08 세 집합

$X = \{x \mid x \text{는 } 12\text{이하인 자연수}\}$

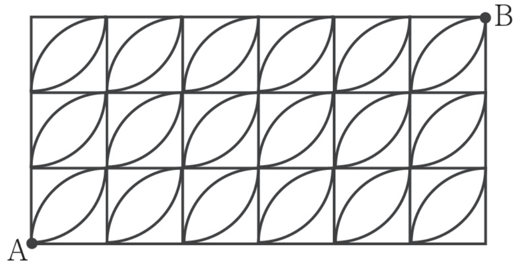
$Y = \{x \mid x \text{는 } 8\text{이하인 자연수}\}$

$Z = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수이고 } x \in X\}$

가 있다. 함수 $f : X \to X$ 중에서 다음 세 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수를 a라 할 때, $\frac{a}{100}$ 의 값을 구하시오.

(가) 집합 Z의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다.
(나) 집합 $X - Z$의 임의의 두 원소 $x_3,\ x_4$에 대하여 $x_3 < x_4$이면 $f(x_3) \leq f(x_4)$이다.
(다) 함수 f의 치역은 Y이다.

13 다음 그림과 같이 사분원의 모양으로 연결된 도로망에서 각 도로가 만나는 지점을 교차점이라 하자. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 A 지점과 B 지점 사이에 7개의 교차점을 지나면서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하시오.



25 어느 학반 야영회에서 간식 시간을 위해 신라면, 진라면, 너구리, 안성탕면, 삼양라면을 각각 10개씩 총 50개를 준비하였다. 그 학급에서 이 50개의 라면 중 27개의 라면을 선택해서 27개를 끓일 수 있는 냄비에 라면을 끓으려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 선택하는 경우의 수는 a이다. $\frac{a}{8}$의 값을 구하시오. (단, 같은 종류의 라면은 서로 구별하지 않는다.)

(가) 신라면, 진라면, 너구리는 3개 이상씩 선택한다. (나) 안성탕면은 선택하지 않거나 3개 이상 선택한다. (다) 삼양라면은 선택하지 않거나 3개 이상 선택한다.

33 아서왕, 가웨인, 랜슬롯과 A, B, C 을 포함한 13명의 기사들이 원탁에서 회의를 하기 위해 다음 조건을 만족시키면서 일정한 간격을 두고 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

> (가) 아서왕이 앉은 자리를 1번으로 하고 시계 방향으로 2번부터 13번까지 차례로 번호를 정한다.
> (나) 가웨인은 11번 자리에 앉고 4, 5, 6, 7, 8번 자리에는 아서왕, 가웨인, 랜슬롯과 A, B, C 가 아닌 기사들 7명 중 직전 회의에 4, 5, 6, 7, 8번에 앉았던 5명이 그대로 앉아 있다.
> (다) 아서왕 바로 옆자리 중 적어도 한 자리에는 A, B, C 중에서 앉고 랜슬롯 바로 옆자리 중 적어도 한 자리에도 A, B, C 중에서 앉는다.

44 숫자 1부터 n까지 각각 하나씩 적혀 있는 n개의 크기와 모양이 같은 공이 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 3개의 공을 꺼내서 적혀 있는 수의 크기가 작은 공부터 순서대로 나열했을 때, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 숫자를 a, b, c라 하자. 숫자 a, b, c가 이 순서대로 공차가 m인 등차수열을 이루는 사건을 $A_{n,\ m}$라 하자. 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, m, n은 각각 $m \geq 1$, $n \geq 3$인 자연수이고, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

| 보기 |

ㄱ. $\mathrm{P}(A_{5,\ 1})+\mathrm{P}(A_{5,\ 2})+\cdots+\mathrm{P}(A_{5,\ 5})=\dfrac{2}{5}$

ㄴ. $\mathrm{P}(A_{n,\ m})\neq 0$이 되도록 하는 m의 최댓값은 $\left[\dfrac{5}{9}(n-1)\right]$이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A_{n,\ m})\neq 0$이 되도록 하는 m의 최댓값을 $M(n)$이라 하면

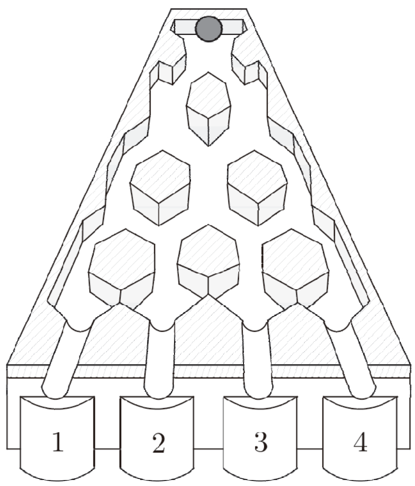
$\displaystyle\sum_{k=1}^{M(n)}\mathrm{P}(A_{n,\ k})=\frac{\sum_{k=3}^{n}M(k)}{{}_n\mathrm{C}_3}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

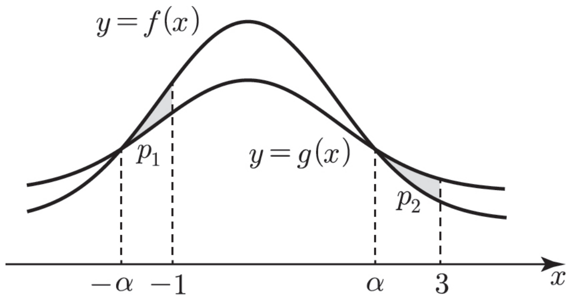
62 다음 그림과 같이 가장 높은 곳에 공을 놓으면 갈림길을 따라 내려오다가 4개의 출구 중에서 한 개의 출구로 빠지는 비탈면이 있다. 4개의 출구에 한 개의 공만 들어갈 수 있는 상자에 1, 2, 3, 4를 놓고 숫자 1, 2, 3, 4가 적혀 있는 모양과 크기가 같은 공을 비탈면 가장 높은 곳에 1, 2, 3, 4 순서로 한 개씩 놓을 때, 상자 k에 들어간 공에 적힌 수를 $f(k)$라 하자.

$$f(k)=k \text{ (단, } k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

을 만족하는 k의 개수가 2일 때, $f(1)=1$인 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p-q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이고 갈림길에서 각 길을 따라 공이 내려갈 확률은 $\frac{1}{2}$로 서로 같다. 상자에 들어간 공을 상자에서 꺼내고 번호를 확인한 뒤 네 상자가 모두 비어있을 때 다른 공을 비탈면 상단에 놓는다.)



88 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 다음 그림과 같고, $f(-\alpha)=g(-\alpha)=f(\alpha)=g(\alpha)$이다.



표준정규분포표

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.25	0.0987
0.5	0.1915
0.75	0.2734
1.0	0.3413
1.5	0.4332

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=-1$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 p_1, p_2라 할 때, $|p_1-p_2|$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $\alpha>1$)

① 0.057 ② 0.067 ③ 0.077
④ 0.087 ⑤ 0.097