Chapter

1

교사경 기출 문제 이야기

1. 정의역이 $x<4$인 두 함수 $f(x)=2^{x}$, $g(x)=x^{2}$의 그래프가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$)

… 2009학년도 7월 교육청 가형 13번

ㄱ. $x_1+y_1>0$

ㄴ. $x_1y_1+x_2y_2<0$

ㄷ. $|x_1y_2|-|x_2y_1|>0$

1. 미분 없는 삶

평가원 기출 문제를 풀어보셨으면 아시겠지만, 그래프를 그려 풀이하는 것이 수월합니다. 하지만 미분은 배우기 전 단계라 미분 없이 풀어야 하는데, 기초적인 지식으로 알고 있는 개형을 그리면서 접근하는 것이 최선입니다.

기본적으로 지수함수와 다항함수는 연립해서 근을 구할 수 없습니다. 지수함수와 로그함수와도 같죠. 지수함수는 밑이 같은 지수함수끼리만 계산해서 확실하게 모든 근을 구해낼 수 있습니다. 하지만 특수한 점이나 사잇값 정리를 이용해 대략적인 근의 위치는 파악할 수 있습니다.

ㄱ. $f(2)=g(2)=4$으로 근 하나는 쉽게 찍어 구할 수 있습니다.

다른 근이 난감한데, 두 함수의 대소관계를 비교하기 위해 $h(x)=f(x)-g(x)$로 둡시다. $h(0)h(-1)<0$이므로 다른 근은 $-1<x_1<0$입니다. … **참**

ㄴ. 운이 좋게도 다항식과의 교점이라 y를 모두 x에 대한 다항식으로 바꿔줄 수 있습니다.

${x_1}^3+{x_2}^3$이니 인수분해하면, $(x_1+x_2)({x_1}^2-x_1y_1+{y_1}^2)$임을 압니다.

선지 ㄱ에 의해 $x_1+y_1>0$이고 뒤에 붙은 이차식은 허근을 가지니 이는 거짓입니다. … **거짓**

ㄷ. 역시 운이 좋게도 다항식과의 교점이라 y를 모두 x에 대한 다항식으로 바꿔줄 수 있습니다.

따라서 다음과 같은 연산을 수행합니다.

$$\left|x_1{x_2}^2\right|-\left|x_2{x_1}^2\right|=\left|x_1\right|\left|{x_2}^2\right|-\left|x_2\right|\left|{x_1}^2\right|$$
$$=\left|x_1y_1\right|(\left|x_2\right|-\left|x_1\right|)$$

이는 선지 ㄱ의 판단 결과로 판단 가능합니다. … **참**

2. 삼각형의 세 꼭짓점에서 각각의 대변 또는 그 연장선에 내린 수선의 길이의 비가 $2:3:4$이다. 이 삼각형의 세 내각 중 최대의 각을 θ라 할 때, $\cos\theta = -\frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) … **2003학년도 4월 교육청 예체능**

2. 이 정도는 간단하게

세 점 A, B, C에서 세 대변 (또는 그 연장선)에 내린 수선의 발을 차례로 D, E, F라 합시다.

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면, 다음과 같은 식이 성립합니다.

$\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{BC}}}$, $\overline{\mathrm{BE}}=\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{AC}}}$, $\overline{\mathrm{CF}}=\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{AB}}}$

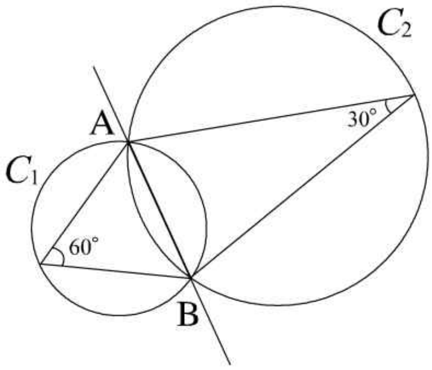
이는 주어진 조건에 의해 아래와 같이 환원됩니다.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=6t:4t:3t$

따라서 코사인법칙에 의해

$\cos\theta=-\dfrac{11}{24}$ 입니다.

3. 두 원 C_1, C_2가 그림과 같이 두 점 A, B에서 만난다. 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 12이고, 그에 대한 원주각의 크기는 각각 60°, 30°이다. 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라고 할 때, ${R_1}^2+{R_2}^2$의 값을 구하시오. … **2004학년도 6월 고2 교육청 가형**



3. 이정도 계산도 간단하게..

사인법칙에 의해 다음이 성립합니다.

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 60^\circ} = 2R_1, \ \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 30^\circ} = 2R_2$$

따라서 $R_1 = 4\sqrt{3}$, $R_2 = 12$입니다.

그러므로 답은 192입니다.

4. 함수 $f(x)=x^2-8x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 2x+5a & (x \geq a) \\ f(x+4) & (x < a) \end{cases}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
(나) 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

… 2016학년도 4월 교육청 나형 30번

4. 사잇값정리와 연속

우리는 조건 (가)를 보고 사잇값 정리에 의해

$f(0)f(2)=a(a-12)<0$임을 압니다.

이어서 $f(x)=(x-4)^2+a-16$임으로

$f(x+4)=x^2+a-16$입니다.

따라서 함수의 연속의 정의에 의해

$\lim_{x \to a-} f(x)g(x)= f(a)g(a)$를 계산해야합니다.

연산을 수행하면

$f(a)(a-8)(a+2)=0$입니다.

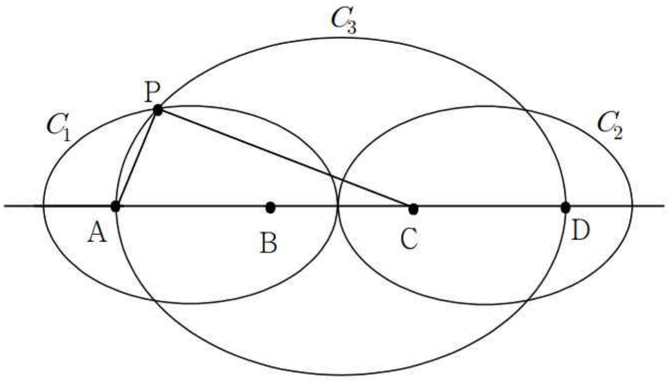
$f(a)=0$를 만족하려면, $a(a-7)$이고

이렇게 나온 네 개의 숫자 중 처음 조건 (가)를 만족하는 숫자는

$a=7$, $a=8$입니다.

따라서 구하는 값은 56입니다.

5. 그림과 같이 서로 합동인 두 타원 C_1, C_2가 외접하고 있다. 두 점 A, B는 타원 C_1의 초점, 두 점 C, D는 타원 C_2의 초점이고, 네 점 A, B, C, D는 모두 한 직선 위에 있다. 두 점 B, C를 초점, 선분 AD를 장축으로 하는 타원을 C_3이라 하고, 두 타원 C_1, C_3의 교점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=8$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=6$일 때, $\overline{\mathrm{CP}}-\overline{\mathrm{AP}}$의 값은? … **2007학년도 사관학교 가형 18번**



5. 이차곡선 문제는 정의부터

간단히 길이를 조사하면 다음과 같은 사실을 얻습니다.

$\overline{AD} = 22$, $\overline{AC} = 14$

따라서 타원의 정의에 의해

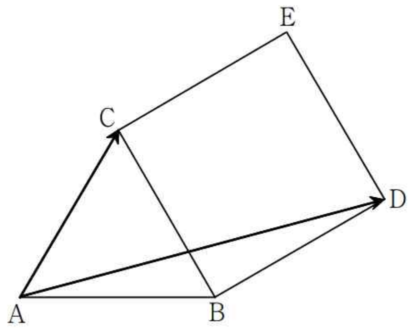
$\overline{BP} + \overline{CP} = 22$

다시 타원의 정의에 의해

$\overline{AP} + \overline{BP} = 14$입니다.

그러므로 문제에서 요구하는 값은 8입니다.

6. 평면 위에 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC와 정사각형 BDEC가 그림과 같이 변 BC를 공유하고 있다. 이때, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$의 값은? … **2007학년도 사관학교 가형 6번**



6. 평행선과 벡터 분해

선분 BC의 중점을 점 M라 하면,

선분 AM과 선분 BD는 서로 평행하다.

따라서 적당히 벡터를 분해해서 계산하자.

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}}$$
$$= 1 \times 1 \times \cos\frac{\pi}{3} + 1 \times 1 \times \cos\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

해당 문항은 좌표로 계산하기가 꽤 용의한데

점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(0,\ 0)$로 잡으면

간단하게 $\mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$임을 알 수 있다.

따라서 삼각형의 닮음으로 쉽게 좌표를 잡아보는 방법도 연습하길 바란다.