OVER THE

확률과 통계

트윈 기출

머리말

가장 먼저, 저는 문과가 아닌 이과라는 점을 꼭 말씀드리고 싶습니다. 저희 학교 외의 다른 좋은 학교들에선 (응용)통계학과가 문과에 있어 저를 문과로 오해하시는 분이 많으십니다. 그러나 저희 학교에서는 통계학과가 수리통계학부에서 분리된 지 얼마 되지도 않았습니다. 또한 저희 통계학과는 수리과학부와 대부분의 활동, 수업을 같이 하는 형제학과나 다름없는 곳입니다. 이 자리를 빌어 저는 엄연히 가형을 응시한 이과이며, 자연과학대 소속임을 밝힙니다.

이 책을 출판하는 과정이 참 고달팠습니다. 모종의 사정으로 〈인투더 시리즈〉를 집필한 일격필살팀과의 협업이 무산되는 바람에 출판사도 바뀌고 공동 집필에서 단독 집필로 바뀌었지요. 이로 인해 계획보다 업무 부담이 배 이상으로 늘었습니다. 게다가 익숙치 않았던 LaTeX을 익히고 작업하는 과정도 매우 힘들었습니다.

만드는 과정에서 우여곡절이 많았던 책이지만, 그만큼 더 훌륭하고 좋은 책을 완성할 수 있도록 최선을 다했습니다. 이 책을 공부하시는 분들도 제가 쏟은 노력만큼 이 책을 열심히 공부하셔서 좋은 결과를 얻으시길 바라겠습니다.

OVER THE 확률과 통계 : 트윈 기출은 수능출제기관인 한국교육과정평가원이 2005 ~ 2021학년도 6월/9월 모의평가와 수능에 이미 출제한 문제(이를 기출문제라 합니다) 중에서 〈확률과 통계〉(이하 확통)의 문항을 수록한 문제집입니다. **트윈**인 이유는 주요 문항을 2회독하며 체계적으로 기출분석을 하도록 제작되었기 때문입니다. 단언컨대 어떤 기출문제집보다도 수능 확통에 최적화된 책이라 장담할 수 있습니다.

수능 시험지에는 '이 문제는 확통의 어떤 개념을 쓰는 문제이다'라고 문제의 풀이법이나 유형이 직접 적혀 있지 않습니다. 따라서 수능 실전 상황에서 확통 문제를 만났을 때 가장 중요한 것은 문제의 상황을 분석하고, **필요한 개념과 논리가 무엇인지 파악하는 것**입니다. 그러나 기존의 기출문제집들은 이러한 확통의 과목적 특성을 전혀 고려하지 않은 채 '이 문제는 중복조합을 쓰는 문제이다', '이 문제는 조건부확률을 써서 풀이한다'고 문제를 스포일러하는 경우가 많습니다. 이 책은 0회독으로 기본기 확인, 1회독으로 스포일러 없이 단원별로 1회독, 2회독으로 본격적 유형별 기출분석으로 약점 집중 공략이 가능케 했습니다.

평가원은 확통에서 의도적으로 고난도 문항의 출제를 지양하는 모습을 보이고 있습니다. 평가원에서 출제된 확통 문항 중 그나마 고난도라 부를 만한 것은 십중팔구 수능이 아닌 6월/9월 모의평가에 출제된 문항이며, 그마저도 교육청/사관학교/경찰대(일명 교사경) 문제와 사설기관 N제/모의고사 문제에 비하면 굉장히 간단한 편입니다. 간단히 말하면, 수능이 아닌 시험에서나 확통을 어렵게 낸다는 겁니다.

그렇다고 확통을 경시할 수는 없습니다. **어렵지는 않게 낼 뿐**이지, 평가원은 항상 학생들의 약점을 귀신같이 찾아내어 **허를 찌르는 방향**으로 출제해왔기 때문입니다. 그래서 킬러문항도 다 맞춘 학생들이 확통 3점이나 4점 문항을 틀리고 만점 달성에 실패하는 일이 비일비재합니다.

이를 막기 위해 해설을 풍성하게 구성했습니다. 모든 풀이는 저자인 제가 모든 문항에 대해 손수 작성하였습니다. 문제의 조건을 철저히 분석하여 사용해야 할 개념이 무엇인지 파악하도록 합니다. 한 문제에 여러 풀이를 제시할 경우, 앞에 제시된 풀이일수록 별다른 발상 없이 접근할 수 있는 풀이이고, 뒤에 제시된 풀이일수록 확통에 대한 깊은 이해를 바탕으로 한 간단한 풀이입니다. 또한 각종 상황에 대한 팁과 주의점까지 다양하게 소개했습니다. 여러분의 수능 확통 정복을 위한 모든 것을 담았다고 해도 과언이 아닐 것이니, 기대하셔도 좋습니다.

OVER THE 확률과 통계 : 트윈 기출은 0회독 몸풀기, 1회독 단원별, 2회독 유형별로 나뉩니다. 0회독과 1회독에 배치된 순서를 기준으로 해설을 수록하였으며, 2회독은 문제별로 1회독의 해설 페이지를 가리킵니다.

0회독 몸풀기 : 본격적 기출분석을 소화할 수 있는 상태인지 테스트

만약 **OVER THE 확률과 통계 : 개념 정복**을 공부하고 오셨다면, 몸풀기를 생략해도 됩니다.

앞서 설명했듯, 기출문제는 수능 수험생에게 가장 중요한 문제들입니다. 이런 소중한 기출문제들을 기본기가 부족한 상태에서 대충 풀기만 한다면 아까운 평가원 기출문제를 낭비하는 셈입니다. 따라서 몸풀기에서는 쉬운 평가원 기출문제들만을 제시하였고, 이를 모두 수월하게 풀어야만 1~2회독에 돌입할 수 있습니다.

1회독 단원별 : 문제 유형을 스포일러하지 않는, 확통에 최적화된 구성

1회독은 되도록 6월 이전, 아무리 늦어도 8월에는 학습하는 것이 좋습니다.

1회독에서는 고1 수학(생략 가능) / 경우의 수 / 확률 / 통계로만 나뉘어 있고, 각 문제의 유형을 알려주지 않고 서서히 어려워지도록 배열했습니다. 이를 통해 쉬운 문제부터 어려운 문제까지 차근차근 학습해나가며 문제의 상황을 분석하고, 이에 알맞는 개념을 활용하는 연습을 할 수 있도록 구성했습니다.

1회독에서는 문제의 정답 유무와 관계없이 모든 해설을 완벽하게 공부해야 합니다. 만약 여기서 해설을 제대로 공부하지 않고 넘어가면, 2회독을 하더라도 기출을 제대로 분석하기 어려우니 꼭 공부하고 넘어갑시다.

2회독 유형별 : 흐름을 분석하고 약점을 보완하며 기출 이해도 향상

2회독은 아무리 늦어도 10월에는 학습하는 것이 좋습니다.

2회독에서는 시중 기출문제집들처럼 세부 유형별로 분류한 후, 출제연월 순서대로 배열하였습니다. 따라서 각 유형들이 어떻게 상황을 약간씩 변형시키며 발전되어 왔는지를 분석할 수 있을 것입니다. 또한 자신이 자주 틀리는 약점 유형을 찾고, 이를 피드백하며 공략할 수도 있습니다.

유형별로 제시된 다양한 상황을 보면서 어떻게 상황을 분석하고, 적용해야 하는 개념을 찾아내야 하는지 공부하시길 바랍니다. 해설의 처음 부분, 즉 상황을 해석하는 부분에 집중해서 공부하다 보면, 1회독 때보다 더 기출문제에 대한 이해도가 올라가 있을 것입니다.

OVER THE 확률과 통계 시리즈를 소개합니다.

OVER THE 확률과 통계 : 트윈 기출은 시리즈 3부작 중 2부에 해당합니다. 1부 는 개념 정복과 응용을 위한 **OVER THE 확률과 통계 : 개념 정복**이고, 3부는 최상위권용 심화개념과 고난도 교사경 문항을 풀이를 다루는 **OVER THE 확률과 통계 : 심화 문풀**입니다. 만약 0회독 몸풀기가 쉽게 해결되지 않거나, 1회독 단원별에서 잘 갈피를 잡지 못한다면 1부인 **개념 정복**을 학습한 후 돌아오시기 바랍니다. 2부인 **트윈 기출**을 끝냈고 심화된 내용의 확통을 공부하거나 고난도 문제를 풀이하고 싶다면 **심화 문풀**을 학습하시면 좋습니다.

Contents

OVER THE 확률과 통계

트윈 기출

0회독

쉬운 문제를 풀며 기본기를 재확인

0.1 몸풀기 : 경우의 수

01

2006학년도 6월 평가원 수리 나형 9번

A지역에는 세 곳, B지역에는 네 곳, C지역에는 다섯 곳, D지역에는 여섯 곳의 관광지가 있다. 이 중에서 세 곳을 선택하여 관광하려고 할 때, 선택한 세 곳이 모두 같은 지역이 되는 경우의 수는?

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

02

2006학년도 6월 평가원 수리 나형 21번

1, 2, 3, 4, 5, 6을 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수 중에서 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3의 배수인 자연수의 개수를 구하시오. [3점]

03

2006학년도 6월 평가원 수리 가형 22번

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서 A로의 함수 중에서 다음 두 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 함수 f는 일대일대응이다.
(나) 정의역 A의 한 원소 n에 대하여
$f(n+1) - f(n) = 5$이다.

04

2006학년도 9월 평가원 수리 나형 6번

다항식 $(1+2x)^6(1-x)$의 전개식에서 x^4의 계수는? [3점]

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

05

2007학년도 6월 평가원 수리 나형 9번

집합 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3이 $2a_2 = a_1 + a_3$을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$이다.) [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

06

2007학년도 6월 평가원 수리 나형 19번

$(3x+y)^6$의 전개식에서 x^2y^4의 계수를 구하시오. [3점]

07

2007학년도 6월 평가원 수리 가형 15번

어느 회사에서 사원 연수를 위하여 네 지역 서울, 부산, 광주, 대구에서 각각 3명씩 모두 12명의 사원을 선발하였다. 같은 지역에서 선발된 사원끼리는 같은 조에 속하지 않도록 각 지역에서 한 명씩 선택하여 4명으로 구성된 3개의 조로 나누는 방법의 수는? [3점]

① 80 ② 144 ③ 216
④ 240 ⑤ 288

08

2007학년도 9월 평가원 수리 나형 6번

여학생 2명과 남학생 4명이 순서를 정하여 차례로 뜀틀 넘기를 할 때, 여학생 2명이 연이어 뜀틀 넘기를 하게 되는 경우의 수는? [3점]

① 120 ② 180 ③ 240 ④ 300 ⑤ 360

09

2007학년도 9월 평가원 수리 나형 30번

다항식 $(1+ax)^7$의 전개식에서 x의 계수가 14일 때, x^2의 계수를 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

10

2007학년도 9월 평가원 수리 가형 24번

수련회에 참가한 여학생 5명과 남학생 6명을 4개의 방에 배정하려고 한다. 여학생은 1호실에 3명, 2호실에 2명을 배정하고, 남학생은 3호실과 4호실에 각각 3명씩 배정하는 방법의 수를 구하시오. [4점]

OVER THE 확률과 통계
트윈 기출

1회독

스포일러 없이 수능에 최적화된 학습

01

2011학년도 9월 평가원 수리 나형 26번

$1 \le m \le 3,\ 1 \le n \le 8$인 두 자연수 $m,\ n$에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

정답과 해설 66쪽

02

2006학년도 9월 평가원 수리 나형 8번

집합 $S_1,\ S_2,\ S_3$은 다음과 같다.

$$S_1 = \{1,\ 2\}$$

$$S_2 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

$$S_3 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

집합 S_1에서 한 개의 원소를 선택하여 백의 자리의 수, 집합 S_2에서 한 개의 원소를 선택하여 십의 자리의 수, 집합 S_3에서 한 개의 원소를 선택하여 일의 자리의 수로 하는 세 자리의 수를 만들 때, 각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 수의 개수는? [3점]

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

정답과 해설 66쪽

03

2018학년도 6월 평가원 수학 가형 27번

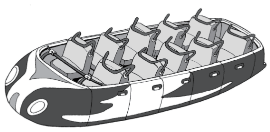
집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합을 두 개 선택할 때, 선택한 두 집합이 서로 같지 않은 경우의 수를 구하시오. [4점]

정답과 해설 67쪽

04

2007학년도 6월 평가원 수리 나형 30번

남학생 2명과 여학생 2명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 한 줄에 2개의 의자가 있고 모두 5줄로 되어 있다. 남학생 1명과 여학생 1명이 짝을 지어 2명씩 같은 줄에 앉을 때, 4명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오. [4점]



정답과 해설 67쪽

05

2005학년도 6월 평가원 수리 나형 22번

2005학년도 대학수학능력시험에서 과학탐구 영역을 선택하는 학생은 물리 I, 화학 I, 생물 I, 지구과학 I, 물리 II, 화학 II, 생물 II, 지구과학 II의 8개 과목 중에서 최대 4과목까지 응시할 수 있다. 단, 물리 II, 화학 II, 생물 II, 지구과학 II의 4개 과목에서는 2과목까지만 선택할 수 있다. 어떤 학생이 과학탐구 영역에서 3개 과목을 선택하려고 할 때, 선택 가능한 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]

정답과 해설 68쪽

06

2007학년도 6월 평가원 수리 가형 24번

8종류의 과자 A, B, C, D, E, F, G, H로 다음 조건에 따라 세트 상품을 만들려고 한다.

(가) 각 세트에는 서로 다른 4종류의 과자를 각각 한 개씩 담는다.

(나) A 또는 B를 담는 경우에는 A와 B를 같은 세트에 담는다.

(다) A, B, C 모두를 같은 세트에 담지 않는다.

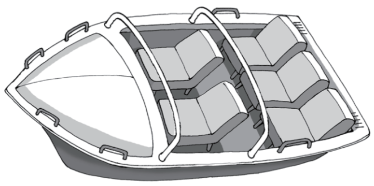
서로 다른 세트 상품을 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오. [4점]

정답과 해설 68쪽

07

2007학년도 수능 수리 나형 23번

어른 2명과 어린이 3명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 앞줄에 2개, 뒷줄에 3개의 의자가 있다. 어린이가 어른과 반드시 같은 줄에 앉을 때, 5명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오. [4점]



정답과 해설 69쪽

08

2020학년도 6월 평가원 수학 가형 25번

집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\rightarrow X$의 개수를 구하시오. [3점]

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 4이다.
(나) $f(a)=a$인 X의 원소 a의 개수는 3이다.

정답과 해설 69쪽

09

2005학년도 9월 평가원 수리 가형 25번

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 함수 $f: A \to A$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 함수 f는 일대일 대응 (나) $f(1) = 7$ (다) $k \geq 2$이면 $f(k) \leq k$

정답과 해설 70쪽

10

2019학년도 9월 평가원 수학 가형 18번

다음은 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$의 치역 A가 $n(A) = 4$이고, 집합 A의 모든 원소의 합이 홀수인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

(i) 공역 X의 원소 중 짝수인 원소가 2개이므로 집합 A의 네 원소 중 세 원소는 홀수이고 한 원소는 짝수이다.
따라서 집합 X의 원소 중에서 집합 A의 네 원소를 택하는 경우의 수는 2이다.

(ii) 정의역 X를 4개의 부분집합으로 분할할 때, 4개의 부분집합의 원소의 개수는 각각 2, 1, 1, 1이 되어야 한다.
따라서 집합 X를 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 $\boxed{(\text{가})}$이다.

(iii) (i)과 (ii)의 각 경우에 대하여 집합 X를 분할한 4개의 부분집합을 집합 A의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $\boxed{(\text{나})}$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{(\text{다})}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a + b + c$의 값은? [4점]

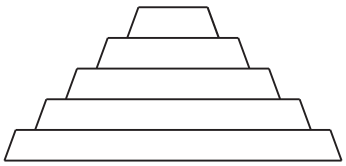
① 498　② 502　③ 506　④ 510　⑤ 514

정답과 해설 70쪽

11

2009학년도 6월 평가원 수리 가형 25번

그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오. [4점]

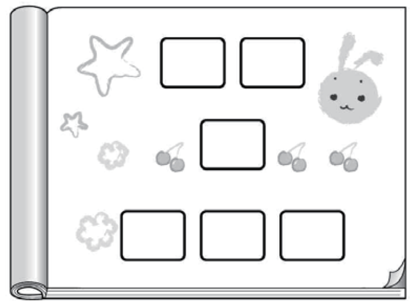


정답과 해설 71쪽

12

2010학년도 9월 평가원 수리 나형 28번

다음 그림의 빈칸에 6장의 사진 A, B, C, D, E, F를 하나씩 배치하여 사진첩의 한 면을 완성할 때, A와 B가 이웃하는 경우의 수는? (단, 옆으로 이웃하는 경우만 이웃하는 것으로 한다.) [4점]



① 128　② 132　③ 136　④ 140　⑤ 144

정답과 해설 72쪽

13

2011학년도 6월 평가원 수리 나형 23번

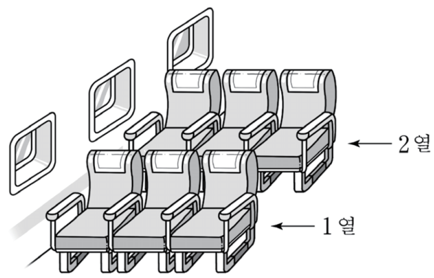
A, B 두 사람이 서로 다른 4개의 동아리 중에서 2개씩 가입하려고 한다. A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개 이하가 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 가입 순서는 고려하지 않는다.) [4점]

정답과 해설 72쪽

14

2009학년도 9월 평가원 수리 가형 23번

할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아들, 딸로 구성된 가족이 있다. 이 가족 6명이 그림과 같은 6개의 좌석에 모두 앉을 때, 할아버지, 할머니가 같은 열에 이웃하여 앉고, 아버지, 어머니도 같은 열에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. [4점]



정답과 해설 73쪽

15

2006학년도 수능 수리 나형 28번

1부터 30까지의 홀수 중에서 서로 다른 두 수를 선택할 때, 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는? [4점]

① 43 ② 41 ③ 39 ④ 37 ⑤ 35

정답과 해설 74쪽

16

2010학년도 수능 수리 가형 12번

다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{n}\mathrm{C}_{k}}{{}_{n+4}\mathrm{C}_{k}} = \frac{n+5}{5}$가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉

(1) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{{}_{1}\mathrm{C}_{0}}{{}_{5}\mathrm{C}_{0}} + \frac{{}_{1}\mathrm{C}_{1}}{{}_{5}\mathrm{C}_{1}} = \frac{6}{5},\ (\text{우변}) = \frac{1+5}{5} = \frac{6}{5}$$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때, 등식 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}} = \frac{m+5}{5}$가

성립한다고 가정하자. $n=m+1$일 때,

$\displaystyle\sum_{k=0}^{m+1} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}} = \boxed{(가)} + \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}}$ 이다. 자연수

l에 대하여 ${}_{l+1}\mathrm{C}_{k+1} = \boxed{(나)} \cdot {}_{l}\mathrm{C}_{k}$ $\quad (0 \le k \le l)$

이므로

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}} = \boxed{(다)} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{m+1} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}} = \boxed{(가)} + \boxed{(다)} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}$$

$$= \frac{m+6}{5}$$

이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{l+2}{k+2}$	$\frac{m+1}{m+4}$
②	1	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+5}$
③	1	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+4}$
④	$m+1$	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+5}$
⑤	$m+1$	$\frac{l+2}{k+2}$	$\frac{m+1}{m+4}$

정답과 해설 74쪽

1.1 단원별 : 고1 기출(생략 가능)

01

2011학년도 9월 평가원 수리 나형 26번

$1 \le m \le 3$, $1 \le n \le 8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는? [3점]

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

$\sqrt[3]{n^m} = n^{\frac{m}{3}}$ 이므로, 경우가 더 적은 m의 값을 기준으로 분류해봅시다.

(1) $m = 1$이면 n이 어떤 자연수의 세제곱일 때 $n^{\frac{1}{3}}$이 자연수가 됩니다. 즉 $n = 1,\ 8$이 주어진 조건을 만족시킵니다.

(2) $m = 2$이면 n이 어떤 자연수의 세제곱일 때 $n^{\frac{2}{3}}$이 자연수가 됩니다. 즉 $n = 1,\ 8$이 주어진 조건을 만족시킵니다.

(3) $m = 3$이면 $\sqrt[3]{n^m} = n$이 되어 모든 n이 주어진 조건을 만족시킵니다.

따라서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $2 + 2 + 8 = 12$입니다.

정답 : ④

02

2006학년도 9월 평가원 수리 나형 8번

집합 S_1, S_2, S_3은 다음과 같다.

$$S_1 = \{1,\ 2\}$$

$$S_2 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

$$S_3 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

집합 S_1에서 한 개의 원소를 선택하여 백의 자리의 수, 집합 S_2에서 한 개의 원소를 선택하여 십의 자리의 수, 집합 S_3에서 한 개의 원소를 선택하여 일의 자리의 수로 하는 세 자리의 수를 만들 때, 각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 수의 개수는? [3점]

① 8　② 12　③ 16　④ 20　⑤ 24

S_1에서 1 또는 2를 고르고, S_1에서 고른 수를 제외한 S_2의 원소를 고르고, 앞에서 고른 두 수를 제외한 S_3의 원소를 고르면 됩니다. 따라서 수의 개수는 $2 \times 3 \times 4 = 24$입니다.

정답 : ⑤

03

2018학년도 6월 평가원 수학 가형 27번

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합을 두 개 선택할 때, 선택한 두 집합이 서로 같지 않은 경우의 수를 구하시오. [4점]

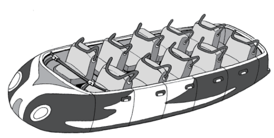
집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 원소의 개수가 5이므로, 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$입니다. 한편 조건을 만족시키기 위해서는 서로 다른 두 집합을 선택해야 합니다. 따라서 서로 다른 10개의 부분집합 중에서 서로 다른 2개의 집합을 선택하는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$입니다.

정답 : 45

04

2007학년도 6월 평가원 수리 나형 30번

남학생 2명과 여학생 2명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 한 줄에 2개의 의자가 있고 모두 5줄로 되어 있다. 남학생 1명과 여학생 1명이 짝을 지어 2명씩 같은 줄에 앉을 때, 4명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오. [4점]



풀이 1) 자리를 정하고 짝짓기

남학생 1명과 여학생 1명이 짝을 지어 2명씩 같은 줄에 앉아야 합니다. 이때 남학생 2명을 먼저 앉히는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_1 \times {}_8\mathrm{C}_1 = 80$, 남학생 2명의 옆자리에 각각 여학생을 하나씩 앉히는 경우의 수는 $2!$입니다. 따라서 구하는 경우의 수는 $80 \times 2 = 160$입니다.

풀이 2) 짝짓고 자리를 정하기

남학생 1명과 여학생 1명이 짝을 지어 2명씩 같은 줄에 앉아야 합니다. 이때 짝을 만드는 경우의 수는 $2!$, 각 그룹을 같은 줄에 앉히는 경우의 수는 5×4, 각 그룹에서 남학생과 여학생의 자리를 정하는 경우의 수는 $2!$입니다. 따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 20 \times 2^2 = 160$입니다.

정답 : 160

05

2005학년도 6월 평가원 수리 나형 22번

2005학년도 대학수학능력시험에서 과학탐구 영역을 선택하는 학생은 물리 I, 화학 I, 생물 I, 지구과학 I, 물리 II, 화학 II, 생물 II, 지구과학 II의 8개 과목 중에서 최대 4과목까지 응시할 수 있다. 단, 물리 II, 화학 II, 생물 II, 지구과학 II의 4개 과목에서는 2과목까지만 선택할 수 있다. 어떤 학생이 과학탐구 영역에서 3개 과목을 선택하려고 할 때, 선택 가능한 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]

풀이 1) 여사건으로 풀기

II과목을 2개까지만 선택할 수 있으므로, 여사건은 II 과목을 3개 선택하는 경우입니다. 즉, 여사건의 경우의 수는 ${}_4C_3 = 4$입니다.

한편, 전사건의 경우의 수는 ${}_8C_3 = 56$입니다. 따라서 구하는 경우의 수는 $56 - 4 = 52$입니다.

풀이 2) 직접 계산하기

II과목은 선택할 수 있는 과목 수가 제한적입니다. 따라서 선택한 II과목의 개수를 기준으로 분류해 각각의 경우의 수를 구해봅시다.

(1) 2과목 0개 선택

I과목 3개를 선택해야 합니다. 따라서 경우의 수는 ${}_4C_3 = 4$입니다.

(2) 2과목 1개 선택

I과목 2개, II과목 1개를 선택해야 합니다. 따라서 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_4C_1 = 24$입니다.

(3) 2과목 2개 선택

I과목 1개, II과목 2개를 선택해야 합니다. 따라서 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_4C_2 = 24$입니다.

정리하면 구하는 경우의 수는 $4 + 24 + 24 = 52$입니다.

정답 : 52

06

2007학년도 6월 평가원 수리 가형 24번

8종류의 과자 A, B, C, D, E, F, G, H로 다음 조건에 따라 세트 상품을 만들려고 한다.

(가) 각 세트에는 서로 다른 4종류의 과자를 각각 한 개씩 담는다.

(나) A 또는 B를 담는 경우에는 A와 B를 같은 세트에 담는다.

(다) A, B, C 모두를 같은 세트에 담지 않는다.

서로 다른 세트 상품을 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오. [4점]

제약 조건이 가장 많은 A와 B를 먼저 생각해봅시다. (나) 조건에 의해 A와 B는 둘 다 세트에 담기거나, 담기지 않는다는 것을 알 수 있습니다. 따라서 A, B가 포함되는지 여부를 기준으로 분류해 계산해봅시다.

(1) A, B가 세트에 포함되는 경우

(다) 조건에 의해 C는 세트에 포함될 수 없으므로, A, B, C를 제외한 5종류의 과자 중 세트에 담길 2종류의 과자를 선택하면 됩니다. 따라서 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$입니다.

(2) A, B가 세트에 포함되지 않는 경우

더 고려해야 할 사항이 없으므로, A, B를 제외한 6종류의 과자 중 세트에 담길 4종류의 과자를 선택하면 됩니다. 따라서 경우의 수는 ${}_6C_4 = 15$입니다.

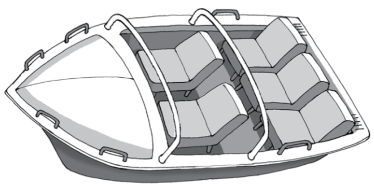
정리하면 서로 다른 세트 상품을 만들 수 있는 방법의 수는 $10 + 15 = 25$입니다.

정답 : 25

07

2007학년도 수능 수리 나형 23번

어른 2명과 어린이 3명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 앞줄에 2개, 뒷줄에 3개의 의자가 있다. 어린이가 어른과 반드시 같은 줄에 앉을 때, 5명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오. [4점]



풀이 1) 어른 먼저 앉히기

사람의 수가 더 적은 어른을 먼저 앉힌 후, 어린이를 앉히는 경우의 수를 구해봅시다. 어른은 앞줄에 1명, 뒷줄에 1명 앉아야 합니다. 따라서 어른 2명의 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_2C_1$, 어른 2명을 자리에 앉히는 경우의 수는 $2!$, 어린이 3명을 앉히는 경우의 수는 $3!$이므로, 구하는 경우의 수는 $6 \times 2 \times 6 = 72$입니다.

풀이 2) 어린이 먼저 앉히기

어린이를 먼저 앉힌 후, 어른을 앉히는 경우의 수를 구해봅시다. 어린이는 앞줄에 1명, 뒷줄에 2명 앉아야 합니다. 따라서 어린이 3명의 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 6$, 어린이 3명을 자리에 앉히는 경우의 수는 $3!$, 어른 2명을 자리에 앉히는 경우의 수는 $2!$이므로, 구하는 경우의 수는 $6 \times 6 \times 2 = 72$입니다.

정답 : 72

08

2020학년도 6월 평가원 수학 가형 25번

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [3점]

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 4이다.
(나) $f(a) = a$인 X의 원소 a의 개수는 3이다.

f의 치역의 원소를 선택하는 경우의 수는 ${}_5C_4$, 선택한 치역의 원소 중 $f(a) = a$인 원소를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_3$입니다. 이때 f의 치역의 원소를 1, 2, 3, 4, $f(a) = a$인 원소를 1, 2, 3으로 고정한 후 생각해봅시다.[1]

문제 조건에 의해 $f(4) \neq 4$이므로, 치역의 원소에 4가 포함되기 위해서는 $f(5) = 4$이어야 합니다. 한편, $f(4)$는 4를 제외한 원소인 1, 2, 3 중 하나를 선택하면 되므로, 이를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1$입니다. 따라서 구하는 함수의 개수는 $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$입니다.

정답 : 60

[1] 수형도의 뒤가 같기 때문에 상황을 고정할 수 있습니다.

09

2005학년도 9월 평가원 수리 가형 25번

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 함수 $f: A \to A$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 함수 f는 일대일 대응
> (나) $f(1)=7$
> (다) $k \geq 2$이면 $f(k) \leq k$

$f(1)=7$로 값이 정해져 있으므로, 7을 제외한 값에 나머지 함숫값을 하나씩 대응시키면 일대일 대응인 함수 f를 구할 수 있습니다. 이때 (다) 조건을 만족시키는 경우를 생각해보면, $f(2)$는 1, 2 중 하나, $f(3)$은 1, 2, 3 중 하나... 와 같은 방식으로 함숫값을 분배해야 합니다. 따라서 가능한 함숫값의 개수가 가장 적은 2부터 차례대로 함숫값을 대응시켜봅시다.[2]

조건을 만족시키는 $f(2)$는 1 또는 2이므로, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 2입니다. 이제 $f(3)$의 값을 생각해보면, 1, 2, 3 중에서 $f(2)$로 선택된 값을 제외한 2개 중 하나를 선택하면 됩니다. 따라서 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수도 2입니다. 이제 이를 계속 반복하면 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 모두 2이고, $f(7)$의 값은 남아 있는 수로 결정된다는 것을 알 수 있습니다. 따라서 함수 f의 개수는 $2^5=32$입니다.

정답 : 32

[2] 제약 조건이 가장 적은 $f(7)$부터 분배하지 않도록 주의해야 합니다.

10

2019학년도 9월 평가원 수학 가형 18번

다음은 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$의 치역 A가 $n(A)=4$이고, 집합 A의 모든 원소의 합이 홀수인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

> (i) 공역 X의 원소 중 짝수인 원소가 2개이므로 집합 A의 네 원소 중 세 원소는 홀수이고 한 원소는 짝수이다.
> 따라서 집합 X의 원소 중에서 집합 A의 네 원소를 택하는 경우의 수는 2이다.
>
> (ii) 정의역 X를 4개의 부분집합으로 분할할 때, 4개의 부분집합의 원소의 개수는 각각 2, 1, 1, 1이 되어야 한다.
> 따라서 집합 X를 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
>
> (iii) (i)과 (ii)의 각 경우에 대하여 집합 X를 분할한 4개의 부분집합을 집합 A의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.
>
> (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

① 498 ② 502 ③ 506 ④ 510 ⑤ 514

부분집합의 원소의 개수가 각각 2, 1, 1, 1이 되어야 하므로, 집합 X를 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는

$$\frac{{}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1}{3!} = 10$$

입니다. 따라서 $\boxed{(가)} = 10$입니다.

한편, (i)에서 치역의 원소 4개를 선택하는 경우의 수는 2임을 알 수 있었습니다. 그러므로 집합 X를 4개의 부분집합으로 분할한 후, 각각을 치역 A의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $4!$입니다. 따라서 $\boxed{(나)} = 24$입니다.

이제 (i), (ii), (iii)을 종합하면 구하는 함수 f의 개수는 $2 \times 10 \times 24 = 480$입니다. 따라서 $\boxed{(다)} = 480$입니다.

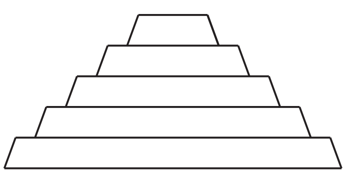
정리하면 $a + b + c = 10 + 24 + 480 = 514$입니다.

정답 : ⑤

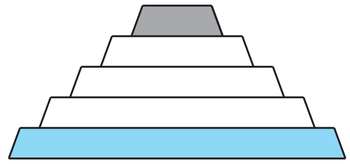
11

2009학년도 6월 평가원 수리 가형 25번

그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오. [4점]



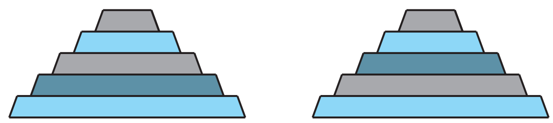
제약 조건이 많은 맨 위, 맨 아래의 사다리꼴부터 생각해봅시다. 맨 위, 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠하는 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$입니다. 이때 상황을 바라보기 쉽게 만들기 위해서 3가지 색을 각각 A, B, C로, 맨 위부터 차례대로 1, 2, 3, 4, 5번째 사다리꼴이라 둔 후, 맨 위와 아래에 칠한 색을 각각 A, B로 고정하겠습니다.



2번째 사다리꼴에는 B 또는 C를 칠할 수 있습니다. 이때 B를 칠하는 경우와 C를 칠하는 경우를 생각해보면, 5번째 사다리꼴에 B가 이미 칠해졌기 때문에 수형도의 뒤가 다를 것입니다. 따라서 경우를 나누어 계산해봅시다.

(1) 2번째 사다리꼴에 B를 칠하는 경우

3, 4번째 사다리꼴에는 B를 칠할 수 없습니다. 따라서 색 A, C를 이용해 3, 4번째 사다리꼴을 색칠하는 경우의 수는 $2! = 2$입니다.

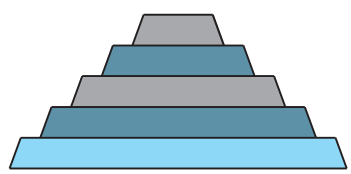


(2) 2번째 사다리꼴에 C를 칠하는 경우

3번째 사다리꼴에는 A 또는 B를 칠할 수 있습니다. 마찬가지로 5번째 사다리꼴에 B가 이미 칠해져 있으므로 수형도의 뒤가 다를 것입니다. 경우를 나누어봅시다.

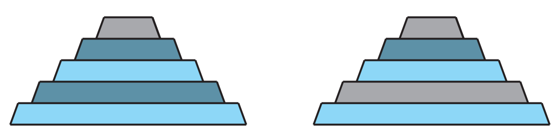
① 3번째 사다리꼴에 A를 칠하는 경우

4번째 사다리꼴에는 C만 칠할 수 있으므로, 경우의 수는 1입니다.



② 3번째 사다리꼴에 B를 칠하는 경우

4번째 사다리꼴에는 A 또는 C를 칠할 수 있으므로, 경우의 수는 2입니다.



따라서 경우의 수는 $1 + 2 = 3$입니다.

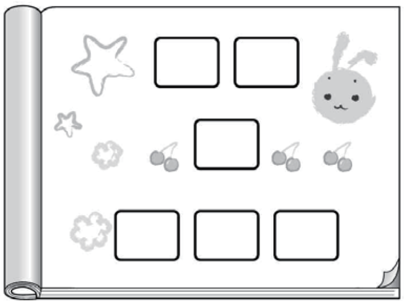
정리하면 1, 5번째 사다리꼴을 색칠하는 경우의 수는 6, 2, 3, 4번째 사다리꼴을 색칠하는 경우의 수는 $2 + 3 = 5$입니다.
따라서 구하는 방법의 수는 $6 \times 5 = 30$입니다.

정답 : 30

12

2010학년도 9월 평가원 수리 나형 28번

다음 그림의 빈칸에 6장의 사진 A, B, C, D, E, F를 하나씩 배치하여 사진첩의 한 면을 완성할 때, A와 B가 이웃하는 경우의 수는? (단, 옆으로 이웃하는 경우만 이웃하는 것으로 한다.) [4점]



① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144

A, B가 이웃하는 경우는 A, B가 맨 위 2칸에 들어가는 경우와 A, B가 맨 아래 3칸에 들어가는 경우가 존재합니다.

(1) A, B가 맨 위 2칸에 들어가는 경우, A, B가 이웃하도록 위치를 정하는 경우의 수는 $2! = 2$입니다

(2) A, B가 맨 아래 3칸에 들어가는 경우, A, B가 이웃하도록 위치를 정하는 경우의 수는 $2 \times 2! = 4$입니다.

정리하면 A, B가 이웃하도록 A, B의 위치를 정하는 경우의 수는 $2 + 4 = 6$이고, 남은 4장의 사진을 4개의 빈칸에 하나씩 배치하는 경우의 수는 $4!$입니다. 따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 24 = 144$입니다.

합리적으로 5초만에 푸는 방법

문제 상황에서 제약 조건은 A, B만 존재합니다. 따라서 어떻게든 A, B의 위치를 정하면 남은 4장의 사진의 위치를 정하는 경우의 수는 $4! = 24$가 되므로, 답은 24의 배수일 것입니다. 이때 선지에 24의 배수는 144뿐이므로 답을 바로 ⑤로 확정지을 수 있습니다.

정답 : ⑤

13

2011학년도 6월 평가원 수리 나형 23번

A, B 두 사람이 서로 다른 4개의 동아리 중에서 2개씩 가입하려고 한다. A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개 이하가 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 가입 순서는 고려하지 않는다.) [4점]

A, B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개 이하여야 하므로, A, B가 공통으로 가입하는 동아리의 개수를 기준으로 생각해봅시다.

풀이 1) 여사건으로 풀기

A, B가 가입하는 동아리는 각각 2개이므로, 공통으로 가입할 수 있는 동아리의 개수는 0, 1, 2개입니다. 이때 해당 사건은 0, 1개인 경우로 두 가지가 존재하는데, 여사건은 2개인 경우 한 가지만 존재합니다. 따라서 경우가 더 적은 여사건을 이용해 계산해봅시다.

(1) 전사건

A가 가입하는 동아리 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$이고, B가 가입하는 동아리 2개를 선택하는 경우의 수도 ${}_4C_2 = 6$입니다. 따라서 전사건의 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$입니다.

(2) 여사건

A, B가 서로 같은 동아리 2개에 들어가는 경우입니다. 이는 A가 가입하는 2개의 동아리를 선택하면, B가 들어갈 2개의 동아리도 자동적으로 그 2개가 된다는 것을 의미합니다. 따라서 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$입니다.

정리하면 구하는 경우의 수는 $36 - 6 = 30$입니다.

풀이 2) 직접 계산하기

공통으로 가입하는 동아리가 1개 이하가 되려면 공통으로 가입하는 동아리의 개수가 0 또는 1이어야 합니다. 경우를 나누어 구해봅시다.

(1) 공통으로 가입하는 동아리가 0개인 경우

4개의 동아리 중에서 A가 들어갈 동아리 2개를 선택하면, 자동적으로 B는 남은 2개의 동아리에 들어가야 합니다. 따라서 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$입니다.

(2) 공통으로 가입하는 동아리가 1개인 경우

공통으로 가입하는 동아리 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_{4}\mathrm{C}_{1}$, A가 들어갈 나머지 동아리 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_{3}\mathrm{C}_{1}$, B가 들어갈 나머지 동아리 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_{2}\mathrm{C}_{1}$ 입니다. 따라서 경우의 수는 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 입니다.

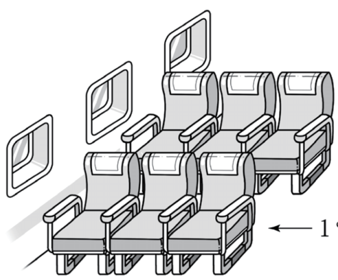
정리하면 구하는 경우의 수는 $6 + 24 = 30$ 입니다.

정답 : 30

14

2009학년도 9월 평가원 수리 가형 23번

할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아들, 딸로 구성된 가족이 있다. 이 가족 6명이 그림과 같은 6개의 좌석에 모두 앉을 때, 할아버지, 할머니가 같은 열에 이웃하여 앉고, 아버지, 어머니도 같은 열에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. [4점]



풀이 1) 기본적 풀이

제약 조건이 있는 할아버지, 할머니와 아버지, 어머니의 자리부터 정해봅시다. 할아버지, 할머니와 아버지, 어머니는 각각 같은 열에 이웃하여 앉아야 하므로, 두 그룹은 서로 다른 열에 앉아야 합니다. 따라서 할아버지, 할머니와 아버지, 어머니가 앉는 열을 선택하는 경우의 수는 $2!$ 입니다.

이제 할아버지, 할머니가 1열, 아버지, 어머니가 2열에 앉는 경우로 상황을 고정해봅시다.[(3)] 1열에 할아버지, 할머니가 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$ 입니다.[(4)] 마찬가지로 2열에 아버지, 어머니가 서로 이웃하여 앉는 경우의 수도 4입니다. 이때 남은 좌석에 아들, 딸이 앉는 경우의 수는 $2!$이므로, 구하는 경우의 수는 $2 \times 4 \times 4 \times 2 = 64$ 입니다.

풀이 2) 권장하지 않는 풀이

할아버지가 앉을 좌석을 먼저 정한 후 할머니가 앉을 좌석을 정해봅시다. 이때 할아버지가 중간 좌석에 앉는 경우와 양끝 좌석에 앉는 경우에 수형도의 뒤가 달라진다는 것을 주의합시다.

(1) 할아버지가 중간 좌석에 앉는 경우

할아버지가 중간 좌석에 앉는 경우의 수는 ${}_{2}\mathrm{C}_{1}$ 입니다. 이때 할머니는 할아버지 옆에 앉아야 하므로, 할머니의 좌석을 정하는 경우의 수는 ${}_{2}\mathrm{C}_{1}$ 입니다.

이제 할아버지, 할머니가 앉은 열과 다른 열에 아버지, 어머니가 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하면 $2 \times 2 = 4$이고, 남은 좌석에 아들, 딸이 앉는 경우의 수는 2입니다. 따라서 경우의 수는 $2 \times 2 \times 4 \times 2 = 32$ 입니다.

(2) 할아버지가 양끝 좌석에 앉는 경우

할아버지가 양끝 좌석에 앉는 경우의 수는 ${}_{4}\mathrm{C}_{1}$ 입니다. 이때 할머니는 할아버지 옆, 즉 중간 좌석에 앉아야 하므로 할머니의 좌석을 정하는 경우의 수는 1 입니다. 이후 계산은 (1)의 경우와 동일하므로, 경우의 수는 $4 \times 1 \times 4 \times 2 = 32$ 입니다.

정리하면 구하는 경우의 수는 $32 + 32 = 64$ 입니다.

정답 : 64

[(3)] 이제 수형도의 뒤가 같기 때문에 고정시킨 후 생각할 수 있다는 것이 익숙해져야 합니다.

[(4)] 이웃하는 두 좌석을 선택하는 경우의 수는 2, 두 분의 순서를 고려하는 경우의 수는 $2!$이기 때문입니다.

15

2006학년도 수능 수리 나형 28번

1부터 30까지의 홀수 중에서 서로 다른 두 수를 선택할 때, 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는? [4점]

① 43 ② 41 ③ 39 ④ 37 ⑤ 35

1부터 30까지의 홀수 15개 중 서로 다른 2개를 선택해 합이 3의 배수가 되는 경우의 수를 구해야 합니다. 이때 두 수의 합이 3의 배수가 된다는 것은 두 수를 각각 3으로 나눈 나머지의 합이 3의 배수[5]라는 것을 의미하므로, 3으로 나눈 나머지를 기준으로 생각해봅시다.

30 이하의 홀수 15개를 각각 3으로 나누면, 나머지가 0, 1, 2인 것은 각각 5개입니다. 이때 두 수를 3으로 나눈 나머지의 합은 0 이상 4 이하이므로, 나머지의 합이 3의 배수가 되는 경우를 나누어 계산해봅시다.

(1) 나머지의 합이 0인 경우

두 수를 3으로 나눈 나머지가 모두 0이어야 합니다. 따라서 3으로 나눈 나머지가 0인 홀수 5개 중 서로 다른 2개를 선택하는 상황이므로, 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$입니다.

(2) 나머지의 합이 3인 경우

두 수를 3으로 나눈 나머지가 각각 1, 2여야 합니다. 따라서 나머지가 1인 홀수 5개 중 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_5C_1$, 나머지가 2인 홀수 5개 중 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_5C_1$이므로, 경우의 수는 $5 \times 5 = 25$입니다.

정리하면 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는 $10 + 25 = 35$입니다.

두 수의 합 또는 차가 n의 배수

두 수의 합 또는 차가 n의 배수가 된다는 조건은, 두 수를 n으로 나눈 나머지의 합 또는 차로 생각하는 것이 더 간단합니다. 그 이유는 고등학교 1학년 때 배우는 나머지정리 단원을 공부했다면 쉽게 알 수 있으니, 직접 생각해보시길 바랍니다. 추가적으로 n의 값에 따라서 각각이 어떤 의미를 가지는지도 미리 정리해두면 좋으니, 직접 해보시는 것을 추천드립니다.

정답 : ⑤

[5] 여기서 0은 3의 배수로 생각하겠습니다.

16

2010학년도 수능 수리 가형 12번

다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{n}\mathrm{C}_{k}}{{}_{n+4}\mathrm{C}_{k}} = \frac{n+5}{5}$가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉

(1) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{{}_{1}\mathrm{C}_{0}}{{}_{5}\mathrm{C}_{0}} + \frac{{}_{1}\mathrm{C}_{1}}{{}_{5}\mathrm{C}_{1}} = \frac{6}{5},\ (\text{우변}) = \frac{1+5}{5} = \frac{6}{5}$$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때, 등식 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}} = \frac{m+5}{5}$가

성립한다고 가정하자. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=0}^{m+1} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}} = \boxed{(\text{가})} + \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}}\ \text{이다.}$$

자연수 l에 대하여

$${}_{l+1}\mathrm{C}_{k+1} = \boxed{(\text{나})} \cdot {}_{l}\mathrm{C}_{k} \quad (0 \le k \le l)\text{이므로}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}} = \boxed{(\text{다})} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{m+1} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}} = \boxed{(\text{가})} + \boxed{(\text{다})} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}$$

$$= \frac{m+6}{5}$$

이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{l+2}{k+2}$	$\frac{m+1}{m+4}$
②	1	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+5}$
③	1	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+4}$
④	$m+1$	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+5}$
⑤	$m+1$	$\frac{l+2}{k+2}$	$\frac{m+1}{m+4}$

(가)가 처음으로 등장하는 식에서 좌변과 우변을 비교하겠습니다. 조합 기호 왼쪽의 수인 $m+1$과 $m+5$는 좌변과 우변에서 모두 같고, 조합 기호 오른쪽 수는 k와 $k+1$로 1만큼 서로 차이납니다. 즉 우변에서 (가) 오른쪽의 식은 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}}$$

따라서 (가)의 식은 $\dfrac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}}$에 $k=0$을 대입한 식입니다. 즉

$\boxed{(\text{가})} = \dfrac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{0}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{0}} = 1$입니다.

한편, ${}_{l+1}\mathrm{C}_{k+1} = \dfrac{(l+1)!}{(l-k)!(k+1)!}$, ${}_{l}\mathrm{C}_{k} = \dfrac{l!}{(l-k)!k!}$

입니다. 따라서 ${}_{l}\mathrm{C}_{k}$에 $\dfrac{l+1}{k+1}$을 곱하면 ${}_{l+1}\mathrm{C}_{k+1}$이 되므로

$\boxed{(\text{나})} = \dfrac{l+1}{k+1}$입니다.

(다)는 (나)의 결과를 이용하여 구할 수 있습니다. (다)가 처음 등장하는 식에서 좌변의 분모, 분자에 (나)의 결과를 이용하면 다음과 같습니다.

$$(\text{분자}) = {}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1} = \frac{m+1}{k+1}\,{}_{m}\mathrm{C}_{k}$$

$$(\text{분모}) = {}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1} = \frac{m+5}{k+1}\,{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}$$

따라서 $\boxed{(\text{다})} = \dfrac{\frac{m+1}{k+1}}{\frac{m+5}{k+1}} = \dfrac{m+1}{m+5}$입니다.

(다)를 더 쉽게 구하는 방법

빈칸의 과정은 증명 과정이므로, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{n}\mathrm{C}_{k}}{{}_{n+4}\mathrm{C}_{k}} = \frac{n+5}{5}$

과 마지막 식이 모두 성립해야 합니다. 따라서

$\boxed{(\text{가})} = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}} = \frac{m+5}{5}$를 대입하면

$1 + \boxed{(\text{다})} \cdot \dfrac{m+5}{5} = \dfrac{m+6}{5}$이므로

$\boxed{(\text{다})} = \dfrac{\frac{m+1}{5}}{\frac{m+5}{5}} = \dfrac{m+1}{m+5}$임을 구할 수 있습니다.

정답 : ②