	⑤	54	⑤	55	4
56	④	57	③	58	③	59	3	60	④
61	④	62	③	63	32	64	37	65	③
66	④	67	27	68	③	69	13	70	48
71	①	72	20	73	④	74	⑤	75	③
76	10	77	③	78	③	79	61	80	3
81	②	82	25	83	③	84	②	85	⑤
86	34	87	④	88	④	89	④	90	①
91	18	92	④	93	40	94	⑤	95	13
96	32	97	③	98	④	99	⑤	100	20
101	10	102	①	103	⑤	104	②	105	②
106	⑤	107	208	108	①	109	71	110	25
111	23	112	③	113	①	114	③	115	③
116	25	117	8	118	25	119	⑤	120	④
121	①	122	①	123	①	124	①	125	②
126	①	127	5	128	50	129	①	130	②
131	71	132	⑤	133	②	134	②	135	⑤
136	③	137	4	138	④	139	③	140	⑤
141	①	142	④	143	②	144	②	145	⑤
146	30	147	49	148	⑤	149	77	150	②
151	9	152	⑤	153	95	154	④	155	③
156	②	157	②	158	③	159	④	160	⑤
161	②	162	②	163	①	164	④	165	6
166	①	167	9	168	⑤	169	120	170	②
171	5	172	④	173	③	174	③	175	8
176	6								

I 적분법

1	③	2	⑤	3	③	4	⑤	5	③
6	10	7	②	8	⑤	9	④	10	②
11	⑤	12	11	13	100	14	③	15	⑤
16	40	17	102	18	33	19	①	20	54
21	④	22	③	23	11	24	①	25	50
26	③	27	9	28	③	29	88	30	6
31	①	32	③	33	④	34	③	35	51
36	③	37	④	38	12	39	②	40	25
41	①	42	12	43	①	44	④	45	⑤
46	①	47	7	48	⑤	49	⑤	50	④
51	24	52	②	53	⑤	54	④	55	80
56	⑤	57	④	58	5	59	⑤	60	8
61	①	62	①	63	125	64	350	65	⑤
66	④	67	36	68	⑤	69	⑤	70	49
71	325	72	③	73	18	74	②	75	72
76	④	77	②	78	⑤	79	②	80	12
81	⑤	82	26	83	④	84	①	85	16
86	①	87	②	88	48	89	7	90	④
91	25	92	④	93	③				

해설 목차

미적분

G 수열의 극한

1	④	2	4	3	④	4	①	5	⑤
6	⑤	7	⑤	8	⑤	9	15	10	125
11	24	12	②	13	④	14	④	15	③
16	12	17	②	18	③	19	②	20	24
21	3	22	①	23	①	24	①	25	④
26	7	27	④	28	③	29	④	30	①
31	④	32	④	33	⑤	34	①	35	④
36	②	37	②	38	①	39	①	40	125
41	10	42	②	43	①	44	③	45	⑤
46	①	47	59	48	11	49	⑤	50	⑤
51	②	52	④	53	③	54	①	55	②
56	18	57	④	58	⑤	59	12	60	19
61	25	62	②	63	④	64	④	65	③
66	①	67	①	68	①	69	②	70	12
71	10	72	③	73	③	74	④	75	④
76	②	77	①	78	③	79	②	80	④
81	①	82	47	83	③	84	②	85	④
86	④	87	⑤	88	③	89	③	90	①
91	④	92	②	93	②	94	③	95	125
96	①	97	25	98	②	99	④	100	①
101	②	102	④	103	4	104	192	105	③
106	40	107	②	108	①	109	③	110	⑤
111	②	112	①	113	③	114	④	115	27
116	②	117	⑤	118	①	119	④	120	②
121	③	122	6	123	④	124	253	125	②
126	④	127	④	128	②	129	②	130	①
131	②	132	⑤	133	②	134	④	135	④
136	①	137	⑤	138	②	139	②	140	②

G001

| 답 ④

[풀이]

〈과정〉

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n - b^n)$이 수렴하면

$\lim_{n\to\infty}(a^n - b^n) = 0$이다.

- (i) $|a| \geq 1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} a^n\left\{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\} = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n = 1$이다.

($\because$ $n \to \infty$일 때, $|a^n| = 1$ 또는 $|a^n| \to \infty$이기 때문에 $1-\left(\frac{b}{a}\right)^n \to 0$, 즉 $\left(\frac{b}{a}\right)^n \to 1$이어야 한다.)

즉, $\frac{b}{a} = \boxed{1}$이다.

- (ii) $|a| < 1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(a^n - b^n) = \lim_{n\to\infty}(-b^n) = 0$이므로

$\boxed{|b| < 1}$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n - b^n)$이 수렴할 조건은

(i), (ii)에 의하여

$|a| \geq 1$일 때, $\frac{b}{a} = \boxed{1}$

또는

$|a| < 1$일 때, $\boxed{|b| < 1}$이다.

(가): 1

(나): $|b| < 1$

답 ④

G002

| 답 4

[풀이]

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$

로 둘 수 있다.

수열의 극한에 대한 성질에 의하여

(주어진 식)$= \frac{\alpha+3}{2\alpha-1} = 1$

$\therefore\ \alpha = 4$

답 4

G003

| 답 ④

[풀이]

$f_n(x) = b_n x + a_n$으로 두자.

함수 $f_n(x)$의 도함수는

$f_n(x) = b_n$

문제에서 주어진 등식에서

$f_{n+1}(x) = 2f_n(x) + 2xf_n{}'(x)$

이므로

$b_{n+1}x + a_{n+1} = 2(b_n x + a_n) + 2b_n x$

정리하면

$(b_{n+1} - 4b_n)x + a_{n+1} - 2a_n = 0$

항등식의 필요충분조건에 의하여

$b_{n+1}=4b_n$, $a_{n+1}=2a_n$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 4인 등비수열이다.

일반항 a_n, b_n은 각각

$$a_n=2^n,\ b_n=4^{n-1}$$

일반항 $\dfrac{a_n}{b_n}$은

$$\frac{a_n}{b_n}=2^{2-n}$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{2-n}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$$

답 ④

G004

|답 ①

[풀이]

$$(k+1)^2(a_{k+1}-a_k)$$

$$=(k+1)^2a_{k+1}-(k+1)^2a_k$$

$$=(k+1)^2a_{k+1}-k^2a_k-2ka_k-a_k$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2(a_{k+1}-a_k)$$

$$=(n+1)^2a_{n+1}-1^2a_1-2\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$(\because\ \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2a_{k+1}-k^2a_k\}$$

$$=(2^2a_2-1^2a_1)+(3^2a_3-2^2a_2)$$

$$+\ \cdots\ +((n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n)$$

$$=(n+1)^2a_{n+1}-1^2a_1)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2(a_{n+1}-a_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2(a_{k+1}-a_k)$$

$$=\lim_{n\to\infty}((n+1)^2a_{n+1}-1^2a_1)$$

$$-2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}ka_k-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=0-1-2B-A$$

($\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^2a_{n+1}=0$,

$a_1=1$)

$$=-A-2B-1$$

답 ①

G005

|답 ⑤

[풀이]

〈과정〉

$$a_n=n\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a\right)=\frac{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a}{\frac{1}{n}}$$

이므로 이 수열이 수렴하려면

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-a\right)=\boxed{0}$이다.

($\because$ $n\to\infty$ 일 때, (분모)$=\dfrac{1}{n}\to 0$)

그러므로 $a=\boxed{\dfrac{1}{2}}$이다.

$$(\because\ a=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2})$$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-5}{4(4n+1)}}{\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-5n}{4(4n+1)}}{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}+\frac{1}{2}}$$

$=\dfrac{-\frac{5}{16}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\boxed{-\dfrac{5}{16}}$이다.

(가): 0

(나): $\dfrac{1}{2}$

(다): $-\dfrac{5}{16}$

답 ⑤

G006 | 답 ⑤

[풀이]

〈과정〉

Ⅰ) 자연수 n에 대하여 $na_na_{n-1}=\frac{\pi}{2}$임을 수학적 귀납법으로 증명하면

ⅰ) $n=1$일 때, $a_1 \cdot a_0 = 1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$이므로 성립한다.

ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$ka_ka_{k-1}=\frac{\pi}{2}$이다.

$n=k+1$일 때,

$(k+1)a_{k+1}a_k$

$=(k+1)\boxed{\frac{k}{k+1}a_{k-1}}a_k$

$(\because a_{k+1}=\frac{k}{k+1}a_{k-1})$

$=\frac{k+1}{k+1}ka_ka_{k-1}$

$=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

이므로 성립한다.

Ⅱ) 수열 $\{a_n\}$이 감소하는 수열임을 수학적 귀납법으로 증명하면

⋮

중략

⋮

따라서 $a_n \geq a_{n+1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이다.

조건에서 $a_{2n+1} \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq a_{2n-2}$이고

수열 $\{a_n\}$이 감소하는 수열이므로

$(a_{2n+1})^2 \leq \frac{I^2}{n} \leq (a_{2n-2})^2$

$a_{2n+2}a_{2n+1} \leq \frac{I^2}{n} \leq a_{2n-2}a_{2n-3}$

$(\because a_{2n+2}<a_{2n+1},\ a_{2n-2}<a_{2n-3})$

$na_{2n+2}a_{2n+1} \leq \boxed{I^2} \leq na_{2n-2}a_{2n-3}$

임을 유추할 수 있다.

그러므로 Ⅰ)에 의해서

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{n}{2n+2}(2n+2)a_{2n+2}a_{2n+1} \leq \boxed{I^2}$

$\leq \frac{n}{2n-2}(2n-2)a_{2n-2}a_{2n-3}$

$\frac{n\pi}{2(2n+2)} \leq \boxed{I^2} \leq \frac{n\pi}{2(2n-2)}$

그런데 $n\to\infty$일 때,

$\frac{n\pi}{2(2n+2)}\to\frac{\pi}{4}$, $\frac{n\pi}{2(2n-2)}\to\frac{\pi}{4}$

이므로 수렴하는 수열의 대소 관계에 의하여

따라서 $I=\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$이다.

(가): $\frac{k}{k+1}a_{k-1}$

(나): I^2

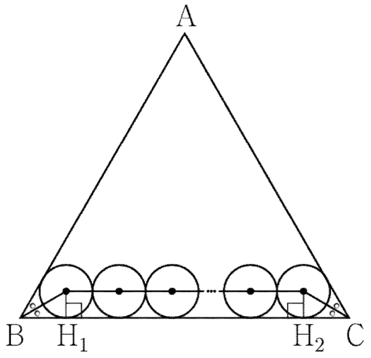
(다): $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

답 ⑤

G007 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 삼각형의 세 꼭짓점을 각각 A, B, C, n번째 행의 n개의 원 중에서 가장 왼쪽의 원의 중심에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H_1, 가장 오른쪽의 원의 중심에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H_2라고 하자. 그리고 삼각형 ABC의 내부의 원들의 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.



(단, ○$=30°$)

직각삼각형의 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{BH_1}=\overline{CH_2}=\sqrt{3}r_n$

선분 H_1H_2의 길이는

$\overline{H_1H_2}=2(n-1)r_n$

$\overline{BC}=\overline{BH_1}+\overline{H_1H_2}+\overline{H_2C}$

$=(2n-2+2\sqrt{3})r_n=2$

정리하면

$r_n=\frac{1}{n+\sqrt{3}-1}$

삼각형 ABC의 내부의 원의 개수는

$1+2+3+\ \cdots\ +n=\frac{n(n+1)}{2}$

$(\because$ 등차수열의 합의 공식)

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}\times\pi r_n^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\times\frac{n(n+1)}{(n+\sqrt{3}-1)^2}$$

수열의 극한의 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\times\frac{n(n+1)}{(n+\sqrt{3}-1)^2}=\frac{\pi}{2}$$

답 ⑤

G008

| 답 ⑤

[풀이]

▶ ㄱ. (참)

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\cdot 0=0$$

▶ ㄴ. (참)

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\alpha-0=\alpha$$

▶ ㄷ. (참)

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ 이고, $\lim_{n\to\infty}a_n\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=\alpha$ 이므로

$n\to\infty$ 일 때, $1-\frac{b_n}{a_n}\to 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

G009

| 답 15

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}-2a_n\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}-2\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$=\frac{3}{2}-2\lim_{n\to\infty}a_n$$

즉,

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\frac{3}{2}-2\lim_{n\to\infty}a_n$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 이므로

$\alpha=\frac{3}{2}-2\alpha$ 풀면 $\alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 30\alpha=15$

답 15

G010

| 답 125

[풀이1]

$x_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ 이므로

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(x_n^2-x_{n+1}^2)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{3}{4^{n+2}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n-1}-x_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

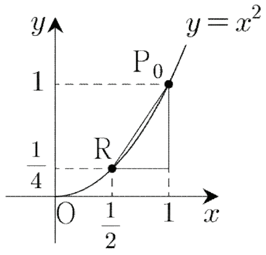
$\therefore\ S=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4},\ 100S=125$

답 125

[풀이2] **시험장** ★

$n\to\infty$ 일 때, $x_n\to\frac{1}{2}$ 이므로

두 점 P_n, Q_n은 모두 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$에 가까워진다. 이 점을 R이라고 하자.



$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}}=$(선분 $\mathrm{P}_0\mathrm{R}$을 빗변으로 하는 직각삼각형의 높이)

$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=$(선분 $\mathrm{P}_0\mathrm{R}$을 빗변으로 하는 직각삼각형의 밑변

의 길이)

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ S=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4},\ 100S=125$$

답 125

G011

|답 24

[풀이]

$\overline{\mathrm{OC}_n}=n$이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}_n}=\sqrt{n^2+48^2}$

서로 닮은 두 직각삼각형 $\mathrm{AD}_n\mathrm{B}_1$, $\mathrm{AC}_n\mathrm{B}_n$에 대하여

$\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{D}_n}:\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=1:n$이므로 $\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{D}_n}=\dfrac{48}{n}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AC}_n}-\overline{\mathrm{OC}_n}}{\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{D}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+48^2}-n}{\frac{48}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{48^2}{\frac{48}{n}\times\left(\sqrt{n^2+48^2}+n\right)}=\frac{48}{2}=24$$

답 24

G012

|답 ②

[풀이]

▶ ㄱ. (거짓)

(반례) $a_n=\dfrac{2}{n}$, $b_n=\dfrac{1}{n}$이면

$a_n>b_n$이지만 $\alpha=\beta=0$이다.

▶ ㄴ. (참)

$$\alpha-\beta=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)>0$$

($\because$ 모든 자연수 k에 대하여 $a_k>b_k$)

$\therefore\ \alpha>\beta$

▶ ㄷ. (거짓)

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

G013

|답 ④

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$|f(x)|>1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}=0$,

$|f(x)|=1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}=\frac{1}{2}$,

$|f(x)|<1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}=1$

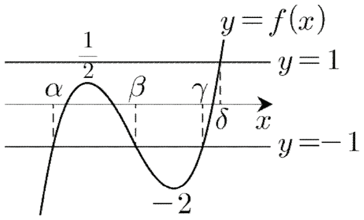
함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}0 & (|f(x)|>1)\\ \frac{1}{2} & (|f(x)|=1)\\ 1 & (|f(x)|<1)\end{cases}$$

- (1) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표를 δ,

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$의 세 교점의 x좌표를 α, β, γ라고 하자. (단, $\alpha<\beta<\gamma$)



함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x<\alpha,\ \beta<x<\gamma,\ x>\delta)\\ \frac{1}{2} & (x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)\\ 1 & (\alpha<x<\beta,\ \gamma<x<\delta)\end{cases}$$

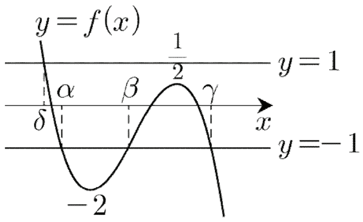
함수 $g(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$, $x=\delta$에서만 불연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 불연속이 되는 점의 개수는 4이다.

- (2) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표를 δ,

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$의 세 교점의 x좌표를 α, β, γ라고 하자. (단, $\alpha<\beta<\gamma$)



함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x<\delta,\ \alpha<x<\beta,\ x>\gamma)\\ \dfrac{1}{2} & (x=\delta,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)\\ 1 & (\delta<x<\alpha,\ \beta<x<\gamma)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$, $x=\delta$에서만 불연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 불연속이 되는 점의 개수는 4이다.

(1), (2)에서 함수 $g(x)$가 불연속이 되는 점의 개수는 4이다.

답 ④

G014 | 답 ④

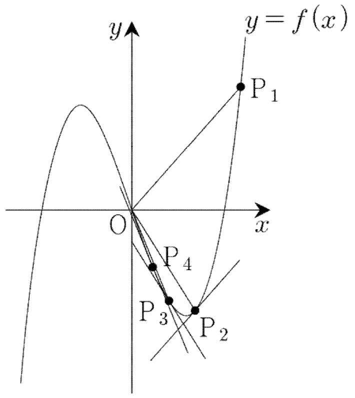
[풀이1] **시험장**

점 $(a_n,\ f(a_n))$을 P_n이라고 하자.

예를 들어 $a_1>\sqrt{3}$일 때, 점

$\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \cdots$

을 계속 찍어나가면 다음과 같다.



▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

위의 그림에서 $f(a_2)<f(a_3)$이다.

▸ ㄴ. (참)

위의 그림에서 점 P_n에서의 접선의 기울기는 n의 값이 커질수록 작아진다.

▸ ㄷ. (참)

$n\to\infty$일 때, 점 P_n에서의 접선은 점 O에서의 접선에 한없이 가까워진다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}f'(a_n)=-3$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

[풀이2]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

문제에서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의를 수식으로 표현하자.

$$\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0}=f'(a_{n+1})$$

$a_n^2-3=3a_{n+1}^2-3$

정리하면

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}a_n(\because\ a_n>0)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$인 등비수열이다.

(단, $a_1>0$)

일반항 a_n은

$$a_n=a_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}\text{(단, }n\text{은 자연수)}$$

▸ ㄱ. (거짓)

구간 $(-1,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로

함수 $f(x)$는 감소한다.

따라서

$0<a_{n+1}<a_n<1$

을 만족시키는 n에 대하여

$f(a_{n+1})>f(a_n)$

▸ ㄴ. (참)

$f'(a_n)-f'(a_{n+1})$

$=3a_n^2-3-3a_{n+1}^2+3$

$=3(a_n-a_{n+1})(a_n+a_{n+1})$

$>0(\because\ a_n>a_{n+1}>0)$

$\therefore\ f'(a_n)>f'(a_{n+1})$

▸ ㄷ. (참)

$$f'(a_n)=3a_n^2-3=a_1^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}-3$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}f'(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left\{a_1^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}-3\right\}=-3$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

G015 | 답 ③

[풀이1]

$a_n-\dfrac{2+4+6+\ \cdots\ +2n}{(2n-1)^2}=b_n$으로 두자.

연속하는 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$a_n=\frac{2+4+6+\ \cdots\ +2n}{(2n-1)^2}+b_n$$

$$=\frac{2\times\frac{n(n+1)}{2}}{(2n-1)^2}+b_n=\frac{n(n+1)}{(2n-1)^2}+b_n$$

문제에서 주어진 급수가 수렴하므로 일반항 b_n은 0에 수렴한다.

즉, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$이다.

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)}{(2n-1)^2}+b_n\right\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

답 ③

[풀이2] **시험장**

급수가 수렴하므로

$n\to\infty$일 때,

$$a_n\approx\frac{2+4+6+\ \cdots\ +2n}{(2n-1)^2}$$

$$\approx\frac{2\times\frac{n(n+1)}{2}}{4n^2}\to\frac{1}{4}$$

답 ③

G016 |답 12

[풀이]

$$na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$(n-1)a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_k\ \ (n\ge 2)$$

위의 두 식을 변변히 빼면

$na_{n+1}-(n-1)a_n=a_n$, 즉 $a_{n+1}=a_n\ \ (n\ge 2)$

그런데 $1\cdot a_2=\sum\limits_{k=1}^{1}a_k$에서 $a_2=a_1$이므로

$a_{n+1}=a_n\ \ (n\ge 1)$

$S_n=na_1=\frac{n}{4}$이므로

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_nS_{n+2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}8\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=8\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=8\times\frac{3}{2}=12$$

답 12

G017 |답 ②

[풀이]

▶ ㄱ. (거짓)

(반례)

예를 들어 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n^2$이면

$n\to\infty$일 때, $a_n\to 0$, $b_n\to\infty$이지만

$a_nb_n=n\to\infty$이다.

▶ ㄴ. (참)

수열의 극한의 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=5-0=5$$

▶ ㄷ. (거짓)

(반례)

예를 들어 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$이면

$a_nb_n=\frac{1}{n^3}\ne 0$이고,

$n\to\infty$일 때, $a_n\to 0$, $b_n\to 0$이지만

$\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{n}\to 0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

G018 |답 ③

[풀이]

▶ ㄱ. (참)

$n\to\infty$일 때, $\frac{b_n}{a_n}=\frac{\alpha}{\infty}\to 0$

▶ ㄴ. (참)

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\beta-0=\beta$$

▶ ㄷ. (거짓)

(반례)

예를 들어

$a_n=1+\frac{1}{n}$, $b_n=1+\frac{3}{n}$, $c_n=1+\frac{2}{n}$

이면 $a_n<c_n<b_n$이고,

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만

$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1\ne 0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

G019 |답 ②

[풀이]

▶ ㄱ. (거짓)

(반례)

$a_n=\frac{1}{n^2}$, $b_n=n$이면

$n\to\infty$일 때, $a_n\to0$, $a_nb_n=\frac{1}{n}\to0$이지만

$b_n\to\infty$ (발산)한다.

▶ ㄴ. (참)

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-2b_n)+2b_n\}$$

$=0+2\times1=2$

▶ ㄷ. (거짓)

(반례)

예를 들어

$a_n=n+\frac{1}{n}$, $b_n=n+\frac{2}{n}$, $c_n=n+\frac{3}{n}$

이면 $n\to\infty$일 때, $c_n-a_n=\frac{2}{n}\to0$이지만

$b_n\to\infty$ (발산)한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

G020 |답 24

[풀이]

등비급수의 합의 공식에 의하여

(주어진 식)$=\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

$=\frac{1-\sin^2\theta}{1-\sin\theta}=\frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}{1-\sin\theta}$

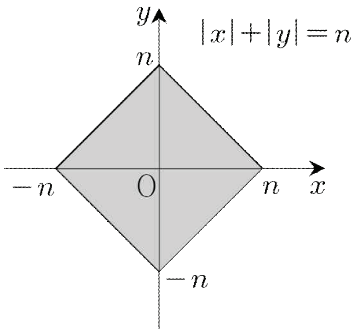
$=1+\sin\theta=\frac{18}{13}$, 즉 $\sin\theta=\frac{5}{13}$

$\therefore\ \frac{10}{\tan\theta}=10\times\frac{12}{5}=24$

답 24

G021 |답 3

[풀이]



$S_n=$(한 변의 길이가 $\sqrt{2}\,n$인 정사각형의 넓이)

$=2n^2\ (n\ge1)$

수열의 합과 일반항의 관계에 의하여

$a_1=S_1=2$

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-2(n-1)^2=4n-2\,(n\ge2)$

일반항 a_n은

$a_n=4n-2\ (n\ge1)$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}3\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}3\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$=3$

답 3

G022 |답 ①

[풀이]

조건 (가)에서 등비중항의 정의에 의하여

수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하자.

조건 (나)에서 주어진 등식에서

$\frac{a_1}{1-r}=2a_1(1+r)$(∵ 등비급수의 합의 공식)

양변을 $a_1(>0)$으로 나눈 후 정리하면

$r^2=\frac{1}{2}$ …㉠

수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 a_1^2이고 공비가 r^2인 등비수열이므로

조건 (다)에서 주어진 등식에서

$\frac{a_1^2}{1-r^2}=2a_1(1+r^2)$(∵ 등비급수의 합의 공식)

양변을 $a_1(>0)$으로 나눈 후 ㉠을 대입하여 정리하면

$$a_1=\frac{3}{2}$$

등비수열의 정의에 의하여

$$\therefore\ a_5=a_1\times r^4=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

답 ①

G023 | 답 ①

[풀이]

직각삼각형 ABC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{5}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}\,\overline{\mathrm{BP_1}}$$

즉, $\frac{1}{2}\times2\times1=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{BP_1}}$에서

$$\overline{\mathrm{BP_1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

두 삼각형 ABC, $\mathrm{AP_1B}$의 닮음비가 $1:\frac{2}{\sqrt{5}}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{4}{5}$이다.

$$S_1=(\triangle\mathrm{ABP_1}\text{의 넓이})$$

$$=(\triangle\mathrm{ABC}\text{의 넓이})\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$$

두 직각삼각형 $\mathrm{ABP_1}$, $\mathrm{AP_1P_2}$의 닮음비가 $1:\frac{2}{\sqrt{5}}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{4}{5}$이다.

$$S_2=\frac{4}{5}S_1$$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$$S_{n+1}=\frac{4}{5}S_n$$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{4}{5}$이고, 공비가 $\frac{4}{5}$인 등비수열이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4$$

답 ①

G024 | 답 ①

[풀이]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$a_n=$(그림 T_n에서 새롭게 그려진 세로 방향의 선분 한 개의 길이)

$b_n=$(그림 T_n에서 새롭게 그려진 세로 방향의 선분의 개수)

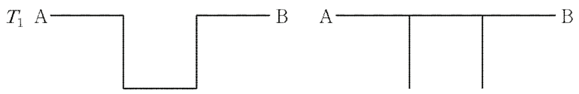


그림 T_1에서 가로 방향의 모든 성분의 길이의 합은 1이고,

$$a_1=\frac{1}{3},\ b_1=2$$

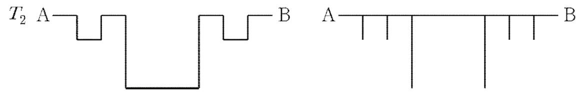


그림 T_2에서 가로 방향의 모든 성분의 길이의 합은 1이고,

$$a_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2,\ b_2=2^2$$

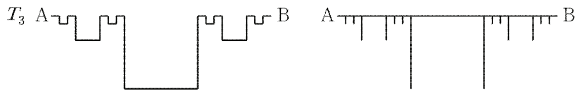


그림 T_3에서 가로 방향의 모든 성분의 길이의 합은 1이고,

$$a_3=\left(\frac{1}{3}\right)^3,\ b_3=2^3$$

⋮

이상에서 다음과 같이 추론할 수 있다.

그림 T_n에서 가로 방향의 모든 성분의 길이의 합은 1이고,

$$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n,\ b_n=2^n$$

$$l_n=1+\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}l_n=1+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=3$$

답 ①

G025 | 답 ④

[풀이]

시그마의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)=\sum_{k=1}^{n}2+\sum_{k=1}^{n}a_k=2n+S_n$$

시그마의 성질과 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)=\sum_{k=1}^{n}2k+\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}+S_n$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+S_n}{n(n+1)+S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{S_n}{n^2}}{\frac{n+1}{n}+\frac{S_n}{n^2}}$$

$$=\frac{0+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\left(\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{2}\right)$$

답 ④

G026

|답 7

[풀이]

문제에서 주어진 등비수열이 수렴할 조건은

$-1<\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}x\le 1$, 즉

$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\frac{\pi}{8}x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ (단, $0<\frac{\pi}{8}x<2\pi$)

위의 부등식을 풀면

$0<\frac{\pi}{8}x\le\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi\le\frac{\pi}{8}x<\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi<\frac{\pi}{8}x<2\pi$

즉, $0<x\le 2$, $6\le x<10$, $14<x<16$

자연수 x의 값은 1, 2, 6, 7, 8, 9, 15이므로 자연수 x의 개수는 7이다.

답 7

G027

|답 ④

[풀이]

〈과정〉

모든 양의 실수 x에 대하여 $\frac{x}{2+x}<\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2}$가 성립한다.

(이때, 이 부등식은 문제에서 준 것이므로 증명할 이유가 없다.)

자연수 k, n $(k\le n)$에 대하여 $x=\frac{k}{n^2}$를 위 부등식에 대입하여 정리하면

$$\frac{k}{2n^2+k}<\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1<\frac{k}{2n^2}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}<S_n<\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

이다. 이 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\boxed{\frac{1}{4}}\text{이고}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4}$$

$$\left(\because\ \frac{k^2}{4n^4}-\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}=\frac{k^3}{4n^4(2n^2+k)}\ge 0\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$=\boxed{0}$ ($\because$ 분자는 3차, 분모는 4차이다.)

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\boxed{\frac{1}{4}}$이다.

$$\left(\because\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}=\frac{1}{4}\right)$$

(가): $\frac{1}{4}$

(나): 0

(다): $\frac{1}{4}$

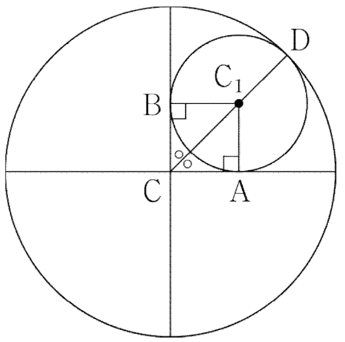
답 ④

G028

|답 ③

[풀이]

아래 그림처럼 원 C_1이 사분원과 만나는 세 점을 각각 A, B, D라고 하자.



(단, ○$=45^\circ$)

직각이등변삼각형 $\mathrm{C_1CA}$에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{CC_1}}=\sqrt{2}\,r_1$

원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CC_1}}+\overline{\mathrm{C_1D}}=\sqrt{2}\,r_1+r_1=1$

정리하면

$r_1=\sqrt{2}-1$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$r_n=(\sqrt{2}+1)r_{n+1}$

이므로

$r_{n+1}=(\sqrt{2}-1)r_n$

수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{2}-1$이고, 공비가 $\sqrt{2}-1$인 등비수열이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}r_k=\frac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ③

G029 |답 ④

[풀이]

▶ ㄱ. (발산)

수열을 나열하면

$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

이 수열은 수렴하지 않는다.

▶ ㄴ. (수렴)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

▶ ㄷ. (수렴)

$$\lim_{n\to\infty}(\log_2 n^2-2\log_2(n+2))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n^2}{(n+2)^2}=\log_2 1=0$$

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

G030 |답 ①

[풀이]

점 A_n에서 x축에 내린 수선의 발을 B_n이라고 하자.

(단, B_0은 원점이다.)

선분 $\mathrm{B_0B_1}$, $\mathrm{B_1B_2}$, $\mathrm{B_2B_3}$, $\cdots$ 의 길이를 쓰면

$\frac{4}{3},\ 1,\ \frac{3}{4},\ \cdots$

즉, 수열 $\left\{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}\right\}$은 첫째항이 $\frac{4}{3}$이고, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{16}{3}$$

답 ①

G031 |답 ④

[풀이]

곡선 $y=\frac{n}{x}$와 직선 $y=nx$의 방정식을 연립하면

$\frac{n}{x}=nx$에서 $x^2=1$이므로 $x=-1$ 또는 $x=1$

두 점 A_n, B_n의 좌표는 각각

$\mathrm{A}_n(1,\ n)$, $\mathrm{B}_n(-1,\ -n)$

점 C_n의 좌표는

$\mathrm{C}_n(1,\ 0)$

직선 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 방정식은

$y=\frac{n}{2}x-\frac{n}{2}$

이 직선의 방정식에 $x=0$을 대입하여 점 D_n의 좌표를 구하면

$\mathrm{D}_n\left(0,\ -\frac{n}{2}\right)$

사다리꼴의 넓이에 대한 공식에 의하여

$$S_n=\frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}+\overline{\mathrm{OD}_n}}{2}\times\overline{\mathrm{OC}_n}=\frac{3}{4}n$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$T_n=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OD}_n}\times|\text{점 }\mathrm{B}_n\text{의 }x\text{좌표}|=\frac{n}{4}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n+n}{S_n+n+1}$$

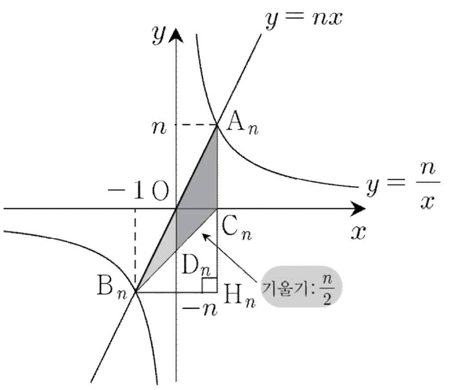
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{4}n}{\frac{7}{4}n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{4}+\frac{1}{n}}=\frac{5}{7}$$

답 ④

[참고]

다음과 같이 S_n, T_n의 방정식을 유도해도 좋다.

두 직선 $x=1$, $y=-n$의 교점을 H_n이라고 하자. 이때, $\angle \mathrm{B}_n\mathrm{H}_n\mathrm{A}_n=90^\circ$ 이다.



두 함수 $y=\frac{n}{x}$, $y=nx$의 방정식을 연립하면

$$\frac{n}{x}=nx,\ x^2=1,\ x=\pm1$$

이므로

$\mathrm{A}_n(1,\ n)$, $\mathrm{C}_n(1,\ 0)$, $\mathrm{B}_n(-1,\ -n)$

직선 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 기울기는 $\frac{n}{2}$이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{OD}_n}}{\overline{\mathrm{OC}_n}}=\frac{n}{2},\ \text{즉}\ \overline{\mathrm{OD}_n}=\frac{n}{2}$$

사다리꼴의 넓이에 대한 공식에 의하여

$$S_n=\frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}+\overline{\mathrm{OD}_n}}{2}\times\overline{\mathrm{OC}_n}=\frac{3}{4}n$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$T_n=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OD}_n}\times|\text{점 }\mathrm{B}_n\text{의 }x\text{좌표}|=\frac{n}{4}$$

G032 | 답 ④

[풀이]

곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$와 직선 $y=\frac{n}{2}$의 교점의 x좌표는

$$x=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=2^{-n}$$

그런데 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$은 y축에 대하여 대칭이므로

$$S_n=2\times2^{-n}\times\frac{1}{2}=2^{-n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

답 ④

G033 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 두 급수가 모두 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)=\beta$$

(단, α, β는 상수이다.)

- ㄱ. (참)

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)=\alpha$이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$이다.

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-1+1)=0+1=1$$

- ㄴ. (참)

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴한다고 가정하고

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\gamma$로 두자. (단, γ는 상수이다.)

급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta-\gamma$$

인 동시에

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}1=\lim_{n\to\infty}n=\infty\ (\text{발산})$$

이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다.

- ㄷ. (참)

급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1+b_n+1)=\alpha+\beta$$

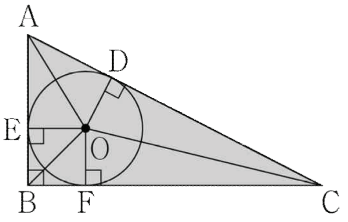
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

G034 | 답 ①

[풀이1]

삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 O, 점 O에서 세 선분 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 E, F, D라고 하자.



피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{n^2+1}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(△ABC의 넓이)=(△OAB의 넓이)+(△OBC의 넓이)+(△OCA의 넓이)

$$\frac{n}{2}=\frac{1+n+\sqrt{n^2+1}}{2}r_n$$

정리하면

$$r_n=\frac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}$$

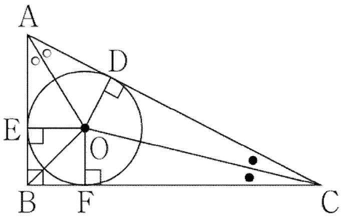
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{2}$$

답 ①

[참고]

r_n을 다음과 같이 유도해도 좋다.



피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{n^2+1}$

사각형 OEBF는 한 변의 길이가 r_n인 정사각형이므로

$\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{EB}=1-r_n$,

$\overline{FC}=\overline{BC}-\overline{BF}=n-r_n$

그런데 $\overline{AD}=\overline{AE}$, $\overline{CD}=\overline{CF}$이므로

(∵ △OAE ≡ △OAD, △OCF ≡ △OCD)

$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}=\overline{AE}+\overline{FC}$

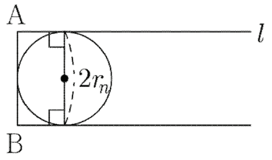
즉, $\sqrt{n^2+1}=n+1-2r_n$

정리하면

$$r_n=\frac{n+1-\sqrt{n^2+1}}{2}=\frac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}$$

[풀이2] **시험장**

점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선을 l이라고 하자.



$n\to\infty$일 때, 점 A의 부근에서 직선 AC는 직선 l에 한없이 가까워지므로

원의 지름의 길이는 선분 AB의 길이에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}$$

답 ①

G035 | 답 ④

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 α에 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=0\times\beta=0$$

▸ ㄴ. (참)

보기에서 주어진 조건에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=\gamma,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=\delta$$

(단, γ, δ는 상수이다.)

급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2a_n+b_n)+(a_n-2b_n)}{5}=\frac{2\gamma+\delta}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2a_n+b_n)-2(a_n-2b_n)}{5}=\frac{\gamma-2\delta}{5}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 수렴한다.

▸ ㄷ. (거짓)

(반례) 예를 들어 $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^n$이면

$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$이지만

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$과 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$은 (진동하면서) 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

G036 ㅣ답 ②

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 2+\frac{1}{n}$, $c_n = 1+\frac{1}{n}$

이면 $n\to\infty$일 때, $c_n\to 1$이지만

$\alpha = 0 \neq 2 = \beta$이다.

▸ ㄴ. (참)

수렴하는 수열의 대소 관계에 의하여

$\alpha \leq \beta$

이다. 즉, $\alpha > \beta$일 수 없다는 말이다.

주어진 명제의 대우명제는 다음과 같다.

'$\alpha = \beta$이면 $\{c_n\}$이 수렴한다.'

위의 명제가 참이므로 문제에서 주어진 명제도 참이다.

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

수렴하는 수열의 대소 관계에 의하여

$n\to\infty$일 때, $c_n\to 0$이다.

만약 $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$이면

$n\to\infty$일 때, $c_n\to 0$이지만

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1) = \infty$$

즉, 급수는 수렴하지 않는다.

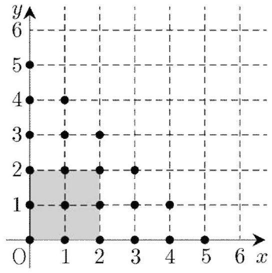
이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

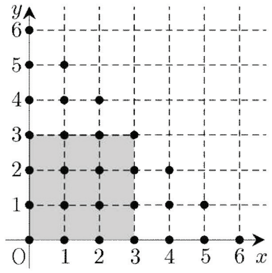
답 ②

G037 ㅣ답 ②

[풀이]

[5단계], [6단계]를 그리면 다음과 같다.





이제 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 표로 정리하자.

n	a_n	b_n
1	$1+2$	0
2	$1+2+3$	2^2
3	$1+2+3+4$	2^2
4	$1+2+3+4+5$	3^2
5	$1+2+3+4+5+6$	3^2
6	$1+2+3+4+5+6+7$	4^2
⋮	⋮	⋮

일반항 a_{2n}, b_{2n}은 각각

$a_{2n} = 1+2+3+\cdots+(2n+1)$

$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} = (n+1)(2n+1)$,

$b_{2n} = (n+1)^2$

(단, $n \geq 1$)

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

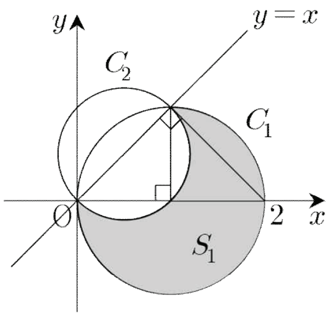
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{b_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$$

답 ②

G038 ㅣ답 ①

[풀이]



위의 그림에서

$$S_1=\frac{3}{4}\pi-2\times\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$$

두 원 C_1, C_2의 닮음비가 $\sqrt{2}:1$이므로
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\pi+1$$

답 ①

G039

| 답 ①

[풀이]

$\overline{\mathrm{DP_1}}=2$이고,

$\triangle \mathrm{DP_1D_1}\sim\triangle \mathrm{BCD_1}$이므로 (닮음비 $1:2$)

$\overline{\mathrm{DD_1}}=x$로 두면 $\overline{\mathrm{BD_1}}=2x$이고

$x+2x=4\sqrt{2}$에서 $x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}(=\overline{\mathrm{DD_1}})$

$$\therefore\ S_1=2\left(\frac{1}{2}\times2\times\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\sin45^\circ\right)=\frac{8}{3}$$

한편 두 사각형 ABCD, $\mathrm{A_1BC_1D_1}$의 닮음비는

$3:2(=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{BD_1}})$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{8}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{24}{5}$$

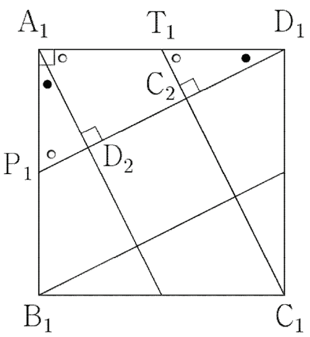
답 ①

G040

| 답 125

[풀이]

평면도형의 성질을 이용하면 아래와 같이 각(○, ●)을 결정할 수 있다.



직각삼각형 $\mathrm{A_1P_1D_1}$의 세 변의 길이의 비는

$1:\sqrt{5}:2$

이고, 서로 합동인 두 직각삼각형 $\mathrm{C_2T_1D_1}$, $\mathrm{D_2P_1A_1}$에 대하여

$\overline{\mathrm{P_1D_2}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{C_2D_1}}=2\sqrt{5}$

여기서 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 한 변의 길이를 x로 두면

$\overline{\mathrm{P_1D_1}}=\sqrt{5}+x+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$, $x=2\sqrt{5}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{100}{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{10}\right)^2}=125$$

답 125

G041

| 답 10

[풀이]

두 정사각형 ABCD, $\mathrm{A_1B_1CD_1}$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{A_1B_1}}=m+n:n$

이므로 $S_1:S_2=(m+n)^2:n^2$이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{\infty}S_k=\frac{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2}{1-\left(\frac{n}{m+n}\right)^2}$$

$=\dfrac{m}{m+2n}=\dfrac{1}{7}$, 즉 $n=3m$

이고, m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=1$, $n=3$

$\therefore\ m^2+n^2=10$

답 10

G042

| 답 ②

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

$a_n=(-1)^n$이면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=1$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$은 발산한다.

▸ ㄴ. (참)

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$이 α에 수렴하면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}(=\alpha)$이므로

(이때, n, $n+1$은 연속한 두 자연수이다.)

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}(=\alpha)$

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

만약 수열 $\{a_n\}$이

$-1,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \cdots$

이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴하지만 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$은 양의 무한대로 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

G043 |답 ①

[풀이]

주어진 등식에서

$$S_{n-1} = S_n - a_n = \frac{n+3}{n+2}\ (n \geq 2)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 1$$

답 ①

G044 |답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

주어진 등식에 $n=1$을 대입하면

$S_1 = pa_1 + 1$, 즉 $a_1 = pa_1 + 1$

$\therefore\ a_1 = \frac{1}{1-p}$

▸ ㄴ. (참)

$S_n = pa_n + 1$

$S_{n-1} = pa_{n-1} + 1\ (n \geq 2)$

위의 두 식을 변변히 빼면

$a_n = pa_n - pa_{n-1}$, $a_n = \frac{p}{p-1}a_{n-1}\ (n \geq 2)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

▸ ㄷ. (거짓)

$p = \frac{2}{3}$이면 $\frac{p}{p-1} = -2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

G045 |답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

등비급수가 수렴할 조건은

$(x-1)\log_2 x = 0$ 또는 $-1 < \log_2 x < 1$

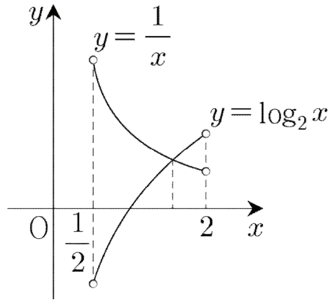
즉, $\frac{1}{2} < x < 2$

▸ ㄴ. (참)

등비급수의 합은

$\frac{(x-1)\log_2 x}{1-\log_2 x} = 1$, 즉 $\log_2 x = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{2} < x < 2$일 때, 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\frac{1}{x}$은 오직 한 점에서 만난다.



▸ ㄷ. (참)

$-1 < \log_2 x < 1$에서

$-1 < \frac{\log_2 x - 1}{2} < 0$이므로 급수는 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

G046 |답 ①

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \beta$로 두면

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

▸ ㄴ. (거짓)

(반례) $a_n = 1$, $b_n = n$이면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+1} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = 1$이지만 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \infty$이다.

반례는 다음과 같이 찾으면 된다.

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{\frac{b_n}{n}}{\frac{a_n}{n+1}\times\frac{n+1}{n}}$$

위의 등식에서 $n\to\infty$ 일 때, $\frac{n+1}{n}\to 1$이므로

$\frac{b_n}{n}\to\alpha(\neq 0)$, $\frac{a_n}{n+1}\to 0$이면 $\frac{b_n}{a_n}$은 발산한다.

이때, b_n은 n에 대한 일차식, a_n은 상수가 적합하다.

▸ ㄷ. (거짓)

(반례) 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이라는 보장은 없지만, 편의상 등비수열이라고 생각하자. 이때, 공비를 r이라고 하자.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n a_n=\frac{a_1}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}$$

이므로 $\left|\frac{r}{2}\right|<1$, 즉 $-2<r<2$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n a_n$은 수렴한다.

그런데 $-2<r\leq -1$ 또는 $1<r<2$이면 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

예를 들어 $a_n=(-1)^n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n$은 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

G047 |답 59

[풀이]

지름이 6인 원의 넓이를 $A_0(=9\pi)$,

그림 C_1에서 새롭게 그려진 2개 원의 넓이의 합을 A_1,

그림 C_2에서 새롭게 그려진 4개의 원의 넓이의 합을 A_2,

⋮

그림 C_n에서 새롭게 그려진 2^n개의 원의 넓이의 합을 A_n이라 하자.

그림 C_1에서 바깥 원을 O_1, 원 O_1의 내부에 내접하는 두 원을 크기 순서대로 O_2, O_3이라 하자. 이때, 세 원 O_1, O_2, O_3의 넓이의 비는 $9:4:1$이므로

$$A_1=\frac{5}{9}A_0$$

그림 C_n에서 한 원과 그 원에 내접하는 두 원의 넓이의 비는 O_1, O_2, O_3의 넓이의 비와 같으므로

$$A_n=\frac{5}{9}A_{n-1}(n\geq 1)$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=A_0\left\{\frac{5}{9}-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=\frac{5\pi}{1-\left(-\frac{5}{9}\right)}=\frac{45}{14}\pi$$

$\therefore\ p+q=59$

답 59

[참고]

다음과 같은 계산도 가능하다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=5\pi-5\pi\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}+5\pi\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^2$$

$$-5\pi\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^3+\cdots$$

$$=\frac{5\pi}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{45}{14}\pi$$

G048 |답 11

[풀이]

문제에서 주어진 기울기 조건에 의하여

두 직선 A_1A_2, A_2A_3은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

이때, $\angle A_1A_2O=\angle A_2A_3O$이므로

두 직각삼각형 A_1A_2O, A_2A_3O은 서로 닮음이다.

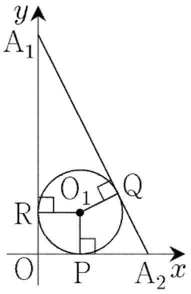
이때, 닮음비가 $2:1$이므로 $r_2=\frac{1}{2}r_1$이다.

마찬가지의 방법으로

$$r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n(n\geq 1)$$

이제 r_1의 값을 구하자.

점 O_1에서 x축, 직선 A_1A_2, y축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라고 하자.



$$\overline{A_1A_2}=\overline{A_1Q}+\overline{QA_2}=\overline{A_1R}+\overline{A_2P}$$

즉, $2\sqrt{5}=4-r_1+2-r_1$

$r_1 = 3-\sqrt{5}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

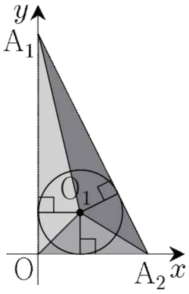
$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \frac{3-\sqrt{5}}{1-\frac{1}{2}} = 6-2\sqrt{5}$$

$\therefore\ a+b=11$

답 11

[참고]

r_1의 값을 다음과 같이 구해도 좋다.



($\triangle\mathrm{A_1OA_2}$의 넓이)

$=$($\triangle\mathrm{A_1OO_1}$의 넓이)$+$($\triangle\mathrm{O_1OA_2}$의 넓이)$+$($\triangle\mathrm{A_2A_1O_1}$의 넓이)

즉, $\frac{1}{2}\times2\times4 = \frac{1}{2}\times r_1\times(6+2\sqrt{5})$

$\therefore\ r_1 = 3-\sqrt{5}$

G049 |답 ⑤

[풀이]

수열 $\{(-1)^{n-1}\}$을 나열하면

$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$

(즉, 1, -1이 반복된다.)

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$

(즉, 1, 0이 반복된다.)

n이 홀수이면 $S_n=1$,

n이 짝수이면 $S_n=0$이다.

▸ ㄱ. (발산)

수열 $\{S_n\}$은 발산한다. (진동한다.)

▸ ㄴ. (수렴)

모든 자연수 n에 대하여

$$0 \le \frac{S_n}{n} \le \frac{1}{n}$$

이고, $n\to\infty$일 때, $\frac{1}{n}\to0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0$$

▸ ㄷ. (수렴)

$T_n = S_1+S_2+\cdots+S_n$으로 두었을 때,

수열 $\{T_n\}$을 나열하면

$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ \cdots$

일반항은

$T_{2m-1}=m$, $T_{2m}=m$ (단, m은 자연수)

자연수 m에 대하여

- $n=2m$일 때,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{T_{2m}}{2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}$$

- $n=2m-1$일 때,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{T_{2m-1}}{2m-1}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2m-1}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n}{n}=\frac{1}{2}$$

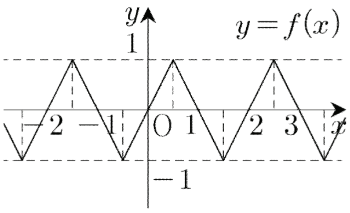
이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

G050 |답 ⑤

[풀이]

주기가 2인 함수 $f(x)$의 그래프는



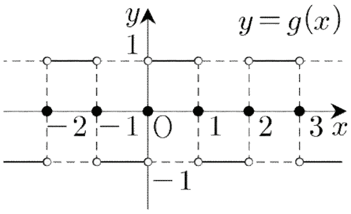
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$|1+f(x)|>1$, 즉 $f(x)>0$이면 $g(x)=1$

$1+f(x)=1$, 즉 $f(x)=0$이면 $g(x)=0$

$|1+f(x)|<1$, 즉 $-1\le f(x)<0$이면 $g(x)=-1$

함수 $g(x)$의 그래프는



그런데 $14<10\sqrt{2}<15$, $1<\sqrt{3}<2$이므로

$\therefore\ g(10\sqrt{2})-g(\sqrt{3})=1-(-1)=2$

답 ⑤

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

2015 개정 교육과정에서 달라지는 점은

- 수학Ⅰ

지수함수와 로그함수: 두 대단원 ‘지수와 로그’, ‘지수함수와 로그함수’가 결합
삼각함수: 사인법칙, 코사인법칙의 귀환 & sec, csc, cot가 미적분 과목으로 이동
수열: 주기함수 관련 문제 출제 가능

- 수학Ⅱ

함수의 극한과 연속: 주기함수 관련 문제 출제 가능
미분: 주기함수 관련 문제 출제 가능
적분: 주기함수 관련 문제 출제 가능 & 구분구적분 퇴출

- 미적분

수열의 극한: 사인법칙, 코사인법칙, 삼각함수의 덧셈정리 관련 문제 출제 가능
미분법: 매개변수의 미분법, 음함수의 미분법의 귀환
적분법: 구분구적법은 이과 전용

- 확률과 통계

경우의 수: 순열, 조합 고1 과정으로 이동, 분할(정수/자연수) 퇴출
확률: 변화 없음
통계: 모비율 퇴출

- 기하

이차곡선: 기울기가 주어진 접선의 공식 귀환 & 사인법칙, 코사인 법칙 관련 문제 출제 가능
평면벡터: 라디안이 아닌 육십분법 사용 & 벡터의 내적의 정의를 성분으로 함
공간도형과 공간좌표: 공간벡터, 공간에서의 벡터의 방정식 퇴출

2021 수능에서 보여준 출제 경향

- 가형14(미적분): 등비급수 평면기하 응용문제에서 사인법칙, 코사인법칙이 출제된다는 관성을 깨는 문제. (삼각함수의 덧셈정리 출제)
- 가형20(미적분): 정적분+점 대칭성으로 즐겨 출제되던 문제를 정적분+선 대칭성으로 바꿈. 그래프의 개형을 무시하고 계산만 하면 시간 안에 풀 수 없는 문제.
- 가형29(확률과 통계): 이 정도의 경우 구분을 하는 문제를 출제하겠다. 라는 의지를 보여주는 문제.
- 가형30(미적분): 합성함수의 그래프의 개형을 그려서 극대극소 판단할 수 있는지를 평가하는 문제. 그리고 삼차함수의 그래프의 개형에서 방정식을 유도할 때 계산을 단축할 수 있는지도 관건.

- 나형20(수학2): 5차 이상의 다항함수의 그래프의 개형은 교육과정 외이므로 4차 함수의 그래프의 개형으로 접근해야 함. 풀이의 선택을 평가하는 문제.
- 나형30(수학2): |곡선−직선|의 미분가능성에 대한 전형적인 문제.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 ‘교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구’ 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

구성

▶ **‘이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 확률과 통계’** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 2015 **개정 교육과정에 맞는 265개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2020년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2021학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2021학년도 (학년도 기준)

▶ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▶ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
대단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

▶ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 ‘기본개념’ 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 ‘실전이론’ 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 ‘기본개념’, ‘실전이론’, ‘(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정’ 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목차

확률과 통계

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

○ 순열, 조합, 분할(정수/자연수) 관련 문제 모두 제외

J 경우의 수

- 2015개정 교육과정

○ 순열, 조합, 분할(정수/자연수) 관련 문제 모두 제외

J. 경우의 수

J001

○○
(2005(7)고3-가형27이산수학)

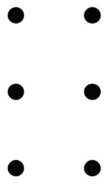
7개의 바둑돌이 담긴 주머니에서 한 번에 한 개 또는 두 개의 바둑돌을 꺼내기로 하였다. 주머니 안의 바둑돌이 모두 없어질 때까지 바둑돌을 꺼내는 방법의 수는? [3점]

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

J002

○○
(2005(7)고3-가형30이산수학)

시각장애인을 위한 문자 체계의 하나인 브라유 점자는 그림과 같은 6개의 점으로 구성되어 있으며, 이 점들 중 볼록하게 튀어나온 점들의 개수와 위치로 한 문자를 결정한다. 이 때, 적어도 하나의 점은 튀어나와야 한다. 브라유 점자 체계에서 표현가능한 문자의 개수를 구하시오. [4점]



J003

○○
(2005(4)고3-가형25)

집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 U의 부분집합 A의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $\{1,\ 2,\ 3\}\cap A=\{1,\ 2\}$
(나) 집합 A의 원소의 개수는 6개 이상이다.

J004

○○
(2005(3)고3-가형9)

그림과 같은 6개의 빈칸에 $2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6$의 6개의 수를 하나씩 써 넣으려고 한다. 1열, 2열, 3열의 숫자들의 합을 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3$라 할 때, $a_1<a_2<a_3$이 되도록 빈칸을 채우는 경우의 수는? [4점]

1열	2열	3열

① 90 ② 120 ③ 150
④ 180 ⑤ 210

J005

○○○
(2005(7)고3-가형25/나형25)

철수는 국가대표팀의 축구 경기를 시청하고 있었다. 그런데 우리나라 국가대표팀이 전반전 경기를 $1:0$으로 이기고 난 후 중간 휴식 시간에 갑자기 철수네 집이 정전이 되어 후반전 경기를 시청할 수 없었다.

다음날 친구들로부터 후반전 경기까지 마친 결과 $5:3$으로 우리나라 국가대표팀이 승리하였다는 사실을 알게 되었지만, 두 팀이 골을 넣는 순서는 알 수 없었다. 철수는 〈표1〉과 같은 표를 만들어 후반전 경기에서 두 팀이 공을 넣어 가는 상황 중 한 가지를 〈표2〉와 같이 적어 보았다.

〈표1〉

구분	국가 대표팀	상대팀
전반전	1	0
후반전	▨	▨
	▨	▨
	▨	▨
	▨	▨
	▨	▨
	▨	▨
	▨	▨
최종 득점 결과	5	3

〈표2〉

구분	국가 대표팀	상대팀
전반전	1	0
후반전	2	0
	2	1
	2	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	3
최종 득점 결과	5	3

이와 같이 철수가 〈표1〉의 어두운 부분을 완성할 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]

J006

○○
(2005(7)고3-가형26이산수학)

원소의 개수가 6인 집합을 공집합이 아닌 두 개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는? [3점]

① 31 ② 32 ③ 33
④ 34 ⑤ 35

J007

○○
(2005(10)고3-가형26확률통계)

다음을 이용하여

$$({}_{12}\mathrm{C}_0)^2+({}_{12}\mathrm{C}_1)^2+({}_{12}\mathrm{C}_2)^2+\cdots+({}_{12}\mathrm{C}_{12})^2$$

을 간단히 하면? [4점]

> (가) $(1+x)^{24}=(1+x)^{12}(1+x)^{12}$
> (나) ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ (n은 자연수, r은 정수, $0\le r\le n$)

① 2^{12} ② ${}_{24}\mathrm{P}_{12}$ ③ ${}_{24}\mathrm{C}_{12}$
④ $({}_{24}\mathrm{P}_{12})^2$ ⑤ $({}_{24}\mathrm{C}_{12})^2$

J008

○○
(2005(7)고3–나형26)

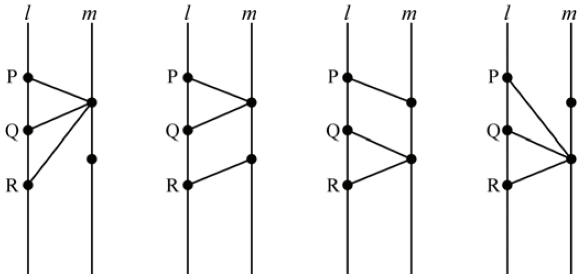
다음 중 $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7$의 전개식에서 x^5의 계수와 같은 것은? [3점]

① $16\times{}_7C_2$　② $16\times{}_7C_3$　③ $8\times{}_7C_3$
④ $8\times{}_7C_2$　⑤ $4\times{}_7C_2$

J009

○○○
(2005(10)고3–가형30이산수학)

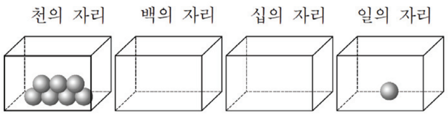
평면 위에 평행한 두 직선 l, m과 직선 l위의 서로 다른 세 점 P, Q, R가 있다. 직선 l 위의 세 점 P, Q, R에서 각각 하나의 선분으로 직선 m 위의 점을 연결할 때, 세 선분이 교차하지 않는 경우의 수를 구하려고 한다. 예를 들어, 그림과 같이 직선 m 위에 두 점이 있을 때, 구하는 모든 경우의 수는 4(가지)이다. 직선 m 위에 10개의 점이 있을 때, 위와 같이 세 선분이 교차하지 않는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]



J010

○○
(2005(7)고3–가형29이산수학)

7001의 각 자리의 숫자의 합은 8이 된다. 이때, 각 자리를 상자로 생각하면 7001은 네 개의 상자에 그림과 같이 8개의 공을 넣는 것으로 생각할 수 있다.



이를 이용하여 0부터 9999까지의 정수 중에서 각 자리의 숫자의 합이 8이 되는 정수의 개수를 구하면? [4점]

① 162　② 165　③ 168
④ 171　⑤ 174

J011

○○
(2006(11)고2–가형20)

서로 다른 세 종류의 음료수 A, B, C가 있다. A가 3개, B가 2개, C가 1개 있을 때, 이 6개의 음료수 중에서 5명의 학생이 1개씩 마실 수 있는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 음료수끼리는 구별하지 않는다.) [4점]

① 40　② 45　③ 50
④ 55　⑤ 60

J012

○○○
(2006경찰대(1차)–공통20)

각 자리의 숫자가 1, 2, 3만으로 이루어지고 3의 배수인 4자리 자연수의 개수는?

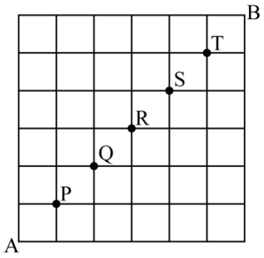
① 23 ② 25 ③ 27

④ 29 ⑤ 31

J013

○○○
(2006(3)고3–가형25)

그림과 같은 직선 도로망이 있다. 5개의 지점 P, Q, R, S, T 중 어느 한 지점도 지나지 않고 A지점에서 B 지점까지 최단거리로 갈 수 있는 모든 경로의 수를 구하시오. [4점]



J014

○○○
(2007(11)고2–가형30)

1, 2, 3, 4, 5 다섯 개의 숫자가 있다. 중복을 허락하여 이 숫자로 세 자리의 자연수를 만들 때, 3의 배수의 개수를 구하시오. [4점]

J015

○○
(2007(10)고3–가형13)

다음은 등식 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}+{}_{n}\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$을 이용하여

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

을 증명한 것이다.

〈증명〉

2 이상인 자연수 k에 대하여

$k^2=\boxed{(가)}+2\cdot{}_{k}\mathrm{C}_{2}$로 나타낼 수 있으므로

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$={}_{1}\mathrm{C}_{1}+({}_{2}\mathrm{C}_{1}+2\cdot{}_{2}\mathrm{C}_{2})+({}_{3}\mathrm{C}_{1}+2\cdot{}_{3}\mathrm{C}_{2})$

$+\cdots+({}_{n}\mathrm{C}_{1}+2\cdot\boxed{(나)})$

$=({}_{1}\mathrm{C}_{1}+{}_{2}\mathrm{C}_{1}+{}_{3}\mathrm{C}_{1}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{1})$

$+2({}_{2}\mathrm{C}_{2}+{}_{3}\mathrm{C}_{2}+\cdots+\boxed{(나)})$

$={}_{n+1}\mathrm{C}_{2}+2\cdot\boxed{(다)}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

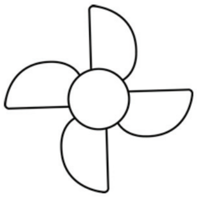
위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	${}_{k}\mathrm{C}_{1}$	${}_{n}\mathrm{C}_{2}$	${}_{n}\mathrm{C}_{3}$
②	${}_{k}\mathrm{C}_{1}$	${}_{n}\mathrm{C}_{2}$	${}_{n+1}\mathrm{C}_{3}$
③	${}_{k}\mathrm{C}_{1}$	${}_{n+1}\mathrm{C}_{2}$	${}_{n}\mathrm{C}_{3}$
④	${}_{k+1}\mathrm{C}_{1}$	${}_{n}\mathrm{C}_{2}$	${}_{n}\mathrm{C}_{3}$
⑤	${}_{k+1}\mathrm{C}_{1}$	${}_{n+1}\mathrm{C}_{2}$	${}_{n+1}\mathrm{C}_{3}$

J016

○○○
(2007(3)고3–가형15)

A, B, C, D 4가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 그림과 같은 프로펠러의 중앙 부분과 4개의 날개 부분을 모두 칠하려고 한다. 인접한 중앙 부분과 날개 부분은 서로 다른 색으로 칠하기로 할 때, 칠할 수 있는 방법의 수는? (단, 4개의 날개는 모두 합동이고, 회전하여 같은 경우에는 한 가지의 방법으로 한다.) [4점]

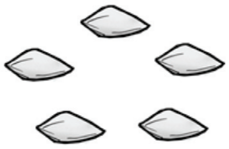


① 60
② 72
③ 84
④ 96
⑤ 108

J017

○○
(2007(3)고3–가형21)

동주는 5개의 서로 다른 알사탕과 5개의 똑같은 박하사탕을 가지고 있다. 이 중에서 5개를 택하여 진서에게 주는 방법의 수를 구하시오. [3점]



J018

○○
(2007(4)고3–가형19)

일곱 개의 문자 A, A, A, B, C, D, E 중에서 3개의 문자를 뽑아 일렬로 나열할 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. [3점]

J019

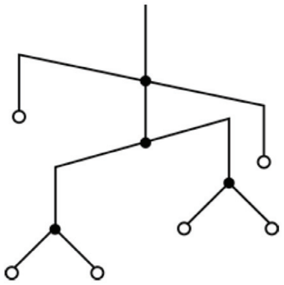
○○
(2007(4)고3–가형22)

x, y에 대한 식 $\left(x^2-\dfrac{3}{x}+2y\right)^6$을 전개할 때, x^6의 개수를 구하시오. [3점]

J020

○○○
(2007(3)고3-가형30)

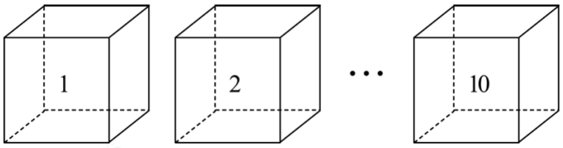
좌우 대칭인 ⊓ 모양과 ∧ 모양의 철사가 각각 두 개씩 있다. 그림과 같이 각 철사의 가운데를 서로 연결한 후, 여섯 군데의 고리에 서로 다른 6개의 인형 A, B, C, D, E, F를 매달아 회전모빌을 만들려고 한다. 이때 만들 수 있는 서로 다른 회전모빌의 개수를 구하시오. (단, 그림의 •부분은 회전 가능하고, ∧ 모양의 두 철사는 합동이다.) [4점]



J021

○○
(2007(10)고3-가형30)

1부터 10까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 10개의 상자가 있다. 똑같은 구슬 3개를 상자에 넣는 방법의 수를 구하시오. (단, 각 상자에 들어가는 구슬의 개수에는 제한이 없다.) [3점]



J022

○○○
(2008(4)고3-가형29이산수학)

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 모두 만족할 때, 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는? [4점]

(가) $1 \notin A\cap B$
(나) 집합 $A-B$의 원소의 개수는 2이다.

① 864　② 891　③ 918
④ 945　⑤ 972

J023

●●●
(2008(10)고3-가형23)

갑, 을 두 사람이 어떤 게임을 해서 다음과 같은 규칙에 따라 사탕을 갖는다고 한다.

(가) 이긴 사람은 3개, 진 사람은 1개의 사탕을 갖는다.
(나) 비기면 두 사람이 각각 2개씩 사탕을 갖는다.

갑, 을 두 사람이 이 게임을 다섯 번 해서 20개의 사탕을 10개씩 나누어 갖게 되는 경우의 수를 구하시오. (단, 사탕은 서로 구별되지 않는다.) [3점]

J024

○○
(2008(10)고3-가형14)

다음은 n이 소수일 때, ${}_{2n}\mathrm{C}_n-2$는 n^2의 배수임을 증명한 것이다.

〈증명〉

$$(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k x^k$$

에서 $\boxed{\text{(가)}}$의 계수는 ${}_{2n}\mathrm{C}_n$이다.

한편

$$(1+x)^n(1+x)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{n-k} x^{n-k}\right)$$

에서 $\boxed{\text{(가)}}$의 계수는 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k\cdot\boxed{\text{(나)}}\right)$이다.

따라서 ${}_{2n}\mathrm{C}_n$

$=\left({}_n\mathrm{C}_0\right)^2+\left({}_n\mathrm{C}_1\right)^2+\left({}_n\mathrm{C}_2\right)^2+\cdots+\left({}_n\mathrm{C}_n\right)^2$이다.

그런데 n이 소수이므로 $\boxed{\text{(다)}}$인 자연수 k에 대하여 ${}_n\mathrm{C}_k$는 n의 배수이다.

따라서 $\boxed{\text{(다)}}$인 자연수 k에 대하여 $\left({}_n\mathrm{C}_k\right)^2$은 n^2의 배수이고 ${}_n\mathrm{C}_0={}_n\mathrm{C}_n=1$이므로 ${}_{2n}\mathrm{C}_n-2$는 n^2의 배수이다.

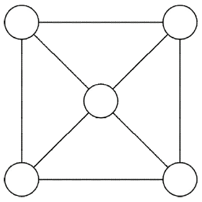
위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	x^n	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n$
②	x^n	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n-1$
③	x^n	${}_{2n}\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n$
④	x^{2n}	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n-1$
⑤	x^{2n}	${}_{2n}\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n$

J025

●●●
(2008사관(1차)-문과23)

그림과 같이 정사각형과 서로 합동인 5개의 원으로 이루어진 놀이판이 있다. 각 원의 중심은 정사각형의 네 꼭짓점과 두 대각선이 만나는 점이다. 서로 다른 5개의 돌 중에서 3개를 뽑아 3개의 원 안에 각각 1개씩 올려놓는 방법의 수는? (단, 회전하여 같은 경우는 한 가지로 계산한다.) [4점]



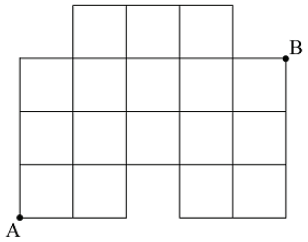
① 150 ② 160 ③ 170

④ 190 ⑤ 200

J026

○○
(2008(7)고3-가형26이산수학)

그림과 같은 도로망에서 A에서 출발하여 B까지 최단거리로 가는 방법의 수는? [3점]



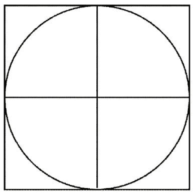
① 46 ② 48 ③ 50

④ 52 ⑤ 54

J027

○○
(2008(4)고3-가형28이산수학)

정사각형에 내접하는 원을 4등분하여 그림과 같은 도형을 만들었다. 도형의 한 영역에 한 가지 색만 사용하여, 8개의 영역에 서로 다른 8가지의 색을 모두 칠하는 방법의 수는? (단, 회전에 의하여 겹쳐지는 것들은 같은 것으로 한다.) [3점]



① $\frac{8!}{5}$ ② $\frac{8!}{4}$ ③ $\frac{8!}{3}$
④ $\frac{8!}{2}$ ⑤ $8!$

J028

○○○
(2009경찰대(1차)-공통21)

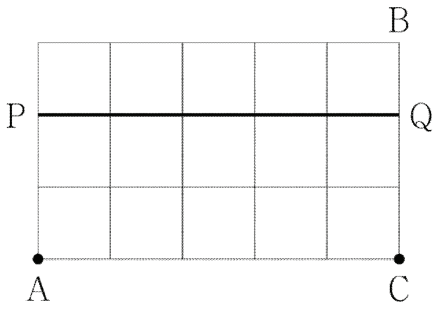
10보다 큰 자연수 n에 대하여 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$의 두 부분집합 X와 Y를 택할 때, $n(X\cap Y)=1$인 경우의 수는? (단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수)

① $\sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot 2^{n-k}$ ② $\sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot 2^{n-k-1}$
③ $\sum_{k=1}^{n} n \cdot {}_n\mathrm{C}_k \cdot 2^{n-k}$ ④ $\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k \cdot 2^{n-k-1}$
⑤ $\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k \cdot 2^{n-k}$

J029

○○○
(2009사관(1차)-문과24)

철수가 자동차로 그림과 같은 바둑판 모양의 도로를 따라 A지점에서 약속 장소인 B지점까지 최단 거리로 가는 도중에, 도로 PQ 위에서 약속 장소가 C지점으로 변경되었다는 연락을 받고 곧바로 C지점을 향하여 도로를 따라 최단 거리로 이동하였다. 이 때, 철수가 A지점에서 출발하여 C지점까지 최단 거리로 이동하는 경로의 수는? (단, 연락 받은 위치가 달라도 이동 경로가 같으면 동일한 경우로 간주한다.) [4점]



① 120 ② 122 ③ 124
④ 126 ⑤ 128

J030

○○
(2009(4)고3-가형24)

집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\subset B$를 만족하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수를 구하시오. [4점]

J031

○○
(2009(7)고3-가형26이산수학)

숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 배열할 때, 짝수는 반드시 앞에서부터 짝수 번째 자리에 오는 경우의 수는? [3점]

① 8　　② 9　　③ 10
④ 11　　⑤ 12

J032

○○
(2010(3)고3-가형26)

$(x+a)^{10}$의 전개식에서 세 항 x, x^2, x^4의 계수가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 상수 a의 값은? (단, $a \neq 0$) [3점]

① $\frac{28}{27}$　　② $\frac{27}{26}$　　③ $\frac{26}{25}$
④ $\frac{25}{24}$　　⑤ $\frac{24}{23}$

J033

○○○
(2010(3)고3-가형22)

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여
함수 $f: X \to X$는 다음 조건을 만족시킨다.

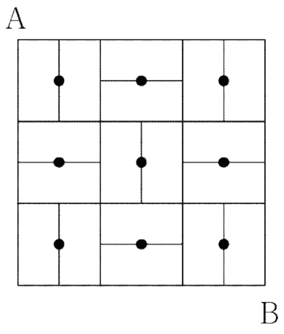
(가) $f(3)$은 짝수이다.
(나) $x<3$이면 $f(x)<f(3)$
(다) $x>3$이면 $f(x)>f(3)$

함수 f의 개수를 구하시오. [3점]

J034

○○○
(2011사관(1차)-문과23)

그림과 같이 직사각형 모양으로 이루어진 도로망이 있고, 이 도로망의 9개의 지점에 •이 표시되어 있다.



A지점에서 B지점까지 가는 최단경로 중에서 •이 표시된 9개의 지점 중 오직 한 지점만을 지나는 경로의 수는? [4점]

① 30　　② 32　　③ 34
④ 36　　⑤ 38

J035

○○
(2011(7)고3-가형27)

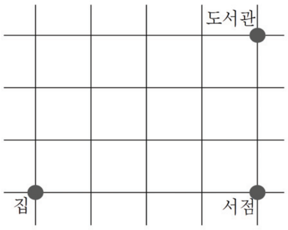
집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{4, 5, 6, 7\}$로의 함수 f 중 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하시오. [3점]

(가) $f(2)=5$
(나) 집합 X의 임의의 두 원소 i, j에 대하여
$i<j$이면 $f(i)\leq f(j)$이다.

J036

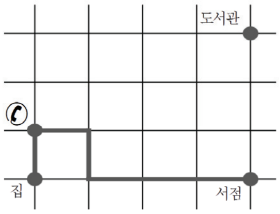
●●●
(2012(7)고3-가형30)

그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 같은 도로망이 있다.

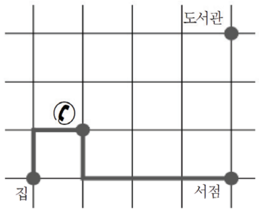


철수가 집에서 도로를 따라 최단거리로 약속장소인 도서관으로 가다가 어떤 교차로에서 약속장소가 서점으로 바뀌었다는 연락을 받고 곧바로 도로를 따라 최단거리로 서점으로 갔다. 집에서 서점까지 지나 온 길이 같은 경우 하나의 경로로 간주한다.

예를 들어, [그림1]과 [그림2]는 연락받은 위치는 다르나, 같은 경로이다.



[그림1]



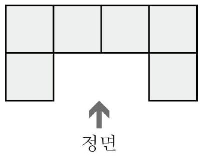
[그림2]

철수가 집에서 서점까지 갈 수 있는 모든 경로의 수를 구하시오. (단, 철수가 도서관에 도착한 후에 서점으로 가는 경우도 포함한다.)

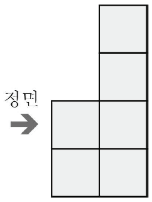
J037

○○○
(2012(10)고3-가형29)

크기가 같은 정육면체 모양의 블록 12개를 모두 사용하여 쌓은 입체도형을 만들려고 한다. 이 도형을 위에서 내려다 본 모양이 〈그림1〉, 정면을 기준으로 오른쪽 옆에서 본 모양이 〈그림2〉와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오. (단, 블록은 서로 구별하지 않는다.) [4점]



<그림1>



<그림2>

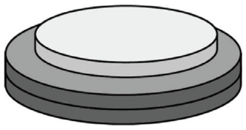
J038

○○
(2012(10)고3-나형27)

반지름의 길이가 서로 다른 여섯 종류의 원판이 각각 3개씩 18개가 있다. 원판을 다음과 같은 규칙으로 쌓으려고 한다.

(가) 원판 3개를 택하여 원판의 중심이 일치하도록 쌓는다.
(나) 반지름의 길이가 작은 원판은 반지름의 길이가 큰 원판 위에 쌓는다.
(다) 반지름의 길이가 같은 원판은 구별하지 않으면서 쌓는다.

그림은 반지름의 길이가 같은 두 개의 원판과 반지름의 길이가 작은 한 개의 원판을 규칙에 따라 쌓은 예이다.



이와 같이 쌓는 방법의 수를 구하시오. [4점]

J039

○○
(2013(7)고3-A형14)

어느 지역의 5개 야구팀 A, B, C, D, E는 매년 각 팀이 서로 다른 팀들과 각각 9번씩 경기를 하여 승리한 경기 수가 많은 순서로 순위를 결정하는 대회를 한다. (단, 모든 경기에서 무승부는 없다고 한다.)

어느 야구전문가는 각 팀의 전력을 분석하여 내년 대회의 최종결과 중 우선 A, B 두 팀이 승리할 것으로 예상되는 경기 수를 발표하였다. 그 발표를 바탕으로 나머지 세 팀의 결과를 예상하여 최종결과를 다음과 같이 표로 완성할 때, 만들 수 있는 서로 다른 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는? (단, x, y, z는 모두 5 이상의 자연수이다.) [4점]

팀 명	A	B	C	D	E
승리할 것으로 예상되는 경기 수	27	33	x	y	z

① 124　② 130　③ 136
④ 142　⑤ 148

J040

○○○
(2013(10)고3-B형8)

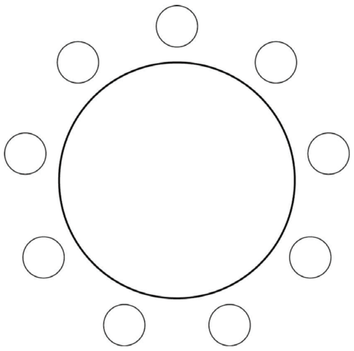
같은 종류의 구슬 다섯 개를 서로 다른 세 개의 주머니에 나누어 넣으려고 한다. 각 주머니 안의 구슬이 세 개 이하가 되도록 넣는 방법의 수는? (단, 구슬끼리는 서로 구별하지 않고 빈 주머니가 있을 수도 있다.) [3점]

① 10　② 11　③ 12
④ 13　⑤ 14

J041

○○○
(2013(7)고3-B형27)

남학생 4명, 여학생 2명이 그림과 같이 9개의 자리가 있는 원탁에 다음 두 조건에 따라 앉으려고 할 때, 앉을 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



(가) 남학생, 여학생 모두 같은 성별끼리 2명씩 조를 만든다.
(나) 서로 다른 두 개의 조 사이에 반드시 한 자리를 비워 둔다.

J042

○○
교육청 기출

축구공, 농구공, 배구공 중에서 4개의 공을 선택하는 방법의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 공은 4개 이상씩 있고, 같은 종류의 공은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

J043

○○
교육청 기출

한 개의 주사위를 3번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 x, y, z라 하자. 방정식 $x+y+z=6$을 만족시키는 해의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [3점]

① 7 ② 10 ③ 13
④ 16 ⑤ 19

J044

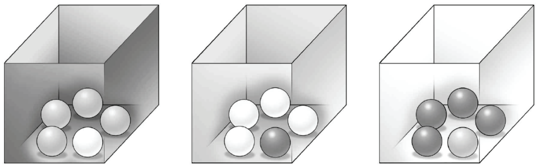
○○○
(2014사관(1차)–A형24)

방정식 $x+3y+3z=32$를 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오. [3점]

J045

○○○
(2014(10)고3–A형20)

빨간 공, 파란 공, 노란 공이 각각 5개씩 있다. 이 15개의 공만을 사용하여 빨간 상자, 파란 상자, 노란 상자에 상자의 색과 다른 색의 공을 5개씩 담으려고 한다. 공을 담는 경우의 수는? [4점]



① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

J046

○○
(2014(10)고3–B형14)

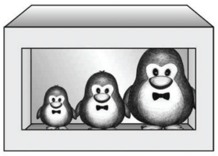
주머니 안에 0, 2, 3, 5가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 넣는 시행을 3회 반복한다. 꺼낸 3개의 공에 적힌 수를 모두 곱한 값으로 가능한 서로 다른 정수의 개수는? [4점]

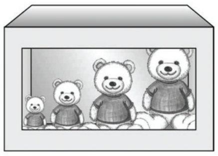
① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

J047

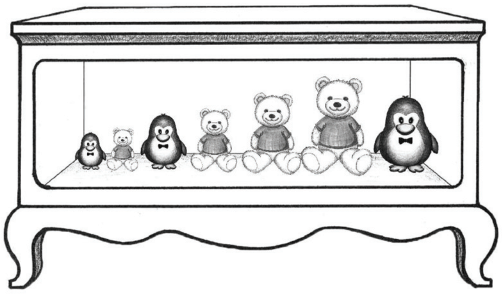
●●●
(2014(7)고3–B형27)

그림과 같이 크기가 서로 다른 3개의 펭귄 인형과 4개의 곰 인형이 두 상자 A, B에 왼쪽부터 크기가 작은 것에서 큰 것 순으로 담겨져 있다.


상자 A


상자 B

다음 조건을 만족시키도록 상자 A, B의 모든 인형을 일렬로 진열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

> (가) 같은 상자에 담겨있는 인형은 왼쪽부터 크기가 작은 것에서 큰 것 순으로 진열한다.
> (나) 상자 A의 왼쪽에서 두 번째 펭귄 인형은 상자 B의 왼쪽에서 두 번째 곰보다 왼쪽에 진열한다.
>
> 

J048

○○○
(2015(10)고3–B형18)

다음 조건을 만족시키는 네 자리 자연수의 개수는? [4점]

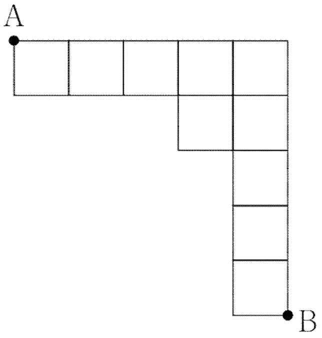
> (가) 각 자리의 수의 합은 14이다.
> (나) 각 자리의 수는 모두 홀수이다.

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

J049

○○
(2015사관(1차)–B형5)

그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다.



이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]

① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

J050

○○
(2015경찰대(1차)–공통13)

15 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 뽑을 때, 어느 두 수도 3 이상 차이가 나도록 뽑는 방법의 수는? [4점]

① 108 ② 120 ③ 126
④ 132 ⑤ 144

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

J 경우의 수

1	④	2	63	3	64	4	②	5	35
6	①	7	③	8	②	9	220	10	②
11	⑤	12	③	13	84	14	41	15	②
16	④	17	32	18	73	19	135	20	45
21	220	22	④	23	51	24	②	25	①
26	①	27	②	28	⑤	29	④	30	211
31	⑤	32	①	33	136	34	①	35	12
36	296	37	60	38	56	39	③	40	③
41	48	42	15	43	②	44	45	45	①
46	②	47	13	48	②	49	②	50	③
51	⑤	52	45	53	49	54	495	55	210
56	⑤	57	243	58	②	59	6	60	35
61	④	62	510	63	180	64	90	65	④
66	80	67	④	68	760	69	②	70	③
71	96	72	①	73	⑤	74	51	75	546
76	②	77	93	78	209	79	⑤	80	525
81	②	82	④	83	②	84	④	85	40
86	⑤	87	40	88	①	89	③	90	126
91	120	92	①	93	8	94	①	95	14
96	④	97	96	98	396	99	④	100	72
101	327	102	37	103	84	104	③	105	③
106	31	107	④	108	④	109	50		

K 확률

1	②	2	④	3	73	4	41	5	⑤
6	33	7	②	8	13	9	⑤	10	④
11	17	12	13	13	⑤	14	⑤	15	35
16	⑤	17	①	18	②	19	①	20	④
21	③	22	③	23	④	24	①	25	①
26	④	27	②	28	79	29	142	30	35
31	③	32	②	33	⑤	34	①	35	41
36	12	37	7	38	②	39	126	40	③
41	①	42	323	43	②	44	②	45	②
46	②	47	103	48	④	49	③	50	④
51	②	52	④	53	③	54	④	55	③
56	49	57	④	58	④	59	182	60	②
61	④	62	①	63	③	64	④	65	③
66	251	67	③	68	①	69	⑤	70	④
71	③	72	121	73	10	74	①	75	②
76	③	77	28	78	④	79	③	80	③
81	131	82	③	83	⑤	84	①	85	⑤
86	②	87	25	88	③	89	②	90	①
91	135	92	①	93	②	94	259		

L 통계

1	121	2	⑤	3	①	4	①	5	20
6	10	7	④	8	③	9	②	10	⑤
11	④	12	②	13	⑤	14	④	15	②
16	③	17	②	18	②	19	④	20	③
21	③	22	②	23	③	24	③	25	40
26	①	27	③	28	③	29	37	30	④
31	③	32	59	33	③	34	②	35	④
36	93	37	②	38	24	39	③	40	26
41	①	42	167	43	①	44	①	45	8
46	②	47	⑤	48	③	49	②	50	③
51	①	52	①	53	②	54	①	55	①
56	149	57	②	58	③	59	②	60	①
61	④	62	⑤						

해설 목차

확률과 통계

J 경우의 수

1	④	2	63	3	64	4	②	5	35
6	①	7	③	8	②	9	220	10	②
11	⑤	12	③	13	84	14	41	15	②
16	④	17	32	18	73	19	135	20	45
21	220	22	④	23	51	24	②	25	①
26	①	27	②	28	⑤	29	④	30	211
31	⑤	32	①	33	136	34	①	35	12
36	296	37	60	38	56	39	③	40	③
41	48	42	15	43	②	44	45	45	①
46	②	47	13	48	②	49	②	50	③
51	⑤	52	45	53	49	54	495	55	210
56	⑤	57	243	58	②	59	6	60	35
61	④	62	510	63	180	64	90	65	④
66	80	67	④	68	760	69	②	70	③
71	96	72	①	73	⑤	74	51	75	546
76	②	77	93	78	209	79	⑤	80	525
81	②	82	④	83	②	84	④	85	40
86	⑤	87	40	88	①	89	③	90	126
91	120	92	①	93	8	94	①	95	14
96	④	97	96	98	396	99	④	100	72
101	327	102	37	103	84	104	③	105	③
106	31	107	④	108	④	109	50		

J001 ㅣ답 ④

[풀이]

$7 = 2+2+2+1$ ⋯(경우1)

$= 2+2+1+1+1$ ⋯(경우2)

$= 2+1+1+1+1+1$ ⋯(경우3)

$= 1+1+1+1+1+1+1$ ⋯(경우4)

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

- (경우1): $\dfrac{4!}{3!} = 4$
- (경우2): $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$
- (경우3): $\dfrac{6!}{5!} = 6$
- (경우4): 1

따라서 구하는 방법의 수는

$4+10+6+1 = 21$

답 ④

J002 ㅣ답 63

[풀이]

각각의 점은 튀어나오거나 그렇지 않은 2가지 경우만이 있으므로 가능한 문자의 개수는 중복순열의 수에 의하여

${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$이다.

그런데 모든 점이 튀어나오지 않는 경우는 제외해야 하므로 구하는 문자의 개수는

$64 - 1 = 63$

답 63

J003 ㅣ답 64

[풀이]

조건 (가)에 의하여

$1 \in A$, $2 \in A$, $3 \notin A$

조건 (나)에 의하여 집합 A는 일곱 개의 수

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

중에서 적어도 네 개 이상을 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 A의 개수는 조합의 수와 합의 법칙에 의하여

$${}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6 + {}_7C_7 = \frac{2^7}{2} = 2^6 = 64$$

$(\because\ {}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 + {}_7C_3$

$+ {}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6 + {}_7C_7 = 2^7$,

${}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 + {}_7C_3$

$= {}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6 + {}_7C_7)$

답 64

J004 ㅣ답 ②

[풀이1] **시험장**

세 수 a_1, a_2, a_3 중에서 어떤 두 수도 같을 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!} = 120$

이다. 이때, $6!$은 여섯 개의 수 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6을 써넣는 경우의 수이고, $3!$은 a_1, a_2, a_3을 나열하는 경우의 수이다. 즉, $6!$을 $3!$으로 나누어서 $a_1 < a_2 < a_3$인 한 경우만을 남기는 것이다.

답 ②

[풀이2]

2 이상의 자연수 n에 대하여

$2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-2$

($\because$ 등비수열의 합의 공식)

이므로

$2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}<2^n$

가 성립한다.

2^6은 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5을 모두 합한 값보다 크므로

2^6은 반드시 3열에 와야 한다.

2^6이 3열에 올 경우의 수는 2이다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

1열	2열	3열
		2^6

2^5은 2, 2^2, 2^3, 2^4을 모두 합한 값보다 크므로

2^5은 2열 또는 3열에만 올 수 있다.

- (1) 2^5이 2열에 온 경우

2^5이 2열에 올 경우의 수는 2이다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

1열	2열	3열
		2^6
	2^5	

2, 2^2, 2^3, 2^4은 어느 자리에 와도

$a_1<a_2<a_3$이 성립한다.

경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_4=4!=24$이다.

- (2) 2^5이 3열에 온 경우

2^5이 3열에 올 경우의 수는 1이다.

1열	2열	3열
		2^6
		2^5

2^4은 2, 2^2, 2^3을 모두 합한 값보다 크므로

2^4은 반드시 2열에 와야 한다.

2^4이 2열에 올 경우의 수는 2이다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

1열	2열	3열
	2^4	2^6
		2^5

2, 2^2, 2^3은 어느 자리에 와도

$a_1<a_2<a_3$이 성립한다.

경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3\mathrm{P}_3=3!=6$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여

$2\times(2\times4!+1\times2\times3!)=2\times60=120$

답 ②

[풀이3]

2 이상의 자연수 n에 대하여

$2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-2$

($\because$ 등비수열의 합의 공식)

이므로

$2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}<2^n$

가 성립한다.

2^6은 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5을 모두 합한 값보다 크므로

2^6은 반드시 3열에 와야 한다.

2^6이 3열에 올 경우의 수는 2이다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

1열	2열	3열
		2^6

3열의 나머지 자리에 숫자가 올 경우의 수는 5이다. 즉, 3열의 나머지 자리에는 어떤 숫자가 와도 상관없다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

1열	2열	3열
		2^6
		2^2

남은 네 개의 숫자 2, 2^3, 2^4, 2^5 중에서 가장 큰 숫자가 2열에 올 경우의 수는 2이다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

1열	2열	3열
		2^6
	2^5	2^2

2, 2^3, 2^4은 어느 자리에 와도

$a_1<a_2<a_3$이 성립한다.

경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3\mathrm{P}_3=3!=6$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

곱의 법칙에 의하여

$2\times5\times2\times3!=120$

답 ②

[풀이4]

6개의 숫자

2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6

중에서 어느 두 수의 합은 모두 다르다.

따라서 구하는 경우의 수는 6개의 수를 2개, 2개, 2개의 세

개의 조로 나눈 다음 각 조의 2개의 수의 자리를 바꾸는 경우의 수와 같다.

$$\left({}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}\right)\times2^2\times2^2\times2^2$$

$=120$

답 ②

J005

| 답 35

[풀이1]

〈표1〉의 왼쪽 빈 칸에 1, 2, 3, 4, 5가 각각

a번, b번, c번, d번, e번 적힌다고 하면

$a+b+c+d+e=7$

(단, $a\geq0$, $b\geq1$, $c\geq1$, $d\geq1$, $e\geq1$)

$b-1=b'$, $c-1=c'$, $d-1=d'$,

$e-1=e'$로 두면

$a+b'+c'+d'+e'=3$

(단, $a\geq0$, $b'\geq0$, $c'\geq0$, $d'\geq0$, $e'\geq0$)

구하는 경우의 수는

${}_5H_3={}_7C_3=35$

답 35

[풀이2]

전체를 다음의 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

- (1) 후반전에서 국가대표팀이 먼저 골을 넣은 경우

〈표1〉

구분	국가대표팀	상대팀
전반전	1	0
후반전	2	0
	▨	
	▨	
	▨	
	▨	
	▨	
	5	3
최종 득점 결과	5	3

〈표1〉의 어두운 부분에 올 수 있는 네 개의 수 2, 3, 4, 5의 개수를 각각 b, c, d, e라고 하면

$b+c+d+e=5$ $\cdots(*1)$

(단, $b\geq0$, $c\geq1$, $d\geq1$, $e\geq0$)

$c-1=c'$, $d-1=d'$로 두고 방정식을 정리하면

$b+c'+d'+e=3$

(단, $b\geq0$, $c'\geq0$, $d'\geq0$, $e\geq0$)

순서쌍 $(b,\ c',\ d',\ e)$의 개수는 b, c', d', e 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

따라서 방정식 $(*1)$을 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 20이다.(←일대일대응)

- (2) 후반전에서 국가대표팀이 먼저 골을 넣지 못한 경우

〈표1〉

구분	국가대표팀	상대팀
전반전	1	0
후반전	1	1
	▨	
	▨	
	▨	
	▨	
	▨	
	5	3
최종 득점 결과	5	3

〈표1〉의 어두운 부분에 올 수 있는 다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5의 개수를 각각 a, b, c, d, e라고 하면

$a+b+c+d+e=5$ $\cdots(*2)$

(단, $a\geq0$, $b\geq1$, $c\geq1$, $d\geq1$, $e\geq0$)

$b-1=b'$, $c-1=c'$, $d-1=d'$

로 두고 방정식을 정리하면

$a+b'+c'+d'+e=2$

(단, $b'\geq0$, $c'\geq0$, $d'\geq0$)

순서쌍 $(a,\ b',\ c',\ d',\ e)$의 개수는 a, b', c', d', e 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=15$

따라서 방정식 $(*2)$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 15이다.

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$20+15=35$

답 35

[풀이3]

우리나라 국가대표팀이 득점한 경우를 A, 실점한 경우를 B라고 하자.

우리나라 국가대표팀이 $5:3$으로 이기기 위해서는 득점과 실점을 각각 5번, 3번해야 한다.

맨 좌측에 1개의 A가 오도록 5개의 A와 3개의 B를 나열하는 경우의 수를 구하면 된다. 즉, 4개의 A와 3개의 B를 나열하는 경우의 수를 구하면 된다.

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{7!}{4!3!}=35$

답 35

J006

| 답 ①

[풀이1]

원소의 개수가 6인 집합을

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$(전체집합)

이라고 하자.

$A\cup A^{C}=S,\ A\neq\varnothing,\ A\neq S$

인 집합 A의 개수는 ${}_{2}\Pi_{6}-2$이다.

이때, 2^6은 집합 A의 개수(즉, 전체집합 S의 부분집합의 개수)이고, 2는 집합 A가 공집합이거나 전체집합인 경우의 수이다.

그런데

$A=\{1,\ 3\},\ A^{C}=\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$

$A=\{2,\ 4,\ 5,\ 6\},\ A^{C}=\{1,\ 3\}$

과 같이 중복되는 경우가 발생하므로

구하는 경우의 수는 $\frac{{}_{2}\Pi_{6}-2}{2}=\frac{2^6-2}{2}=31$이다.

답 ①

[풀이2]

6명을 두 팀으로 나누는 경우의 수를 구하면 된다.

$6=5+1=4+2=3+3$

이므로 다음의 세 경우로 나누어 생각하자.

- (1) 6명을 5명, 1명으로 나누는 경우

조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_{6}C_{5}\times{}_{1}C_{1}=6$

- (2) 6명을 4명, 2명으로 나누는 경우

${}_{6}C_{4}\times{}_{2}C_{2}=15$

- (3) 6명을 3명, 3명으로 나누는 경우의 수

${}_{6}C_{3}\times{}_{3}C_{3}\times\frac{1}{2!}=10$

이때, $2!$으로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다.

6명을 각각 ⦿, ◎, ◍, ◐, ◑, ◒으로 두었을 때,

(⦿, ◎, ◍)(← ${}_{6}C_{3}$에서 발생), (◐, ◑, ◒)(← ${}_{3}C_{3}$에서 발생)

(◐, ◑, ◒)(← ${}_{6}C_{3}$에서 발생), (⦿, ◎, ◍)(← ${}_{3}C_{3}$에서 발생)

위의 두 경우는 중복된다.

(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$6+15+10=31$

답 ①

J007

| 답 ③

[풀이]

$(1+x)^n$의 전개식에서 $x^k,\ x^{n-k}$의 계수는

각각 ${}_{n}C_{k},\ {}_{n}C_{n-k}$이므로

$(1+x)^n(1+x)^n$의 전개식에서

$x^n(=x^k\times x^{n-k})$의 계수는

$\sum_{k=0}^{n}{}_{n}C_{k}\,{}_{n}C_{n-k}$

$(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는

${}_{2n}C_{n}$

그런데 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$이므로

${}_{2n}C_{n}=\sum_{k=0}^{n}{}_{n}C_{k}\,{}_{n}C_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}({}_{n}C_{k})^2$($\because$ 조건(나))

$n=12$라고 하면

${}_{24}C_{12}=\sum_{k=0}^{12}({}_{12}C_{k})^2$

$=({}_{12}C_{0})^2+({}_{12}C_{1})^2+({}_{12}C_{2})^2+\cdots+({}_{12}C_{12})^2$

답 ③

J008

| 답 ②

[풀이]

전개식의 일반항은

${}_{7}C_{r}(2x^2)^r\left(\frac{1}{x}\right)^{7-r}$ 즉, ${}_{7}C_{r}2^{r}x^{3r-7}$

$x^5(3r-7=5$에서 $r=4)$의 계수는

${}_{7}C_{4}2^4=16{}_{7}C_{3}$이다.

답 ②

J009

| 답 220

[풀이]

직선 m 위의 10개의 점을 각각

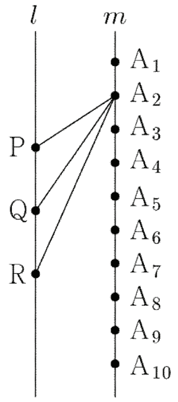
A_1(맨 위), $A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{10}$(맨 아래)

이라고 하자.

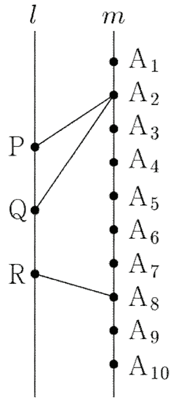
구하는 경우의 수는 10개의 점 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{10}$ 중에서 중

복을 허용하여 3개의 점을 선택하는 중복조합의 수 ${}_{10}\mathrm{H}_3$이다.

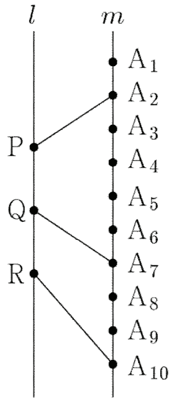
예를 들어 세 점 A_2, A_2, A_2를 선택하여 아래와 같이 연결할 수 있다.



예를 들어 세 점 A_2, A_2, A_8을 선택하여 아래와 같이 연결할 수 있다.



예를 들어 세 점 A_2, A_7, A_{10}을 선택하여 아래와 같이 연결할 수 있다.



$$\therefore\ {}_{10}\mathrm{H}_3 = {}_{10+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_{12}\mathrm{C}_3 = \frac{12\times11\times10}{1\times2\times3} = 220$$

답 220

J010

|답 ②

[풀이]

다음과 같은 음이 아닌 정수를 생각하자.

$x\times10^3 + y\times10^2 + z\times10 + w$

(단, x, y, z, w는 9 이하의 음이 아닌 정수이다.)

각 자리의 숫자의 합이 8이므로

$x+y+z+w=8$

(단, x, y, z, w는 9 이하의 음이 아닌 정수이다.)

이 방정식의 해의 개수는 x, y, z, w 중에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

${}_4\mathrm{H}_8 = {}_{4+8-1}\mathrm{C}_8 = {}_{11}\mathrm{C}_8 = {}_{11}\mathrm{C}_3 = 165$

따라서 구하는 경우의 수는 165이다.

답 ②

J011

|답 ⑤

[풀이1]

5명의 학생이 1개씩 마실 수 있는 경우의 수와 6명의 학생이 1개씩 마실 수 있는 경우의 수는 같다. 왜냐하면 5명의 학생이 1개씩 마신 후에는 1개가 남기 때문이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

답 ⑤

[풀이2]

$5 = 3+2+0$ (경우1)

$= 3+1+1$ (경우2)

$= 2+2+1$ (경우3)

- (경우1)

5개의 음료수를 각각

A_1, A_2, A_3, B_1, B_2

로 두자.

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

- (경우2)

5개의 음료수를 각각

A_1, A_2, A_3, B, C

로 두자.

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

- (경우3)

5개의 음료수를 각각

$A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ C$

로 두자.

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!2!}=30$

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$10+20+30=60$

답 ⑤

[참고]

다음과 같이 조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구해도 좋다.

5명의 학생을 각각 '가, 나, 다, 라, 마' 라고 하자.

- (경우1)

5명의 학생 중에서 A를 마실 3명을 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_3$이다. 예를 들어 다음과 같이 정해졌다고 하자.

가	나	다	라	마
A		A	A	

이제 남은 2명의 학생이 B를 마시면 된다. 이때, 경우의 수는 1이다.

가	나	다	라	마
A	B	A	A	B

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 ${}_5C_3\times1=10$이다.

마찬가지의 방법으로

- (경우2): ${}_5C_3\times{}_2C_1\times1=20$
- (경우3): ${}_5C_2\times{}_3C_2\times1=30$

J012 | 답 ③

[풀이]

4자리 자연수가 3의 배수가 되려면 각 자리수의 합이 3의 배수가 되어야 한다. 전체를 다음의 다섯 경우로 구분하여 생각할 수 있다.

$3+3+3+3=12$(3의 배수) ···(경우1)

$3+3+1+2=9$(3의 배수) ···(경우2)

$3+2+2+2=9$(3의 배수) ···(경우3)

$3+1+1+1=6$(3의 배수) ···(경우4)

$1+1+2+2=6$(3의 배수) ···(경우5)

같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 각각의 경우의 수를 구하자.

- (경우1) $\dfrac{4!}{4!}=1$가지
- (경우2) $\dfrac{4!}{2!}=12$가지
- (경우3) $\dfrac{4!}{3!}=4$가지
- (경우4) $\dfrac{4!}{3!}=4$가지
- (경우5) $\dfrac{4!}{2!2!}=6$가지

합의 법칙에 의하여 구하는 4자리 자연수의 개수는

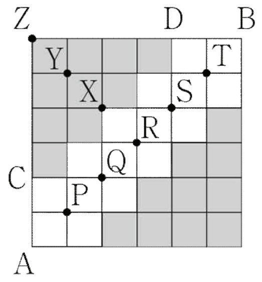
$1+12+4+4+6=27$

답 ③

J013 | 답 84

[풀이1]

아래 그림에서 C, D, X, Y, Z는 직선 도로망의 교차로이다.



저점 C에서 지점 D까지 최단 거리로 가는 경로를 다음과 같이 세 경우로 나누어 생각하자.

- (경우1) C → X → D

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$\left(\dfrac{4!}{2!2!}-1\right)\left(\dfrac{4!}{2!2!}-1\right)=25$

이때, 각각에 대하여 1을 뺀 이유는 두 지점 Q와 S를 지날 수 없기 때문이다.

- (경우2) C → Y → D

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{4!}{3!}=16$

- (경우3) C → Z → D

경우의 수는 1이다.

(경우1)~(경우3)은 동시에 발생하지 않으므로

경우의 수는 합의 법칙에 의하여

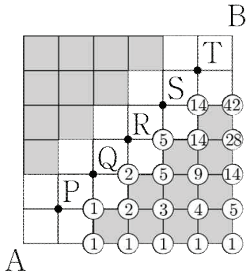
$25+16+1=42$

따라서 지점 A에서 지점 B까지 최단거리로 갈 수 있는 모든 경로의 수는 합의 법칙에 의하여

$42+42=84$

답 84

[풀이2] **시험장**



합의 법칙에 의하여 구하는 경로의 수는

$42+42=84$

답 84

J014 |답 41

[풀이]

세 자리의 자연수를 다음과 같다고 하자.

$a\times 10^2+b\times 10+c$

(단, a, b, c는 5 이하의 자연수)

이 세 자리의 자연수가 3의 배수이므로

$a+b+c$는 3의 배수이다.

5 이하의 자연수를 다음과 같은 세 경우로 구분하자.

3으로 나눈 나머지가 0인 수: 3

…Ⓐ

3으로 나눈 나머지가 1인 수: 1, 4 …Ⓑ

3으로 나눈 나머지가 2인 수: 2, 5 …Ⓒ

세 자연수의 합이 3의 배수가 되는 경우를 다음과 같이 구분하자.

Ⓐ+Ⓑ+Ⓒ (경우1)

Ⓐ+Ⓐ+Ⓐ (경우2)

Ⓑ+Ⓑ+Ⓑ (경우3)

Ⓒ+Ⓒ+Ⓒ (경우4)

- (경우1) 경우의 수는 조합의 수, 순열의 수, 곱의 법칙에 의하여

$_1C_1\times {_2C_1}\times {_2C_1}\times 3!=24$

- (경우2) 경우의 수는 1이다.
- (경우3) 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여

$_2\Pi_3=2^3=8$

- (경우4) 경우의 수는 중복조합의 수에 의하여

$_2\Pi_3=2^3=8$

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$24+1+8+8=41$

답 41

J015 |답 ②

[풀이]

〈증명〉

2 이상인 자연수 k에 대하여

$k^2=\boxed{{_kC_1}}+2\cdot{_kC_2}$로 나타낼 수 있으므로

$(\because$ (가)$=k^2-2\cdot\dfrac{k(k-1)}{2}=k)$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$={_1C_1}+({_2C_1}+2\cdot{_2C_2})+({_3C_1}+2\cdot{_3C_2})$

$+\cdots+({_nC_1}+2\cdot\boxed{{_nC_2}})$

$=({_1C_1}+{_2C_1}+{_3C_1}+\cdots+{_nC_1})+2$

$({_2C_2}+{_3C_2}+\cdots+\boxed{{_nC_2}})$

$={_{n+1}C_2}+2\cdot\boxed{{_{n+1}C_3}}$ ($\because$ 파스칼의 삼각형)

$=\dfrac{(n+1)n}{2}+2\cdot\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3!}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(가): $_kC_1$

(나): $_nC_2$

(다): $_{n+1}C_3$

답 ②

J016 |답 ④

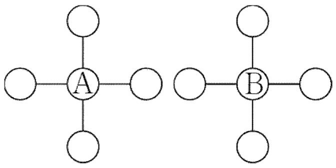
[풀이]

- (1) 2가지의 색으로 칠하는 경우

A, B, C, D 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 $_4C_2$이다.

예를 들어 A, B가 선택되었다고 하자.

중앙 부분에 색을 칠할 경우의 수는 2이고, 이 두 경우 각각에 대하여 날개 부분에 색을 칠할 경우의 수는 1이다.



곱의 법칙에 의하여

$_4C_2\times 2\times 1=12$

- (2) 3가지의 색으로 칠하는 경우

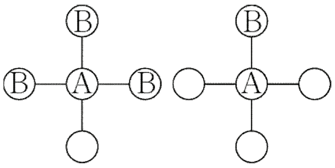
A, B, C, D 중에서 3개를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 $_4C_3$이다.

예를 들어 A, B, C가 선택되었다고 하자.

중앙 부분에 색을 칠할 경우의 수는 3이다.

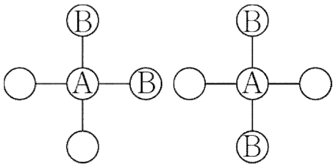
예를 들어 중앙 부분에 칠해진 색이 A라고 하자.

3개의 날개에 같은 색이 칠해지고, 나머지 1개의 날개에는 다른 색이 칠해지는 경우



경우의 수는 2이다.

2개의 날개에 같은 색이 칠해지는 경우



경우의 수는 2이다.

곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여

${}_4C_3\times{}_3C_1\times(2+2)=48$

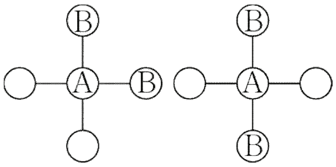
- (3) 4가지의 색으로 칠하는 경우

중앙 부분에 색을 칠할 경우의 수는 4이다.

예를 들어 중앙 부분에 칠해진 색이 A라고 하자.

B, C, D 중에서 한 색은 2개의 날개에 칠해지고, 나머지 두 색은 각각 1개의 날개에 칠해져야 한다.

예를 들어 B가 2개의 날개에 칠해졌다고 하자.



나머지 날개에 C, D를 칠하는 경우의 수는 각각 2!(왼쪽 그림), 1(오른쪽 그림)이다. 이때, 1은 원순열의 수 $\frac{2!}{2}$이다.

곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여

${}_4C_1\times{}_3C_1\times(2!+1)=36$

(1)~(3)은 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는

$12+48+36=96$

답 ④

J017 |답 32

[풀이]

진서가 받는 박하사탕의 개수를 k라고 하면

진서가 받는 알사탕의 개수는 $5-k$이다.

(단, $0\le k\le 5$)

알사탕의 종류는 모두 다르므로

동주가 진서에게 알사탕 $5-k$개를 주는 방법의 수는 5개 중에서 $5-k$개를 택하는 조합의 수에 의하여

${}_5C_{5-k}={}_5C_k$

따라서 구하는 경우의 수는

${}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=2^5=32$

답 32

J018 |답 73

[풀이]

- (1) A가 3개인 경우

A, A, A

경우의 수는 1

- (2) A가 2개인 경우

A, A, ○

경우의 수는 ${}_4C_1\times\frac{3!}{2!}=12$

- (3) A가 1개인 경우

A, ○, ○

경우의 수는 ${}_4C_2\times 3!=36$

- (4) A가 없는 경우

○, ○, ○

경우의 수는 ${}_4P_3=24$

(1)~(4)에서 구하는 경우의 수는

$1+12+36+24=73$

답 73

J019 |답 135

[풀이]

x^6에는 y가 없으므로 $\left(x^2-\frac{3}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^6의 계수를 구해도 좋다.

일반항은

${}_6C_r(x^2)^r\left(-\frac{3}{x}\right)^{6-r}={}_6C_r(-3)^{6-r}x^{3r-6}$

$3r-6=6$에서 $r=4$이므로 x^6의 계수는

${}_6C_4(-3)^2=15\times 9=135$

답 135

J020 |답 45

[풀이]

6개의 인형을 일렬로 나열하는 경우의 수는 순열의 수에 의하

여 $_{6}\mathrm{P}_{6}=6!$이다.

그런데 문제에서 주어진 회전모빌에서는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생한다.

A○○○○B, B○○○○A (←중복)

○A B○○○, ○B A○○○ (←중복)

○○○A B○, ○○○B A○ (←중복)

○A B C D○, ○C D A B○ (←중복)

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!2!2!2!}=45$$

답 45

J021

| 답 220

[풀이1]

10개의 상자에 들어가는 구슬의 개수를 각각

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}$

이라고 하면

$a_1+a_2+a_3+\ \cdots\ +a_{10}=3$

(단, $a_i \geq 0$, $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$)

구하는 방법의 수는

$_{10}\mathrm{H}_3={}_{12}\mathrm{C}_3=220$

답 220

[풀이2]

$3=3+0+0$ (경우1)

$=2+1+0$ (경우2)

$=1+1+1$ (경우3)

- (경우1) 3개의 구슬을 한 상자에 모두 넣는 경우

구슬을 넣는 상자를 결정하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 $_{10}\mathrm{C}_1(=10)$이다.

- (경우2) 3개의 구슬을 2개, 1개로 나누어 두 상자에 각각 넣는 경우

구슬을 넣는 상자를 결정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $_{10}\mathrm{P}_2(=90)$이다.

- (경우3) 3개의 구슬을 1개, 1개, 1개로 나누어 세 상자에 각각 넣는 경우

구슬을 넣는 상자를 결정하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 $_{10}\mathrm{C}_3(=120)$이다.

합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$10+90+120=220$

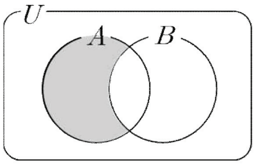
답 220

J022

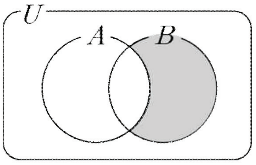
| 답 ④

[풀이1] ★

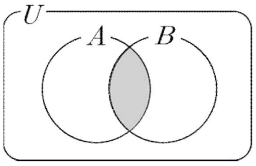
다음과 같은 4개의 집합을 생각하자.



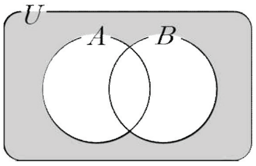
$A-B$



$B-A$



$A\cap B$



$(A\cup B)^C$

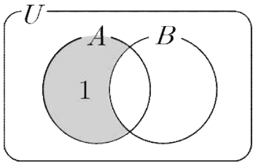
위의 네 집합 중 어느 두 집합의 교집합은 공집합이고, 네 집합의 합집합은 전체집합이다.

조건 (가)에 의하여

$1\in A-B$ 또는 $1\in B-A$

또는 $1\in(A\cup B)^C$이다.

- (1) $1\in A-B$인 경우



조건 (나)에 의하여 집합 $A-B$의 원소의 개수를 결정하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 $_5\mathrm{C}_1(=5)$이다. 이때, $_5\mathrm{C}_1$은 2, 3, 4, 5, 6 중에서 하나를 택하는 조합의 수이다.

예를 들어 $2\in A-B$라고 하자.

나머지 원소 3, 4, 5, 6이 포함되는 집합을 결정하는 방법의 수는 중복순열의 수에 의하여 $_3\Pi_4(=3^4=81)$이다. 예를 들어 다음과 같이 결정할 수 있다.

원소	$B-A$	$A\cap B$	$(A\cup B)^C$
3	○		
4			○
5			○
6		○	

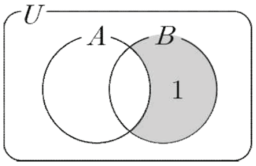
(○=원소를 포함한다.)

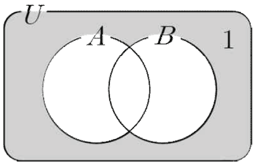
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$5\times 81=405$

- (2) $1\in B-A$ 또는 $1\in(A\cup B)^C$인 경우

원소 1이 포함되는 집합을 결정하는 방법의 수는 2이다. (아래 그림)





조건 (나)에 의하여 집합 $A-B$의 원소의 개수를 결정하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2(=10)$이다. 이때, ${}_5C_2$는 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 두 개를 택하는 조합의 수이다.
예를 들어 $A-B=\{2,\ 3\}$이라고 하자.
나머지 원소 4, 5, 6이 포함되는 집합을 결정하는 방법의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_3\Pi_3(=3^3=27)$이다. 예를 들어 다음과 같이 결정할 수 있다.

원소	$B-A$	$A\cap B$	$(A\cup B)^C$
4	○		
5		○	
6		○	

(○=원소를 포함한다.)
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$2\times10\times27=540$
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$405+540=945$
답 ④

[풀이2]
두 조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍 $(A,\ B)$만을 원소로 하는 집합을 각각 P, Q라고 하자.
$Q=(P\cap Q)\cup(P^C\cap Q)$
이므로
$n(P\cap Q)=n(Q)-n(P^C\cap Q)$
$={}_6C_2\times{}_3\Pi_4-{}_5C_2\times{}_3\Pi_3$
(이때, 후자의 경우 $1\in A\cap B$이다.)
$=1215-270$
$=945$
이때, ${}_6C_2$는 집합 $A-B$에 속하는 원소를 결정하는 경우의 수, ${}_3\Pi_4$는 나머지 4개의 원소를 세 집합 $A\cap B$, $B-A$, $U-(A\cup B)$에 분배하는 경우의 수, ${}_5C_2$는 집합 $A-B$에 속하는 원소를 결정하는 경우의 수, ${}_3\Pi_3$는 나머지 3개의 원소를 세 집합 $A\cap B$, $B-A$, $U-(A\cup B)$에 분배하는 경우의 수이다.
답 ④

J023

| 답 51

[풀이]
갑이 이긴 게임의 수와 비긴 게임의 수를 각각 a, b라고 하자. (단, a, b는 음이 아닌 정수)
갑이 진 게임의 수는 $5-a-b$이므로
을이 이긴 게임의 수와 비긴 게임의 수는 각각 $5-a-b$, b이다. 그리고 을이 진 게임의 수는 a이다.
문제에서 주어진 조건에 의하여
갑: $3a+2b+1(5-a-b)=10$
을: $3(5-a-b)+2b+1a=10$
정리하면
$2a+b=5$
(단, $a\ge0$, $b\ge0$, $a+b\le5$)
순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 5)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 1)$이다.

- (경우1) $10=2+2+2+2+2$

	이긴 횟수	진 횟수	비긴 횟수
갑	0	0	5
을	0	0	5

다섯 개의 수 2, 2, 2, 2, 2를 나열하는 경우의 수는 1이다.

- (경우2) $10=3+1+2+2+2$

	이긴 횟수	진 횟수	비긴 횟수
갑	1	1	3
을	1	1	3

다섯 개의 수 3, 1, 2, 2, 2를 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{5!}{3!}=20$이다. 예를 들어 2, 2, 1, 3, 2와 같이 나열된 경우에 대응되는 갑, 을의 게임 결과는 다음과 같다.
갑: 무→무→패→승→무
을: 무→무→승→패→무

- (경우3) $10=3+3+1+1+2$

	이긴 횟수	진 횟수	비긴 횟수
갑	2	2	1
을	2	2	1

다섯 개의 수 3, 3, 1, 1, 2를 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{5!}{2!2!}=30$이다. 예를 들어 1, 3, 1, 3, 2와 같이 나열된 경우에 대응되는 갑, 을의 게임 결과는 다음과 같다.
갑: 패→승→패→승→무
을: 승→패→승→패→무
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$1+20+30=51$

답 51

J024

|답 ②

[풀이]

〈증명〉

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k x^k$$

에서 $\boxed{x^n}$의 계수는 ${}_{2n}\mathrm{C}_n$이다.

한편 $(1+x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_{n-k} x^{n-k}\right)$

에서 $\boxed{x^n}$의 계수는 $\sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k \cdot \boxed{{}_n\mathrm{C}_{n-k}}\right)$이다.

($\because x^n = x^k \cdot x^{n-k}$)

따라서 ${}_{2n}\mathrm{C}_n = \left({}_n\mathrm{C}_0\right)^2 + \left({}_n\mathrm{C}_1\right)^2 + \left({}_n\mathrm{C}_2\right)^2 + \cdots + \left({}_n\mathrm{C}_n\right)^2$이다.

($\because$ ${}_n\mathrm{C}_{n-k} = {}_n\mathrm{C}_k$이므로

${}_{2n}\mathrm{C}_n = \sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\left({}_n\mathrm{C}_k\right)^2\right)$)

그런데 n이 소수이므로 $\boxed{1 \le k \le n-1}$인 자연수 k에 대하여

${}_n\mathrm{C}_k\left(=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\right)$는 n의 배수이다.

($\because$ $k=0$ 또는 $k=n$이면 ${}_n\mathrm{C}_k$는 1이므로 n의 배수일 수 없다.)

따라서 $\boxed{1 \le k \le n-1}$인 자연수 k에 대하여 $\left({}_n\mathrm{C}_k\right)^2$은 n^2의 배수이고 ${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$이므로 ${}_{2n}\mathrm{C}_n - 2$는 n^2의 배수이다.

이상에서

(가): x^n

(나): ${}_n\mathrm{C}_{n-k}$

(다): $1 \le k \le n-1$

답 ②

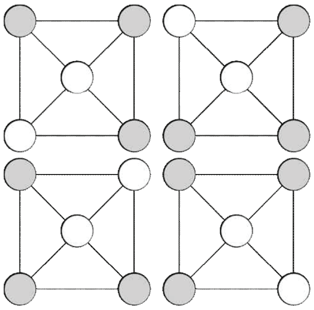
J025

|답 ①

[풀이1]

- (1) 정사각형의 두 대각선의 교점에 놓인 원 안에 돌이 놓이지 않는 경우

다음의 네 경우는 중복된다.

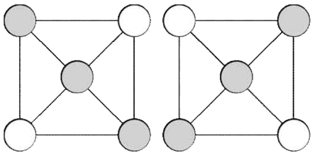


조합의 수, 곱의 법칙, 원순열의 수에 의하여

${}_5\mathrm{C}_3 \times \frac{4!}{4} = 60$

- (2) 정사각형의 두 대각선의 교점에 놓인 원 안에 돌이 놓이는 경우

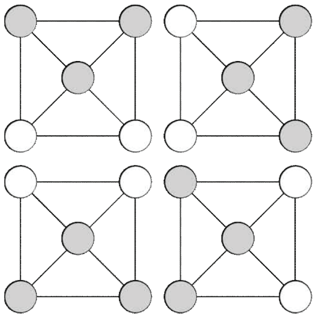
다음의 두 경우는 중복된다.



조합의 수, 곱의 법칙, 원순열의 수에 의하여

${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times \frac{2!}{2} = 30$

다음의 네 경우는 중복된다.



조합의 수, 곱의 법칙, 순열의 수에 의하여

${}_5\mathrm{C}_3 \times 3! = 60$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$60 + 30 + 60 = 150$

답 ①

[풀이2] **시험장**

서로 다른 5개의 돌을 각각 ○, ●, ◉, ☆, ★라고 하자.

우선 5개의 돌을 원 안에 각각 1개씩 올려놓는 방법의 수는

$\frac{5!}{4}$ (원순열의 수)

이다. 이 중에서 3개의 돌만 남기는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3$이고, 나머지 2개의 돌의 위치를 바꾸는 방법의 수는 2!이므로 구하는 방법의 수는

$${}_5C_3 \times \frac{5!}{4} \times \frac{1}{2!} = 150$$

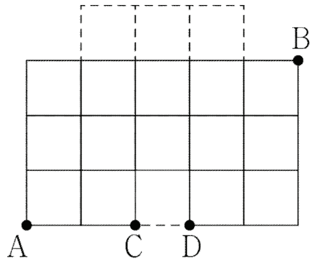
답 ①

J026

|답 ①

[풀이1]

우선 최단거리로 갈 때, 지날 수 없는 길을 지우자. (아래 그림)



(단, C, D는 도로망의 교차점이다.)

여집합의 관점에서 방법의 수를 구하자.

두 교차점 C와 D가 연결되었을 때, 최단거리로 가는 방법의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$$\frac{8!}{5!3!} = 56$$

A → C → D → B인 경우:

A → C → D의 경우의 수는 1이고,

D → B의 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$$\frac{5!}{2!3!} = 10$$

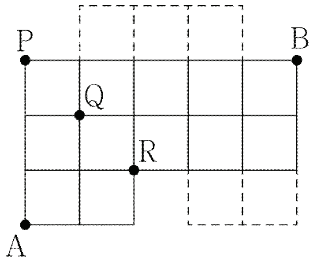
따라서 A에서 출발하여 B까지 최단거리로 가는 방법의 수는

$56 - 10 = 46$

답 ①

[풀이2]

우선 최단거리로 갈 때, 지날 수 없는 길을 지우자. (아래 그림)



(단, P, Q, R은 도로망의 교차점이다.)

A → P → B인 경우:

곱의 법칙에 의하여

$1 \times 1 = 1$

A → Q → B인 경우:

같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{4!} = 15$$

A → R → B인 경우:

같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

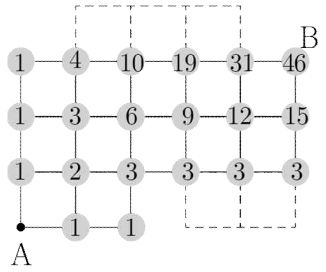
$$\frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{2!3!} = 30$$

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$1 + 15 + 30 = 46$

답 ①

[풀이3] **시험장**



합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는 46이다.

답 ①

J027

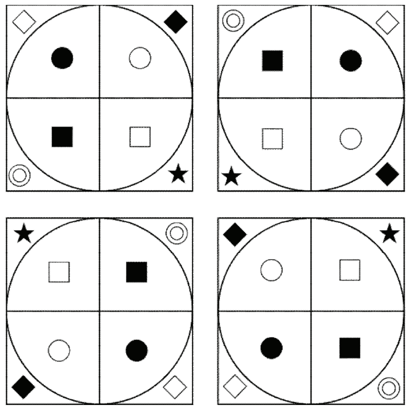
|답 ②

[풀이1]

8개의 영역에 서로 다른 8가지의 색을 모두 칠하는 경우의 수는 원순열의 수에 의하여

$$\frac{8!}{4}$$

이때, 8!을 4로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다.



답 ②

[풀이2]

원의 내부의 4개의 영역 각각에 서로 다른 색을 칠할 경우의 수는 원순열의 수에 의하여

${}_8\mathrm{C}_4\times\frac{4!}{4}$

이때, ${}_8\mathrm{C}_4$는 원의 내부에 칠할 색을 선택하는 경우의 수이다.

원의 외부의 4개의 영역 각각에 서로 다른 색을 칠할 경우의 수는 순열의 수에 의하여

$4!$

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_8\mathrm{C}_4\times\frac{4!}{4}\times 4!$$

$$=\frac{8\times7\times6\times5}{4!}\times3!\times4!=\frac{8!}{4}$$

답 ②

J028

|답 ⑤

[풀이1] ★

문제에서 주어진 조건에 의하여 $X\neq\varnothing$이다.

집합 X의 원소의 개수의 최솟값과 최댓값은 각각 1, n이다.

집합 X의 원소의 개수가 $k(1\le k\le n)$인 경우의 수는 조합의 수에 의하여

${}_n\mathrm{C}_k$(←n 이하의 자연수 중에서 k개를 택하는 조합의 수)

집합 X의 k개의 원소 중에서 집합 $X\cap Y$에 속할 한 개의 원소를 택하는 경우의 수는 k이다.

이제 나머지 $n-k$개의 원소는 집합 $Y-X$ 또는 $(X\cup Y)^C$에 속한다. 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 ${}_2\Pi_{n-k}=2^{n-k}$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot{}_n\mathrm{C}_k\cdot2^{n-k}$$

답 ⑤

[풀이2]

집합 $X\cap Y$에 속하는 1개의 원소를 결정하는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{C}_1$이고, 나머지 $n-1$개의 원소가 각각이 속할 집합을 결정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_{n-1}(=3^{n-1})$이므로 구하는 경우의 수는

$${}_n\mathrm{C}_1\times{}_3\Pi_{n-1}$$

$$=n\times3^{n-1}$$

$$=n\times(1+2)^{n-1}$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}2^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k2^{n-k}$$

$(\because n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}$$

$$=k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$=k\,{}_n\mathrm{C}_k)$

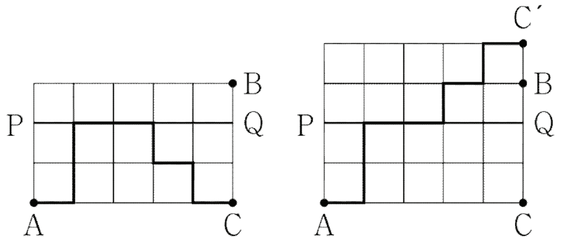
답 ⑤

J029

|답 ④

[풀이]

점 C를 직선 PQ에 대하여 대칭이동한 점을 C′라고 하자.



위의 그림처럼 A지점에서 C′지점까지 최단거리로 이동하는 경로의 수가 답이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{9!}{5!4!}=126$$

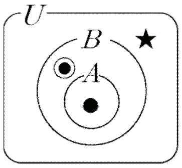
답 ④

J030

|답 211

[풀이1] ★

세 집합 A(●), $B-A$(◉), $U-B$(★)의 합집합은 전제집합 U이고, 이 세 집합 중에서 어느 두 집합의 교집합도 공집합이다. 다시 말하면 전제집합 U는 세 집합 A, $B-A$, $U-B$로 분할된다. (아래 그림) 이때, $A\neq\varnothing$이다.



구하는 순서쌍의 개수는

$3^5-2^5=243-32=211$

이다. 이때, 2^5은 $A=\varnothing$일 때의 순서쌍 (A, B)의 개수이다.

이해를 돕기 위해 3^5 중에는 아래의 경우가 포함되어 있다.

	1	2	3	4	5
●	○				
◉		○		○	
★			○		○

즉, $A=\{1\}$, $B-A=\{2,\ 4\}$, $U-B=\{3,\ 5\}$

답 211

[풀이2] ★

$n(B)=k$일 때, $A\subset B$를 만족하는 집합 B의 개수는 ${}_5\mathrm{C}_k$이고 집합 A의 개수는 2^k-1개이므로 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 $\sum_{k=1}^{5}{}_5\mathrm{C}_k(2^k-1)$이다.

$$\sum_{k=1}^{5}{}_5\mathrm{C}_k(2^k-1)=\sum_{k=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_k(2^k-1)$$

$$=\sum_{k=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_k2^k-\sum_{k=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_k=(2+1)^5-2^5=211$$

답 211

J031 |답 ⑤

[풀이]

○●○●○●

(단, ○는 홀수 번째, ●는 짝수 번째)

●에 2가 올 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$, 나머지 자리에 1, 3, 3, 3을 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}$이므로 구하는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_2\times\frac{4!}{3!}=12$$

답 ⑤

J032 |답 ①

[풀이]

세 항 x, x^2, x^4의 계수는 각각

${}_{10}\mathrm{C}_1a^9$, ${}_{10}\mathrm{C}_2a^8$, ${}_{10}\mathrm{C}_4a^6$

등비중항의 정의에 의하여

$$({}_{10}\mathrm{C}_2a^8)^2={}_{10}\mathrm{C}_1a^9\times{}_{10}\mathrm{C}_4a^6$$

풀면

$$\therefore\ a=\frac{28}{27}$$

답 ①

J033 |답 136

[풀이]

$f(3)=6$이라고 가정하자.

조건 (다)에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$x>3$이면 $f(x)>6$

그런데 $f(x)$의 값은 6 이하이므로,

이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(3)\neq 6$이다.

조건 (가)에 의하여

$f(3)=2$ 또는 $f(3)=4$이다.

▸ (1) $f(3)=2$인 경우

두 조건 (나), (다)에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$x<3$이면 $f(x)<2$이고,

$x>3$이면 $f(x)>2$이다.

$f(1)$, $f(2)$가 가질 수 있는 값은 1이다.

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$이 가질 수 있는 값은

3 또는 4 또는 5 또는 6이다.

경우의 수는 중복순열의 수에 의하여

$$1\times{}_4\Pi_3=1\times4^3=64$$

▸ (2) $f(3)=4$인 경우

두 조건 (나), (다)에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$x<3$이면 $f(x)<4$이고,

$x>3$이면 $f(x)>4$이다.

$f(1)$, $f(2)$이 가질 수 있는 값은

1 또는 2 또는 3이다.

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$이 가질 수 있는 값은

5 또는 6이다.

경우의 수는 중복순열의 수에 의하여

$${}_3\Pi_2\times{}_2\Pi_3=3^2\times2^3=72$$

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$64+72=136$

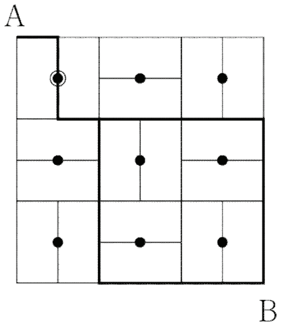
답 136

J034 |답 ①

[풀이]

전체의 다음의 네 경우로 구분할 수 있다.

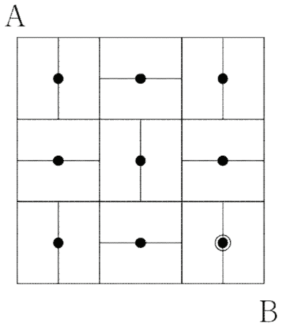
- (경우1)



(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

경로의 수는 곱의 법칙과 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

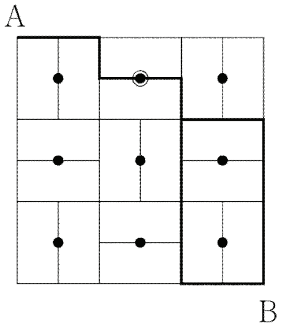
$1\times\frac{4!}{2!2!}=6$



(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

위의 경우도 마찬가지의 방법으로 경로의 수는 6이다.

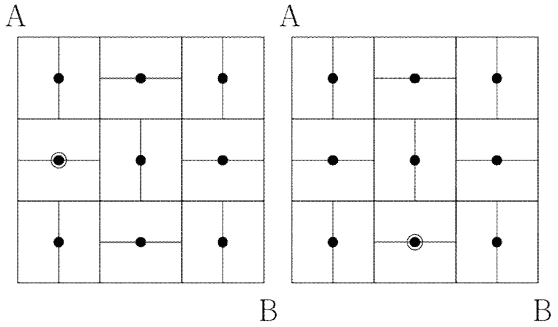
- (경우2)

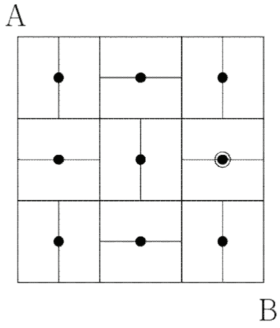


(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

경로의 수는 곱의 법칙과 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$1\times\frac{3!}{2!}=3$

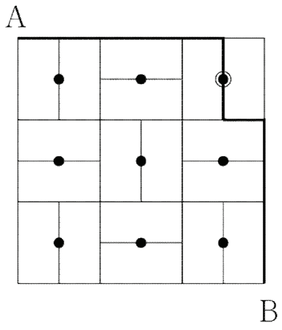




(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

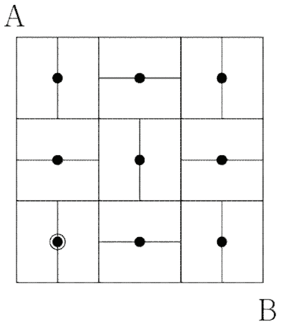
위의 경우들도 마찬가지의 방법으로 경로의 수는 각각 3이다.

- (경우3)



(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

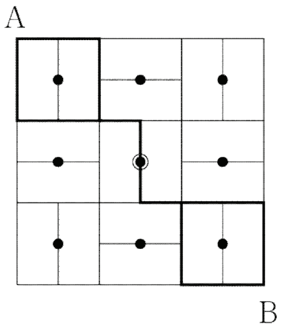
경로의 수는 1이다.



(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

위의 경우도 마찬가지의 방법으로 경로의 수는 1이다.

- (경우4)



(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

경로의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2 \times 1 \times 2 = 4$

(경우1)~(경우4)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$12 + 12 + 2 + 4 = 30$

답 ①

J035 | 답 12

[풀이]

두 조건 (가), (나)에 의하여

$f(1) = 4$ 또는 $f(1) = 5$이고,

$5 \le f(3) \le f(4) \le 7$이다.

순서쌍 $(f(3),\ f(4))$의 개수는 5, 6, 7 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = 6$

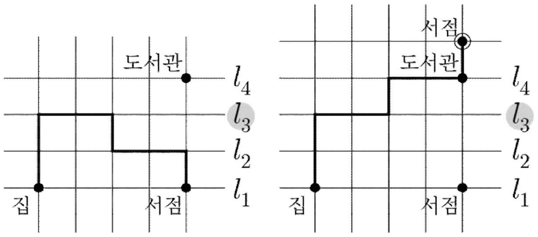
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$2 \times 6 = 12$

답 12

J036 | 답 296

[풀이]



위의 그림과 같이 직선 l_3 위의 교차로에서 전화를 받았을 때, 왼쪽의 집→서점의 경로는 오른쪽의 집→서점 경로에 대응된다. 이때, 오른쪽 그림의 두 서점은 직선 l_3에 대하여 대칭이다.

직선 l_3 위의 교차로에서 전화를 받았을 때, 경로의 수는 $\dfrac{8!}{4!4!}$이다.

마찬가지의 방법으로 전화를 받은 직선이 l_1, l_2, l_4일 때, 경로의 수는 각각

$1,\ \dfrac{6!}{4!2!},\ \dfrac{10!}{4!6!}$

따라서 구하는 경우의 수는

$1 + \dfrac{6!}{4!2!} + \dfrac{8!}{4!4!} + \dfrac{10!}{4!6!}$

$= 1 + 15 + 70 + 210 = 296$

답 296

J037 | 답 60

[풀이]

맨 아래 1층에 6개의 블록을 〈그림1〉과 같이 되도록 쌓는다.

이제 나머지 6개의 블록을 쌓으면 된다.

- (1) 2층 앞줄에 각각 1개씩 쌓는 경우

뒷줄에 3개, 1개씩의 블록을 쌓을 방법의 수는

${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$

- (2) 2층 앞줄 두 곳 중 한 곳에만 1개를 쌓는 경우

뒷줄 네 곳 중 한 곳에 3개를 쌓고 나머지 세 곳에 중복을 허락하여 2개를 쌓으면 되므로

${}_2C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3H_2 = 48$

따라서 구하는 방법의 수는

$12 + 48 = 60$

답 60

J038 | 답 56

[풀이]

서로 다른 6종류의 원판의 반지름의 길이를 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6이라고 하자.

맨 위에서부터 아래 방향으로 오는 원판의 반지름의 길이를 각각 p, q, r이라고 하면

$p \le q \le r$

(단, $1 \le p,\ r \le 6$)

순서쌍 $(p,\ q,\ r)$의 개수는 중복조합의 수에 의하여

${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$

답 56

J039

| 답 ③

[풀이]

5개의 야구팀 중에서 2개의 팀을 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2(=10)$, 총 경기의 수는 곱의 법칙에 의하여 $10\times 9=90$이다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$27+33+x+y+z=90$

$(x\geq 5,\ y\geq 5,\ z\geq 5)$

$x=x'+5,\ y=y'+5,\ z=z'+5$로 두고

이 방정식을 정리하면

$x'+y'+z'=15$

$(x'\geq 0,\ y'\geq 0,\ z'\geq 0)$

이 방정식의 해의 개수는 $x',\ y',\ z'$ 중에서 중복을 허용하여 15개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{15}={}_{3+15-1}C_{15}={}_{17}C_{15}={}_{17}C_2=136$

답 ③

J040

| 답 ③

[풀이1]

서로 다른 세 개의 주머니를 각각 A, B, C, 구슬을 ○라고 하자.

전체 경우를 다음과 같은 세 경우로 구분하여 생각하자.

$5=3+2+0$ (경우1)

$=3+1+1$ (경우2)

$=2+2+1$ (경우3)

- (경우1)

A	B	C
○ ○ ○	○ ○	×
○ ○ ○	×	○ ○
○ ○	○ ○ ○	×
×	○ ○ ○	○ ○
○ ○	×	○ ○ ○
×	○ ○	○ ○ ○

경우의 수는 순열의 수에 의하여 $3!=6$이다.

- (경우2)

A	B	C
○ ○ ○	○	○
○	○ ○ ○	○
○	○	○ ○ ○

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{3!}{2!}=3$이다.

- (경우3)

A	B	C
○ ○	○ ○	○
○ ○	○	○ ○
○	○ ○	○ ○

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{3!}{2!}=3$이다.

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6+3+3=12$

답 ③

[풀이2] 시험장

서로 다른 세 개의 주머니를 각각 A, B, C, 구슬을 ○라고 하자.

문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는 경우만을 생각하자.

$5=5+0+0$ …(경우4)

$=4+1+0$ …(경우5)

- (경우4)

방법의 수는 3이다.

- (경우5)

방법의 수는 $3!=6$이다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_3H_5-(3+6)={}_7C_2-9=12$

이때, ${}_3H_5$는 방정식

$a+b+c=5$ (단, $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$)

의 해의 개수이다.

답 ③

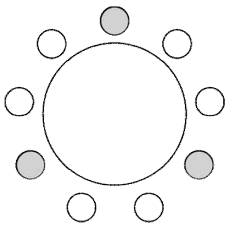
J041

| 답 48

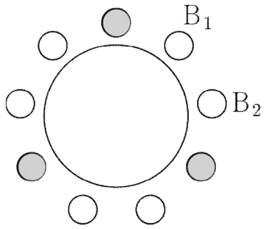
[풀이]

남학생 4명을 각각 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$, 여학생 2명을 각각 $B_1,\ B_2$라고 하자.

조건 (나)를 만족시키기 위해서는 아래 그림과 같이 3개의 자리를 비워야 한다.

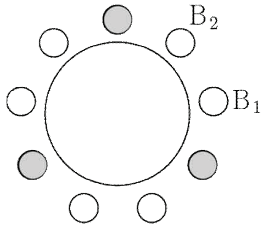


- (1) $B_1\to B_2$가 시계 방향인 경우



나머지 자리에 4명의 남학생이 앉을 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(=24)$이다.

- (2) $B_1 \to B_2$가 시계 반대 방향인 경우



나머지 자리에 4명의 남학생이 앉을 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(=24)$이다.

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는

$24+24=48(=2!\times 4!)$

답 48

J042

|답 15

[풀이]

축구공, 농구공, 배구공의 개수를 각각 x, y, z라고 하자.

$x+y+z=4$

(단, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$)

이 방정식의 해의 개수는 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

답 15

J043

|답 ②

[풀이]

x, y, z는 6 이하의 자연수이므로

$x+y+z=6$

(단, $x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$)

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$

로 두고 이 방정식을 정리하면

$x'+y'+z'=3$

(단, $x'\geq 0$, $y'\geq 0$, $z'\geq 0$)

이 방정식의 해의 개수는 x', y', z' 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

따라서 구하는 경우의 수는 10이다.

답 ②

J044

|답 45

[풀이]

문제에서 주어진 방정식을 변형하면

$3(y+z)=32-x$

$32-x$는 6 이상의 3의 배수이므로 x가 가질 수 있는 값은

2, 5, 8, ⋯, 26

$x=3x'-1$로 두자. (단, $1\leq x'\leq 9$)

이를 문제에서 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$x'+y+z=11$

(단, $1\leq x'\leq 9$, $y\geq 1$, $z\geq 1$)

$x'-1=x''$, $y-1=y'$, $z-1=z'$으로 두면

$x''+y'+z'=8$

(단, $0\leq x''\leq 8$, $y'\geq 0$, $z'\geq 0$)

이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x'', y', z')의 개수는 세 문자 x'', y', z' 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합의 수

${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$

이다. 따라서 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 45이다.

답 45

J045

|답 ①

[풀이]

●, ★, ○를 각각 빨간 공, 파란 공, 노란 공이라고 하자.

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.

(단계1) 우선 빨간 공 5개를 상자에 담자.

빨간 상자	파란 상자	노란 상자
×	●●●	●●

(단계2) 파란 상자에는 파란 공(★)을 담을 수 없으므로 노란 공(○) 2개를 담아야 하고, 노란 상자에는 노란 공(○)을 담을 수 없으므로 파란 공(★) 3개를 담아야 한다. (아래 표)

빨간 상자	파란 상자	노란 상자
	●●● ○○	●● ★★★

(단계3) 이제 빨간 상자에는 파란 공(★) 2개와 노란 공(○) 3개를 담으면 된다. (아래 표)

빨간 상자	파란 상자	노란 상자
★★ ○○○	●●● ○○	●● ★★★

위와 같이 (단계1)에서 (단계2), (단계3)이 자동으로 결정된다.

따라서 구하는 경우의 수는 방정식

$a+b=5$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$)

의 해의 개수와 같다.

중복조합의 수에 의하여

${}_{2}\mathrm{H}_{5}={}_{2+5-1}\mathrm{C}_{5}={}_{6}\mathrm{C}_{1}=6$

답 ①

J046

| 답 ②

[풀이]

꺼낸 3개의 공에 적힌 수 중 네 수 0, 2, 3, 5의 개수를 각각 a, b, c, d라 하자.

세 수의 곱은 0 또는 $2^{b}3^{c}5^{d}$이고,

$a+b+c+d=3$

(단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$, $d\geq 0$)

이다.

- (1) $a=0$인 경우

$b+c+d=3$

(단, $b\geq 0$, $c\geq 0$, $d\geq 0$)

위의 방정식의 해의 개수는 중복조합의 수에 의하여

${}_{3}\mathrm{H}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$

- (2) $a\neq 0$인 경우

세 수의 곱은 항상 0이다.

(1), (2)에 의하여 서로 다른 정수의 개수는

$10+1=11$

답 ②

J047

| 답 13

[풀이1]

상자 A의 3개의 펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3, 상자 B의 4개의 곰 인형을 크기가 작은 것부터 b_1, b_2, b_3, b_4라고 하자.

아래의 빈 자리에 7개의 인형을 진열하자.

○○○○○○○

- (경우1)

○○○b_2○○○

b_2의 왼쪽에 a_1, a_2, b_1을 나열하고, b_2의 오른쪽에 a_3, b_3, b_4를 나열하는 경우의 수는

$3\times 3=9\left(=\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)$

이다. 이때, 전자의 3은 b_1을 나열하는 경우의 수이고, 후자의 3은 a_3을 나열하는 경우의 수이다.

- (경우2)

○○○○b_2○○

b_2의 왼쪽에 a_1, a_2, a_3, b_1을 나열하고, b_2의 오른쪽에 b_3, b_4를 나열하는 경우의 수는

$4\times 1=4\left(=\frac{4!}{3!}\times\frac{2!}{2!}\right)$

이다. 이때, 4는 b_1을 나열하는 경우의 수이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$9+4=13$

답 13

[풀이2]

상자 A의 3개의 펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3, 상자 B의 4개의 곰 인형을 크기가 작은 것부터 b_1, b_2, b_3, b_4라고 하자.

- (1) a_2가 왼쪽에서 두 번째 자리에 진열될 경우

a_1은 가장 왼쪽에 진열되어야 한다.

a_1 a_2 ◯◯◯◯◯

a_3이 진열될 경우의 수는 5이다. (아래)

a_1 a_2 a_3 ◯◯◯◯
a_1 a_2 ◯ a_3 ◯◯◯
a_1 a_2 ◯◯ a_3 ◯◯
a_1 a_2 ◯◯◯ a_3 ◯
a_1 a_2 ◯◯◯◯ a_3

나머지 자리에 4개의 곰 인형을 진열하면 된다.

- (2) a_2가 왼쪽에서 세 번째 자리에 진열될 경우

◯◯ a_2 ◯◯◯◯

a_1, b_1이 진열될 경우의 수는 2이다. (아래)

a_1 b_1 a_2 ◯◯◯◯ …(경우1)
b_1 a_1 a_2 ◯◯◯◯ …(경우2)

(경우1), (경우2) 각각에 대하여 a_3이 진열될 경우의 수는 4이다. (아래)

- (경우1)에 대하여

a_1 b_1 a_2 a_3 ◯◯◯
a_1 b_1 a_2 ◯ a_3 ◯◯
a_1 b_1 a_2 ◯◯ a_3 ◯
a_1 b_1 a_2 ◯◯◯ a_3

- (경우2)에 대해서도 마찬가지로 생각할 수 있다.

(1), (2)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여

$5+2\times4=13$

답 13

J048

| 답 ②

[풀이]

네 자리의 자연수를 다음과 같이 두자.

$a\times10^3+b\times10^2+c\times10^1+d$

(단, a, b, c, d는 9 이하의 음이 아닌 홀수이다.)

조건 (나)에 의하여

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$,

$d=2d'+1$

(단, a', b', c', d'는 4 이하의 음이 아닌 정수이다.)

이를 조건 (가)에서 주어진 등식에 대입하면

$a'+b'+c'+d'=5$

(단, a', b', c', d'는 4 이하의 음이 아닌 정수이다.)

이 방정식의 해의 개수는 a', b', c', d' 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수

${}_4\mathrm{H}_5={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$

에서 4를 뺀 수 52와 같다.

왜냐하면 순서쌍 (a, b, c, d)가 각각

$(5, 0, 0, 0)$, $(0, 5, 0, 0)$,

$(0, 0, 5, 0)$, $(0, 0, 0, 5)$

인 경우는 제외해야 하기 때문이다.

따라서 구하는 경우의 수는 52이다.

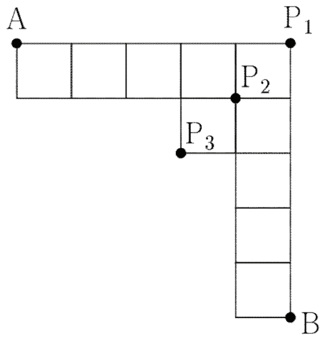
답 ②

J049

| 답 ②

[풀이1]

아래 그림에서 P_1, P_2, P_3은 도로망의 교차로이다.



도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 갈 때, 세 지점 P_1, P_2, P_3 중에서 어느 한 지점을 반드시 지나야 한다.

- (1) P_1 지점을 지나는 경우

경우의 수는 1이다.

- (2) P_2 지점을 지나는 경우

경우의 수는 곱의 법칙과 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{5!}{4!}\times\frac{5!}{4!}=25$

- (3) P_3 지점을 지나는 경우

경우의 수는 곱의 법칙과 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{3!}=16$

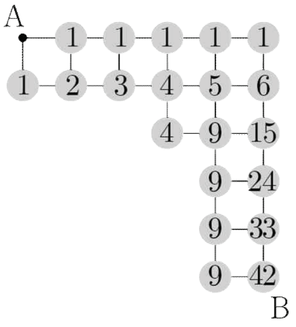
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$1+25+16=42$

답 ②

[풀이2] 시험장



합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 42이다.

답 ②

J050

| 답 ③

[풀이]

네 개의 수를 각각 a, b, c, d라고 하자.

(단, $1\le a<b<c<d\le15$)

문제에서 주어진 조건에 의하여

$b-a\ge3$, $c-b\ge3$, $d-c\ge3$

즉, $b\ge a+3$, $c\ge a+6$, $d\ge a+9$

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.

$a=1$, $b=4$, $c=10$, $d=15$

이때, $b-3=b'$, $c-6=c'$, $d-9=d'$라고 하면

$a=1$, $b'=1$, $c'=4$, $d'=6$

따라서 6 이하의 자연수 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택하는 중복조합의 수를 구하면 된다.

${}_6\mathrm{H}_4={}_{6+4-1}\mathrm{C}_4={}_9\mathrm{C}_4=126$

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

2015 개정 교육과정에서 달라지는 점은

- 수학Ⅰ

지수함수와 로그함수: 두 대단원 '지수와 로그', '지수함수와 로그함수'가 결합
삼각함수: 사인법칙, 코사인법칙의 귀환 & sec, csc, cot가 미적분 과목으로 이동
수열: 주기함수 관련 문제 출제 가능

- 수학Ⅱ

함수의 극한과 연속: 주기함수 관련 문제 출제 가능
미분: 주기함수 관련 문제 출제 가능
적분: 주기함수 관련 문제 출제 가능 & 구분구적분 퇴출

- 미적분

수열의 극한: 사인법칙, 코사인법칙, 삼각함수의 덧셈정리 관련 문제 출제 가능
미분법: 매개변수의 미분법, 음함수의 미분법의 귀환
적분법: 구분구적법은 이과 전용

- 확률과 통계

경우의 수: 순열, 조합 고1 과정으로 이동, 분할(정수/자연수) 퇴출
확률: 변화 없음
통계: 모비율 퇴출

- 기하

이차곡선: 기울기가 주어진 접선의 공식 귀환 & 사인법칙, 코사인 법칙 관련 문제 출제 가능
평면벡터: 라디안이 아닌 육십분법 사용 & 벡터의 내적의 정의를 성분으로 함
공간도형과 공간좌표: 공간벡터, 공간에서의 벡터의 방정식 퇴출

2021 수능에서 보여준 출제 경향

- 가형14(미적분): 등비급수 평면기하 응용문제에서 사인법칙, 코사인법칙이 출제된다는 관성을 깨는 문제. (삼각함수의 덧셈정리 출제)
- 가형20(미적분): 정적분+점 대칭성으로 즐겨 출제되던 문제를 정적분+선 대칭성으로 바꿈. 그래프의 개형을 무시하고 계산만 하면 시간 안에 풀 수 없는 문제.
- 가형29(확률과 통계): 이 정도의 경우 구분을 하는 문제를 출제하겠다. 라는 의지를 보여주는 문제.
- 가형30(미적분): 합성함수의 그래프의 개형을 그려서 극대극소 판단할 수 있는지를 평가하는 문제. 그리고 삼차함수의 그래프의 개형에서 방정식을 유도할 때 계산을 단축할 수 있는지도 관건.

- 나형20(수학2): 5차 이상의 다항함수의 그래프의 개형은 교육과정 외이므로 4차 함수의 그래프의 개형으로 접근해야 함. 풀이의 선택을 평가하는 문제.
- 나형30(수학2): |곡선-직선|의 미분가능성에 대한 전형적인 문제.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

구성

▸ **'이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 기하'** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 139개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2020년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2021학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2021학년도 (학년도 기준)

▸ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▸ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
대단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

▸ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 ‘기본개념’ 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 ‘실전이론’ 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 ‘기본개념’, ‘실전이론’, ‘(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정’ 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목차

기하

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

M 이차곡선

- 2015개정 교육과정

◆ 수학 I (공통과목)에서 라디안을 배우므로 라디안으로 출제된 기출은 변형하지 않았습니다.

○ 육십분법 도입

○ 기울기가 주어진 접선의 공식 귀환

○ 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 출제 가능

M. 이차곡선

M001

○○
(2003(10)고3-자연계14)

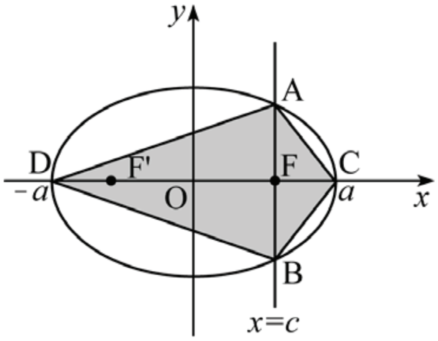
쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 위의 한 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 $\angle \mathrm{FPF'}=60°$ 일 때, $\triangle \mathrm{PFF'}$의 넓이는? [3점]

① $6\sqrt{2}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{3}$
④ $9\sqrt{2}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

M002

○○
(2005(10)고3-가형23)

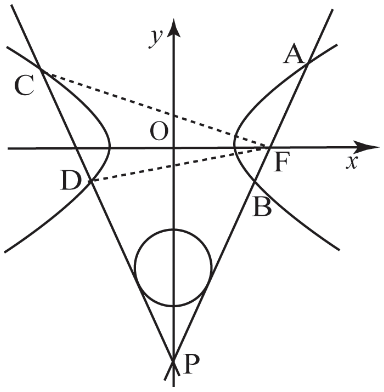
그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1$과 직선 $x=c$의 교점을 A, B라 하자. 두 점 $\mathrm{C}(a,\ 0)$, $\mathrm{D}(-a,\ 0)$에 대하여, 사각형 ADBC의 넓이를 구하시오. (단, a와 c는 양수이다.) [4점]



M003

○○
(2005사관(1차)-이과25)

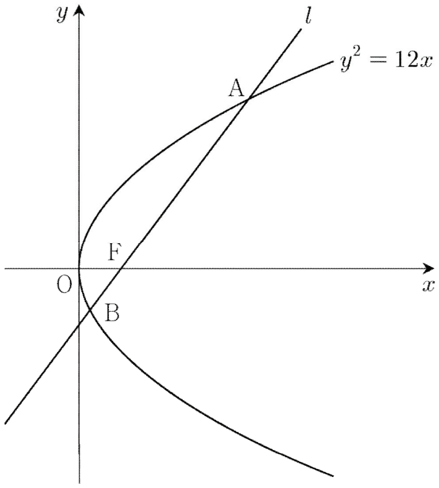
오른쪽 그림과 같이 y축 위의 점 P에서 원 $x^2+(y+k)^2=5$에 그은 두 접선이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$과 만나는 교점을 각각 A, B와 C, D라 한다. $\overline{\mathrm{AB}}=10$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$와 x축과의 교점 $\mathrm{F}(5,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{DF}}$의 값을 구하시오. [3점]



M004

○○○
(2005사관(1차)-이과7)

그림과 같이 포물선 $y^2=12x$의 초점 F를 지나는 직선 l과 이 포물선이 만나는 두 점을 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=4:1$일 때 직선 l의 방정식은 $ax+by=12$이다. 이 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은? [3점]



① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

M005

○○○
(2006(10)고3-가형8)

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{18}=1$과 직선 $y=ax+b$(a, b는 상수)의 교점의 개수에 대한 설명 중 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은? [3점]

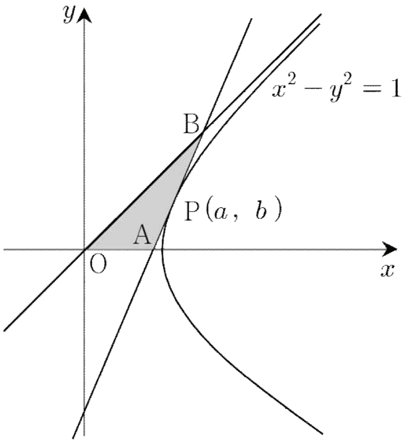
ㄱ. $a=-4$이고 $b=0$일 때 교점은 없다.
ㄴ. $a=3$이고 $b>0$일 때 교점은 1개다.
ㄷ. $a=\frac{1}{3}$이고 $b<0$일 때 교점은 2개다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

M006

○○○
(2007사관(1차)-이과17)

그림과 같이 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ (단, $a>1$, $b>0$)에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A, 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $\lim_{a\to\infty}S(a)$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

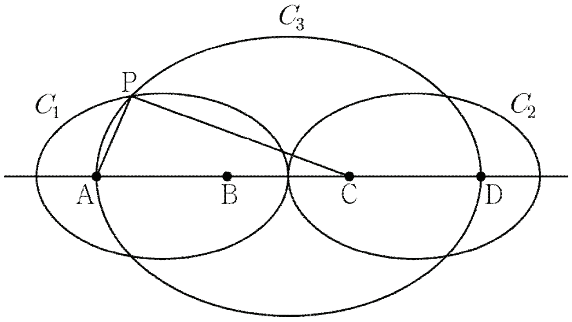


① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

M007

○○
(2007사관(1차)-이과18)

그림과 같이 서로 합동인 두 타원 C_1, C_2가 외접하고 있다. 두 점 A, B는 타원 C_1의 초점, 두 점 C, D는 타원 C_2의 초점이고, 네 점 A, B, C, D는 모두 한 직선 위에 있다. 두 점 B, C를 초점, 선분 AD를 장축으로 하는 타원을 C_3이라 하고, 두 타원 C_1, C_3의 교점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=8$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=6$일 때, $\overline{\mathrm{CP}}-\overline{\mathrm{AP}}$의 값은? [4점]

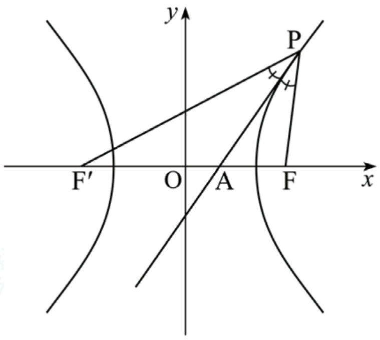


① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

M008

○○
(2007(10)고3-가형19)

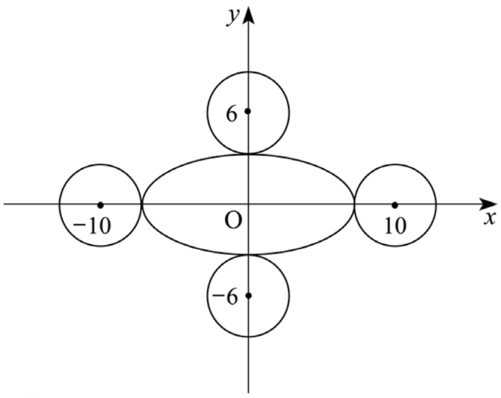
쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F$'$이라 하자. 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{F'PF}$의 이등분선이 x축과 점 A$(1,\ 0)$에서 만날 때, 삼각형 PF$'$F의 둘레의 길이를 구하시오. [3점]



M009

○○
(2007(10)고3–가형21)

그림과 같이 좌표평면에 중심의 좌표가 각각 $(10,\ 0)$, $(-10,\ 0)$, $(0,\ 6)$, $(0,\ -6)$이고 반지름의 길이가 모두 같은 4개의 원에 동시에 접하고, 초점이 x축 위에 있는 타원이 있다.

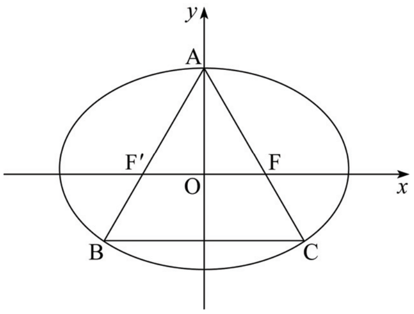


이 타원의 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{10}$일 때, 장축의 길이를 구하시오. (단, 네 원의 중심은 타원의 외부에 있다.) [4점]

M010

○○
(2008(10)고3–가형5)

그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<a)$에 내접하는 정삼각형 ABC가 있다. 타원의 두 초점 F, F′이 각각 선분 AC, AB 위에 있을 때, $\dfrac{b}{a}$의 값은? (단, 점 A는 y축 위에 있다.) [3점]



① $\dfrac{3}{5}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

M011

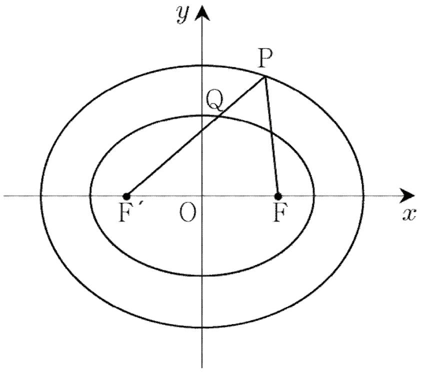
○○
(2008사관(1차)–이과27)

y축을 준선으로 하고 초점이 x축 위에 있는 두 포물선이 있다. 두 포물선이 y축에 대하여 서로 대칭이고, 두 포물선의 꼭짓점 사이의 거리는 4이다. 두 포물선에 동시에 접하고 기울기가 양수인 직선을 그을 때, 두 접점 사이의 거리를 d라 하자. d^2의 값을 구하시오. [4점]

M012

○○
(2008사관(1차)–이과6)

그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{75}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 이 타원 위의 점 P에 대하여 선분 F′P가 타원 $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{24}=1$과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{F'Q}}=8$일 때, 선분 FP의 길이는? [3점]



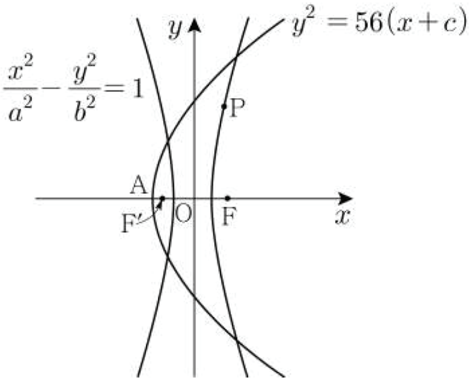
① 7 ② $\dfrac{29}{4}$ ③ $\dfrac{15}{2}$

④ $\dfrac{31}{4}$ ⑤ 8

M013

○○○
(2009(10)고3–가형8)

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(k,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-k,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 점 F를 초점으로 하는 포물선 $y^2=56(x+c)$가 있다.



쌍곡선 위의 임의의 점 P에 대하여 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=10$이 성립하고, 포물선의 꼭짓점 A에 대하여 $\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{FF'}}=1:6$이 성립한다. 이때, $\dfrac{c^2}{a^2-b^2}$의 값은? (단, $0<k<c$이다.) [4점]

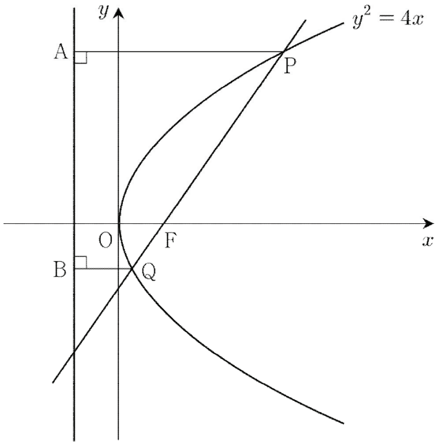
① $\dfrac{53}{14}$　② $\dfrac{55}{14}$　③ $\dfrac{30}{7}$

④ $\dfrac{32}{7}$　⑤ $\dfrac{34}{7}$

M014

○○○
(2009사관(1차)–이과14)

그림과 같이 포물선 $y^2=4x$의 초점 F를 지나는 직선이 이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=5$일 때, 사각형 ABQP의 넓이는? [3점]



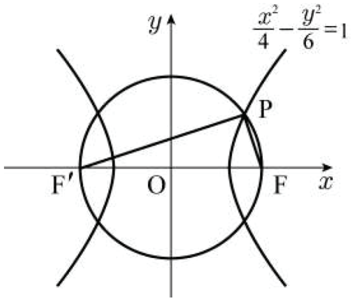
① $\dfrac{57}{4}$　② $\dfrac{115}{8}$　③ 15

④ $\dfrac{125}{8}$　⑤ $\dfrac{135}{8}$

M015

○○
(2010(10)고3-가형8)

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$이라 하자. 두 점 F, F′을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, $\cos(\angle \mathrm{PFF}')$의 값은? (단, c는 양수이다.) [4점]



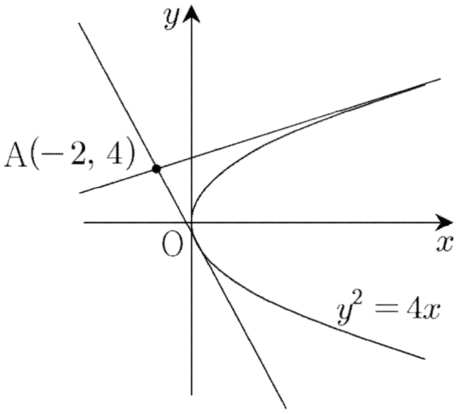
① $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{15}$ ③ $\frac{2\sqrt{10}}{15}$

④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

M016

○○
(2010사관(1차)-이과3)

점 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$에서 포물선 $y^2=4x$에 그은 두 접선의 기울기의 곱은? [2점]



① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{3}{8}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{5}{8}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

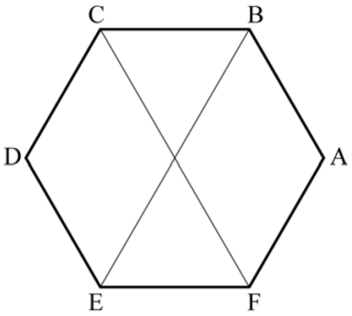
M017

○○○
(2011(10)고3-가형16)

한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF와 쌍곡선 H가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 쌍곡선 H의 초점은 점 A와 점 D이다.
(나) 쌍곡선 H의 점근선은 직선 BE와 직선 CF이다.

쌍곡선 H와 변 AB가 만나는 점을 P라 할 때, $\overline{\mathrm{DP}}-\overline{\mathrm{AP}}$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$

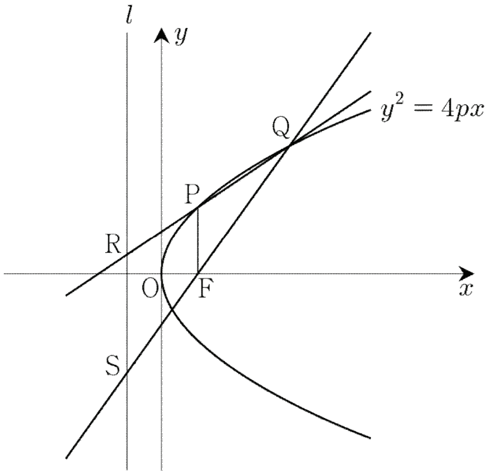
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

M018

○○○
(2011사관(1차)-이과9)

좌표평면에서 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$의 초점을 F, 준선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선과 포물선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 또, 제1사분면에 있는 포물선 위의 점 Q에 대하여 두 직선 QP, QF가 준선 l과 만나는 점을 각각 R, S라 하자.

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{QF}}=2:5$일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{FS}}}$의 값은? [3점]



① $\frac{5}{3}$
② $\frac{3}{2}$
③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{4}$
⑤ $\frac{6}{5}$

M019

○○
(2011사관(1차)-이과27)

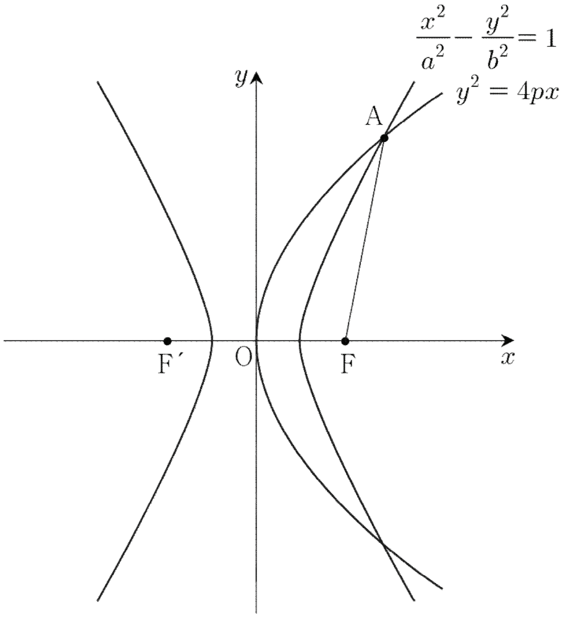
좌표평면에서 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(3,\ \dfrac{16}{5}\right)$에서의 접선을 l이라 하자. 타원의 두 초점 F, F$'$과 직선 l 사이의 거리를 각각 d, d'이라 할 때, dd'의 값을 구하시오. [3점]

M020

○○○
(2012(7)고3-가형20)

그림과 같이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$을 초점으로 하는 포물선 $y^2=4px$와 $\mathrm{F}(p,\ 0)$과 $\mathrm{F}'(-p,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자.

$\overline{\mathrm{AF}}=5$, $\cos(\angle\mathrm{AFF}')=-\dfrac{1}{5}$일 때, ab의 값은? (단, a, b, p는 모두 양수이다.) [4점]



① 1
② $\sqrt{3}$
③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{7}$
⑤ 3

M021

○
(2012(10)고3-가형5)

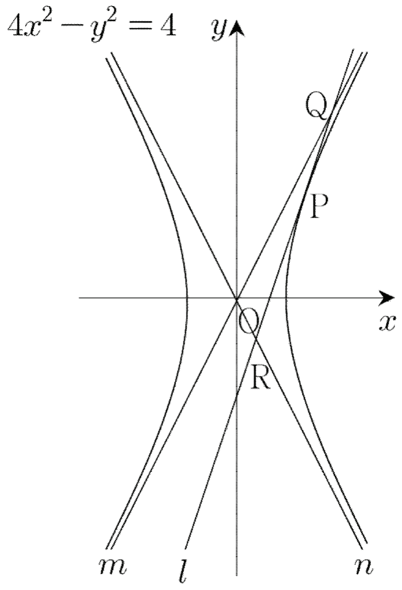
쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선이 y축과 만나는 점의 y좌표는? [3점]

① -1
② $-\frac{1}{2}$
③ 0
④ $\frac{1}{2}$
⑤ 1

M022

○○
(2012사관(1차)-이과10)

그림과 같이 쌍곡선 $4x^2-y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ 2)$에서의 접선을 l이라 하고, 이 쌍곡선의 두 점근선 중 기울기가 양수인 것을 m, 기울기가 음수인 것을 n이라 하자.
l과 m의 교점을 Q, l과 n의 교점을 R이라 할 때, $\overline{\mathrm{QR}}=k\overline{\mathrm{PQ}}$를 만족시키는 k의 값은? [3점]

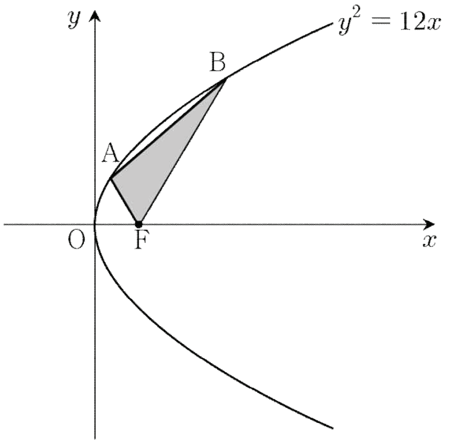


① $\sqrt{2}$　② $\dfrac{3}{2}$　③ 2
④ $\dfrac{7}{3}$　⑤ $1+\sqrt{2}$

M023

○○○
(2012(10)고3-가형13)

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위에 $\angle\mathrm{OFA}=\angle\mathrm{AFB}=\dfrac{\pi}{3}$인 두 점 A, B가 있다. 삼각형 AFB의 넓이는? (단, O는 원점이고 두 점 A, B는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]

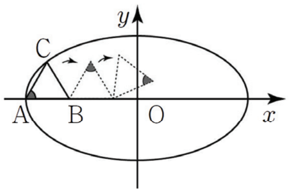


① $8\sqrt{3}$　② $10\sqrt{3}$　③ $12\sqrt{3}$
④ $14\sqrt{3}$　⑤ $16\sqrt{3}$

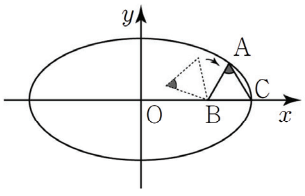
M024

○○
(2013(7)고3-B형28)

[그림1]과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC가 있다. 변 AB는 x축 위에 있고 꼭짓점 A, C는 타원 위에 있다. 한 변이 x축 위에 놓이도록 정삼각형 ABC를 x축을 따라 양의 방향으로 미끄러짐 없이 회전시킨다. 처음 위치에서 출발한 후 변 BC가 두 번째로 x축 위에 놓이고 꼭짓점 C는 타원 위에 놓일 때가 [그림2]이다. a^2+3b^2의 값을 구하시오. [4점]



[그림 1]



[그림 2]

M025

○○
(2013사관(1차)-이과11)

포물선 $y^2=8x$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 A, B라 하자.

$\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=3:1$일 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

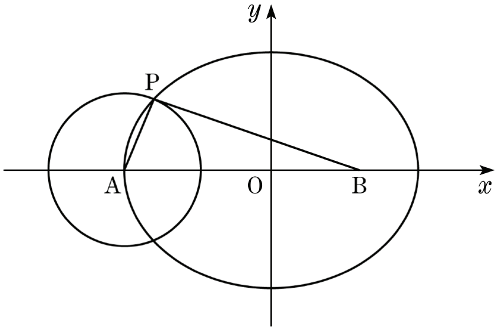
① $\frac{26}{3}$ ② $\frac{28}{3}$ ③ 10

④ $\frac{32}{3}$ ⑤ $\frac{34}{3}$

M026

○○
(2013(10)고3-B형27)

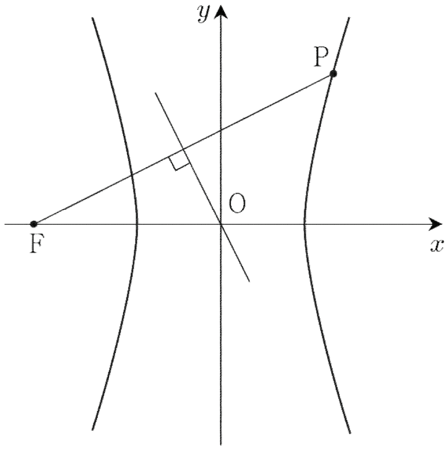
그림과 같이 점 A$(-5,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원과 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 한 교점을 P라 하자. 점 B$(3,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=10$일 때, $10r$의 값을 구하시오. [4점]



M027

○○○
(2013(10)고3-B형16변형)

한 초점이 F인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P에 대하여 선분 PF의 수직이등분선은 원점을 지난다. $\overline{\mathrm{PF}}=12$이고, 원점과 직선 PF 사이의 거리가 3일 때, ab의 값은? (단, $a>0$, $b>0$이고, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



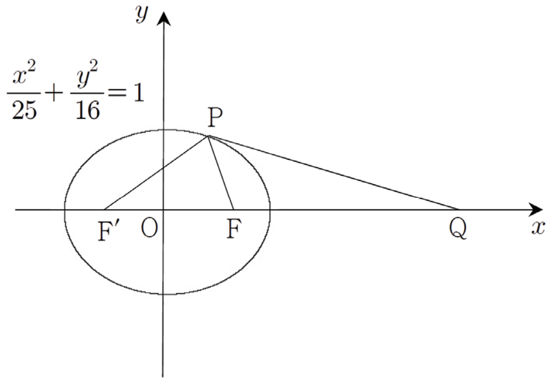
① 16 ② 18 ③ 20

④ 22 ⑤ 24

M028

○○
(2014사관(1차)-B형25)

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하자. 타원 위의 한 점 P와 x축 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{QF}}:\overline{\mathrm{QF'}}=2:3$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 값을 구하시오. (단, 점 Q는 타원 외부의 점이다.) [3점]

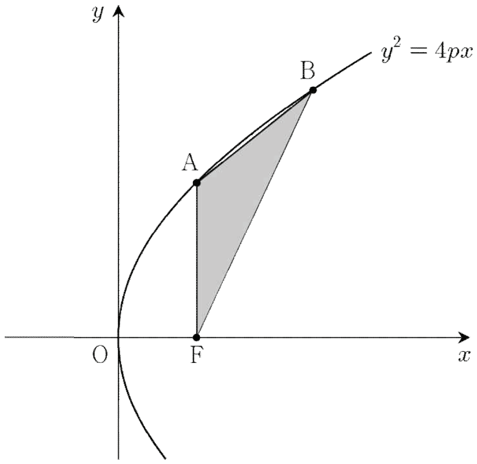


M029

○○
(2014(7)고3-B형18변형)

초점이 F인 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$ 위의 두 점 A, B에 대하여 다음의 두 조건이 성립한다.

(가) 점 A를 중심으로 하는 원이 점 F에서 x축에 접한다.
(나) $\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=4:7$



삼각형 AFB의 넓이가 24일 때, p의 값은? (단, 두 점 A, B는 제1사분면 위에 있다.) [4점]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

M 이차곡선

1	⑤	2	32	3	22	4	④	5	⑤
6	①	7	②	8	18	9	14	10	⑤
11	128	12	③	13	④	14	④	15	①
16	③	17	⑤	18	②	19	16	20	②
21	①	22	③	23	③	24	50	25	④
26	26	27	②	28	192	29	④	30	④
31	⑤	32	55	33	④	34	⑤	35	③
36	②	37	64	38	⑤	39	14	40	②
41	8	42	②	43	①	44	32	45	④
46	13	47	①	48	④	49	36	50	③
51	54	52	⑤	53	8	54	③	55	50
56	③	57	8	58	②	59	18	60	9
61	18	62	②						

N 평면 벡터

1	③	2	①	3	①	4	③	5	⑤
6	②	7	⑤	8	⑤	9	④	10	②
11	④	12	①	13	②	14	③	15	80
16	②	17	120	18	①	19	180	20	128
21	②	22	27	23	40	24	486	25	④
26	④	27	37	28	60	29	50		

P 공간도형과 공간좌표

1	④	2	②	3	②	4	③	5	60
6	③	7	②	8	②	9	②	10	⑤
11	45	12	7	13	⑤	14	②	15	③
16	②	17	③	18	17	19	⑤	20	④
21	⑤	22	④	23	20	24	13	25	350
26	14	27	16	28	⑤	29	15	30	①
31	①	32	③	33	③	34	③	35	60
36	④	37	47	38	④	39	⑤	40	④
41	④	42	28	43	④	44	④	45	③
46	②	47	450	48	⑤				

해설 목차

기하

M 이차곡선

1	⑤	2	32	3	22	4	④	5	⑤
6	①	7	②	8	18	9	14	10	⑤
11	128	12	③	13	④	14	④	15	①
16	③	17	⑤	18	②	19	16	20	②
21	①	22	③	23	③	24	50	25	④
26	26	27	②	28	192	29	④	30	④
31	⑤	32	55	33	④	34	⑤	35	③
36	②	37	64	38	⑤	39	14	40	②
41	8	42	②	43	①	44	32	45	④
46	13	47	①	48	④	49	36	50	③
51	54	52	⑤	53	8	54	③	55	50
56	③	57	8	58	②	59	18	60	9
61	18	62	②						

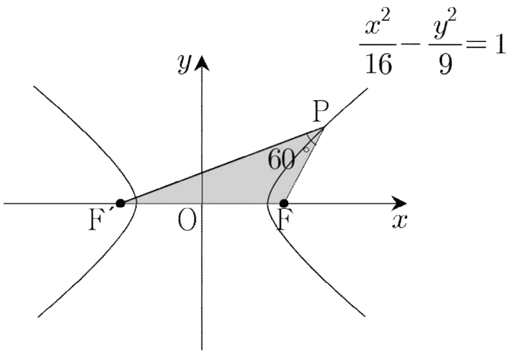
M001 | 답 ⑤

[풀이]

$16+9=5^2$이므로

$\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$, 즉 $\overline{\mathrm{FF}'}=10$

$\overline{\mathrm{PF}}=p$, $\overline{\mathrm{PF}'}=q$라고 하자.



코사인법칙에 의하여

$10^2=p^2+q^2-2pq\cos 60^\circ$, 즉

$p^2+q^2=100+pq$

쌍곡선의 정의에 의하여

$q-p=8$

곱셈공식에 의하여

$(q-p)^2=p^2+q^2-2pq$

즉, $8^2=100+pq-2pq$, $pq=36$

$\therefore$ ($\triangle \mathrm{PFF}'$의 넓이)$=\frac{1}{2}pq\sin 60^\circ$

$=9\sqrt{3}$

답 ⑤

M002 | 답 32

[풀이]

타원의 방정식에서

$a^2=c^2+16$ $\cdots$ ㉠

점 A의 좌표는 $\mathrm{A}\left(c,\ 4\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$이고,

두 점 A, B는 x축에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=8\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}=\frac{32}{a}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore$ (□ADBC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\frac{32}{a}\times 2a$

$=32$

답 32

M003 | 답 22

[풀이]

문제에서 주어진 원과 쌍곡선은 모두 y축에 대하여 대칭이고 점 P는 y축 위에 있으므로 두 직선 AB, CD도 y축에 대하여 대칭이다.

$\sqrt{9+16}=5$이므로 점 $\mathrm{F}(5,\ 0)$는 문제에서 주어진 쌍곡선의 두 초점 중에서 하나이다. 나머지 하나를 F′라고 하면

$\mathrm{F}'(-5,\ 0)$

이고, 직선 CD가 x축과 만나서 생기는 점이다.

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{CF}}-\overline{\mathrm{CF}'}=6$, $\overline{\mathrm{DF}}-\overline{\mathrm{DF}'}=6$

두 식을 변변히 더하면

$\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{DF}}-(\overline{\mathrm{CF}'}+\overline{\mathrm{DF}'})=12$

그런데 $\overline{\mathrm{CF}'}+\overline{\mathrm{DF}'}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AB}}=10$이므로

$\therefore$ $\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{DF}}=22$

답 22

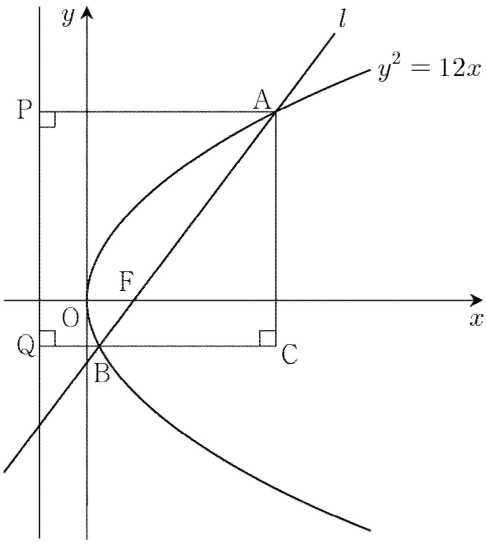
M004 | 답 ④

[풀이1] ★

$y^2=4\times 3\times x$이므로 이 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식은 각각

$\mathrm{F}(3,\ 0)$, $x=-3$

두 점 A, B에서 직선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, 점 A에서 직선 QB에 내린 수선의 발을 C라고 하자.



양수 k에 대하여 $\overline{\mathrm{BF}}=k$로 두면

$\overline{\mathrm{AF}}=4k$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=5k$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AF}}=4k$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BF}}=k$

이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{QB}}=3k$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}=4k$

이므로

(직선 l의 기울기)$=\dfrac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{4k}{3k}=\dfrac{4}{3}$

직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{4}{3}(x-3)$ 정리하면 $4x-3y=12$

$a=4$, $b=-3$

$\therefore\ a-b=7$

답 ④

[풀이2]

$y^2=4\times3\times x$이므로 이 포물선의 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(3,\ 0)$

양수 k에 대하여 $\overline{\mathrm{BF}}=k$로 두면 $\overline{\mathrm{AF}}=4k$이므로

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4k}+\dfrac{1}{k}$ 풀면 $k=\dfrac{15}{4}$ 즉, $\overline{\mathrm{AF}}=15$

점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(t,\ 2\sqrt{3t})$로 두자. (단, $t>0$)

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{(t-3)^2+(2\sqrt{3t})^2}=15$

양변을 제곱하여 정리하면

$t^2+6t-12\times18=0$, $(t-12)(t+18)=0$

풀면 $t=12$ 즉, $\mathrm{A}(12,\ 12)$

(직선 l의 기울기)$=$(직선 AF의 기울기)$=\dfrac{12-0}{12-3}=\dfrac{4}{3}$

직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{4}{3}(x-3)$ 정리하면 $4x-3y=12$

$a=4$, $b=-3$

$\therefore\ a-b=7$

답 ④

[풀이3] (교육과정 외)

공식

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 문제를 해결하자.

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

$\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{2\times3}{1-\cos\theta}$, $\overline{\mathrm{BF}}=\dfrac{2\times3}{1-\cos(\pi+\theta)}$

이므로

$\dfrac{6}{1-\cos\theta}:\dfrac{6}{1+\cos\theta}=4:1$, 즉 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

(직선 l의 기울기)$=-\dfrac{a}{b}=\tan\theta=\dfrac{4}{3}$ $\cdots$㉠

직선 l은 점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$을 지나므로

$3a=12$, $a=4$, $b=-3$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a-b=7$

답 ④

M005

| 답 ⑤

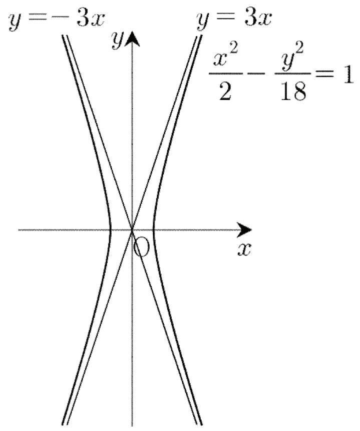
[풀이] ★

우선 문제에서 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하자.

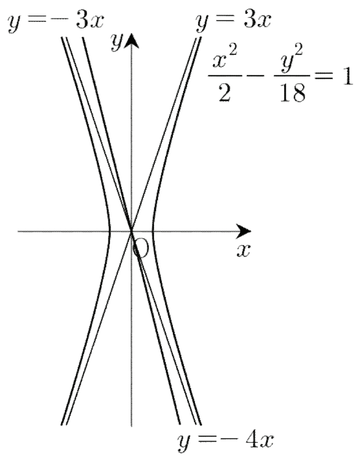
$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{18}=0$

정리하면

$y=3x$ 또는 $y=-3x$

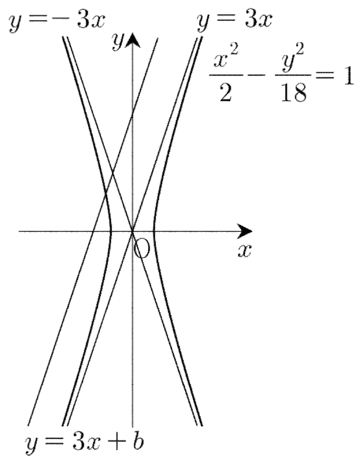


▸ ㄱ. (참)



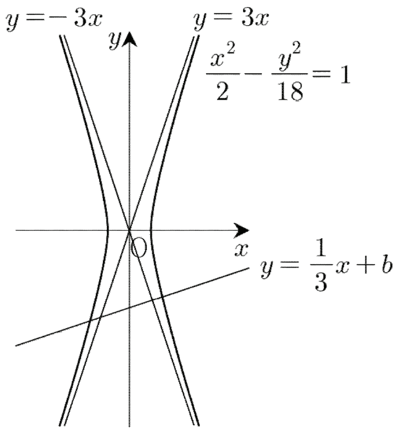
문제에서 주어진 쌍곡선과 직선 $y=-4x$는 만나지 않는다.

▸ ㄴ. (참)



문제에서 주어진 쌍곡선과 직선 $y=3x+b(b>0)$은 오직 한 점에서만 만난다.

▸ ㄷ. (참)



문제에서 주어진 쌍곡선과 직선 $y=\frac{1}{3}x+b(b<0)$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

M006 | 답 ①

[풀이]

쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm x$

접선의 방정식은

$ax-by=1$

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하면 $x=\frac{1}{a}$이므로

$A\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$

접선과 기울기가 양수인 쌍곡선의 점근선의 방정식을 연립하면

$ax-bx=1$에서 $x=\frac{1}{a-b}$

$B\left(\frac{1}{a-b},\ \frac{1}{a-b}\right)$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S(a)=\frac{1}{2a(a-b)}=\frac{1}{2a\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)}$$

($\because$ 점 P는 쌍곡선 위의 점이므로 $a^2-b^2=1$)

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

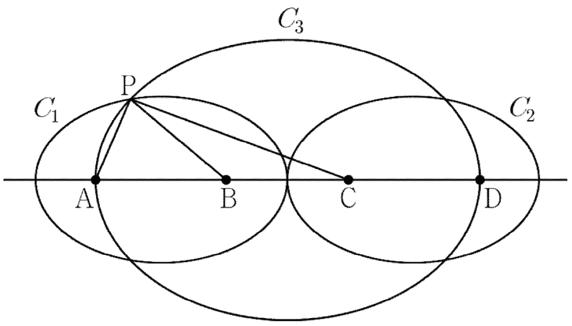
$$\lim_{a\to\infty}S(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2a}=\frac{1+1}{2}=1$$

답 ①

M007 | 답 ②

[풀이]



타원 C_3의 장축의 길이는

$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=8+6+8=22$

타원의 정의에 의하여

$\overline{BP}+\overline{CP}=22$ …㉠

타원 C_1의 장축의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}=14$

타원의 정의에 의하여

$\overline{AP}+\overline{BP}=14$ …㉡

㉠−㉡: $\overline{CP}-\overline{AP}=8$

답 ②

M008 | 답 18

[풀이]

문제에서 주어진 쌍곡선의 x절편은 -2, 2이므로

쌍곡선의 주축의 길이는 4이다.

두 초점 F, F′의 좌표는

$F(\sqrt{4+5},\ 0)$, $F'(-\sqrt{4+5},\ 0)$

즉, $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=4$ …㉠

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{PF'}:\overline{PF}=\overline{F'A}:\overline{FA}=2:1$

즉, $\overline{PF'}=2\overline{PF}$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\overline{PF}=4$, $\overline{PF'}=8$

따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$8+4+6=18$

답 18

M009 | 답 14

[풀이]

문제에서 주어진 원의 반지름의 길이를 r이라고 하자.

타원의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>0$, $b>0$)

으로 두자.

$a=10-r$, $b=6-r$ …㉠

타원의 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{10}$이므로

두 초점의 좌표는 각각 $(2\sqrt{10},\ 0)$, $(-2\sqrt{10},\ 0)$이다.

$a^2=b^2+(2\sqrt{10})^2$

㉠을 대입하면

$(10-r)^2=(6-r)^2+(2\sqrt{10})^2$

풀면

$r=3$

타원의 장축의 길이는

$\therefore\ 2a=14$

답 14

M010 | 답 ⑤

[풀이]

점 F의 좌표는

$F(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

직각삼각형 AOF에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\overline{OF}}{\overline{AO}}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

즉, $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

양변을 제곱하여 정리하면

$\therefore\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

M011 | 답 128

[풀이]

두 포물선의 꼭짓점의 사이의 거리가 4이므로, 두 포물선의 꼭짓점의 좌표는 각각 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$이다. 두 포물선의 준선이 y축이므로, 두 포물선의 초점의 좌표는 각각 $(-4,\ 0)$, $(4,\ 0)$이다. 두 포물선의 방정식은

$y^2=4\times2\times(x-2)$

즉, $y^2 = 8(x-2)$

$y^2 = 4\times(-2)\times(x+2)$

즉, $y^2 = -8(x+2)$

두 포물선은 원점에 대하여 대칭이므로, 접선은 원점을 지나야 한다.

포물선 $y^2 = 8(x-2)$ 위의 점 $\left(2+\dfrac{t^2}{8},\ t\right)$(단, $t>0$)에서의 접선의 방정식은

$$ty = 8\left(\frac{x+2+\dfrac{t^2}{8}}{2} - 2\right)$$

이 접선이 원점을 지나므로, $x=y=0$을 대입하여 정리하면

$t=4$

접점의 좌표는 $(4,\ 4)$이다.

이 접선은 점 $(-4,\ -4)$에서 포물선 $y^2 = -8(x+2)$에 접한다.

두 점 사이의 거리의 공식에 의하여

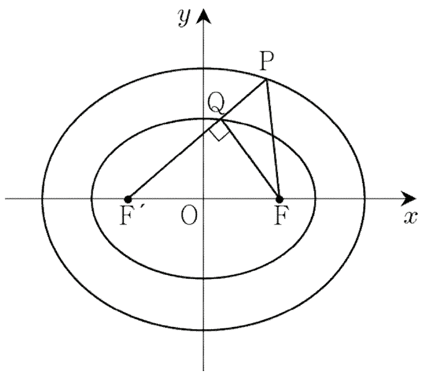
$d = 8\sqrt{2}$ 이므로

$\therefore\ d^2 = 128$

답 128

M012 | 답 ③

[풀이]



$\sqrt{100-75} = \sqrt{49-24} = 5$

이므로 문제에서 주어진 두 타원의 초점은 일치한다.

두 점 F, F′의 좌표는 각각

$\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-5,\ 0)$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{QF}} + \overline{\mathrm{QF'}} = 14$ 즉, $\overline{\mathrm{QF}} = 6$

삼각형 QF′F에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{FQ}}^2 + \overline{\mathrm{QF'}}^2 = \overline{\mathrm{F'F}}^2$ $(6^2+8^2=10^2)$

이므로 $\angle \mathrm{FQF'} = 90^\circ$ 이다.

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 20$

그런데 $\overline{\mathrm{QF'}} = 8$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{PF}} = 12$ $\cdots$ ㉠

직각삼각형 PQF에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}^2 = \overline{\mathrm{PQ}}^2 + \overline{\mathrm{QF}}^2$

즉, $\overline{\mathrm{PF}}^2 = \overline{\mathrm{PQ}}^2 + 36$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}} = \dfrac{15}{2}$

답 ③

M013 | 답 ④

[풀이]

쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{\mathrm{PF}} - \overline{\mathrm{PF'}}| = 2a = 10$ 즉, $a=5$

$y^2 = 4\times 14(x+c)$에서 $\overline{\mathrm{AF}} = 14$

$\overline{\mathrm{AF'}} : \overline{\mathrm{FF'}} = 1:6$에서 $\overline{\mathrm{FF'}} = 6\overline{\mathrm{AF'}}$

$\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{AF'}} + \overline{\mathrm{F'F}} = 7\overline{\mathrm{AF'}} = 14$

$\overline{\mathrm{AF'}} = 2$, $\overline{\mathrm{FF'}} = 12$

$\overline{\mathrm{OF}} = 6$이므로

$b^2 = k^2 - a^2 = 36 - 25 = 11$

포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{A}(-c,\ 0)$이므로

$-c = -8$에서 $c = 8$

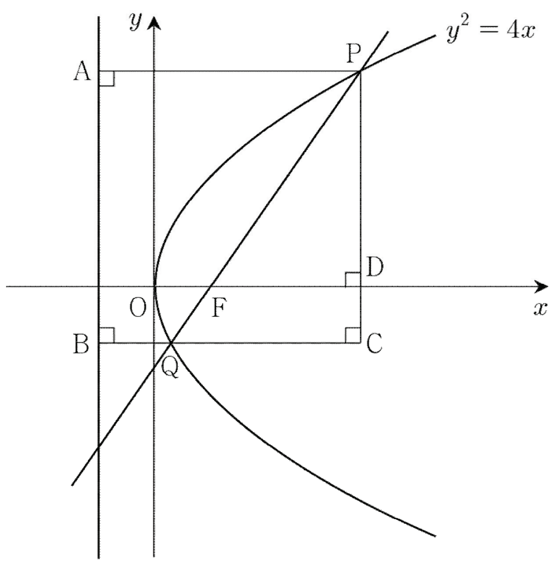
$$\therefore\ \frac{c^2}{a^2-b^2} = \frac{64}{25-11} = \frac{32}{7}$$

답 ④

M014 | 답 ④

[풀이]

점 P에서 직선 BQ에 내린 수선의 발을 C, 직선 PC가 x축과 만나는 점을 D라고 하자.



$y^2=4\times1\times x$이므로 이 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식은 각각

$\mathrm{F}(1,\ 0)$, $x=-1$

$\overline{\mathrm{QF}}=t(t>0)$으로 두면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{QB}}=t$이다.

$\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{AP}}-2\overline{\mathrm{OF}}=5-2=3$,

$\overline{\mathrm{QC}}=\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BQ}}=5-t$

서로 닮음인 두 직각삼각형 PFD, PQC에 대하여

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QC}}$ 즉, $5:3=(5+t):(5-t)$

$3(5+t)=5(5-t)$ 풀면 $t=\frac{5}{4}$

직각삼각형 PQC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^{\,2}-\overline{\mathrm{QC}}^{\,2}}=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2-\left(\frac{15}{4}\right)^2}=5$$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{PC}}=5$이다.

(사각형 ABQP의 넓이)$=\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}}}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{125}{8}$

답 ④

[참고]

선분 QF의 길이를 다음과 같이 구해도 좋다.

$\dfrac{1}{\overline{\mathrm{OF}}}=\dfrac{1}{\overline{\mathrm{PF}}}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{QF}}}$ 즉, $\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{QF}}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{5}{4}$

M015 |답 ①

[풀이]

$c=\sqrt{4+6}=\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{PF}}=t$로 두자.

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}=t+4$

직각삼각형 PF′F에서 피타고라스의 정리에 의하여

$(2\sqrt{10})^2=(t+4)^2+t^2$

정리하면

$t^2+4t-12=0$, $(t-2)(t+6)=0$

풀면 $t=2$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=2$, $\overline{\mathrm{PF'}}=6$

$\therefore\ \cos(\angle\mathrm{PFF'})=\dfrac{2}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

답 ①

M016 |답 ③

[풀이1]

기울기가 m이면서 포물선 $y^2=4px$에 접하는 접선의 방정식은

$y=mx+\dfrac{p}{m}$

이다. 위의 공식을 이용하면 접선의 방정식은

$y=mx+\dfrac{1}{m}$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$를 지나므로

$4=-2m+\dfrac{1}{m}$, $2m^2+4m-1=0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

구하는 값은

$\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

답 ③

[풀이2]

접점의 좌표를 $(s,\ t)$로 두면

접선의 방정식은

$ty=4\times\dfrac{x+s}{2}$, 즉 $y=\dfrac{2}{t}x+\dfrac{2s}{t}$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$를 지나므로

$4=\dfrac{2}{t}(-2)+\dfrac{2s}{t}$, 즉 $s=2t+2$ …㉠

그런데 점 $(s,\ t)$는 포물선 위에 있으므로

$t^2=4s$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$t^2=4(2t+2)$, $t^2-8t-8=0$

양변을 t^2으로 나누어 정리하면

$$2\left(\frac{2}{t}\right)^2+4\times\frac{2}{t}-1=0$$

이 이차방정식의 두 실근은 두 접선의 기울기이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 구하는 값은

$$\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

답 ③

[참고] (교육과정 외)
접선의 방정식을 다음과 같이 유도해도 좋다.
접점의 좌표를 $(s,\ t)$로 두자.

$$2y\frac{dy}{dx}=4,\ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$$

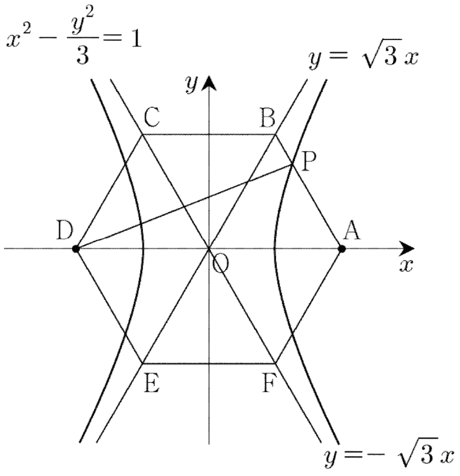
이므로 접선의 방정식은

$$y-t=\frac{2}{t}(x-s),\ \text{즉}\ y=\frac{2}{t}x+\frac{t^2-2s}{t}$$

$$\therefore\ y=\frac{2}{t}x+\frac{2s}{t}\quad(\because\ t^2=4s)$$

M017 | 답 ⑤

[풀이]
세 점 A, B, D의 좌표가 각각
$\mathrm{A}(2,\ 0),\ \mathrm{B}(1,\ \sqrt{3}),\ \mathrm{D}(-2,\ 0)$
이 되도록 좌표평면을 도입하자.



위의 그림처럼 쌍곡선 H의 중심은 원점이다.
두 직선 BE, CF의 기울기가 각각 $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$이므로
쌍곡선 H의 두 점근선의 방정식은 각각
$y=\sqrt{3}x,\ y=-\sqrt{3}x$
이제 쌍곡선 H의 방정식을 다음과 같이 두자.

$$H:\ \frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{3k^2}=1\ (\text{단, } k>0)$$

점 A$(2,\ 0)$이 쌍곡선 H의 한 초점이므로

$$\sqrt{k^2+3k^2}=2\ \text{즉, } k=1$$

쌍곡선 H의 방정식은

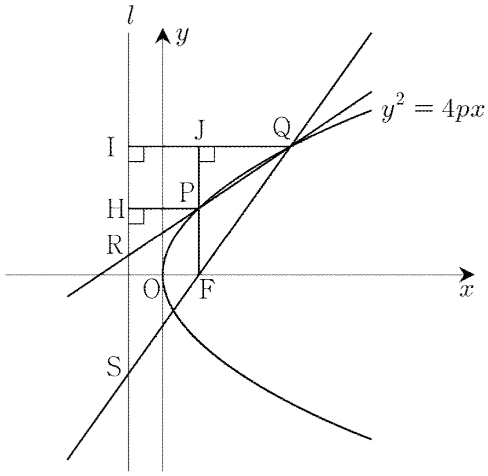
$$H:\ x^2-\frac{y^2}{3}=1$$

쌍곡선 H는 x축 위의 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$을 지나므로,
쌍곡선 H의 주축의 길이는 2이다.
쌍곡선의 정의에 의하여
$\therefore\ \overline{\mathrm{DP}}-\overline{\mathrm{AP}}=(\text{쌍곡선 } H\text{의 주축의 길이})=2$

답 ⑤

M018 | 답 ②

[풀이1]
문제에서 주어진 포물선의 방정식에서 F$(p,\ 0)$이다.
두 점 P, Q에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, I, 점 P에서 선분 IQ에 내린 수선의 발을 J라고 하자.

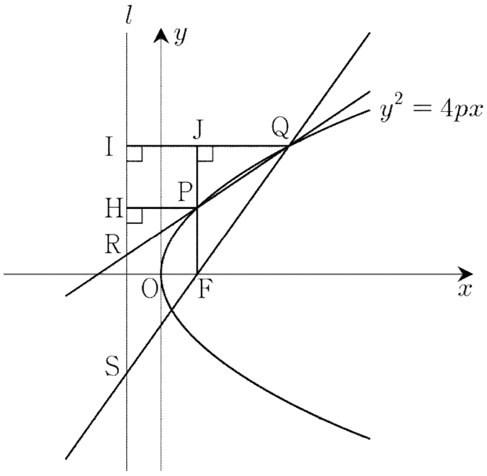


문제에서 주어진 비례식에서
$\overline{\mathrm{PF}}=2k,\ \overline{\mathrm{QF}}=5k\ (\text{단, } k>0)$
포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{HP}}=2k,\ \overline{\mathrm{IQ}}=5k$
$\overline{\mathrm{JQ}}=\overline{\mathrm{IQ}}-\overline{\mathrm{HP}}=3k$
$\overline{\mathrm{FS}}:\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{QJ}}=2:3$

$$\therefore\ \frac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{FS}}}=\frac{3}{2}$$

답 ②

[풀이2]
문제에서 주어진 포물선의 방정식에서 F$(p,\ 0)$이다.
두 점 P, Q에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, I, 점 P에서 선분 IQ에 내린 수선의 발을 J라고 하자.



문제에서 주어진 비례식에서

$\overline{\mathrm{PF}}=2k$, $\overline{\mathrm{QF}}=5k$ (단, $k>0$)

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{HP}}=2k$, $\overline{\mathrm{IQ}}=5k$

그런데 $\overline{\mathrm{HP}}=2\overline{\mathrm{OF}}=2p$이므로 $k=p$이다.

즉, $\overline{\mathrm{HP}}=2p$, $\overline{\mathrm{IQ}}=5p$

$\overline{\mathrm{JQ}}=\overline{\mathrm{IQ}}-\overline{\mathrm{HP}}=3p$

직각삼각형 FQJ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{JF}}=4p$

직선 FQ의 기울기는 $\dfrac{\overline{\mathrm{JF}}}{\overline{\mathrm{QJ}}}=\dfrac{4}{3}$이다.

점 S의 좌표를 $(-p,\ r)$로 두면

$\dfrac{-r}{2p}=\dfrac{4}{3}$에서 $r=-\dfrac{8p}{3}$이므로

$\mathrm{S}\left(-p,\ -\dfrac{8p}{3}\right)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$\overline{\mathrm{FS}}=\sqrt{(2p)^2+\left(\frac{8p}{3}\right)^2}=\frac{10}{3}p$$

$$\therefore\ \frac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{FS}}}=\frac{5p}{\frac{10}{3}p}=\frac{3}{2}$$

답 ②

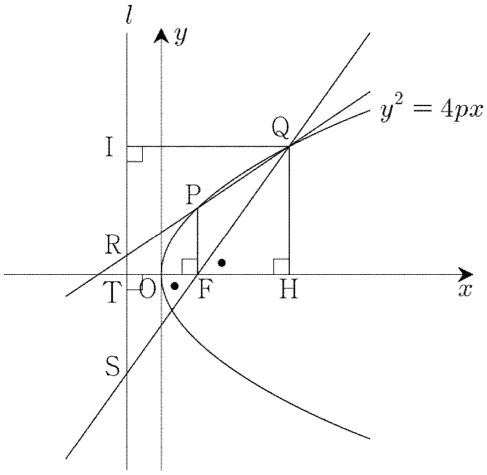
[풀이3] (교육과정 외)

공식

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 문제를 해결하자.

점 Q에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 H, I, 직선 l이 x축과 만나는 점을 T라고 하자. 그리고 직선 QF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.



(단, ●$=\theta$)

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2p}{1-\cos90^\circ}=2p$, $\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}(=5p)$

이므로

$2p:\dfrac{2p}{1-\cos\theta}=2:5$, $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

직각삼각형 QFH에서

$\overline{\mathrm{FH}}=3p$

이므로

$\overline{\mathrm{TF}}=\overline{\mathrm{IQ}}-\overline{\mathrm{FH}}=5p-3p=2p$

서로 닮음인 두 직각삼각형 QFH, SFT의 닮음비는 $3:2$이므로

$$\therefore\ \frac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{FS}}}=\frac{3}{2}$$

답 ②

M019

|답 16

[풀이]

접선의 방정식은

$\dfrac{3x}{25}+\dfrac{\frac{16}{5}y}{16}=1$, 즉 l: $3x+5y=25$

$\mathrm{F}(\sqrt{25-16},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{25-16},\ 0)$

즉, $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$d=\dfrac{16}{\sqrt{34}}$, $d'=\dfrac{34}{\sqrt{34}}$

$\therefore\ dd'=16$

답 16

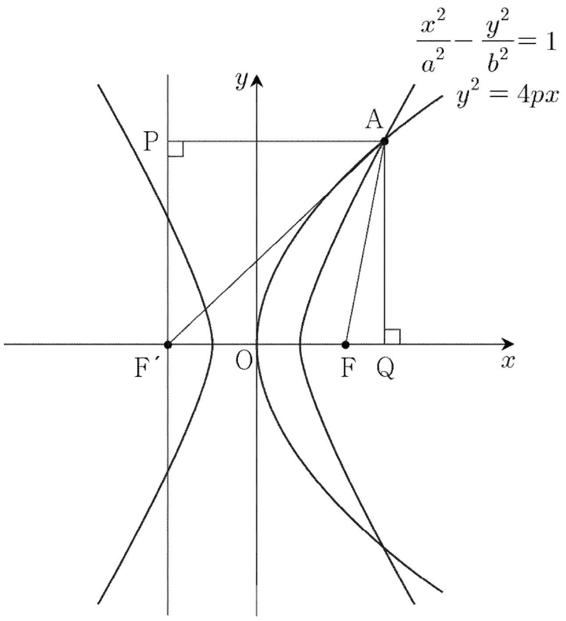
M020

|답 ②

[풀이]

포물선 $y^2=4px$의 준선은 $x=-p$이다.

점 A에서 준선 $x=-p$과 x축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{AP}=\overline{AF}=5$

$\angle AFQ=\pi-\angle AFF'$이므로

$\cos(\angle AFQ)=-\cos(\angle AFF')=\frac{1}{5}$

직각삼각형 AFQ에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{FQ}=1$

직각삼각형 AFQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AQ}=\sqrt{\overline{AF}^2-\overline{FQ}^2}=2\sqrt{6}$이므로 $\overline{PF'}=2\sqrt{6}$

직각삼각형 APF'에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AF'}=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{PF'}^2}=7$

$\overline{OF}=\frac{1}{2}(\overline{PA}-\overline{FQ})=2$이므로 $p=2$, $F(2,\ 0)$

쌍곡선의 정의에 의하여

$2a=\overline{AF'}-\overline{AF}=2$ 즉, $a=1$

$2^2=a^2+b^2$에서 $b=\sqrt{3}$

∴ $ab=\sqrt{3}$

답 ②

[참고] (교육과정 외)

p의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

공식

$\overline{PF}=\frac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 p의 값을 구하자.

직선 AF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\cos\theta=\cos(180^\circ-\angle AFF')=-\cos(\angle AFF')=\frac{1}{5}$

이므로

$\overline{AF}=\frac{2p}{1-\cos\theta}=5$, 즉 $\frac{2p}{1-\frac{1}{5}}=5$

∴ $p=2$

M021

|답 ①

[풀이]

접선의 방정식은

$2x-y=1$

이 직선의 y절편은 -1이다.

답 ①

[참고] (교육과정 외)

접선의 방정식은 다음과 같이 구하면 된다.

음함수의 미분법에 의하여

$2x-\frac{2}{3}yy'=0$, $y'=\frac{3x}{y}$

접선의 기울기는 $y'=\frac{3\times2}{3}=2$이므로

접선의 방정식은

$y=2(x-2)+3=2x-1$

M022

|답 ③

[풀이]

접선 l의 방정식은

l: $4\sqrt{2}x-2y=4$ (∵ $4x_1x-y_1y=4$)

두 점근선의 방정식은

$4x^2-y^2=0$에서 $y=\pm2x$

이때, m: $y=2x$, n: $y=-2x$

두 직선 l, m의 방정식을 연립하면

$4\sqrt{2}x-4x=4$, $x=\sqrt{2}+1$,

$Q(\sqrt{2}+1,\ 2\sqrt{2}+2)$

두 직선 l, n의 방정식을 연립하면

$4\sqrt{2}x+4x=4$, $x=\sqrt{2}-1$,

$R(\sqrt{2}-1,\ 2-2\sqrt{2})$

$\overline{QR}=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$,

$\overline{PQ}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$

이므로 $\overline{QR}=2\overline{PQ}$

$\therefore\ k=2$

답 ③

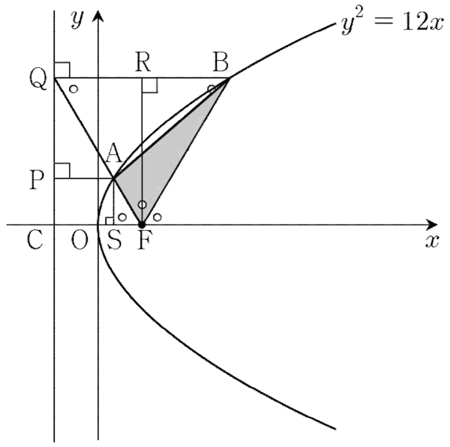
M023

| 답 ③

[풀이]

$y^2=4\times3\times x$이므로, 포물선의 초점의 좌표는 $F(3,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

준선이 x축과 만나는 점을 C, 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, 점 F에서 선분 QB에 내린 수선의 발을 R, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 S라고 하자.



x축과 직선 QB가 서로 평행하므로

$\angle QBF=\frac{\pi}{3}$(엇각)

삼각형 BQF의 세 내각의 합이 π이므로

$\angle BQF=\frac{\pi}{3}$

삼각형 BQF는 정삼각형이다.

$\overline{QR}=\overline{CF}=2\overline{OF}=6$이므로 $\overline{QB}=12$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{FB}=\overline{BQ}=12$

이제 $\overline{AF}=x$로 두자.

포물선의 정의에 의하여

$\overline{PA}=\overline{AF}=x$이므로 $\overline{SF}=\overline{CF}-\overline{PA}=6-x$

직각삼각형 AFS에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\frac{\overline{FS}}{\overline{AF}}=\cos\frac{\pi}{3}$ 즉, $\frac{6-x}{x}=\frac{1}{2}$ 풀면 $x=4$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(삼각형 AFB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\overline{FA}\,\overline{FB}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times4\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$

답 ③

[풀이2] (교육과정 외)

공식

$\overline{PF}=\frac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 문제를 해결하자.

두 직선 AF, BF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 120°, 60° 이므로

$\overline{AF}=\frac{2\times3}{1-\cos120^\circ}=4$, $\overline{BF}=\frac{2\times3}{1-\cos60^\circ}=12$

$\therefore$ ($\triangle AFB$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times4\times12\times\sin60^\circ=12\sqrt{3}$

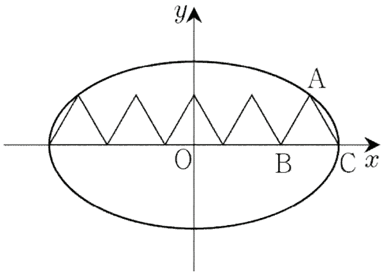
답 ③

M024

| 답 50

[풀이]

문제에서 주어진 조건에 의하여 아래의 그림을 얻는다.



(타원의 장축의 길이)$=5\times2=10$

이므로 타원의 정의에 의하여 $a=5$이다.

점 C의 좌표가 $C(5,\ 0)$일 때,

점 A의 좌표는 $A(4,\ \sqrt{3})$이다.

($\because$ 특수각의 삼각비의 정의)

이를 타원의 방정식에 대입하면

$\frac{16}{25}+\frac{3}{b^2}=1$ 풀면 $b=\frac{5}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ a^2+3b^2=25+25=50$

답 50

M025

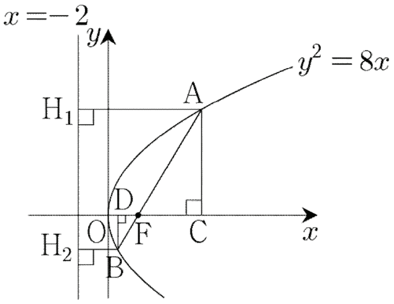
| 답 ④

[풀이]

$y^2=4\times2\times x$에서 이 포물선의 초점은 $F(2,\ 0)$이고, 준선

은 $x=-2$이다.

점 A에서 x축과 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, H_1, 점 B에서 x축과 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 D, H_2라고 하자.



$\overline{\mathrm{AF}}=3k$, $\overline{\mathrm{BF}}=k$로 두면

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AH_1}}=3k$, $\overline{\mathrm{BH_2}}=k$

$\overline{\mathrm{FC}}=3k-4$, $\overline{\mathrm{FD}}=4-k$

그런데 두 직각삼각형 AFC, BFD의 닮음비는 $3:1$이므로

$\overline{\mathrm{FC}}:\overline{\mathrm{FD}}=3:1$ 즉, $\overline{\mathrm{FC}}=3\overline{\mathrm{FD}}$

$3k-4=3(4-k)$, $6k=16$, $k=\frac{8}{3}$

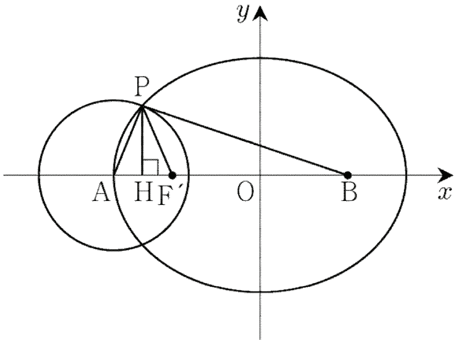
∴ $\overline{\mathrm{AB}}=4k=\frac{32}{3}$

답 ④

M026 | 답 26

[풀이]

$\sqrt{25-16}=3$이므로 점 B는 문제에서 주어진 타원의 한 초점이다. 나머지 한 초점을 $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$이라고 하자. 그리고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=r$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PB}}=10$ ⋯㉠

문제에서 주어진 등식은

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=10$ ⋯㉡

㉠−㉡: $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PA}}=r$

이를 ㉠에 대입하면

$\overline{\mathrm{PB}}=10-r$

그리고

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{HF'}}=1$, $\overline{\mathrm{F'B}}=6$

직각삼각형 PAH, PBH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{r^2-1}=\sqrt{(10-r)^2-7^2}$

양변을 제곱하여 풀면

$r=\frac{13}{5}$

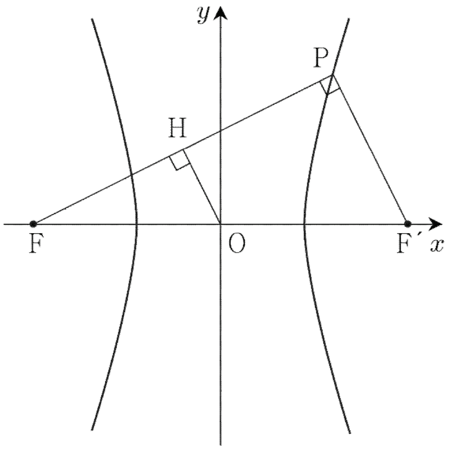
∴ $10r=26$

답 26

M027 | 답 ②

[풀이]

쌍곡선의 나머지 한 초점을 F′, 선분 PF의 중점을 H라고 하자.



$\overline{\mathrm{FH}}:\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{FO}}:\overline{\mathrm{OF'}}(=1:1)$이므로

두 직선 OH, F′P는 서로 평행하다.

평행선의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{FPF'}=\angle\mathrm{FHO}=90^\circ$

서로 닮음인 두 직각삼각형 FHO, FPF′에 대하여

$\overline{\mathrm{HO}}:\overline{\mathrm{PF'}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=6$

쌍곡선의 정의에 의하여

(쌍곡선의 주축의 길이)$=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=12-6=6$

즉, $2a=6$ 풀면 $a=3$

직각삼각형 PFF′에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2}=6\sqrt{5}$ 즉, $\overline{\mathrm{OF}}=3\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{3^2+b^2}=3\sqrt{5}$에서 $b=6$

∴ $ab=18$

답 ②

M028 | 답 192

[풀이]

주어진 타원의 두 초점의 좌표는

$F(\sqrt{25-16},\ 0)$, $F'(-\sqrt{25-16},\ 0)$

즉, $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$, $\overline{FF'}=6$

문제에서 주어진 비례식에서

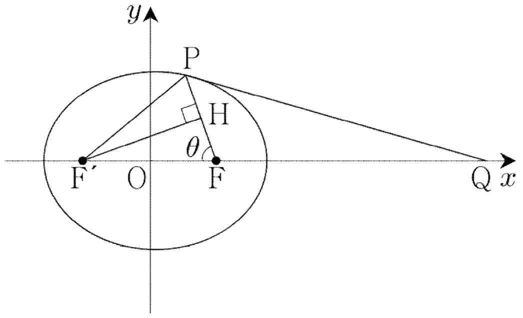
$\overline{PF}=2k$로 두면 $\overline{PF'}=3k$이다.

주어진 타원의 장축의 길이가 $10(=2\times5)$이므로

$2k+3k=10$, $k=2$

즉, $\overline{PF}=4$, $\overline{PF'}=6$

점 F'에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H, $\angle PFF'=\theta$로 두자.



$\cos\theta=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

문제에서 주어진 비례식에서

$\overline{QF}=2l$이면 $\overline{QF'}=3l$이다.

$3l=2l+6$에서 $l=6$

삼각형 PFQ에서 코사인법칙에 의하여

$\therefore\ \overline{PQ}^2=4^2+12^2-2\times4\times12\times\cos(\pi-\theta)$

$=160+32=192$ ($\because \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$)

답 192

M029 | 답 ④

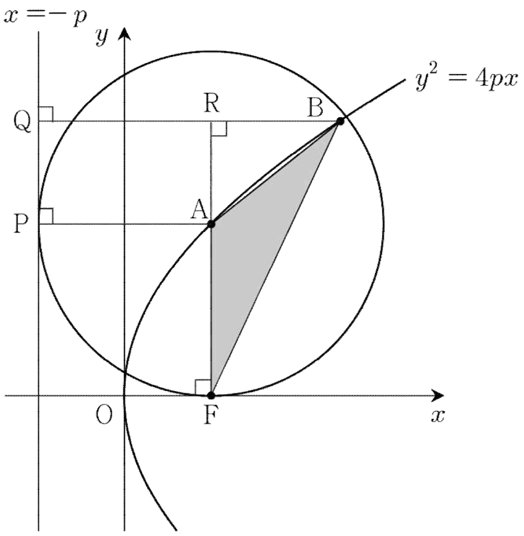
[풀이]

문제에서 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$F(p,\ 0)$, 준선은 $x=-p$이다.

두 점 A, B에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, 점 A에서 선분 QB에 내린 수선의 발을 R이라고 하자.

포물선 위의 점 A를 중심으로 하는 원이 초점 F에서 x축에 접하므로, 이 원은 준선 $x=-p$에 접한다.



$\overline{AF}=4k(>0)$로 두면 $\overline{BF}=7k$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{AP}=\overline{AF}=4k$, $\overline{BQ}=\overline{BF}=7k$

이므로

$\overline{RB}=\overline{QB}-\overline{QR}=7k-4k=3k$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(삼각형 AFB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\overline{AF}\,\overline{BR}=\frac{1}{2}\times4k\times3k=24$ 풀면 $k=2$

$\overline{OF}=\frac{1}{2}\overline{PA}=4$이므로

$\therefore\ p=4$

답 ④

M030 | 답 ④

[풀이]

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점의 좌표는

$F(1,\ 0)$, $F'(-1,\ 0)$

점 P의 좌표를 $P(x_1,\ y_1)$으로 두자.

접선의 방정식은

$l:\ 3x_1x+4y_1y=12$ (기울기: $-\frac{3x_1}{4y_1}$)

점 Q의 좌표는 $Q\left(\frac{4}{x_1},\ 0\right)$

점 P를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은

$PR:\ y=\frac{4y_1}{3x_1}(x-x_1)+y_1$

점 R의 좌표는 $R\left(\frac{x_1}{4},\ 0\right)$

문제에서 주어진 삼각형의 넓이에 대한 조건에 의하여