평가원 기출분석에 집중하다

ATTENT!ON

어경훈(어피셜) 저자 소개

학력 및 경력

(1) 성균관대학교 컴퓨터교육과 & 수학교육과 복수전공
(2) 성균관대학교 2014학년도 정시 우선선발 합격
(3) 現 강남(서초), 대치 오르비 학원
(4) 現 오르비 클래스 수학강사
(5) 2019 대한민국 인재상 (교육부 장관상) 수상
(6) 2019 성균가족상 (성균관대학교 총장상) 수상
(7) 2020 스마트미디어 (과학기술정보통신부 장관상) 수상
(8) 수학 유튜브 채널, 어피셜 운영

(제 학생들에게) 이 책의 저자로서 수학강사로서의 한마디

저는 고등학교 시절, 수학을 제일 잘했고 좋아했습니다. 또한, 가르치는 것에 흥미가 있어 자연스럽게 선생님이라는 직업을 1순위로 골랐습니다. 공부 밖에 안해봤던 저는 다양한 경험을 해보고자 10개 이상의 동아리, 책 집필, 인턴, 강연활동 등을 하며 대학시절을 보냈고, 최종적으로 가르치는 직업이 저와 가장 잘 맞다는 것을 알았습니다. 요즘은 하나만 잘한다고 되는 시대가 아닙니다. 세상은 다양한 경험과 실력을 겸비한 융합인재를 원합니다. 저는 학생들이 저를 통해 수학지식은 물론이거니와 제가 경험한 다양한 것들을 바탕으로 긍정적인 부분들을 많이 얻어갔으면 합니다. 항상 학생들 입장에서 생각하며 가르치는 지식 전달자와, 정신적 멘토 역할을 겸비한 지도자가 되겠습니다. 마지막으로, 2019 대한민국 인재상 시상식에서 교육부 장관님께서 하신 말씀이 생각이 납니다. 세상에 똑똑한 영재는 많지만 지성과 배려심을 갖춘 인재는 드물다는 말이었습니다. 20대에 받을 수 있는 최고의 상을 수상한 만큼 이에 걸맞는 사람이 되도록 항상 노력하고 학생들에게 선한 영향력을 행사하는 사람이 되겠습니다.

여러분 모두 항상 긍정적인 마인드로 열심히 수험생활 하시길 바라며 수능대박 진심으로 응원합니다. 파이팅!!

서문

A T T E N T I O N

1. SINCE 2011학년도

현재 수능 수학시험은 대다수(30문항 중 25문항 이상)가 기출문제에서 문제은행 형식으로 출제됩니다. 시험 성적을 잘 받으려면 기존 기출문제들의 이해와 분석은 물론, 풀이과정을 암기 할 정도까지의 학습이 필요합니다. 수능시험은 1994학년도부터 지금까지 이어져 오고 있습니다. 주어진 수험 생활 동안 약 27개년 기출을 완벽하게 정리하기엔 현실적으로 한계가 있는 친구들이 많을겁니다. (수학과목 뿐만 아니라 국어, 영어, 탐구, 한국사 등의 타과목들 공부도 해야하니...) 적어도 2011학년도 이후 치러진 평가원/수능 문제 유형만큼은 꼭 정복하고 시험장에 가자는 취지로 이 기출분석 책을 집필하게 되었습니다.

2. 이 기출문제집의 특징

[1] 2015 개정 교육과정에 맞춰 2011학년도~2021학년도 평가원/수능 전 문항을 수록했습니다.

[2] 문항의 정렬은 단원별, 출제년도 순으로 배치했습니다.

[3] 빠른답안과 더불어 해설지는 딱딱한 줄 글 형태가 아닌 문제 위에 직접 저자가 아이패드로 필기하며 작성했고, 킬러문항의 경우 QR코드 동영상 해설강의 제공

[4] 교육부에서 제시하는 과목별 성격, 목표, 내용체계를 수록하였으며, 단원별 학습요소와 성취기준 및 유의사항을 수록하여 해당단원을 공부함에 있어 학생들에게 철저한 가이드라인을 제시합니다. (단원별 학습요소는 백지복습을 할 때 키워드로 사용하시면 좋습니다.)

수학 Ⅰ

1. 성격

수학과는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하여 주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하며 논리적으로 사고하고 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다. 수학은 오랜 역사를 통해 인류 문명 발전의 원동력이 되어 왔으며, 세계화・정보화가 가속화되는 미래 사회의 구성원에게 필수적인 역량을 제공한다. 수학 학습을 통해 학생들은 수학의 규칙성과 구조의 아름다움을 음미할 수 있고, 수학의 지식과 기능을 활용하여 수학 문제뿐만 아니라 실생활과 다른 교과의 문제를 창의적으로 해결할 수 있으며, 나아가 세계 공동체의 시민으로서 갖추어야 할 합리적 의사 결정 능력과 민주적 소통 능력을 함양할 수 있다.

일반 선택 과목인 <수학 Ⅰ>은 공통 과목인 <수학>을 학습한 후, 더 높은 수준의 수학을 학습하기를 원하는 학생들이 선택할 수 있는 과목이다. <수학 Ⅰ>의 내용은 '지수함수와 로그함수', '삼각함수', '수열'의 3개의 핵심 개념 영역으로 구성된다. '지수함수와 로그함수' 영역에서는 지수와 로그, 지수함수와 로그함수를, '삼각함수' 영역에서는 일반각과 호도법, 삼각함수의 뜻과 그래프, 사인법칙과 코사인법칙을, '수열' 영역에서는 등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법을 다룬다.

<수학 Ⅰ>에서 학습한 수학의 지식과 기능은 자신의 진로와 적성을 고려하여 선택할 수 있는 수학 일반 선택 과목과 진로 선택 과목, 수학 전문 교과 과목을 학습하기 위한 토대가 되고, 자연과학, 공학, 의학뿐만 아니라, 경제・경영학을 포함한 사회과학, 인문학, 예술 및 체육 분야를 학습하는 데 기초가 되며, 나아가 창의적 역량을 갖춘 융합 인재로 성장할 수 있는 기반을 제공한다. 이를 위해 학생들은 <수학 Ⅰ>의 지식을 이해하고 기능을 습득하는 것과 더불어 문제 해결, 추론, 창의・융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천의 6가지 수학 교과 역량을 길러야 한다.

교과 역량으로서의 문제 해결은 해결 방법을 알고 있지 않은 문제 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력이고, 추론은 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력이다. 창의・융합은 수학의 지식과 기능을 토대로 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출하고 정교화하며, 여러 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 수학과 연결・융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하는 능력이다. 의사소통은 수학 지식이나 아이디어, 수학적 활동의 결과, 문제 해결과정, 신념과 태도 등을 말이나 글, 그림, 기호로 표현하고 다른 사람의 아이디어를 이해하는 능력이고, 정보 처리는 다양한 자료와 정보를 수집, 정리, 분석, 활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택, 이용하여, 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력이다. 끝으로, 태도 및 실천은 수학의 가치를 인식하고 자주적 수학 학습 태도와 민주 시민 의식을 갖추어 실천하는 능력이다.

수학 교과 역량 함양을 통해 학생들은 복잡하고 전문화되어 가는 미래 사회에서 사회 구성원의 역할을 성공적으로 수행할 수 있고, 개인의 잠재력과 재능을 발현할 수 있으며, 수학의 필요성과 유용성을 이해하고, 수학 학습의 즐거움을 느끼며, 수학에 대한 흥미와 자신감을 기를 수 있다.

2. 목표

수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하며 수학적으로 추론하고 의사소통 하는 능력을 길러, 생활 주변과 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다.

가. 사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 지수함수와 로그함수, 삼각함수, 수열에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 수학의 기능을 습득한다.

나. 수학적으로 추론하고 의사소통하며, 창의 · 융합적 사고와 정보 처리 능력을 바탕으로 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결한다.

다. 수학에 대한 흥미와 자신감을 갖고 수학의 역할과 가치를 이해하며 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다.

3. 내용 체계

<table>
<tr><th>영역</th><th>핵심개념</th><th>일반화된 지식</th><th>내용 요소</th><th>기능</th></tr>
<tr><td rowspan="2">해석</td><td>지수함수와
로그함수</td><td>지수함수와 로그함수는 급격히 증감하는 수량이나 현상을 다루는 유용한 도구로서 자연 현상이나 사회 현상을 표현하고 설명하는 데 활용된다.</td><td>• 지수와 로그
• 지수함수와 로그함수</td><td rowspan="3">표현하기
그래프 그리기
이해하기
계산하기
설명하기
활용하기
문제 해결하기
증명하기</td></tr>
<tr><td>삼각함수</td><td>삼각함수는 삼각비를 일반화시킨 개념으로서 주기적인 성질을 가지는 자연 현상이나 사회 현상을 표현하고 설명하는 데 활용된다.</td><td>• 삼각함수</td></tr>
<tr><td>대수</td><td>수열</td><td>수열은 규칙적으로 나열된 수로 나타낼 수 있는 현상을 탐구하는 데 활용되며 수열의 극한과 급수의 기초 개념이다.</td><td>• 등차수열과 등비수열
• 수열의 합
• 수학적 귀납법</td></tr>
</table>

CONTENTS

A T T E N T I O N

01 지수함수와 로그함수

지수함수는 빠르게 증가하거나 감소하는 수량이나 현상을 다루는 데 유용한 함수이고, 로그함수는 지수함수의 역함수이다. 지수함수와 로그함수는 자연 현상이나 사회 현상을 설명하고 분석하기 위한 수학적 모델이다.

성취기준

1. 지수와 로그

(1) 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
(2) 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다.
(3) 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.
(4) 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
(5) 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2. 지수함수와 로그함수

(1) 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다.
(2) 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.
(3) 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

(가) 학습 요소

- 거듭제곱근, 로그, (로그의) 밑, 진수, 사용로그, 지수함수, 로그함수, $\sqrt[n]{a}$, $\log_a N$, $\log N$

(나) 교수, 학습 방법 및 유의사항

- 지수가 유리수 및 실수인 경우는 밑이 양수인 조건이 필요함을 이해하게 한다.
- 지수가 실수인 경우는 직관적으로 다룬다.
- 로그의 성질은 지수의 성질과 관련지어 이해하게 한다.
- 지수함수와 로그함수는 역함수 관계임을 그래프를 통해 확인하게 한다.
- 지수와 로그 및 지수함수와 로그함수를 다룰 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.
- 구체적인 자연 현상이나 사회 현상을 지수함수와 로그함수로 표현하고 이 과정에서 나타나는 간단한 방정식과 부등식을 풀어 문제를 해결해봄으로써 지수함수와 로그함수의 유용성과 가치를 인식하게 한다.

(다) 평가 방법 및 유의사항

- 지수와 로그의 성질에 대한 평가에서는 지수와 로그의 기본 성질을 이해하고 활용할 수 있는 능력을 평가하는데 중점을 두고, 지나치게 복잡한 계산을 포함한 문제는 다루지 않는다.

1-1 지수와 로그 기출문제

지수의 확장

(2011(6)-가형1)

001 $\frac{1}{\sqrt[3]{8}} \times \log_3 81$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

(2011(9)-가형6/나형6)

002 양수기로 물을 끌어올릴 때, 펌프의 1분당 회전수 N, 양수량 Q, 양수할 높이 H와 양수기의 비교회전도 S 사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$$S = NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$$

(단, N, Q, H의 단위는 각각 rpm, m^3/분, m이다.)
펌프의 1분당 회전수가 일정한 양수기에 대하여 양수량이 24, 양수할 높이가 5일 때의 비교회전도를 S_1, 양수량이 12, 양수할 높이가 10일 때의 비교회전도를 S_2라 하자. $\frac{S_1}{S_2}$의 값은? [3점]

① $2^{\frac{3}{4}}$ ② $2^{\frac{7}{8}}$ ③ 2
④ $2^{\frac{9}{8}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{4}}$

(2011(9)-나형26)

003 $1 \leqq m \leqq 3$, $1 \leqq n \leqq 8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

(2012(6)-가형1)

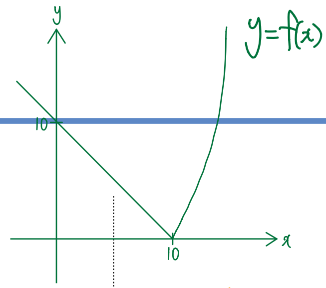
004 $4 \times 8^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

(2013(9)-나형6)

005 $\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12



(2017-나형21)

072 좌표평면에서 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x+10 & (x<10)\\(x-10)^2 & (x\geq 10)\end{cases}$$

이 함수는 x=10을 기점으로 바뀌는 함수이므로

과 자연수 n에 대하여 점 $(n,\ f(n))$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n이 있다. x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n, 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분에 있는 모든 점의 개수를 B_n이라 하자.

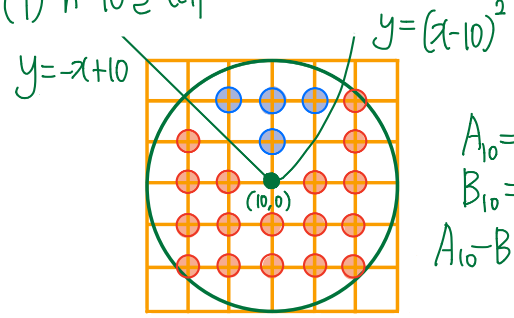
n이 10일 때를 먼저 관찰하고 1≤n≤9, 11≤n≤20 를 차례로 관찰해보자.

정확한 상황을 보기 위해 한 변의 길이가 1인 정사각형 모눈종이를 이용해 관찰한다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)$의 값은? [4점]

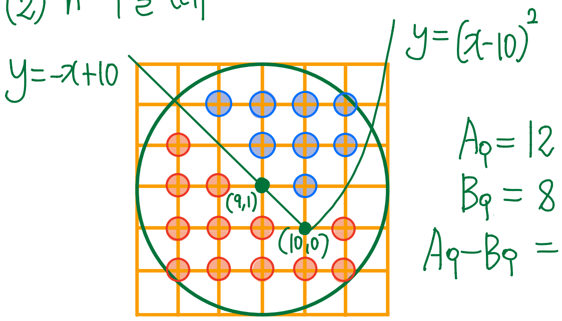
① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

(1) n=10일 때



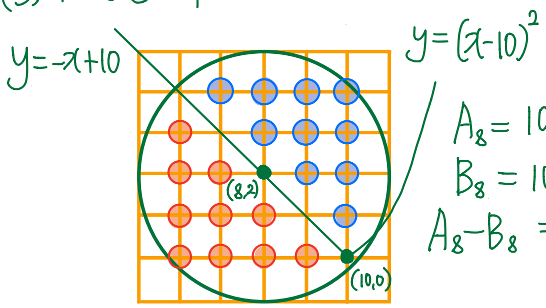
$A_{10}=17$
$B_{10}=4$
$A_{10}-B_{10}=13$

(2) n=9일 때



$A_9=12$
$B_9=8$
$A_9-B_9=4$

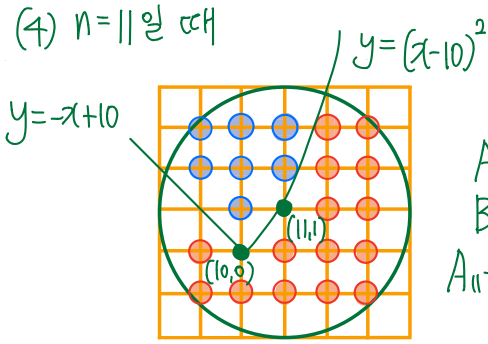
(3) n=8일 때



$A_8=10$
$B_8=10$
$A_8-B_8=0$

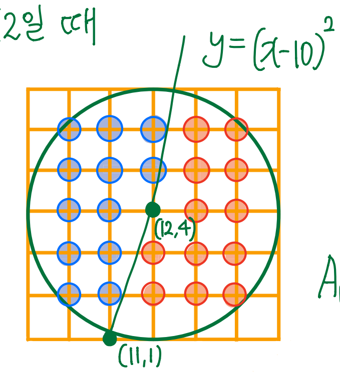
1≤n≤7일 때에도 n=8일 때와 마찬가지로 원 O_n의 내부에 있고 곡선 y=f(x)의 윗부분과 아랫부분에 있는 점의 개수가 같으므로 $A_n-B_n=0$

(4) n=11일 때



$A_{11}=15$
$B_{11}=7$
$A_{11}-B_{11}=8$

(5) n=12일 때



$A_{12}=12$
$B_{12}=12$
$A_{12}-B_{12}=0$

13≤n≤20일 때에도 n=12일 때와 마찬가지로 원 O_n의 내부에 있고 곡선 y=f(x)의 윗부분과 아랫부분에 있는 점의 개수가 같으므로 $A_n-B_n=0$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)=13+4+8=25$$

스마트폰 카메라를 QR코드에
갖다 대시면 해설강의로 연결됩니다.

(2015(6)-B형13)

095 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1=0$ ← $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2-n \ (n\ge 1)$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} k a_{4k+1}$의 값은? [3점]

① 2960 ② 3000 ③ 3040
④ 3080 ⑤ 3120

$$\sum_{K=1}^{n} a_K = n^2-n$$
$$-\ \sum_{K=1}^{n-1} a_K = (n-1)^2-(n-1)$$

이차식에서 뒤에 붙은 상수항이 없기 때문에 $(n\ge1)$부터 성립한다.

$$a_n = 2n-2\ (n\ge1)$$
$$a_{4K+1} = 8K$$
$$\sum_{K=1}^{10} K\cdot a_{4K+1} = \sum_{K=1}^{10} 8K^2 = 8\cdot\frac{\cancel{10}^{5}\cdot 11\cdot \cancel{21}^{7}}{\cancel{6}} = 8\cdot385 = 3080$$

(2016(6)-A형24)

096 $\sum_{k=1}^{10}(2k+a)=300$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[3점]

$$2\cdot\sum_{K=1}^{10} K + \sum_{K=1}^{10} a = 300$$
$$\cancel{2}\cdot\frac{10\cdot11}{\cancel{2}} + 10\cdot a = 300$$
$$\therefore a=19$$

(2017(9)-나형14)

097 첫째항이 4이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

의 값은? [4점]

$a_n = n+3$ ($\because a_1=4$)

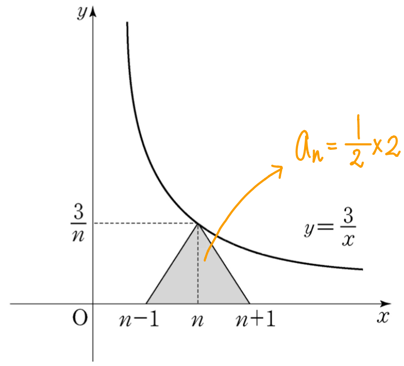
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$$\sum_{K=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{K+4}+\sqrt{K+3}} = \sum_{K=1}^{12}\left(\sqrt{K+4}-\sqrt{K+3}\right)$$
$$=(\cancel{\sqrt5}-\sqrt4)+(\cancel{\sqrt6}-\cancel{\sqrt5})+(\sqrt7-\cancel{\sqrt6})+\cdots+(\cancel{\sqrt{15}}-\cancel{\sqrt{14}})+(\sqrt{16}-\cancel{\sqrt{15}})$$
$$=-\sqrt4+\sqrt{16}=-2+4=2$$

(2017(9)-나형17)

098 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{3}{x}\ (x>0)$ 위의 점 $\left(n,\ \frac{3}{n}\right)$과 두 점 $(n-1,\ 0)$, $(n+1,\ 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{a_n a_{n+1}}$의 값은? [4점]



$a_n = \frac{1}{2}\times2\times\frac{3}{n}=\frac{3}{n}$

① 410 ② 420 ③ 430
④ 440 ⑤ 450

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{a_n\cdot a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{10}\frac{9}{\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{n+1}} = \sum_{n=1}^{10} n\cdot(n+1)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}(n^2+n) = \frac{10\cdot11\cdot12}{6}+\frac{10\cdot11}{2} = 385+55=440$$

(2017-나형25)

099 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x+2$에 대하여 $\sum_{k=1}^{15}f(2k)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(2K)=K+2$

$$\sum_{K=1}^{15}(K+2) = \frac{15\cdot\cancel{16}^{8}}{\cancel{2}}+15\cdot2$$
$$=120+30$$
$$=150$$

(2022-예시문항15)

132 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

> (가) $a_5 = 5$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \ge 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

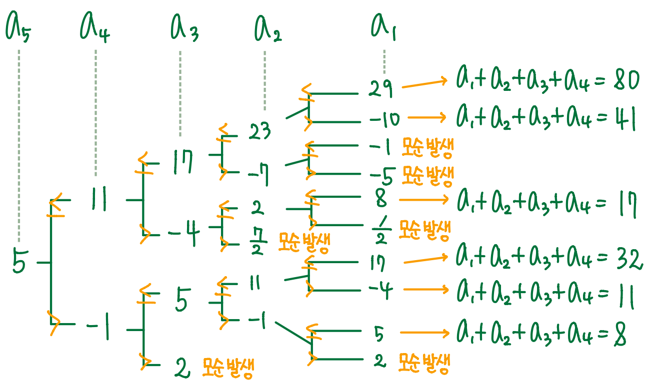
(1) $a_5=5$, $a_6=-1$, $a_7=5$, $a_8=-1$ ⋯

∴ $n \ge 5$일 때 a_n의 값은 5, −1 반복으로 일정한 값을 가진다.

즉, $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최대, 최소의 차이 M−m의 값은

$\sum_{k=1}^{4} a_k$의 최대, 최소의 차이와 같다.

(2)



∴ $\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1+a_2+a_3+a_4$의 최대 M=80, 최소 m=8 이므로

M−m = 80−8 = 72

(2021(6)-나형14)

133 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1} = 2a_n + 1 & (1) \\ a_{3n} = -a_n + 2 & (2) \\ a_{3n+1} = a_n + 1 & (3) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11} + a_{12} + a_{13}$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

(1), (2), (3)식에 n=4를 대입하면

$a_{11} = 2a_4 + 1$

$a_{12} = -a_4 + 2$

$a_{13} = a_4 + 1$

이므로 $a_{11}+a_{12}+a_{13} = 2a_4 + 4$

(3)식에 n=1을 대입하면

$a_4 = a_1 + 1 = 2$ 이다.

∴ $a_{11}+a_{12}+a_{13} = 2a_4 + 4 = 8$

(2021(6)-가형24)

134 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 9$, $a_2 = 3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$$

을 만족시킨다. $|a_k| = 3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

$a_1 = 9$

$a_2 = 3$

$a_3 = a_2 - a_1 = -6$

$a_4 = a_3 - a_2 = -9$

$a_5 = a_4 - a_3 = -3$

$a_6 = a_5 - a_4 = 6$

$a_7 = a_6 - a_5 = 9$

$a_8 = a_7 - a_6 = 3$

⋮

∴ $a_{n+6} = a_n$이 성립한다.

즉, k는 3으로 나눈 나머지가 2일 때

$|a_k| = 3$을 만족한다.

∴ 100 이하의 자연수 중

3의 배수는 33개 이므로 (3, 6, 9 ⋯ 99까지)

3으로 나눈 나머지가 2인 k는 (2, 5, 8 ⋯ 98까지)

33개이다.

(2021(9)-나형21)

135 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

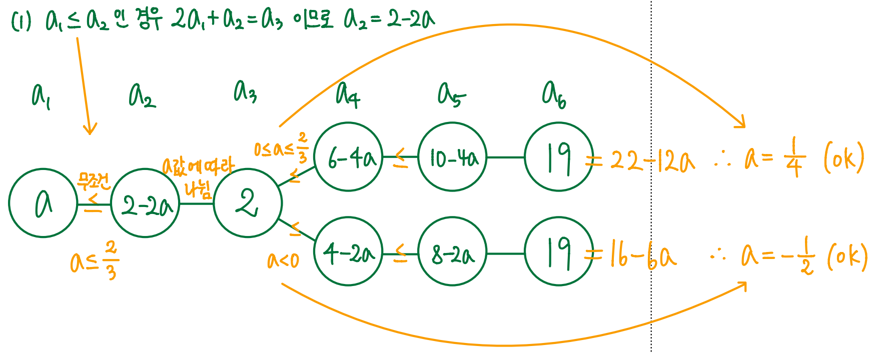
① $-\frac{1}{2}$　　② $-\frac{1}{4}$　　③ 0

④ $\frac{1}{4}$　　⑤ $\frac{1}{2}$

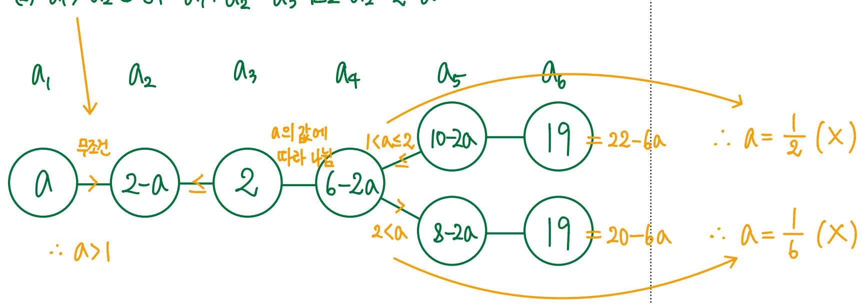
* $a_1=a$라고 하면 a_1, a_3, a_6은 고정값이다.

크게 $a_1 \le a_2$인 경우와 $a_1 > a_2$인 경우로 나뉜다.

(1) $a_1 \le a_2$인 경우 $2a_1+a_2=a_3$이므로 $a_2=2-2a$



(2) $a_1 > a_2$인 경우 $a_1+a_2=a_3$이므로 $a_2=2-a$



$\therefore$ 모든 a의 값의 합은 $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

스마트폰 카메라를 QR코드에
갖다 대시면 해설강의로 연결됩니다.

(2015(6)-A형21)

044 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(1)=0$
>
> (나) $\lim_{x\to n}\dfrac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$
>
> $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4　　② 6　　③ 8
④ 10　　⑤ 12

(나) 조건에서 $(n=1,2,3,4)$로 나와있으므로 차례로 대입하면서 살펴보자.

(1) $n=1$일 때: $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

(가)에서 $g(1)=0$ 이므로 분자$\to0$ 이므로 $f(x)$도 $(x-1)$을 인수로 갖는다.
또한, 극한값이 0이기 때문에 $f(x)$는 $(x-1)$을 또 인수로 갖는다.
즉, $f(x)=(x-1)^2(x+a)$, $g(x)=(x-1)(x^2+bx+c)$ 이다.

(2) $n=2$일 때: $\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

극한값이 0이기 때문에 $f(x)$는 $(x-2)$를 인수로 갖는다.
즉, $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ 이다.
또한 $g(2)\neq0 \longrightarrow$ 만약 $g(2)=0$ 이라면 극한값이 0이 나올수가 없다.

(3) $n=3$일 때: $\lim_{x\to3}\dfrac{f(x)}{g(x)}=2$

$f(x)=(x-1)^2(x-2)$에서 $f(3)=4$ 이므로 $g(3)=2$이다.
$g(x)=(x-1)(x^2+bx+c)$에서 $g(3)=2\cdot(9+3b+c)=2$ ··· ㉠

(4) $n=4$일 때: $\lim_{x\to4}\dfrac{f(x)}{g(x)}=6$

$f(x)=(x-1)^2(x-2)$에서 $f(4)=18$ 이므로 $g(4)=3$이다.
$g(x)=(x-1)(x^2+bx+c)$에서 $g(4)=3\cdot(16+4b+c)=3$ ··· ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 계산하면 $b=-7$, $c=13$ 이므로 $g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$이다.

$\therefore g(5)=12$

스마트폰 카메라를 QR코드에
갖다 대시면 해설강의로 연결됩니다.

(2021(6)-나형19) (1)

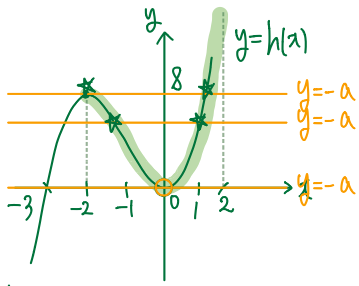
128 방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

(1)에서 $2x^3+6x^2=-a$ (x에 관한 항은 좌변에, 상수항은 우변에)

좌변을 $h(x)=2x^3+6x^2=2x^2(x+3)$ $(-2\le x\le 2)$이라 하면

$h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$h(x)=-a$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 $0<-a\le 8$ 이므로

$a=-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8$ 총 8개다.

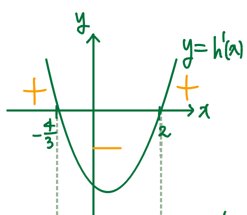
(2021(9)-나형26)

129 방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [4점]

$x^3-x^2-8x=-k$ (x에 관한 항은 좌변에, 상수항은 우변에)

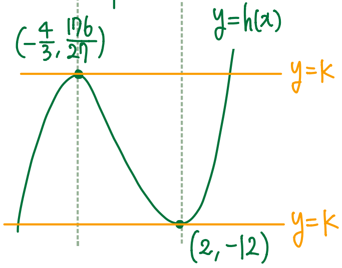
좌변을 $h(x)=x^3-x^2-8x$ 이라 하면

$h'(x)=3x^2-2x-8=(3x+4)(x-2)$



$x=-\frac{4}{3}$일 때, 극댓값 $h(-\frac{4}{3})=\frac{176}{27}$

$x=2$일 때, 극솟값 $h(2)=-12$



이 때, $y=x^3-x^2-8x$와 $y=-k$가 두 점에서 만나려면

$-k=\frac{176}{27}$ or -12 이므로 $k=-\frac{176}{27}$ or 12이다.

∴ 양수 k의 값은 12

(2021-나형25)

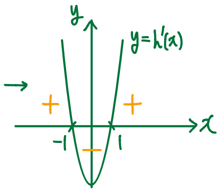
130 곡선 $y=4x^3-12x+7$과 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

$4x^3-12x+7=k$

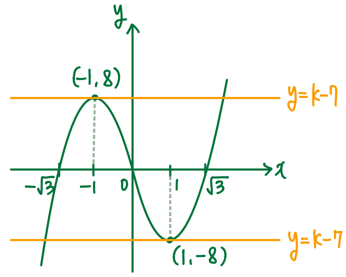
$4x^3-12x=k-7$ (x에 관한 항은 좌변에, 상수항은 우변에)

좌변을 $h(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)$이라 하면

$h'(x)=12x^2-12$ ($x=\pm1$에서 극값을 갖는다.) →



$h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이 때, $y=4x(x^2-3)$과 $y=k-7$이 두 점에서 만나려면

$k-7=8$ or -8 이므로 $k=15$ or -1 이다.

∴ 양수 k의 값은 15

미분과 적분의 관계

(2012-나형9)

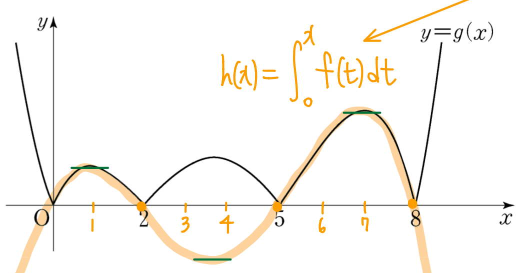
020 함수 $F(x)=\int_0^x (t^3-1)dt$에 대하여 $F'(2)$의 값은? [3점]

① 11　② 9　③ 7
④ 5　⑤ 3

$F'(x)=x^3-1$ 이므로 $F'(2)=7$

(2013-가형19)

021 삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를 $\boxed{g(x)=\left|\int_0^x f(t)dt\right|}$라 할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

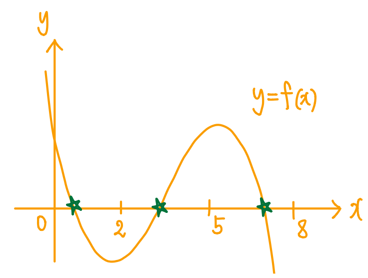
ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.
ㄴ. $f'(0)<0$
ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)dx>0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$ 라고 하자.
$h'(x)=f(x)$ 이고 $f(0)>0$ 이므로 함수 $h(x)$의
따라서 함수 $h(x)$의 그래프 개형은 왼쪽과 같다.

$f(0)>0$, $f(2)<0$ 이므로 $(0,2)$사이에 적어도 하나의 실근 존재
$f(2)<0$, $f(5)>0$ 이므로 $(2,5)$사이에 적어도 하나의 실근 존재
$f(5)>0$, $f(8)<0$ 이므로 $(5,8)$사이에 적어도 하나의 실근 존재

ㄱ. $h'(x)=f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다



∴ $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다 (참)

ㄴ. 위 그래프 개형에서 보면 $f'(0)<0$ (참)

ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)dx=\int_m^{m+2} h'(x)dx=\left[h(x)\right]_m^{m+2}=h(m+2)-h(m)>0$

$h(m+2)>h(m)$을 만족하는 자연수 m은 3개이다. (참)

(1) $m=1$일 때 $h(3)>h(1)\rightarrow$ X
(2) $m=2$일 때 $h(4)>h(2)\rightarrow$ X
(3) $m=3$일 때 $h(5)>h(3)\rightarrow$ O
(4) $m=4$일 때 $h(6)>h(4)\rightarrow$ O
(5) $m=5$일 때 $h(7)>h(5)\rightarrow$ O
(6) $m\geq6$ 일 때 $h(m+2)>h(m)\rightarrow$ X

∴ $m=3,4,5\rightarrow$ 3개이다.

(2013-나형21)

022 삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값은? [4점]

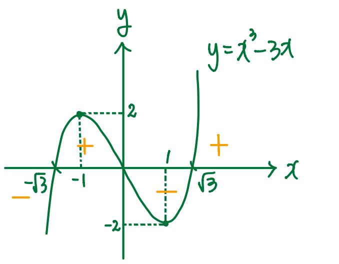
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 가 오직 하나의 극값을 가지려면

$F'(x)=f(x)$는 부호변화가 한번만 있어야 한다.

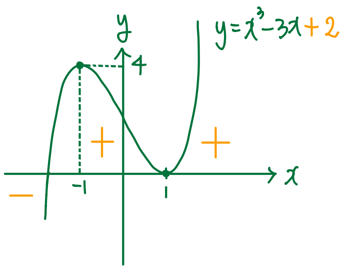
$y=f(x)$는 $y=x^3-3x$의 그래프를 y축방향으로 a만큼 평행이동한 그래프이므로

$y=x^3-3x$의 그래프는 다음과 같다.



y축의 방향으로 a $(a>0)$ 만큼 평행이동해서

부호변화가 한번만 생기려면 $a\geq 2$ 이다.



$\therefore$ a의 최솟값은 2

스마트폰 카메라를 QR코드에
갖다 대시면 해설강의로 연결됩니다.

(2019(6)-가형18)

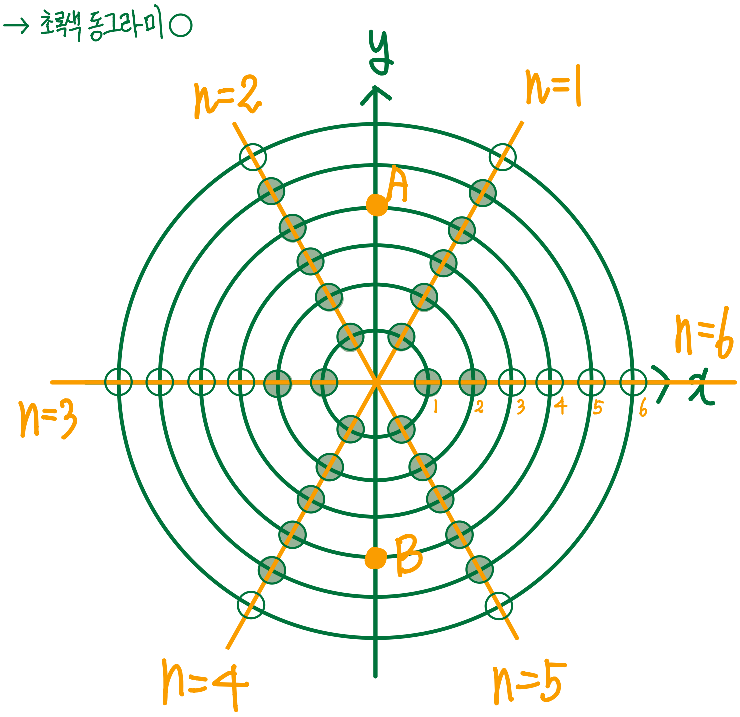
004 좌표평면 위에 두 점 $A(0,\ 4)$, $B(0,\ -4)$가 있다. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 m, n이라 하자.

점 $C\left(m\cos\frac{n\pi}{3},\ m\sin\frac{n\pi}{3}\right)$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작을 확률은? [4점]

반지름의 길이가 m이고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{n\pi}{3}$인 원위의 점
→ 초록색 동그라미O

초록색 동그라미에 색칠

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{5}{9}$　③ $\frac{11}{18}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{13}{18}$



$\therefore \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

(2019(6)-나형19)

005 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 하자. 세 수 a, b, c가 $a < b-2 \le c$를 만족 시킬 확률은? [4점]

① $\frac{2}{27}$　② $\frac{1}{12}$　③ $\frac{5}{54}$　④ $\frac{11}{108}$　⑤ $\frac{1}{9}$

$b=1,2,3$ 이면 $a<b-2$ 성립하지 않는다.

(1) $b=4$인 경우
$a=1$ // $c=2,3,4,5,6$ → 5가지

(2) $b=5$인 경우
$a=1,2$ // $c=3,4,5,6$ → $2\times4=8$가지

(3) $b=6$인 경우
$a=1,2,3$ // $c=4,5,6$ → $3\times3=9$가지

$\therefore \frac{5+8+9}{6\times6\times6} = \frac{11}{108}$

(2012(9)-나형12)

119 주사위를 1개 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수이면 동전을 3개 동시에 던지고, 6의 약수가 아니면 동전을 2개 동시에 던진다. 1개의 주사위를 1번 던진 후 그 결과에 따라 동전을 던질 때, 앞면이 나오는 동전의 개수가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{11}{24}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

(1) 6의 약수 = 1, 2, 3, 6이 나올 경우 ⟶ 동전 3개 던짐

$= \frac{4}{6} \times {}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

(2) 그 외 = 4, 5가 나올 경우 ⟶ 동전 2개 던짐

$= \frac{2}{6} \times {}_2C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{6}$ $\quad \therefore \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ //

(2013(9)-가형3)

120 한 개의 주사위를 6번 던질 때, 홀수의 눈이 5번 나올 확률은? [2점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{3}{32}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{5}{32}$ ⑤ $\frac{3}{16}$

${}_6C_5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{32}$

(2013(9)-가형11)

121 A가 동전을 2개 던져서 나온 앞면의 개수만큼 B가 동전을 던진다. B가 던져서 나온 앞면의 개수가 1일 때, A가 던져서 나온 앞면의 개수가 2일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

(1) A가 동전 2개를 던져 나오는 앞면의 개수가 1인 경우,
B가 동전 1개를 던져 나온 앞면의 개수가 1

$= {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

(2) A가 동전 2개를 던져 나오는 앞면의 개수가 2인 경우,
B가 동전 2개를 던져 나온 앞면의 개수가 1

$= {}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{8}$

$\therefore \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{3}$ //

(2013-가형11)

122 흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다르면 1개의 동전을 3번 던지고, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같으면 1개의 동전을 2번 던진다. 이 시행에서 동전의 앞면이 2번 나올 확률은? [3점]

① $\frac{9}{28}$ ② $\frac{19}{56}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{11}{28}$

(1) 꺼낸 공의 색이 다른경우 ⟶ 동전을 3번 던진다.

$= \frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_7C_2} \cdot {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{14}$

(2) 꺼낸 공의 색이 같은경우 ⟶ 동전을 2번 던진다.

$= \frac{{}_4C_2 + {}_3C_2}{{}_7C_2} \cdot {}_2C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{28}$ $\quad \therefore \frac{3}{14} + \frac{3}{28} = \frac{9}{28}$ //

(2014(9)-B형6)

123 한 개의 주사위를 A는 4번 던지고 B는 3번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 각각 a, b라 하자. $a+b$의 값이 6일 확률은? [3점]

① $\frac{10}{3^7}$ ② $\frac{11}{3^7}$ ③ $\frac{4}{3^6}$ ④ $\frac{13}{3^7}$ ⑤ $\frac{14}{3^7}$

$a+b=6$을 만족하는 경우는 $(a=4, b=2)$, $(a=3, b=3)$ 두가지다.

(1) $a=4$, $b=2$ 인 경우 ⟶ ${}_4C_4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{3^7}$

(2) $a=3$, $b=3$ 인 경우 ⟶ ${}_4C_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot {}_3C_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{3^7}$

$\therefore \frac{6}{3^7} + \frac{8}{3^7} = \frac{14}{3^7}$

(2016-B형8)

124 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수의 곱이 6일 확률은? [3점]

$\underbrace{\text{앞면이 나오는 횟수}}_{=a번}$, $\underbrace{\text{뒷면이 나오는 횟수}}_{=b번}$

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

$a \times b = 6$

(1) $a=2$, $b=3$인 경우 ⟶ ${}_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$

(2) $a=3$, $b=2$인 경우 ⟶ ${}_5C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$

$\therefore \frac{5}{16} + \frac{5}{16} = \frac{5}{8}$ //

(2018(9)-가형12/나형14)

055 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 등식을 만족시킨다.

$$P(m \le X \le m+12) - P(X \le m-12) = 0.3664$$

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 σ의 값을 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
$\boxed{1.5}$	$\boxed{0.4332}$
2.0	0.4772

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

$P\left(\frac{m-m}{\sigma} \le Z \le \frac{m+12-m}{\sigma}\right) - P\left(Z \le \frac{m-12-m}{\sigma}\right)$

$= P\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right) - P\left(Z \le \frac{-12}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z \ge \frac{12}{\sigma}\right) = 0.5 - P\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right)$

$= 2 \cdot P\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right) - 0.5 = 0.3664$

$\longrightarrow P\left(0 \le Z \le \frac{12}{\sigma}\right) = 0.4332$

$Z = 1.5 \longrightarrow \frac{12}{\sigma} = 1.5$

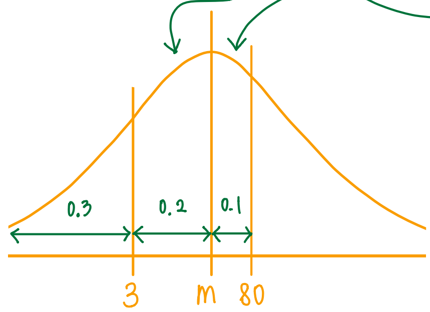
$\therefore \sigma = 8$

	출근시간 73분 이상	출근시간 73분 미만	
지하철 O	13.2명	13.4명	26.6명
지하철X	19.8명	53.6명	73.4명
	33명	67명	100명

← 정답을 구하는데 굳이 필요없는 정보

(2018-가형26)

056 확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 $P(X \le 3) = P(3 \le X \le 80) = 0.3$일 때, $m+\sigma$의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, ① $P(0 \le Z \le 0.25) = 0.1$, ② $P(0 \le Z \le 0.52) = 0.2$로 계산한다.) [4점]



① $Z = 0.25 = \frac{80-m}{\sigma}$

② $Z = -0.52 = \frac{3-m}{\sigma}$

두 식을 연립하여 풀면

$m = 55$, $\sigma = 100$

$\therefore m+\sigma = 155$

(2019-가형15)

057 어느 회사 직원들의 어느 날의 출근 시간은 평균이 66.4분, 표준편차가 15분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 날 출근 시간이 73분 이상인 직원들 중에서 40%, 73분 미만인 직원들 중에서 20%가 지하철을 이용하였고, 나머지 직원들은 다른 교통수단을 이용하였다. 이 날 출근한 이 회사 직원들 중 임의로 선택한 1명이 지하철을 이용하였을 확률은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \le Z \le 0.44) = 0.17$로 계산한다.) [4점]

X

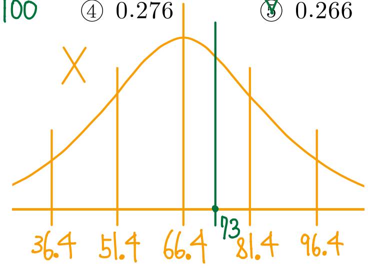
① 출근시간 73분 ↑↓

② 지하철 O, X

변수 2개? → 표!

$\frac{26.6}{100}$

① 0.306 ② 0.296 ③ 0.286
④ 0.276 ⑤ 0.266



$P(X \ge 73)$

$= P\left(Z \ge \frac{73-66.4}{15}\right)$

$= P(Z \ge 0.44)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 0.44)$

$= 0.5 - 0.17 = 0.33$

* 계산 편의상 전체 직원 수를 100명이라고 하자.

출근시간이 73분이상인 직원은 전체 직원수의 33%이므로 100명 $\times \frac{33}{100} = 33$명이다.

① 33명 $\times \frac{40}{100} = 13.2$명

② 67명 $\times \frac{20}{100} = 13.4$명

(2020(9)-가형12/나형13)

058 확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 $\frac{m}{3}$인 정규분포를 따르고, $P\left(X \le \frac{9}{2}\right) = 0.9987$일 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 m의 값을 구한 것은? [3점]

$= (0.5 + 0.4987)$

$P\left(X \le \frac{9}{2}\right)$

$P\left(Z \le \dfrac{\frac{9}{2} - m}{\frac{m}{3}}\right)$

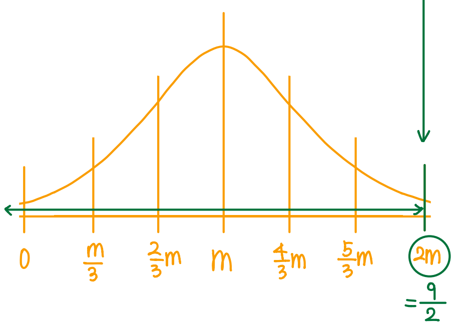
$= 3$

$\therefore m = \frac{9}{4}$ //

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2

④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$



(2020-가형18)

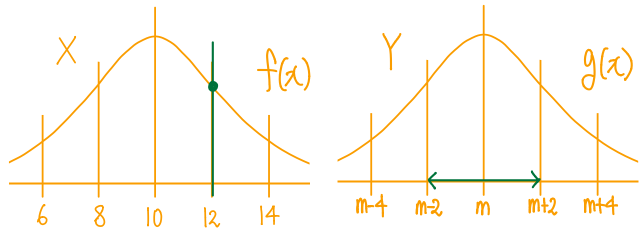
059 확률변수 X는 정규분포 $N(10,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $N(m,\ 2^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다. $f(12) \le g(20)$을 만족시키는 m에 대하여 $P(21 \le Y \le 24)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

표준편차가 2로 동일하므로 평행이동 관계

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745

④ 0.8185 ⑤ 0.9104



$f(12) \le g(20)$ 이므로 $m-2 \le 20 \le m+2 \rightarrow 18 \le m \le 22$

$P(21 \le Y \le 24)$은 확률밀도 함수의 그래프 개형상

평균 쪽에 가까워질수록 면적이 넓기에

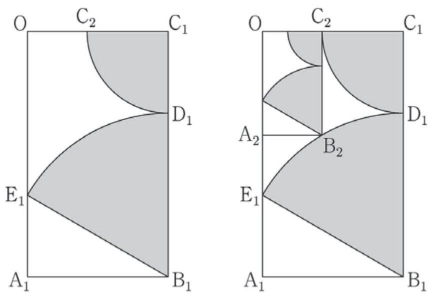
$m=22$일때 최댓값을 갖는다. $\longrightarrow Y \sim N(22, 2^2)$

$P(21 \le Y \le 24) = P\left(\frac{21-22}{2} \le Z \le \frac{24-22}{2}\right) = P(-0.5 \le Z \le 1)$

$= P(0 \le Z \le 0.5) + P(0 \le Z \le 1) = 0.1915 + 0.3413 = 0.5328$ //

(2022-예시문항-미적분26)

110 그림과 같이 $\overline{OA_1}=\sqrt{3}$, $\overline{OC_1}=1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 선분 B_1C_1 위의 $\overline{B_1D_1}=2\overline{C_1D_1}$인 점 D_1에 대하여 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1D_1}$인 원과 선분 OA_1의 교점을 E_1, 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 C_2라 하자. 부채꼴 $B_1D_1E_1$의 내부와 부채꼴 $C_1C_2D_1$의 내부로 이루어진 ◁ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2, 호 D_1E_1 위의 점 B_2와 점 C_2, 점 O를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 ◁ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



R_1 R_2 …

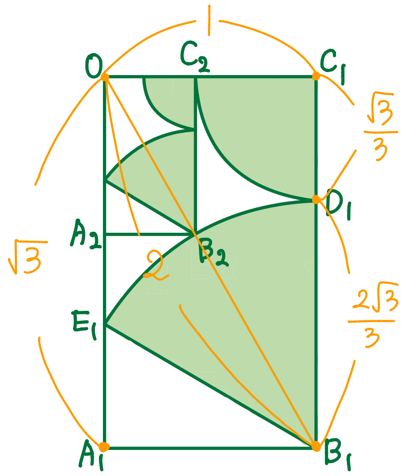
① $\frac{5+2\sqrt{3}}{12}\pi$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{6}\pi$

③ $\frac{3+2\sqrt{3}}{12}\pi$ ④ $\frac{1+\sqrt{3}}{6}\pi$

⑤ $\frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

이 문제 유형은 전형적인 <등비급수> 문제로써
넓이비와 첫째항(S_1의 값)을 찾아 계산하는게 핵심이다.

STEP Ⅰ. 길이 비를 구해 넓이 비를 결정하자



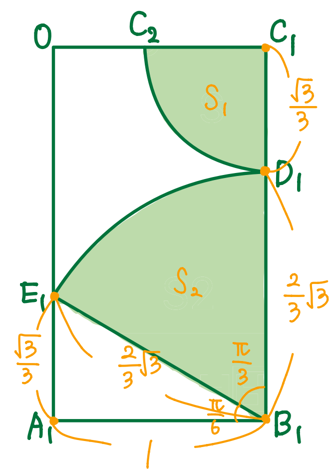
$\overline{OB_1} : \overline{OB_2} = 2 : 2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$(\overline{B_1B_2} = \overline{B_1D_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3})$

길이 비 $2 : 2-\frac{2\sqrt{3}}{3} \longrightarrow 1 : \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

넓이 비 $1 : \frac{12-6\sqrt{3}}{9} \longrightarrow 1 : \frac{4-2\sqrt{3}}{3}$

STEP Ⅱ. 첫째항 S_1의 값을 구하자



S_1의 넓이 + S_2의 넓이

$\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}$

$= \frac{11}{36}\pi$

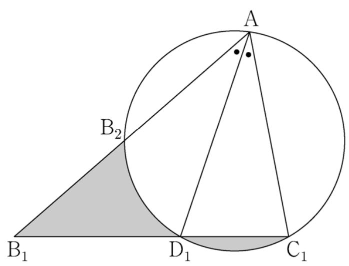
STEP Ⅲ. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$을 계산하자

$$\frac{\frac{11}{36}\pi}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{11\pi}{36-48+24\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi \ //$$

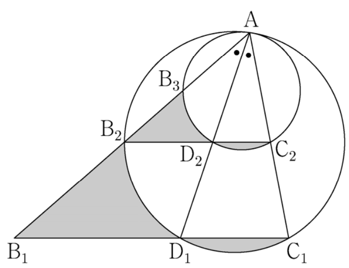
(2021(6)-가형20)

111 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$ 이고 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 AB_1C_1 이 있다. $\angle B_1AC_1$ 의 이등분선이 선분 B_1C_1 과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B_2 라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1 과 호 B_2D_1 로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1 과 호 C_1D_1 로 둘러싸인 부분인 ◿⌒ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 점 B_2 를 지나고 직선 B_1C_1 에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1 과 만나는 점을 각각 D_2, C_2 라 하자. 세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2 와 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B_3 이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2 와 호 B_3D_2 로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2 와 호 C_2D_2 로 둘러싸인 부분인 ◿⌒ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [4점]

R_1



R_2



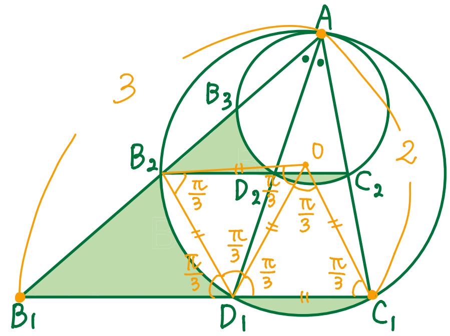
⋮ ⋮

① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$

④ $\frac{18\sqrt{3}}{23}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

이 문제 유형은 전형적인 <등비급수> 문제로써 넓이 비와 첫째항(S_1의 값)을 찾아 계산하는게 핵심이다.

STEP I. 길이 비를 구해 넓이 비를 결정하자



(1) △AB_1C_1에서 코사인 법칙에 따라

$\overline{B_1C_1}^2 = 9+4-2\cdot3\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=7$ $\therefore \overline{B_1C_1}=\sqrt{7}$

이 때, $\overline{AB_1}:\overline{A_1C_1}=\overline{B_1D_1}:\overline{D_1C_1}$ 이므로 $\overline{B_1D_1}=\frac{3}{5}\sqrt{7}$, $\overline{D_1C_1}=\frac{2}{5}\sqrt{7}$

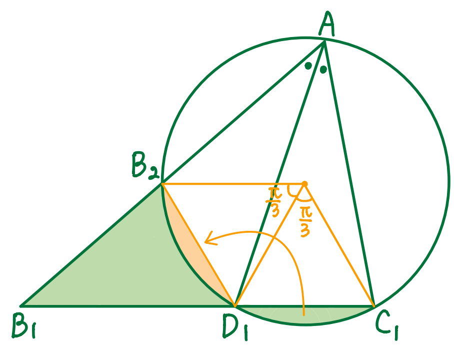
(2) △$B_1D_1B_2$ 에서 코사인 법칙에 따라

$\overline{B_1B_2}^2=\left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2-2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{49}{25}$ $\therefore \overline{B_1B_2}=\frac{7}{5}$

길이비 $\overline{AB_1}:\overline{AB_2}=3:\frac{8}{5}\longrightarrow 1:\frac{8}{15}$

넓이비 $1:\frac{64}{225}$

STEP II. 첫째항 S_1의 값을 구하자



$S_1=$ △$B_1D_1B_2$의 넓이 $=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{21}{50}\sqrt{3}$

STEP III. $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$을 계산하자

$$\frac{\frac{21}{50}\sqrt{3}}{1-\frac{64}{225}}=\frac{27\sqrt{3}}{46}$$ //

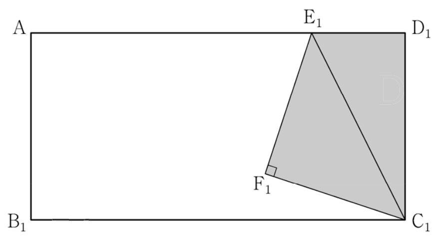
(2021-가형14)

112 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다. 사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

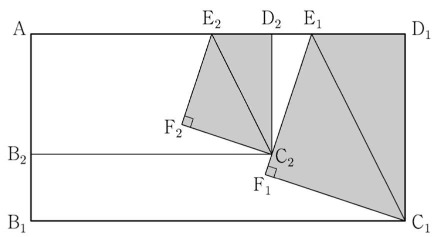
그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



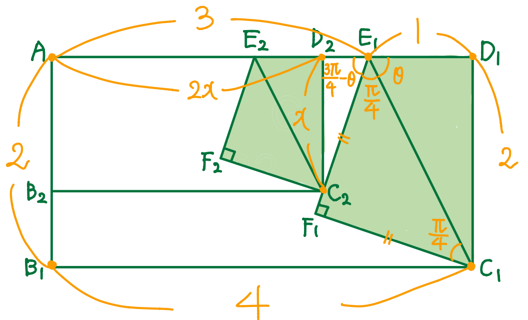
⋮ ⋮

① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$

④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

이 문제 유형은 전형적인 <등비급수> 문제로써 넓이 비와 첫째항(S_1의 값)을 찾아 계산하는게 핵심이다.

STEP Ⅰ. 길이 비를 구해 넓이 비를 결정하자



$\angle C_1E_1D_1=\theta$ 라고 하면 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt5}$, $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt5}$, $\tan\theta=2$이다.

이 때, $\overline{D_2C_2}=x$ 라고 하면 $\overline{AD_2}=2x$, $\overline{D_2E_1}=3-2x$ 이므로

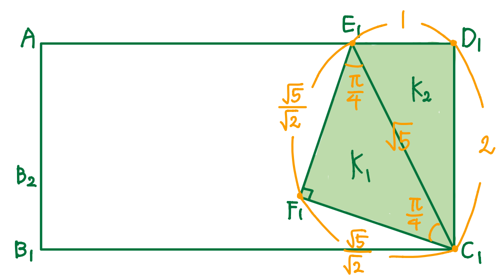
$\tan\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{\tan\frac{3\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{3\pi}{4}\cdot\tan\theta}=\dfrac{-1-2}{1-2}=3$

즉, $\tan\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{\overline{D_2C_2}}{\overline{D_2E_1}}=\dfrac{x}{3-2x}=3$ 이므로 $x=\frac{9}{7}$

길이 비 $2:\frac{9}{7}\to 1:\frac{9}{14}$

넓이 비 $1:\frac{81}{196}$

STEP Ⅱ. 첫째항 S_1의 값을 구하자



K_1의 넓이 $+$ K_2의 넓이

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt5}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt5}{\sqrt2}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4}$

STEP Ⅲ. $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$을 계산하자

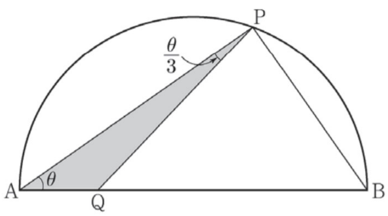
$\dfrac{\frac{9}{4}}{1-\frac{81}{196}}=\dfrac{441}{196-81}=\dfrac{441}{115}$

(2022-예시문항-미적분28)

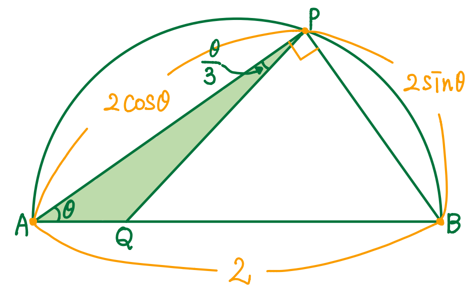
072 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있고, 선분 AB 위에 점 Q가 있다.

$\angle \mathrm{PAB}=\theta$이고 $\angle \mathrm{APQ}=\dfrac{\theta}{3}$일 때, 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 PB의 길이를 $l(\theta)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$) [4점]



① $\dfrac{1}{12}$　② $\dfrac{1}{6}$　③ $\dfrac{1}{4}$　④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{12}$



△APQ 에서 사인법칙에 따라

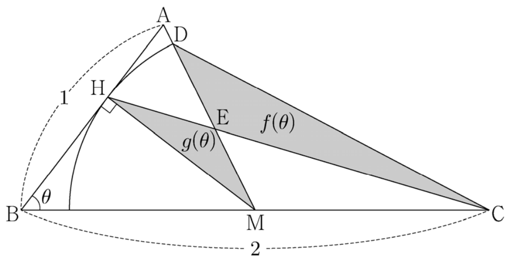
$$\frac{\overline{PQ}}{\sin\theta}=\frac{2\cos\theta}{\sin\left(\pi-\frac{4}{3}\theta\right)} \longrightarrow \overline{PQ}=\frac{2\cos\theta}{\sin\left(\pi-\frac{4}{3}\theta\right)}\cdot\sin\theta$$

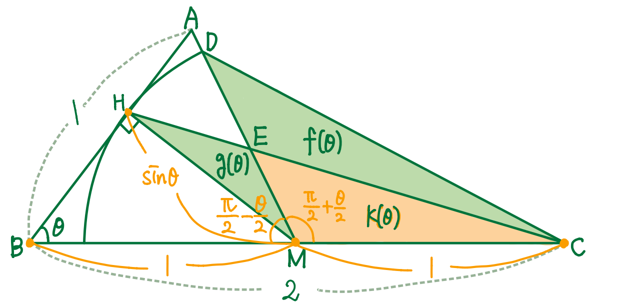
$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\times\cancel{2\cos\theta}\times\dfrac{2\cancel{\cos\theta}}{\frac{4}{3}\cancel{\sin\left(\pi-\frac{4}{3}\theta\right)}}\cdot\cancel{\sin\theta}\times\cancel{\sin\frac{\theta}{3}}\ \frac{1}{3}}{2\cancel{\sin\theta}}=\frac{1}{4}$$

(2021(6)-가형28)

073 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{MH}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자.
$\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]





△BMA가 이등변삼각형이므로 $\angle BMA=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$, $\angle BMH=\frac{\pi}{2}-\theta$

즉 $\angle HMD=\frac{\theta}{2}$

$f(\theta)-g(\theta)$

$=(f(\theta)+k(\theta))-(g(\theta)+k(\theta))$

$=\frac{1}{2}\times\overline{DM}\times\overline{MC}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)-\frac{1}{2}\times\overline{MH}\times\overline{MC}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times1\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)-\frac{1}{2}\times\sin\theta\times1\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)$

$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(f(\theta)+k(\theta))-(g(\theta)+k(\theta))}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times\sin\theta\times\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{\theta\times\theta^2}$ 1

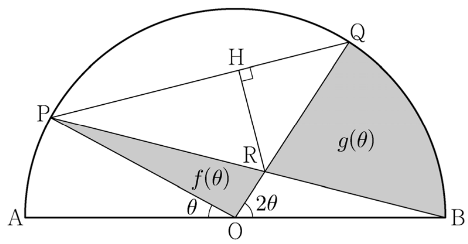
$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\theta}{2\cdot\theta^2\cdot(\underbrace{\cos\tfrac{\theta}{2}}_{1}+\underbrace{\cos\theta}_{1})}=\frac{1}{4}\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)-\left(1-\sin^2\theta\right)}{\theta^2}=\frac{1}{4}\lim_{\theta\to0+}\frac{\overset{1}{\sin^2\theta}-\overset{\frac{1}{4}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}}{\theta^2}$

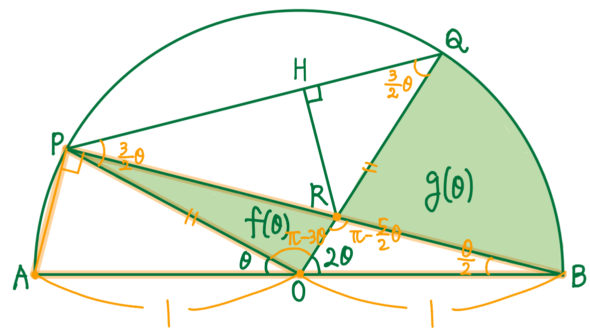
$=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$ 이므로 $80\cdot a=80\times\frac{3}{16}=15$

(2021(9)-가형28)

074 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{POA} = \theta$, $\angle \mathrm{QOB} = 2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





$\angle PBA = \frac{\theta}{2}$ 이므로 원주각, 중심각 관계에 따라 $\angle POA = \theta$

$\triangle OBR$에서 사인법칙을 적용하면

$\frac{\overline{BR}}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{OR}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sin(\pi - \frac{5}{2}\theta)}$ 이므로 $\overline{BR} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}$, $\overline{OR} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}$

$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{OR} \times \overline{OP} \times \sin(\pi - 3\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta} \times 1 \times \sin 3\theta$

$g(\theta) = \triangle OBQ$의 넓이 $- \triangle OBR$의 넓이 $= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 2\theta - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta} \times \sin 2\theta$

$\overline{RQ} = \overline{OQ} - \overline{OR} = 1 - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}$ 이므로 $\overline{RH} = \left(1 - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\right) \cdot \sin\frac{3}{2}\theta$

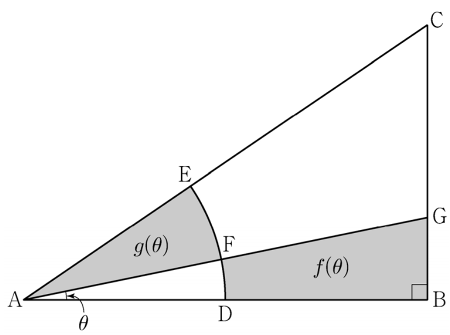
즉, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{RH}} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta} \times \sin 3\theta + \frac{1}{2} \times \sin 2\theta - \frac{1}{2} \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta} \times \sin 2\theta}{\left(1 - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\right) \cdot \sin\frac{3}{2}\theta}$

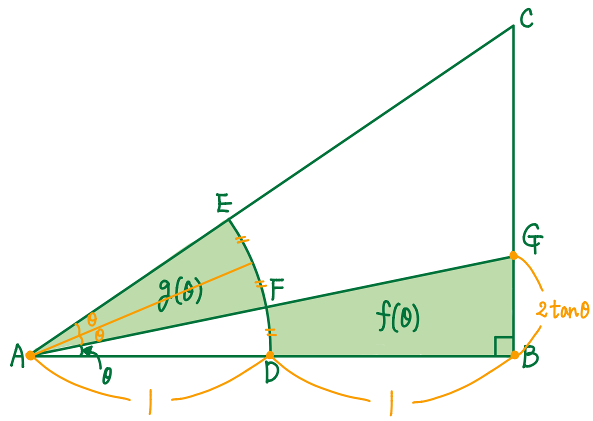
$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} \times 2}{\left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}\right) \times \frac{3}{2}} = \frac{11}{12}$ 이므로 $p+q = 23$

(2021-가형24)

075 그림과 같이 $\overline{AB} = 2$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC 와 만나는 점을 각각 D, E 라 하자. 호 DE 의 삼등분점 중 점 D 에 가까운 점을 F 라 하고, 직선 AF 가 선분 BC 와 만나는 점을 G 라 하자.
$\angle BAG = \theta$ 라 할 때, 삼각형 ABG 의 내부와 부채꼴 ADF 의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE 의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자.
$40 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [3점]





$$40 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} = 40 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\triangle GAB\text{의 넓이} - \text{부채꼴 FAD의 넓이}}{\text{부채꼴 EAD의 넓이} - \text{부채꼴 FAD의 넓이}}$$

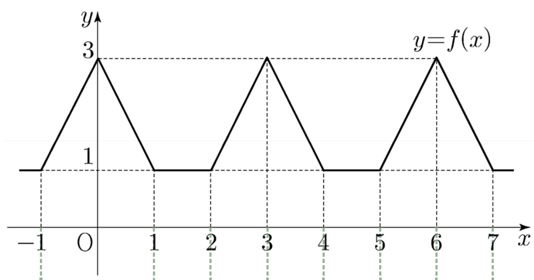
$$= 40 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 2\tan\theta - \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\theta}{\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 3\theta - \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\theta} = 40 \times \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = 60$$

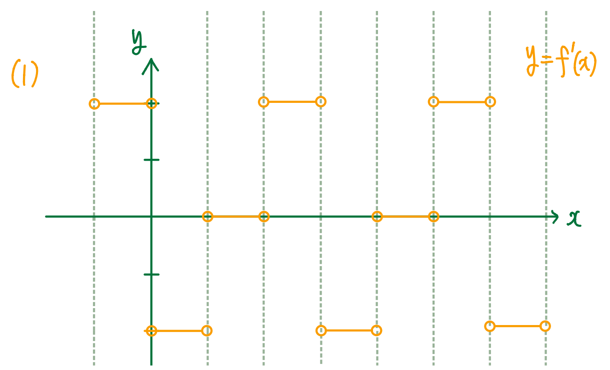
(2021(6)-가형30)

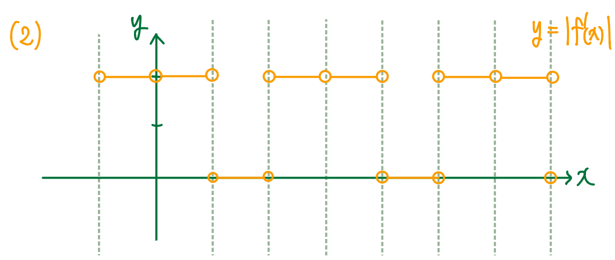
111 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0 \le x < 3$일 때 $f(x)=|x-1|+|x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

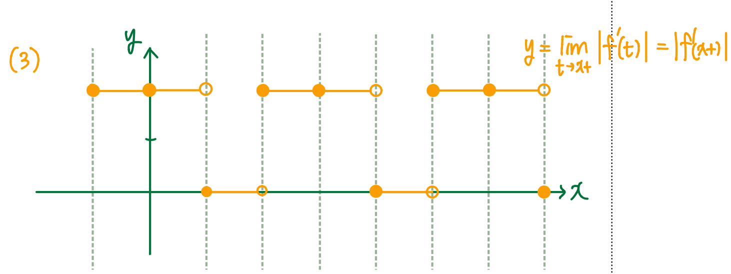
$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5,\ 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$(n은 자연수)라 할 때, $n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오. [4점]









$K(x)=f(2^x)$ 라고하면 $K'(x)=f'(2^x)\times 2^x\times \ln 2$

$g(x)=|\underbrace{K'(x+)}_{h\to 0+\text{이므로 우미분계수}}| = 2^x\times\ln 2\times|f'(2^x+)|$

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 a의 값을 관찰하기 위해

(3)에서 $\lim_{t\to x+}|f'(t)|=|f'(x+)|$가 불연속이 되는 x값들을 구해보자.

$x=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11\ \cdots$ 이다. (x가 3의 배수만 아니면 된다.)

$|f'(2^x)|$가 불연속이 되는 x값들을 구해보면

$-5<x<5$ 일 때 $\frac{1}{32}<2^x<32$ 이므로

$2^x=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11\ \cdots$ $(2^{a_1}=1,\ 2^{a_2}=2,\ 2^{a_3}=4\ \cdots)$

즉, 2^x는 1~31까지 3의 배수가 아닌 수이므로

위 식을 만족하는 x의 값은 21개이다 $\longrightarrow n=21$

$n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}=21+\sum_{k=1}^{21}\frac{g(a_k)}{\ln 2}=21+\sum_{k=1}^{21}\frac{2^{a_k}\times\cancel{\ln 2}\times|f'(2^{a_k}+)|}{\cancel{\ln 2}}$

이 때, $|f'(2^{a_k}+)|$는 $0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2\ \cdots$ 반복이고

$2^{a_1}=1,\ 2^{a_2}=2,\ 2^{a_3}=4,\ 2^{a_4}=5,\ 2^{a_5}=7,\ 2^{a_6}=8\ \cdots$ 이다.

$21+\sum_{k=1}^{21}\left(2^{a_k}\times|f'(2^{a_k}+)|\right)=21+2(2+5+8+11+14+17+20+23+26+29)$

$=21+\cancel{2}\cdot\frac{10\times(2+29)}{\cancel{2}}=331$

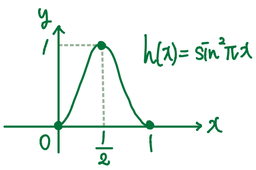
(2021-가형30)

112 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2\pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

$y=\sin^2\pi x$은 주기가 1인 함수이고 그래프 개형은 다음과 같다.



$h(x)=\sin^2\pi x$ 라고 하면 $h'(x)=2\pi\cos\pi x$

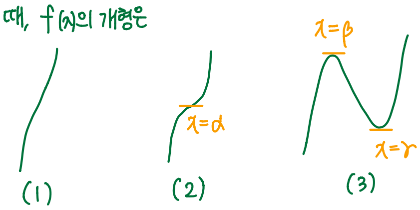
$g(x)=f(h(x))$

이 때, (가)조건 $0<x<1$에서 함수 $g(x)$는 연속이고 극대가 되는 x가 3개이므로 극솟값은 2~4개 이다.

$g'(x)$를 구해보면

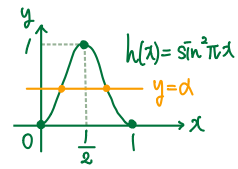
$g'(x)=\underbrace{f'(h(x))}_{\text{삼차함수가 극값을 갖는다}}\times\underbrace{h'(x)}_{\text{극값을 } x=\frac{1}{2}\text{에서 갖는다}}$

이 때, $f(x)$의 개형은



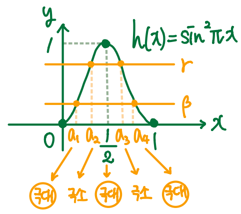
(1)은 $f'(h(x))$가 0이 되는 값은 없다.

(2)는 $f'(h(x))$가 0이 되는 $h(x)=\alpha$



이 때, $g(x)$의 극값은 극대 3개, 극소 2~4개이므로 $f'(h(x))=0$을 만족시키는 x값은 4~6개 여야 한다.
하지만 $f'(h(x))=0$을 만족시키는 x값이 2개이므로 모순

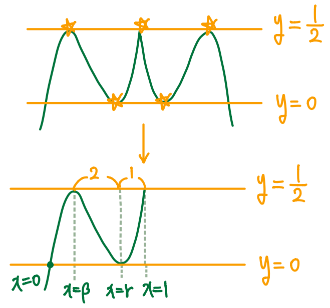
(3)은 $f'(h(x))$가 0이 되는 $h(x)=\beta$, $h(x)=\gamma$



$f'(h(x))=0$을 만족시키는 x값이 a_1, a_2, a_3, a_4 4개이므로 극대 3개, 극소 2개인 조건을 만족시킨다.

즉, 함수 $f'(h(x))$에서 $\underbrace{f(h(a_1))}_{=f(\beta)}=\underbrace{f(h(\tfrac{1}{2}))}_{f(1)}=\underbrace{f(h(a_4))}_{=f(\gamma)}\longrightarrow$ 극댓값 동일

$h(x)=\sin^2\pi x$ 이므로 $h(\frac{1}{2})=1$



$f(x)=(x-\beta)^2(x-1)+\frac{1}{2}$

이 때, 최솟값이 $f(\gamma)=0$

$\gamma=\frac{\beta+2}{3}$ 이므로

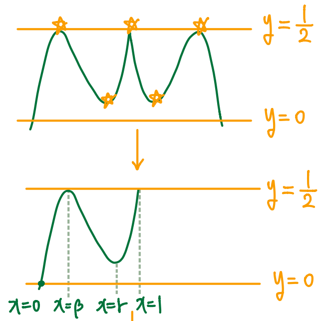
$\left(\frac{\beta+2}{3}-\beta\right)^2\left(\frac{\beta+2}{3}-1\right)+\frac{1}{2}=0$

$\left(\frac{2-2\beta}{3}\right)^2\left(\frac{\beta-1}{3}\right)+\frac{1}{2}=0$

$(\beta-1)^3=-\frac{27}{8}$

$\beta=-\frac{1}{2}$

(이 때, $0<\beta<1$ 이므로 모순)



$f(x)=(x-\beta)^2(x-1)+\frac{1}{2}$

이 때, 최솟값이 $f(0)=0$

$f(0)=-\beta^2+\frac{1}{2}=0\longrightarrow\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(0<\beta<1)$

즉, $f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1)+\frac{1}{2}$ 이므로

$f(2)=\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=5-2\sqrt{2}$

$\therefore a^2+b^2=25+4=29$

방정식에의 활용

(2012-가형18)

187 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le \pi\}$인 함수 $f(x)=2x\cos x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $f'(a)=0$이면 $\tan a=\dfrac{1}{a}$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지는 a가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$에 있다.

ㄷ. 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f'(x)=2\cos x-2x\sin x$

$f'(a)=2\cos a-2a\sin a=0$ 이면 ($f'(0)=2$ 이므로 $a\neq 0$)

$2\cos a=2a\sin a \longrightarrow \tan a=\frac{1}{a}$ 이다. (참)

ㄴ. $f'(x)=2\cos x-2x\sin x$ 에서

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}-2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\sqrt{2}>0$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}-2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=1-\frac{\pi}{3}<0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f'(a)=0$인 실수 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$에 존재한다.

따라서 극댓값을 가지는 a가 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$에 있다. (참)

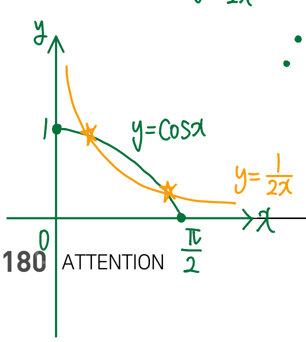
ㄷ. $2x\cos x=1$에서 $x\neq 0$일 때 $\cos x=\frac{1}{2x}$ 이므로

$y=\cos x$ 와 $y=\frac{1}{2x}$ 의 교점의 개수를 보자

어느 그래프가 위에 있는지 알아보기 위해 $x=\frac{\pi}{3}$일때 함숫값을 구해보면

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{2\pi}$ 이다. $\cos\frac{\pi}{3}>\frac{3}{2\pi}$ 이므로

$y=\cos x$ 의 그래프가 $y=\frac{1}{2x}$ 그래프 위에 존재한다.

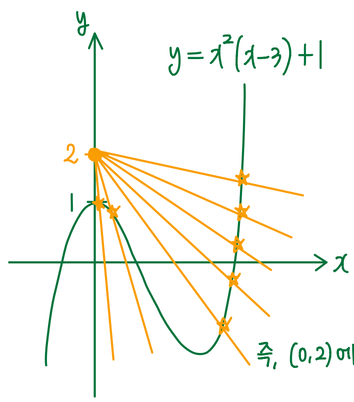


∴ 그래프는 왼쪽과 같으므로 구간 $[0,\frac{\pi}{2}]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 두 실근의 개수는 2이다. (참)

(2012-가형19)

188 실수 m에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은? [4점]

① -3 ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{3}{2}$
④ $\dfrac{15}{4}$ ⑤ 6



곡선 밖의 점 $(0,2)$에서 곡선에 접선을 그어보면 대부분의 점에서 한 점에서 만난다. 여기서 주요 포인트는 접선이 변곡점을 지나는지 유무를 따져봐야 한다.

$y'=3x^2-6x$

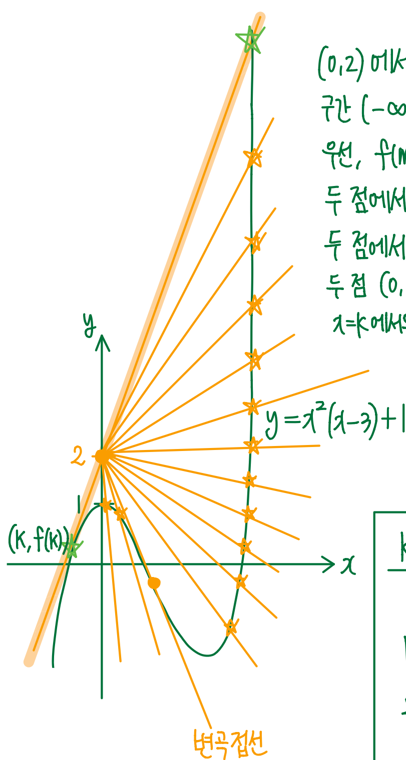
$y''=6x-6=0 \longrightarrow x=1$ 일 때

이계도함수의 부호변화가 생기므로 변곡점의 x좌표이다.

따라서 변곡점 $(1,-1)$에서의 접선의 방정식은

$y=-3x+2$ 이므로 y절편은 $(0,2)$이고

즉, $(0,2)$에서 곡선에 접선을 그으면 변곡 접선이고 한 점에서 만난다.



$(0,2)$에서 접선의 방정식의 기울기 m이 구간 $(-\infty, a)$ 까지 연속이므로 최댓값 a를 구해보자.

우선, $f(m)=1$ 인데 왼쪽 그래프처럼 두 점에서 만나는 순간 부터 $f(m)=2$가 된다.

두 점에서 만나기 시작할 때의 접점의 x좌표를 k라 하면 두 점 $(0,2)$와 $(k,f(k))$의 평균변화율과 $x=k$에서의 미분계수가 같다.

$\dfrac{k^3-3k^2-1}{k}=3k^2-6k$

$k^3-3k^2-1=3k^3-6k^2$

$2k^3-3k^2+1=0 \longrightarrow (k-1)^2(2k+1)=0$

$\therefore k=-\frac{1}{2}\ (k<0)$ 기울기 $m=\frac{15}{4}$

(2021(9)-가형20)

036 함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt \quad (x\ge 0)$$

이 $x=a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$k^2<a_6<(k+1)^2$인 자연수 k의 값은? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

$x-t=A$로 치환하면 $t=x-A$, $-dt=dA$

$g(x)=\int_x^0 -(x-A)f(A)\,dA=\int_0^x (x-A)f(A)\,dA = x\int_0^x f(A)\,dA-\int_0^x Af(A)\,dA$

$g'(x)=\int_0^x f(A)\,dA+\cancel{xf(x)}-\cancel{xf(x)}$

$g'(x)=\int_0^x \sin(\pi\sqrt{A})\,dA \longrightarrow$

$\pi\sqrt{A}=X$로 치환하면 $\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{A}}dA=dX \longrightarrow dA=\frac{2X}{\pi^2}dX$

$g'(x)=\int_0^x \sin(\pi\sqrt{A})\,dA=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi\sqrt{x}} X\sin X\,dX$ 부분적분 계산

$\frac{2}{\pi^2}\left(\left[-X\cos X\right]_0^{\pi\sqrt{x}}+\int_0^{\pi\sqrt{x}}\cos X\,dX\right)=-\frac{2}{\pi}\sqrt{x}\cos(\pi\sqrt{x})+\frac{2}{\pi^2}\sin(\pi\sqrt{x})$

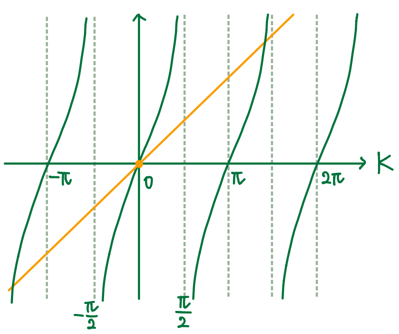
$=\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi\sqrt{x})\{\tan(\pi\sqrt{x})-\pi\sqrt{x}\}$ $\pi\sqrt{x}=K$로 치환하면

$=\frac{2}{\pi^2}\cos K\{\tan K-K\}=0$을 만족시키는 K의 값의 후보는

$\cos K=0$ or $\tan K-K=0$이다.

이 때, $\cos K=0$을 만족시키는 K의 값은 $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\cdots$

$\tan K-K=0$ 즉, $\tan K=K$를 만족시키는 K의 값은



$\tan K=K$ $(K=\pi\sqrt{x})$의 교점이므로 정확한 값은 구할 수 없고 $K>0$인 구간으로 구하면

$(\pi,2\pi),(2\pi,3\pi),(3\pi,4\pi),(4\pi,5\pi)\cdots$ 등이 그 후보이다.

이 때, $g''(x)<0$ 이면 극대이므로

$g''(x)=\sin(\pi\sqrt{x})=\sin K\ (K=\pi\sqrt{x})<0$을

만족시키는 K의 값의 범위는 $(\pi,2\pi),(3\pi,4\pi),(5\pi,6\pi)\cdots$ 등이 되므로

이를 만족시키는 K의 값을 차례대로 $K_1,K_2,K_3,\cdots$ 이라고 하면

$\pi<K_1<2\pi \longrightarrow \cancel{\pi}<\cancel{\pi}\sqrt{a_1}<2\cancel{\pi}$

$3\pi<K_2<4\pi \longrightarrow 3\cancel{\pi}<\cancel{\pi}\sqrt{a_2}<4\cancel{\pi}$

$5\pi<K_3<6\pi \longrightarrow 5\cancel{\pi}<\cancel{\pi}\sqrt{a_3}<6\cancel{\pi}$

$7\pi<K_4<8\pi \longrightarrow 7\cancel{\pi}<\cancel{\pi}\sqrt{a_4}<8\cancel{\pi}$

$9\pi<K_5<10\pi \longrightarrow 9\cancel{\pi}<\cancel{\pi}\sqrt{a_5}<10\cancel{\pi}$

$11\pi<K_6<12\pi \longrightarrow 11\cancel{\pi}<\cancel{\pi}\sqrt{a_6}<12\cancel{\pi}$

$\therefore 11^2<a_6<12^2$ 이므로 $K=11$