목/ 차/

1. 함수의 극한과 연속

개념 01 ▌함수의 극한

(1) 좌극한 : $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \alpha \Leftrightarrow x < a$ 이고 $x \to a$일 때 $f(x) \to \alpha$

(2) 우극한 : $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha \Leftrightarrow x > a$ 이고, $x \to a$일 때, $f(x) \to \alpha$

(3) 수렴한다 : 좌극한과 우극한이 같을 때, 즉

$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$ 일 때 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하고,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ 라 쓴다. 좌극한과 우극한이 같지 않으면 $f(x)$는 발산한다고 한다.

개념 02 ▌함수의 극한에 대한 성질

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \beta$ 일 때

(1) $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = k\lim\limits_{x \to a} f(x) = k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim\limits_{x \to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = \alpha \pm \beta$ (복부호 동순)

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = \alpha\beta$

(4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x) \neq 0$, $\beta \neq 0$)

개념 03 ▌함수의 극한의 계산

(1) $\dfrac{0}{0}$꼴 : 분모, 분자가 모두 다항식이면 분모, 분자를 각각 인수분해하여 약분하고, 분모, 분자 중 무리식이 있으면 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴 : 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

(3) $\infty - \infty$꼴 : 다항식의 최고차항으로 묶고, 무리식은 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

(4) $0 \times \infty$꼴 : $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty \times k$, $\dfrac{k}{\infty}$꼴로 변형한다. (단, k는 상수)

개념 04 ▌미정계수 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여

(1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \alpha$(상수) 이고 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ 이면 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

(2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \alpha$ ($\alpha \neq 0$)이고 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ 이면 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

랑/데/뷰/팁/

TIP

상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)는 모든 x의 값에 대하여 함숫값이 항상 c이므로 a의 값에 관계없이 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$이다.

TIP

좌극한과 우극한을 반드시 확인해야 하는 경우
분수함수, 절댓값 기호를 포함한 함수, 가우스 함수 등

TIP

함수의 극한의 대소 관계
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수) 일 때, a에 가까운 모든 x에 대하여

(1) $f(x) \le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$

(2) $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \alpha$←주로 삼각함수를 포함한 함수의 극한값을 구할 때 이용 (미적분)

(3) $f(x) < g(x)$일 때, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$일 수도 있다.

TIP

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$일 때,

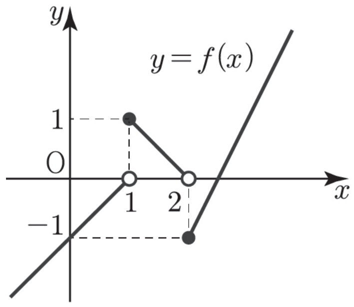
(1) ($f(x)$의 차수)>($g(x)$의 차수)이면 $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$

(2) ($f(x)$의 차수)=($g(x)$의 차수)이면 $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to$ $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 계수의 비

(3) ($f(x)$의 차수)<($g(x)$의 차수)이면 $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$

21

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 모든 실수에서 연속일 때, $g(-1)$의 값은?



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

22

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $f(x)$가 다항함수이면 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ 이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1}=2$ 이면 $f(1)=2$ 이다.

ㄷ. $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)}=\alpha$ 이고 $\lim_{x\to a} g(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to a} f(x)=0$ 이다.(단, α 는 실수)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

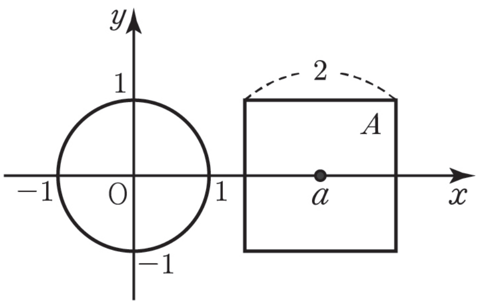
50

좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 O라고 하자. 한 변의 길이가 2이고 각 변은 x축 또는 y축에 수직이고, 두 대각선의 교점의 좌표가 $(a,\ 0)$인 정사각형을 A라 할 때, 함수 $f(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$f(a)=$(원 O와 정사각형 A가 만나는 점의 개수)

예를 들어 $f(1)=2$이다. 이때, $\lim\limits_{a\to 1+} f(f(a))=\alpha$,

$\lim\limits_{a\to -\infty} f\left(f\left(\dfrac{2a-1}{a+1}\right)\right)=\beta$에서 $\alpha+\beta$을 구하시오.



51

함수 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{5}{6}x-1 & (x\le 0) \\ |x-2|-1 & (x>0) \end{cases}$

에 대하여 함수 $f(x)f(x-a)$가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 가능한 a값의 제곱의 합을 구하시오.

59

모든 정수에서 연속인 임의의 함수

$$f(n)=\begin{cases} 2-n & (n\text{은 짝수}) \\ n^2-1 & (n\text{은 홀수}) \end{cases}$$ 에 대하여

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

〈보 기〉

ㄱ. $\lim_{x\to2} f\left(\frac{[x]^2+x}{[x]}\right)=8$

ㄴ. $\lim_{x\to2} f([-x^2+4x+3])=-4$

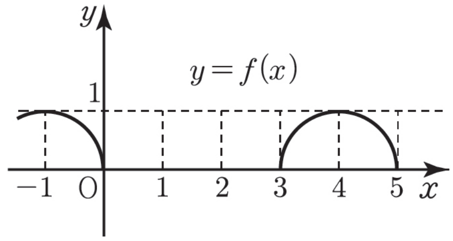
ㄷ. $\lim_{x\to\infty} f\left(\sqrt{[x^2+(4a-2)x]}-x\right)=24$

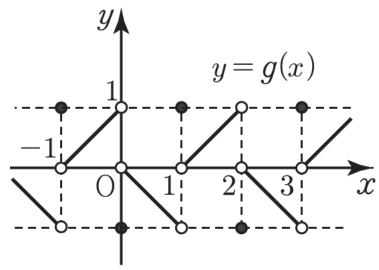
를 만족하는 $a=3$이다. (단, a는 자연수)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

60 심화유형 1-3

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.





합성함수 $g(f(x))$에 대하여 극한값이 존재하는 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $\lim_{x\to0} g(f(x))$

ㄴ. $\lim_{x\to1} g(f(x))$

ㄷ. $\lim_{x\to1} f(g(1-x)+3)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 미분법

랑/데/뷰/팁/

개념 01 ▌미분계수

(1) 평균변화율

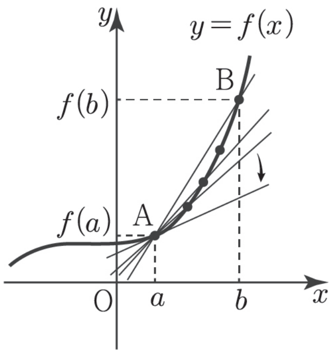
닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서의 함수 $y=f(x)$ 의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

(2) 순간변화율 (미분계수)

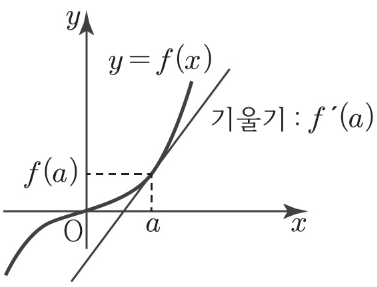
함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 또는 순간변화율은

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$



(3) 미분계수의 기하학적 의미

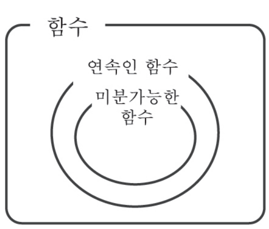
함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 기울기와 같다.



개념 02 ▌미분가능성과 연속성

(1) 함수 $f(x)$의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다. 또한, 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 정의역에서 미분가능하다고 하고, $f(x)$를 미분가능한 함수라 한다.

(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$ 에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$ 에서 연속이다. 그러나 일반적으로 그 역은 성립하지 않는다.



TIP

함수 $f(x)$가 $x=a$ 에서 연속 $\underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ 미분가능

TIP

(1) 미분계수 (또는 순간변화율)

①

$$\lim_{\square\to a}\frac{f(a+\square)-f(a)}{\square}=f'(a)$$

같다

②

$$\lim_{\square\to\triangle}\frac{f(\square)-f(\triangle)}{\square-\triangle}=f'(\triangle)$$

같다 같다

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta=f'(a)$

(3) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$는 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 이므로 $h\to 0$일 때, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$의 극한값과 같다. 즉, 미분계수 $f'(a)$가 존재한다는 것은 $x=a$에서의 극한값이 존재한다는 것이므로 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 일치해야 한다.

(4) 미분가능성의 판별

주어진 함수의 그래프가

(ⅰ) 불연속일 때

(ⅱ) 뾰족점이 존재할 때

정의역의 특정한 점에서 미분가능하지 않다.

STEP-3

181 심화유형 2-1

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족할 때, $g'(0)$의 값을 구하시오.

(가) $f(0)=1$, $f'(0)=-6$, $g(0)=4$
(나) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)g(x)-4}{x}=0$

182

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)-2}{x^2-1}=3$,

$\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x-1)-3}{x-2}=4$를 만족시킨다.

$\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)g(x)-a}{x-1}=b$이다. $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 실수이다.)

217 심화유형 2-13

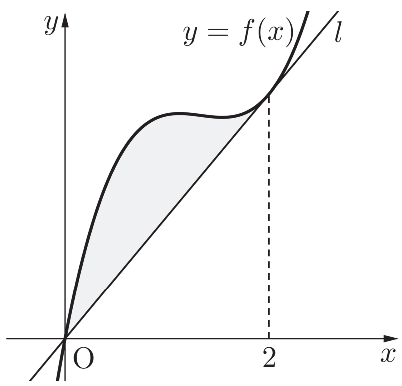
함수 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 값을 가장 작은 수부터 차례대로 나열할 때 n번째 수를 a_n이라 하자. $a=a_n$일 때, $f(x)$의 극댓값을 b_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)$의 값을 구하시오. 교육청 기출

218

함수 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}(1-a)x^2-3ax$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 a에 대하여 극솟값이 최대일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

302

삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$가 있다. 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선 l 이 원점에서 다시 곡선 $y=f(x)$와 만날 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

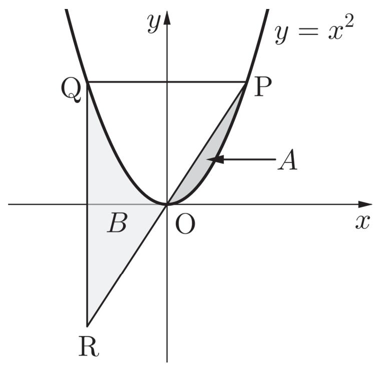


① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$

④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

303

좌표평면에서 곡선 $y=x^2$ 위의 제 1사분면에 있는 한 점 P와 y축에 대하여 대칭인 점을 Q라 하고, 점 Q를 지나고 y축에 평행한 직선과 직선 OP가 만나는 점을 R라 하자.



곡선 $y=x^2$과 선분 OP로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=x^2$과 두 선분 OR, QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 할 때, $\frac{A}{B}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이고, 점 O는 원점이다.)

365 심화유형 3-18

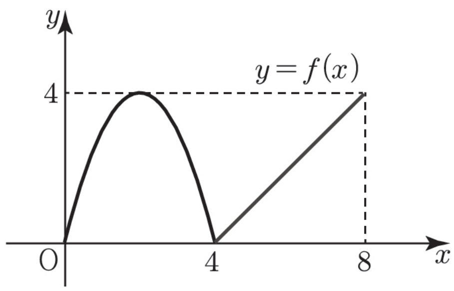
구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 실수 a $(0 \le a \le 4)$에 대하여

$\displaystyle\int_{a}^{a+4} f(x)\,dx$의 최솟값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

평가원 기출



366

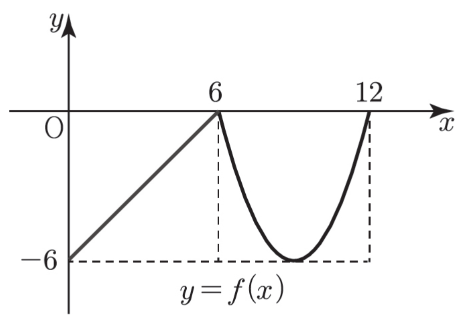
구간 $[0,\ 12]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x-6 & (0 \le x < 6) \\ \dfrac{2}{3}(x-6)(x-12) & (6 \le x \le 12) \end{cases}$$

이다. 실수 a $(0 \le a \le 6)$에 대하여 $\displaystyle\int_{a}^{a+6} f(x)\,dx$의

최댓값은 $-\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

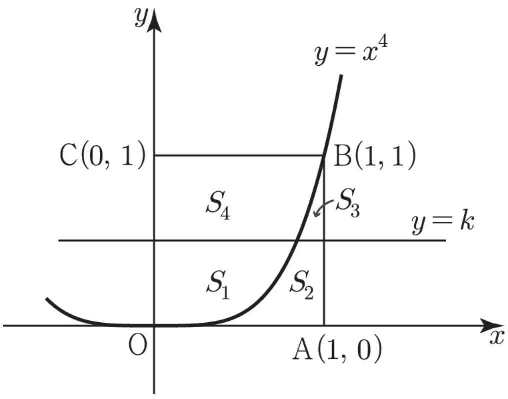
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



381 심화유형 3-24

좌표평면 위에 네 점 O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1)을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 곡선 $y=x^4$과 직선 $y=k\ (0<k<1)$에 의하여 정사각형 OABC를 네 영역으로 나눌 때, 다음 그림과 같이 네 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 하자. 이때, $|S_1-S_3|+|S_2-S_4|$의 최솟값을 구하시오.

사관학교 기출



382

곡선 $y=-x(x-6)$에서 그림과 같이 $\overline{OA}$, 곡선 AB, $\overline{BC}$, $\overline{CO}$ 로 둘러싸인 영역이 있다. 이 영역이 $x=3$, $y=k\ (0<k<9)$에 의하여 6개의 영역으로 나눌 때, 그림과 같이 6개의 영역을 각각 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 라 하자.

이때, $|S_1+S_3-S_5|+|S_2-S_4-S_6|$의 최솟값을 구하시오.