〔유형 5〕 **수열의 극한의 활용**

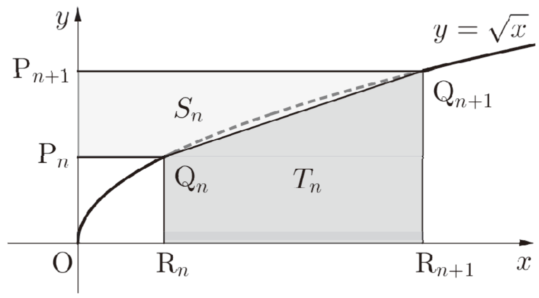
출제유형 | 주어진 방정식이나 함수의 그래프 및 도형에서 일반항을 찾아 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 함수의 그래프의 성질, 도형의 성질을 이용하여 수열의 일반항을 찾을 수 있어야 한다.

09

다음 그림과 같이 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P}_n(0,\ n)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 Q_n이라 하고, 점 Q_n에서 x축에 내린 수선의 발을 R_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 $S(n)$, 사각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$의 넓이를 $T(n)$이라 할 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{S_n}-n}{\sqrt{T_n}-\sqrt{2}\,n}$의 값은?

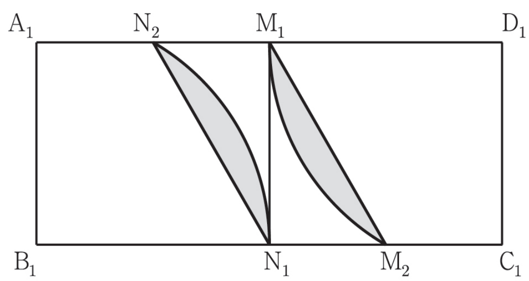


① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　② $\dfrac{1}{2}$　　③ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

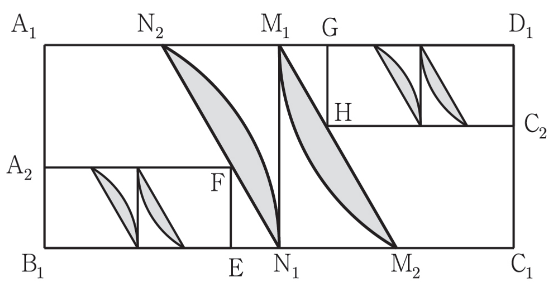
④ $\dfrac{1}{4}$　　⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

21

[그림1]과 같이 $\overline{A_1B_1}=\sqrt{3}$, $\overline{B_1C_1}=4$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. $\overline{A_1D_1}$와 $\overline{B_1C_1}$의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자. 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$ 인 원과 선분 A_1M_1의 교점을 N_2, 중심이 D_1이고 반지름의 길이가 $\overline{D_1M_1}$ 인 원과 선분 C_1N_1의 교점을 M_2이라 하자. 색칠된 도형인 $\overline{N_1N_2}$와 $\overparen{N_1N_2}$와 둘러싸인 활꼴과 $\overline{M_1M_2}$와 $\overparen{M_1M_2}$와 둘러싸인 활꼴의 넓이의 합을 S_1 이라 하자. [그림2]와 같이 점선 M_1N_1을 기준으로 좌우의 합동인 도형 $A_1B_1N_1N_2$와 도형 $C_1D_1M_1M_2$의 내부에 점 F와 점 H가 각각 $\overline{N_1N_2}$와 $\overline{M_1M_2}$위에 있고 $\overline{A_2B_1}:\overline{B_1E}=\sqrt{3}:4$ 인 직사각형 A_2B_1EF와 $\overline{C_2D_1}:\overline{D_1G}=\sqrt{3}:4$ 인 직사각형 C_2D_1GH을 그리고 그림 S_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 얻은 합동인 도형의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림의 색칠되어 있는 부분의 넓이의 합을 S_n 이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 의 값은?



[그림 1]



[그림 2]

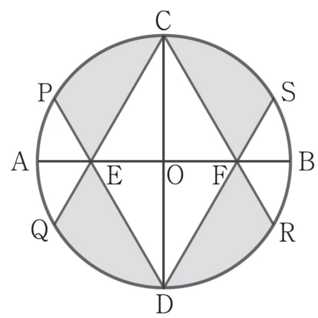
① $\frac{50}{17}\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$ ② $\frac{19}{11}\left(\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}\right)$

③ $\frac{25}{17}(2\pi-\sqrt{3})$ ④ $\frac{20}{11}\left(\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}\right)$

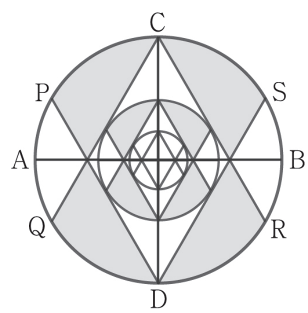
⑤ $\frac{21}{11}\left(\frac{4}{3}\pi-3\sqrt{3}\right)$

22

다음 그림과 같이 중심이 O이고 $\overline{AB}=2$인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 선분 AB의 수직이등분선이 원과 만나는 점을 C, D라 하자. 선분 AB위에 $\overline{OF}:\overline{FB}=1:\sqrt{3}-1$인 점 F와 $\overline{OE}:\overline{EA}=1:\sqrt{3}-1$인 점 E에 대하여 직선 DE, 직선 CE, 직선 CF, 직선 DF가 원과 만나는 점을 차례로 P, Q, R, S라 하자. [그림1]에서 색칠된 도형의 넓이를 S_1이라 하고, [그림2]에서 중심이 O이고 직선 CR, CQ, DP, DS에 접하는 원에서 [그림1]과 같은 부분의 넓이를 S_2이라 하자. 같은 방법으로 만들어지는 [그림1]과 닮은 도형의 넓이를 S_3, S_4, $\cdots$라 할 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은?



[그림1]



[그림2]

① $\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$

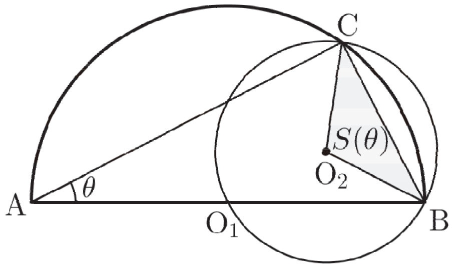
③ $\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{7\pi-3\sqrt{3}}{9}$

⑤ $\frac{8\pi-4\sqrt{3}}{9}$

60

다음 그림과 같이 중심이 O_1이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반 원 위의 점 C에 대하여 세 점 O_1, B, C를 지나는 원의 중심을 O_2라 하자.

$\angle CAB = \theta$라 할 때, 삼각형 O_2BC의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은?

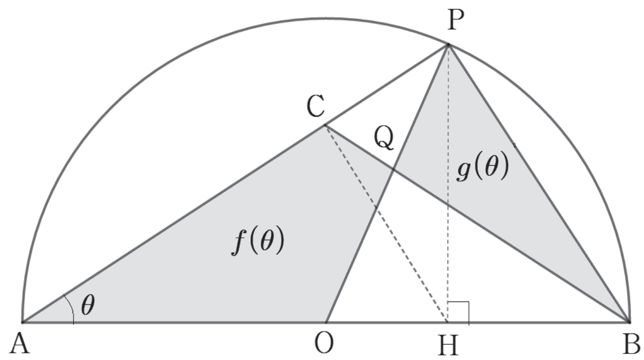


① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

61

다음 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 한 점 P를 $\angle PAB = \theta$가 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 H을 지나고 선분 PB에 평행한 직선이 선분 AP와 만나는 점을 C라 하고 선분 OP와 선분 BC의 교점을 Q라 하자. 사각형 AOQC의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQB의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) - g(\theta)}{\theta}$의 값은?



① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

117

삼각형 ABC의 세 내각 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 크기를 각각 α, β, γ라 할 때, $200\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$의 최댓값을 구하시오.

118

다음 물음에 답하시오.

(1) 두 실수 a, b에 대하여 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$ax+b \le e^{x^2}$$

이 성립할 때, $a+b$의 최댓값은?

① 2 ② e ③ $\sqrt{2e}$ ④ 3 ⑤ $3\sqrt{e}$

(2) 두 실수 a, b에 대하여 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-e^{x^2}-1 \le ax+b$$

이 성립할 때, $a+b$의 최솟값은?

① -2 ② $-e$ ③ $-e-1$
④ $-e-2$ ⑤ $-2e$

168

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=e^{x^2}$이고 $a<0$인 어떤 실수 a에 대하여 $f(a)=0$이다. 함수 $f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 3일 때, e^{a^2}의 값을 구하시오.

169

실수 전체의 집합에서 $f(-x)=f(x)$이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,e^{f(t)}\,dt$$

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값 3를 갖는다.
(나) $\int_0^1 e^{f(x)}dx=1$

$\int_{-1}^{1} xf(x)f'(x)e^{f(x)}\,dx$의 값은?

① -6 ② -2 ③ 2 ④ 6 ⑤ 10

〔유형 9〕 정적분과 급수

출제유형 | 정적분을 이용하여 급수의 합을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 급수의 합은 경우에 따라 여러 가지의 정적분으로 나타낼 수 있음을 알고 이를 이용하여 문제를 해결한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}$$
$$=\int_{a}^{a+p} f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{p} f(a+x)dx$$
$$=p\int_{0}^{1} f(a+px)dx \quad (\text{단, } a, p\text{는 상수이다.})$$

178

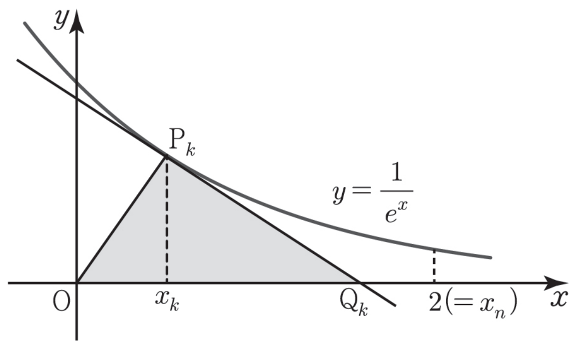
다음 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2]$를 n등분한 점을 각각

$$x_0(=0),\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n(=2)$$

라 하자. 곡선 $y=\frac{1}{e^x}$ 위의 점

$$\mathrm{P}_k\left(x_k,\ \frac{1}{e^{x_k}}\right)\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_k라 하자. 삼각형 $\mathrm{OQ}_k\mathrm{P}_k$의 넓이를 S_k라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{1}{2}-\frac{1}{e^2}$ ② $1-\frac{1}{e^2}$ ③ $1-\frac{2}{e^2}$
④ $\frac{1}{2}-\frac{2}{e^2}$ ⑤ $2e-2$

207

$f(0)=0$인 함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$g(x)>-x$, $g(x)=\int_0^x \{tf'(t)+f'(t)g(t)\}dt-x+1$

이 성립한다. $f(2)=6$일 때, $g(2)$의 값은 e^a+b이다.
$a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.)

208

이계도함수가 존재하는 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=e^x+\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$$

을 만족할 때, $f''(1)+f'(1)-2f(1)$의 값을 구하시오,