COMPACT 수학기출 해설지

05

2020 - 12 - (나) 19

확률변수 X는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y가

$$\mathrm{P}(4 \le X \le 8) + \mathrm{P}(Y \ge 8) = \frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(Y \le 8 + \frac{2\sigma}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

$X \to N(8, 3^2)$, $Y \to N(m, \sigma^2)$

$P(4 \le X \le 8) + P(Y \ge 8) = \frac{1}{2}$

$P(-\frac{4}{3} \le Z \le 0) + P(Z \ge \frac{8-m}{\sigma}) = \frac{1}{2}$

$P(0 \le Z \le \frac{4}{3}) + P(Z \ge \frac{8-m}{\sigma}) = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{4}{3} = \frac{8-m}{\sigma}$

$P(Y \le 8 + \frac{2}{3}\sigma)$

$= P(Z \le \frac{8 + \frac{2}{3}\sigma - m}{\sigma} = \frac{8-m}{\sigma} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3})$

$= P(Z \le 2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$

06

2020 - 12 - (나) 20

실수 $a\,(a > 1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x) = x^2 \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t^2 f(t)\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

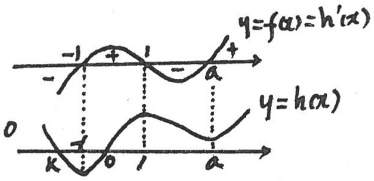
① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

$g'(x) = 2x\int_0^x f(t)dt + x^2 f(x) - x^2 f(x)$

$\therefore g'(x) = 2x \cdot \int_0^x f(t)dt = 2x \cdot h(x)$ 라 하면,

$h'(x) = f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$ 이므로

$h(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$



x	$-$	k	$-$	0	$+$	a	$+$
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$g'(x) = 2x \cdot h(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$		$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

극소

[$\therefore h(a) \ge 0$ 일때 $g(x)$가 하나의 극값.]

$h(a) = \int_0^a (t+1)(t-1)(t-a)dt$

$= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{a}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + at\right]_0^a$

$= -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{2}a^2 \ge 0$

$\therefore a^2(a^2 - 6) \le 0$, $a > 1$.

$\therefore 1 < a \le \sqrt{6} \to a$의 최댓값 $= \sqrt{6}$.

11

2020 - 12 - (나) 30

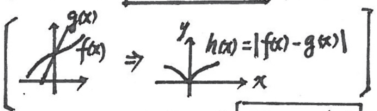
함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\ge 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$h(0)=|f(0)-g(0)|=0 \to \boxed{f(0)=g(0)}$ 인데

$f'(0)\ne g'(0)$ 이면 $x=0$ 에서 $h(x)$는 꺾인점이 발생.



→ ∴ $h'(0)$이 존재하려면 $\boxed{f'(0)=g'(0)}$

∴ $x=0$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 접한다.

<$x=1$에서 미분가능>

$x\to1-$ 일 때 $f(x)>g(x)$ 이면

$h(x)=|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$ 이고

$\lim_{x\to1-}h'(x)=\lim_{x\to1+}h'(x)$ 이므로

$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)\to g'(1)=0$

∴ $g(x)=0\to g(x)$는 일차함수가 아니다. (모순)

$x\to1-$ 일 때 $f(x)<g(x)$ 이면

$h(x)=|f(x)-g(x)|=-f(x)+g(x)$ 이고

$\lim_{x\to1-}h'(x)=\lim_{x\to1+}h'(x)$ 이므로

$-f'(1)+g'(1)=f'(1)+g'(1)\to f'(1)=0$

$\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1+}h(x)$ 이므로

$-f(1)+g(1)=f(1)+g(1)\to f(1)=0$

$(1,0)$에서 x축에 접한다.

$\boxed{\therefore f(x)=(x-1)^2(x+a)\ ,\ g(x)=px+q}$

$f'(x)=2(x-1)(x+a)+(x-1)^2.$

$f(0)=g(0)\to a=q$

$f'(0)=g'(0)\to -2a+1=p$

$h(2)=5\to f(2)+g(2)=2+a+2p+q=5$

$\therefore a=-\frac{1}{2},\ q=-\frac{1}{2},\ p=2$

$\therefore f(x)=(x-1)^2(x-\frac{1}{2}),\ g(x)=2x-\frac{1}{2}$

$\therefore h(4)=f(4)+g(4)=9\times\frac{9}{2}+8-\frac{1}{2}=39.$

12

2020 - 10 - (나) 14

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5=5$이고 $\sum_{k=3}^{7}|2a_k-10|=20$이다. a_6의 값은? [4점]

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$

a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$5-2d$,	$5-d$,	5,	$5+d$,	$5+2d$

$\therefore \sum_{k=3}^{7}|2a_k-10|$

$=|2(5-2d)-10|+|2(5-d)-10|+|2\times5-10|+|2(5+d)-10|+|2(5+2d)-10|$

$=4d+2d+0+2d+4d=12d=20.$

$\therefore d=\frac{5}{3}\to a_6=5+\frac{5}{3}=\frac{20}{3}.$