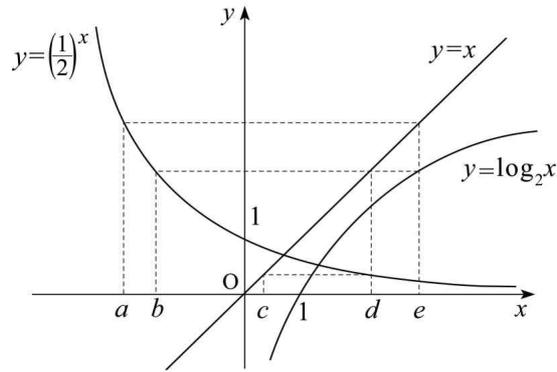


Chapter

1

교사경 기출 문제 이야기

1. 그림은 두 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 를 나타낸 것이다. 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은? (단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.) ... 2007학년도 교육청



보기

- ㉠. $\left(\frac{1}{2}\right)^d = c$
- ㉡. $a + d = 0$
- ㉢. $ce = 1$

1. 대칭성을 이용하고 싶지만..

주어진 함수가 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \log_2 x$ 임을 확인했을 때 처음드는 생각은 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 를 y 축을 기준으로 대칭시켜서 $y = 2^x$ 를 만들어 $y = \log_2 x$ 와 역함수임을 이용하는게 바로 보입니다. 하지만 안타깝게도 이는 문제 풀이에 별 도움이 되지 않습니다. 그러므로 그래프를 보고 함수 위에 있는 점을 확인합시다.

ㄱ. 그래프에서 점 (d, c) 는 곡선 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 위에 있습니다.

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^d = c$ 입니다. ... 참

ㄴ. 주어진 관계식 그대로는 무언가를 계산할 수도 없고 판별할 수도 없습니다. 따라서 문제에 주어진 함수에서 새로운 관계식을 끌어내야합니다.

그래프에서 점 (a, e) 는 곡선 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 위에 있고,

점 (e, d) 는 곡선 $y = \log_2 x$ 위에 있습니다.

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^a = e$ 이고, $\log_2 e = d$ 에서 $2^d = e$ 입니다.

그러므로 $2^d = 2^{-a}$ 이고, $2^{a+d} = 2^0$ 입니다.

지수함수는 일대일 대응이므로 $a+d=0$ 입니다. ... 참

ㄷ. 주어진 관계식 그대로는 무언가를 계산할 수도 없고 판별할 수도 없습니다. 따라서 문제에 주어진 함수에서 새로운 관계식을 끌어내야합니다.

선지 ㄱ과 선지 ㄴ을 판단하는 과정과 결과에서 우리는 다음과 같은 사실을 압니다.

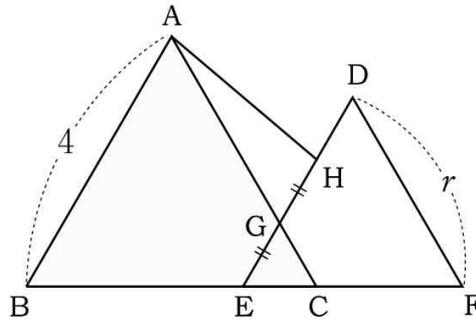
$\left(\frac{1}{2}\right)^d = c$ 이고, $\left(\frac{1}{2}\right)^a = e$ 입니다.

둘을 곱해주면 ce 를 구할 수 있겠죠.

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+d} = ce$ 입니다.

선지 ㄴ에 의해 $a+d=0$ 이니 $ce=1$ 입니다. ... 참

2. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC와 한 변의 길이가 r 인 정삼각형 DEF를 겹쳐서 점 E가 \overline{BC} 위에 오도록 정삼각형 GEC를 만들고, $\overline{EG} = \overline{GH}$ 가 되도록 점 H를 \overline{DG} 위에 잡는다. $\triangle GEC$, $\triangle AGH$, $\triangle DEF$ 의 각각의 넓이가 이 순서로 공비가 r 인 등비수열을 이룰 때, r 의 값은? ... 2005학년도 교육청



2. 좌표의 유혹

하필이면 정삼각형에 도형 간의 관계가 평행이라 좌표의 유혹이 거셉니다. 물론 시험장에서 풀이가 보이지 않으면 그렇게라도 풀어야 하지만, 공부할 때는 순수기하로 푸는 연습을 하는 것을 권장합니다. 보통 평균적인 수험생이 풀이를 떠올렸다고 가정하면 좌표보다는 순수기하 풀이가 시간상 훨씬 유리한 경우가 많기 때문입니다.

삼각형 DEF의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$ 입니다.

그런데, 등비수열의 공비가 하필 r 이라 삼각형 GEC의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이 됩니다.

따라서 삼각형 GEC의 한 변의 길이는 1이고 역시 $\overline{GH} = 1$ 입니다.

또, 삼각형 GEC는 정삼각형이니 $\overline{AG} = 3$ 입니다.

그러므로 삼각형 AGH의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}r = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ 입니다.

따라서 $r = 3$ 입니다.

조금 돌아가는 풀이이지만 좌표를 적당히 도입해서 풀어도 같은 결과가 나옵니다.

선분 EC의 길이를 x 라 합시다.

그러면 삼각형 GEC, AGH, DEF의 넓이는 각각

$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, $\frac{\sqrt{3}}{4}(3-x)x$, $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$ 임을 쉽게 알 수 있습니다.

해당 넓이는 이 순서로 공비가 r 인 등비수열을 이루니 공비는 $r = \frac{(3-x)x}{x^2}$ 임을 압니다.

따라서 $\frac{\{(3-x)x\}^2}{x^2} = r^2$ 이니 $(3-x)x = r$ 이고

그러니 $\frac{1}{x^2} = 1$ 임을 쉽게 알 수 있습니다.

그러므로 $x > 0$ 이니 $x = 1$ 이고 이어지는 풀이는 위 풀이과 같음을 알 수 있습니다.