COMPACT 수학기출 해설지

장영민 지음

07

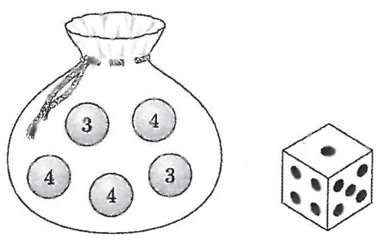
2020 - 12 - (가) 19

숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
> 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고,
> 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은? [4점]

① $\frac{13}{180}$ ② $\frac{41}{540}$ ③ $\frac{43}{540}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{47}{540}$



$a+b+c=10$, (각각 1이상 6이하)

$_3H_{10-3}$ − (7,2,1), (8,1,1)의 배열 가짓수

$= {_9C_2} - 3! - 3 = 27$.

$a+b+c+d=10$ (각각 1이상 6이하)

$_4H_{10-4}$ − (7,1,1,1)의 배열 가짓수

$= {_9C_3} - 4 = 80$

∴ p → '3'이 적힌 공을 뽑고 & 세 수의 합이 10

$\frac{2}{5} \times \frac{27}{6\times6\times6}$

또는 '4'가 적힌 공을 뽑고 & 네 수의 합이 10.

$\frac{3}{5} \times \frac{80}{6\times6\times6\times6}$

$\therefore p = \frac{1}{20} + \frac{1}{27} = \frac{47}{540}$.

08

2020 - 12 - (가) 20

함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

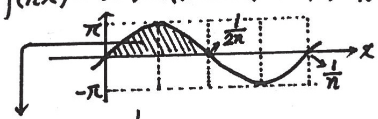
> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $\int_{-1}^{1} h(x)dx=2$, $\int_{-1}^{1} xh(x)dx=-\frac{1}{32}$
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

함수 $g(x)$는 구간별로 함수값이 0 또는 1만 존재.

∴ $f(nx)\times g(x)$는 $\left[\begin{array}{l} g(x)=1 \text{ 인 구간} \rightarrow = f(nx) \text{ 그대로.} \\ g(x)=0 \text{인 〃} \rightarrow \text{함수값}=0. \end{array}\right.$

$y=f(nx)=\pi\cdot\sin(2\pi nx)$ → 주기 $=\frac{1}{n}$, 기함수.

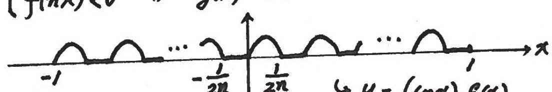


$\int_0^{\frac{1}{2n}} f(nx)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} \pi\cdot\sin(2\pi nx)\,dx$

$= \frac{-\pi}{2\pi n}\left[\cos(2\pi nx)\right]_0^{\frac{1}{2n}} = -\frac{1}{2n}(-1-1) = \frac{1}{n}$

∴ $\int_{-1}^{1} f(nx)g(x)\,dx = 2$ 이려면

$\left[\begin{array}{ll} f(nx)\geq 0 \text{ 일때} & g(x)=1 \\ f(nx)<0 \ \text{〃} & g(x)=0 \end{array}\right]$ ∵ $f(nx)\geq 0$인 구간만 모두 적분해야 2가 된다.

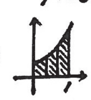


↳ $y=f(nx)\cdot g(x)$.

$f(nx)$ → $xf(nx)$ → $\int_{-1}^{1} xf(nx)\times g(x)\,dx$ 는
기함수 우함수

우함수 $xf(nx)$를 구간 $[-1, 1]$을 $4n$등분해서 홀수번째 구간만 적분.

<ex>

 =  $\therefore = \int_0^1 x f(nx)\,dx = -\frac{1}{32}$

$\int_0^1 x\cdot\pi\sin(2\pi nx)\,dx$

$= \left[-\frac{x}{2n}\cdot\cos(2\pi nx)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2n}\right)\cdot\cos(2\pi nx)\,dx$

$= \left(-\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi nx)\right]_0^1 = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$

$\therefore n=16$.

13

2020 - 12 - (가) 29

네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
> (나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이다.
> (다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

<예>

	A	B	C	D	
검	4	1	1	0	6
	$\vee$	$\vee$	$\wedge\!\!|$	$\wedge$	
흰	3	0	1	2	6

i)

	A	B	C	D
검	4	2	0	0
	$\vee$	$\vee$	$\wedge$	$\wedge$
흰	a	b	c	d

$\longrightarrow$ B선택 $\rightarrow {}_3C_1$

$a+b+c+d=6$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$ 1 , 1 , 1 $\rightarrow$ 추가3 $\rightarrow a+c+d=3$ $\rightarrow {}_3H_3=10$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$ 0 , 1 , 1 $\rightarrow$ 추가4 $\rightarrow a+c+d=4,\ (a<4)$ $\rightarrow {}_3H_4-1=14$ (a 4개인경우)

$\therefore {}_3C_1(10+14)=72.$

ii)

	A	B	C	D
검	4	1	1	0

$\rightarrow$ B, C 선택 $\rightarrow {}_3C_2$

$\vee\ \vee\ \wedge\!\!|\ \wedge$

흰 $a+b+c+d=6$

0 , 1 , 1 $\rightarrow$ 추가4 $\rightarrow {}_3H_4-1=14$

$\vee\ \wedge\!\!|\ \vee\ \wedge$

$a+b+c+d=6$

1 , 0 , 1 $\rightarrow$ 추가4 $\rightarrow {}_3H_4-1=14$

$\therefore {}_3C_2(14+14)=84.$

iii)

	A	B	C	D
검	5	1	0	0
	$\vee$	$\vee$	$\wedge$	$\wedge$
흰	a	b	c	d

$\rightarrow$ B선택 $\rightarrow {}_3C_1$

$a+b+c+d=6$

0, 1, 1 $\rightarrow$ 추가4 $\rightarrow {}_3H_4=15$

$\therefore {}_3C_1\times 15=45.$

$\therefore$ 경우의수 $=72+84+45=\underline{201}.$

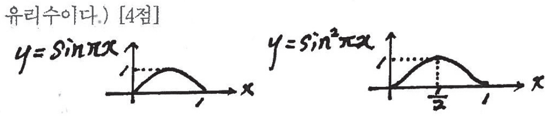
14

2020 - 12 - (가) 30

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2\pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



$g(1-x)=f(\sin^2(\pi-\pi x))=f(\sin^2\pi x)=g(x)$ 이므로

$y=g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에 대칭이고,

$g'(x)=f'(\sin^2\pi x)\times 2\sin\pi x\times\pi\cos\pi x,\quad (0<x<1)$

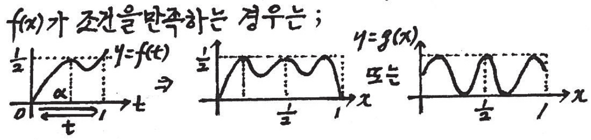
이므로 $\cos\pi x=0$일때 $x=\frac{1}{2}\rightarrow g'(\frac{1}{2})=0.$

$\therefore y=g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극대.

$g(x)=f(\sin^2\pi x)=f(t)$라 하면

x	$0\rightarrow\frac{1}{2}\rightarrow 1$
t	$0\rightarrow 1\rightarrow 0$

$f(x)$가 조건을 만족하는 경우는;



$\therefore f(x)=(x-\alpha)^2(x-1)+\frac{1}{2},\quad (0<\alpha<1).$

$f'(x)=(x-\alpha)(3x-2-\alpha)\ \rightarrow f'(\frac{2+\alpha}{3})=0$

최소값$=0\rightarrow f(\frac{2+\alpha}{3})=0$ 이면

$(\frac{2+\alpha}{3}-\alpha)^2\cdot(\frac{2+\alpha}{3}-1)+\frac{1}{2}=0$

$\therefore (\alpha-1)^3=-\frac{27}{8}\rightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$ (모순)

$\therefore f(0)=0\rightarrow -\alpha^2+\frac{1}{2}=0\rightarrow\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$\therefore f(x)=(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2\cdot(x-1)+\frac{1}{2}.$

$\therefore f(2)=(2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}=5-2\sqrt{2}.$

$\therefore a^2+b^2=29.$