〔유형 2〕 지수의 확장과 지수법칙

출제유형 | 거듭제곱근을 지수가 유리수인 꼴로 나타내는 문제, 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a \neq 0$이고 n이 양의 정수일 때,

$a^0 = 1,\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

(2) 유리수인 지수

$a > 0$이고 m은 정수, n은 2이상의 자연수일 때

① $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ② $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

(3) 지수법칙의 확장

$a > 0,\ b > 0$이고 $x,\ y$가 실수일 때

① $a^x \times a^y = a^{x+y}$ ② $a^x \div a^y = a^{x-y}$

③ $(a^x)^y = a^{xy}$ ④ $(ab)^x = a^x b^x$

06

$100^x = \left(\dfrac{18}{5}\right)^{2y} = 36$을 만족시키는 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $6^{\frac{(x-y)(x+y)}{2x^2y^2}}$의 값은?

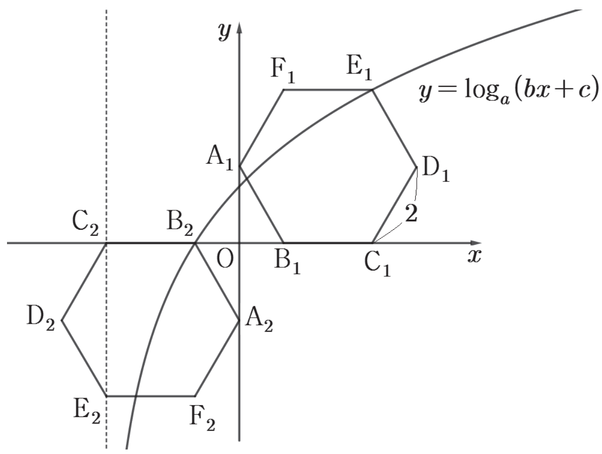
① $\dfrac{5}{3}$ ② $\dfrac{9}{25}$ ③ $\dfrac{27}{125}$ ④ $\dfrac{81}{625}$ ⑤ $\dfrac{25}{9}$

34

좌표평면에서 $y=\log_a ax\,(a>1)$의 그래프와 $y=x$가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이다. $y=a^x$ 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 1이 되게 하는 점 C의 좌표를 $(p,\ q)$라고 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p는 양의 정수이다.)

35

그림과 같이 y축 위의 한 점 $\mathrm{A_1}$와 x축 위의 두 점 $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{C_1}$를 꼭짓점으로 하고 한 변의 길이가 2인 정육각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$가 있다. 정육각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$와 정육각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$의 각 꼭짓점을 원점 대칭이동한 정육각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2E_2F_2}$에 대하여 곡선 $y=\log_a(bx+c)$가 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{E_1}$를 지나고, 직선 $\mathrm{C_2E_2}$가 이 곡선의 점근선일 때, 함수 $y=\log_a(bx+c)$의 그래프가 $\left(-\frac{7}{3},\ \alpha\right)$를 지난다. α^2의 값을 구하시오. (단, $a>1$이고 점 $\mathrm{E_1}$는 제1 사분면의 점이다.)



43

실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\log_2(-x) & (x<\alpha) \\ 2^{-x}+k & (x \geq \alpha) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$가 $t=k$, $t=1$에서만 불연속일 때, k의 값은?

① -2 ② $-\sqrt{2}$ ③ -1

④ $1-\sqrt{2}$ ⑤ $2-\sqrt{2}$

44

좌표평면에 원 $C: x^2+y^2=n^2\,(x \geq 0)$와 두 곡선 $y=2^{x+2}-4$, $y=\log_2(x+4)-2$이 있다.
원 C와 두 곡선 $y=2^{x+2}-4$, $y=\log_2(x+4)-2$의 제1사분면에서의 교점을 각각 A_n, B_n라 하고
점 C_n을 $\mathrm{C}_n(n, 0)$이라 하자. 두 곡선 $y=2^{x+2}-4$, $y=\log_2(x+4)-2$와 원 C의 둘레로 둘러싸인 도형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 S_n라 하고
곡선 $y=\log_2(x+4)-2$와 원 C의 둘레 및 x축으로 둘러싸인 도형 $\mathrm{OB}_n\mathrm{C}_n$의 넓이를 T_n라 하자.

$P_n=S_n+2T_n$일 때, $\sum_{n=1}^{10} P_n$의 값은?

① 100π ② $\frac{55\pi}{4}$ ③ 385π

④ $\frac{385\pi}{4}$ ⑤ 400π

지수로그함수

—

단원평가

53

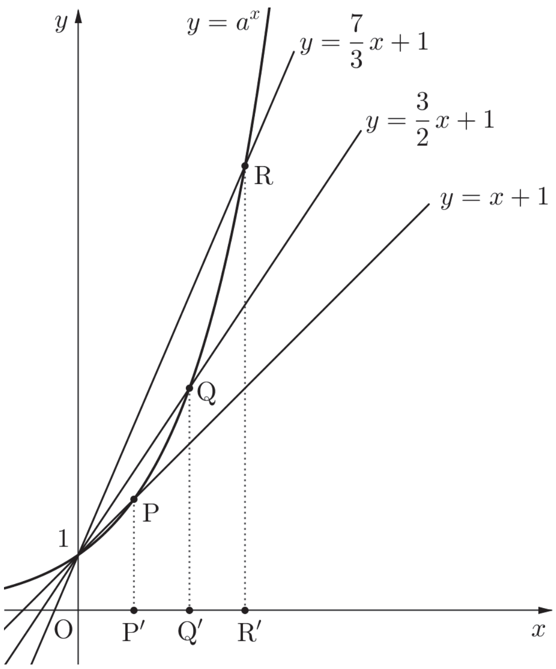
$\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{8}}\right)^n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

54

-25의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 a, $\sqrt{23}$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

71

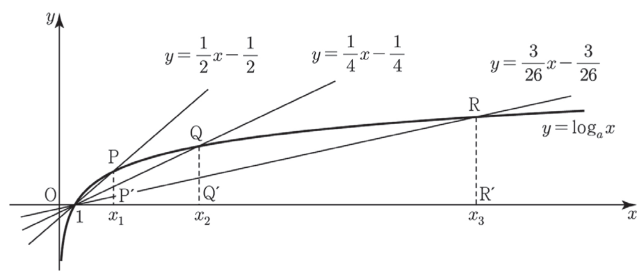
그림과 같이 지수함수 $y=a^x$ $(a>1)$의 그래프와 세 직선 $y=x+1$, $y=\frac{3}{2}x+1$, $y=\frac{7}{3}x+1$가 점 $(0,\ 1)$ 이외의 서로 다른 세 점 P, Q, R에서 각각 만나고, 세 점 P, Q, R에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P}'(x_1,\ 0)$, $\mathrm{Q}'(x_2,\ 0)$, $\mathrm{R}'(x_3,\ 0)$이라 하자. x_1, x_2, x_3는 이 순서대로 공차가 1인 등차수열을 이룰 때, $x_1+x_2+x_3$의 값은?



① $\frac{3}{2}$　② 3　③ $\frac{9}{2}$　④ 6　⑤ $\frac{15}{2}$

72

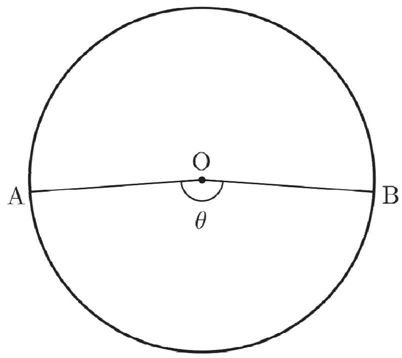
그림과 같이 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>1)$의 그래프와 세 직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$, $y=\frac{3}{26}x-\frac{3}{26}$가 점 $(1,\ 0)$ 이외의 서로 다른 세 점 P, Q, R에서 각각 만나고, 세 점 P, Q, R에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P}'(x_1,\ 0)$, $\mathrm{Q}'(x_2,\ 0)$, $\mathrm{R}'(x_3,\ 0)$이라 하자. x_1, x_2, x_3는 이 순서대로 공비가 3인 등비수열을 이룰 때, $x_1+x_2+x_3$의 값은?



① 35　② 37　③ 39　④ 41　⑤ 43

83

그림과 같이 넓이가 64π이고 중심이 O인 원위의 두 점 A, B에 대하여 호 AB의 길이는 반지름의 3배이다. 원점 O와 선분 AB사이 거리는? (단, 호 AB에 대한 중심각 θ의 크기는 $0 < \theta < \pi$이다.)

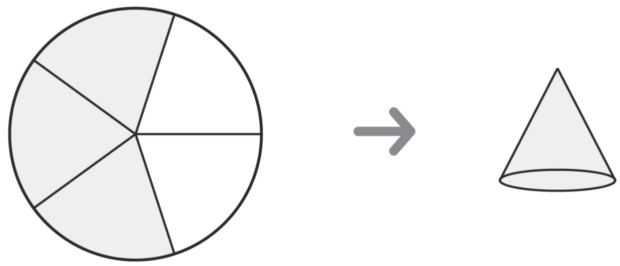


① $8\cos\frac{3}{2}$ ② $16\cos\frac{3}{4}$ ③ $8\sin\frac{3}{2}$

④ $16\sin\frac{3}{4}$ ⑤ $8\cos3$

84

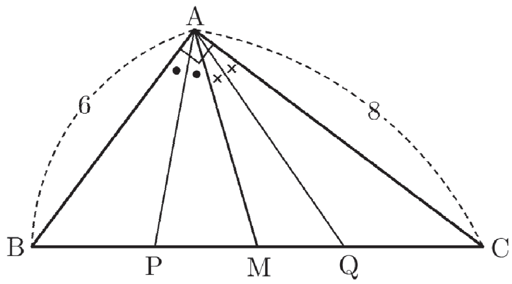
그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원의 둘레를 5등분하여 5개의 합동인 부채꼴을 그리고 그 중 두 개를 잘라내고 남은 부분이 원뿔의 옆면이 되도록 원뿔을 만들었다. 이 원뿔의 부피는? (단, 원뿔을 만들 때 겹치는 부분은 없도록 한다.)



① 6π ② 9π ③ 12π ④ 15π ⑤ 18π

122

그림과 같이 직각삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M이라 하고 $\angle BAM$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 P, $\angle CAM$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$이고 $\angle BAC=90^\circ$일 때, $\overline{AP}\times\overline{AQ}$의 값은?



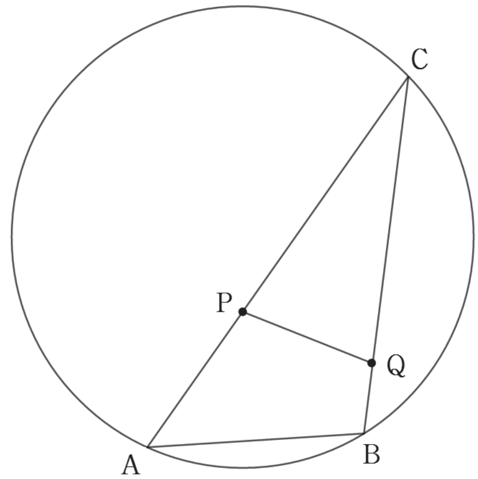
① $\frac{1440\sqrt{2}}{143}$ ② $\frac{1800\sqrt{2}}{143}$

③ $\frac{2080\sqrt{2}}{143}$ ④ $\frac{2440\sqrt{2}}{143}$

⑤ $\frac{2880\sqrt{2}}{143}$

123

그림과 같이 원 O에 내접하고 $\overline{AB}=3$인 삼각형 ABC가 있다. 원 O의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 선분 AC 위의 점 P와 선분 BC 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}=2$이면서 $\overline{PC}$가 최대가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 P$'$, Q$'$이라 하자. 삼각형 CP$'$Q$'$의 넓이는?



① $\frac{25}{9}\sqrt{3}$ ② $\frac{26}{9}\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$

④ $\frac{28}{9}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{29}{9}\sqrt{3}$

162

자연수 n에 대하여 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음과 같다.

$\{a_n\}$: $1, 4, 7, 10, \cdots, 2020$
$\{b_n\}$: $15, 32, 49, 66, \cdots, 2021$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 공통으로 들어 있는 수의 개수는?

① 39　② 40　③ 41　④ 42　⑤ 43

163

$a > 2$, $0 < b < 1$인 두 상수 a, b에 대하여 $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x) = |a\sin x + b|$가 있다. 어떤 실수 k에 대하여 직선 $y = k$와 곡선 $y = f(x)$의 교점의 개수가 3일 때, 이 세 점의 x좌표를 각각 α, β, γ라 하자. 세 수 α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{k}{b}$의 값은? (단, $\alpha < \beta < \gamma$)

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

199

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 라 할 때

$$S_1 = 1,\ S_{n+1} - 3S_n = 2^{n+1} - 1\ (n \geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

> 주어진 식에 의하여
> $S_n - 3S_{n-1} = 2^n - 1\ (n \geq 2)$ ...... ㉠
> 이다. 주어진 식에서 ㉠을 빼서 정리하면
> $a_{n+1} - 3a_n =$ (가) ...... ㉡
> 이다. 식 ㉠에 $n=2$를 대입하면
>
> $a_2 =$ (나)
>
> 이다. ㉡을 2^{n+1}으로 나누고 $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$이라 하고
> b_n의 점화식을 유도하면
> 수열 $\{b_n + 1\}$은 등비수열이다. 이를 이용하여 a_n을 구하면
>
> $a_n = 2^n \times$ (다)
>
> 이다.

위의 (가), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고 (나)에 들어가는 정수를 p라 할 때, $\dfrac{8p \times f(3) \times (g(6)+1)}{45}$의 값은?

① 45 ② 48 ③ 56 ④ 81 ⑤ 108

200

모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 a_n, b_n, a_{n+1}은 이 순서대로 등차수열을 이루고, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 다음은 일반항 a_n과 b_n을 구하는 과정이다. (단, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 2$)

> a_n, b_n, a_{n+1}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로
> $2b_n = a_n + a_{n+1}$ ......㉠ 이다.
> b_n, a_{n+1}, b_{n+1}은 이 순서대로 등비수열이므로
> $(a_{n+1})^2 = b_n b_{n+1}$
> 이고, $a_{n+1} > 0$, $a_{n+2} > 0$이므로
> $a_{n+1} = \sqrt{b_n b_{n+1}}$,
> $a_{n+2} = \sqrt{b_{n+1} b_{n+2}}$ ......㉡ 이다.
> 또한, ㉠, ㉡에서 얻어진
> $2b_{n+1} = \sqrt{b_n b_{n+1}} + \sqrt{b_{n+1} b_{n+2}}$의 양변을
> $\sqrt{b_{n+1}}$로 나누면
> $2\sqrt{b_{n+1}} = \sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n+2}}$이므로
> $\{\sqrt{b_n}\}$은 등차수열이다.
> 그러므로 $a_2 = 3$, $b_1 = 2$, $(a_2)^2 = b_1 b_2$에서
> $b_2 = \dfrac{9}{2}$이므로 $b_n =$ (가) 이다.
> 따라서 $a_n =$ (나) 이다.

이때, (가)에 들어가는 식을 $f(n)$, (나)에 들어가는 식을 $g(n)$이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} \dfrac{3n^4}{f(n)g(n)}$의 값을 구하면?

① 0 ② 6 ③ 12

④ 24 ⑤ 30

〔유형 12〕 수학적 귀납법

출제유형 | 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 과정에서 빈칸에 알맞은 수나 식을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 명제를 수학적 귀납법으로 증명하는 과정에서 앞과 뒤의 관계를 파악하여 빈칸에 알맞은 수나 식을 구한다.
자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

213

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (*)이 성립한다.
> (ii) $n=k\ (k \geq 1)$ 일 때,
> $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}$ 가
> 성립한다고 가정하자.
> $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\boxed{(가)}$
> $\geq \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\boxed{(가)}$
> $=\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\left(\boxed{(나)}\right)$
> $=\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}>0$
> $\therefore \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1}$
> 따라서 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.
> (i), (ii) 에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{\sum_{k=1}^{99} g(k)}{f(8)}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5