목/ 차/

1. 지수함수와 로그함수

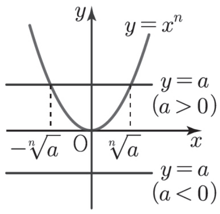
개념 01 | 거듭제곱근의 뜻

(1) 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 $x^n = a$를 만족하는 x를 a의 n제곱근이라 한다. 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

(2) 그래프를 이용한 거급제곱근의 이해

(1) n이 짝수일 때



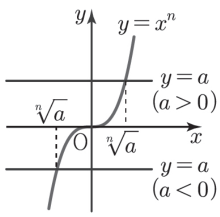
$y=x^n$은 우함수이므로 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

① $a>0$이면 교점이 두 개가 생기고, 교점의 x좌표는 $x=-\sqrt[n]{a}$, $x=\sqrt[n]{a}$이다.

② $a=0$이면 교점이 한 개가 생기고, 교점의 x좌표는 $x=0$이다.

③ $a<0$이면 교점이 없다.

(2) n이 홀수일 때



$y=x^n$은 기함수이므로 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때, a의 값에 관계없이 교점은 단 한 개가 생기고, 교점의 x좌표는 $x=\sqrt[n]{a}$이다.

개념 02 | 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고, m, n이 양의 정수일 때

① $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ④ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ ⑥ $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 양의 정수)

개념 03 | 지수의 확장

(1) $a \neq 0$이고, n이 자연수일 때 → ① $a^0 = 1$, ② $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

(2) $a>0$이고, m은 정수, n은 2 이상의 자연수일 때 →

① $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, ② $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, ③ $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

개념 04 | 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고, m, n이 유리수일 때

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$ ④ $(ab)^n = a^n b^n$ ⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

TIP 지수법칙은 지수의 범위를 실수로 확장하여도 성립한다.

랑/데/뷰/팁/

TIP

① a의 n제곱근 : 방정식 $x^n = a$의 근

② n제곱근 a : $\sqrt[n]{a}$

③ $\sqrt[n]{a}$ (a의 n제곱근 중 a와 부호가 같은 실수)

(n제곱근 a)$\subset$(a의 n제곱근)

④ n제곱근 a는 많아야 1개이지만 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개이다.

TIP

a의 n제곱근 중 실수인 것을 구하는 방정식 $x^n = a$의 실근을 구하는 것과 같고, 이것은 곡선 $y=x^n$과 직선 $y=a$의 교점의 x좌표를 찾는 것과 같다.

TIP

지수법칙에서 지수 범위의 확장

지수가 정수일 때는 밑이 음수인 경우에도 지수법칙이 성립하지만, 지수가 정수가 아닌 유리수, 실수일 때는 반드시 밑이 양수인 경우에만 지수법칙이 성립한다.

즉, 지수가 정수가 아닌 경우 밑이 음수이면 지수법칙을 적용하지 않는다.

예) 잘못된 계산 :

$\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = (-3)^{2\times\frac{1}{2}} = (-3)^1 = -3$

옳은 계산 :

$\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3^{2\times\frac{1}{2}} = 3$

81

어느 건물의 실내온도 28℃를 유지하기 위한 시간당 전력소비량을 A라 하자. 실내온도를 1℃ 내릴 때마다 그 온도를 유지하기 위한 시간당 전력소비량은 일정한 비율로 증가한다. 실내온도 25℃를 유지하기 위한 시간당 전력소비량이 $1.23A$ 일 때, 실내온도 20℃를 유지하기 위한 시간당 전력소비량은 A의 몇 배인지 구하시오.
(단, $\log 1.23 = 0.09$, $\log 1.40 = 0.15$ 로 계산하고, 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림한다.)

STEP-2

82

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-2 \le x \le 0$ 일 때, $f(x) = \lvert x+1 \rvert - 1$
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) + f(-x) = 0$
(다) 모든 실수 x 에 대하여 $f(2-x) = f(2+x)$

$-10 \le x \le 10$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하시오.

STEP-3

103 심화유형 1-1

양수 a, b가 다음 두 조건을 만족할 때, 2^b의 값을 구하시오.

(가) $\frac{1}{a}+\frac{1}{3b}=\frac{1}{3}$ (나) $3^a=8^b$

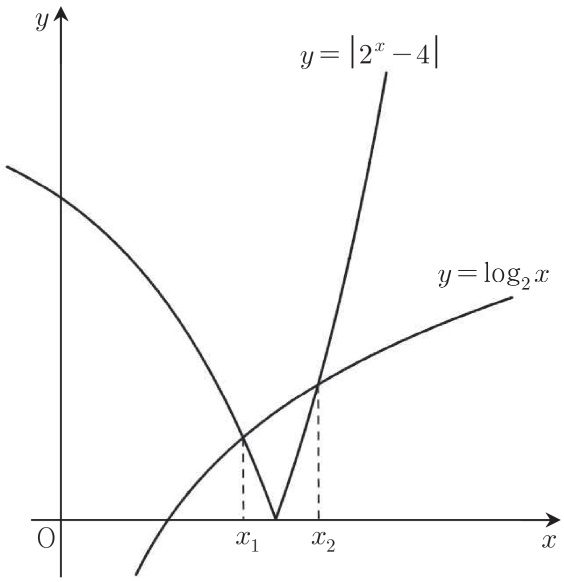
104

양수 a, b가 다음 두 조건을 만족할 때, 9^a의 값을 구하시오.

(가) $\frac{3}{a}-\frac{4}{b}=6$ (나) $81^a=64^b$

145 심화유형 1-22

두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 사관학교 기출



〈보 기〉

ㄱ. $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$

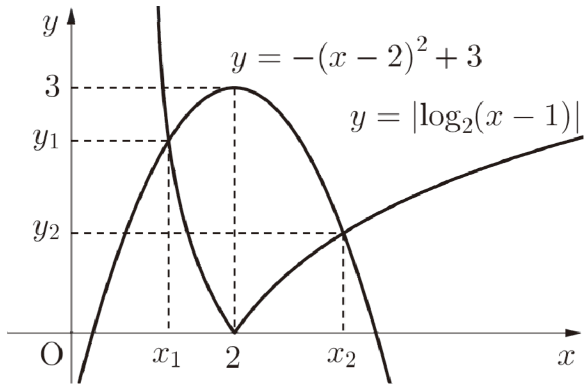
ㄴ. $(x_2-x_1)\left(2^{x_2}-2^{x_1}\right)<3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

146

두 곡선 $y=|\log_2(x-1)|$, $y=-(x-2)^2+3$가 만나는 두 점의 좌표를 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$)



〈보 기〉

ㄱ. $x_1+x_2<\dfrac{13}{4}+\sqrt{2}$

ㄴ. $x_2+y_2>5$

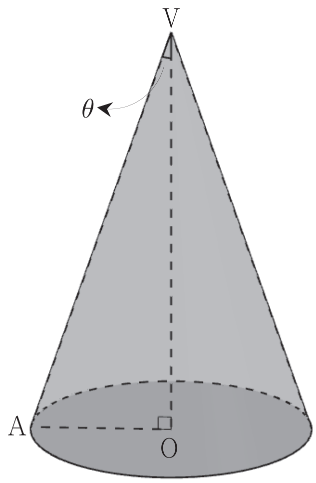
ㄷ. $\log_2 3<\dfrac{y_1y_2}{(2-x_1)(x_2-2)}<\dfrac{24}{7}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

STEP-2

229

그림과 같은 직원뿔의 옆넓이가 밑넓이의 3배이고, 꼭짓점을 V, 밑면의 중심을 O라 하자. 밑면인 원 위의 한 점 A에 대하여 $\angle \mathrm{AVO}=\theta$라 할 때, $\sin\theta$의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

230

$0<\theta<2\pi$일 때, 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경이 원 $x^2+y^2=1$와 만나는 점을 P라 하자. 점 P에서 이 원에 접하는 접선과 점 $\mathrm{A}(0,\ -2)$사이의 거리가 2보다 작게 되도록 하는 θ의 값의 범위는 $a<\theta<b$, $c<\theta<d$이다. $\frac{a}{d}+\frac{c}{b}$의 값을 구하시오. (단, $a<b<c<d$)

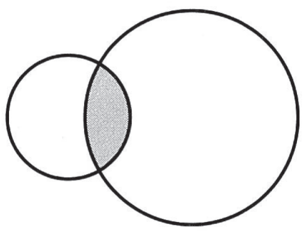
① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

STEP-3

242 심화유형 2-1

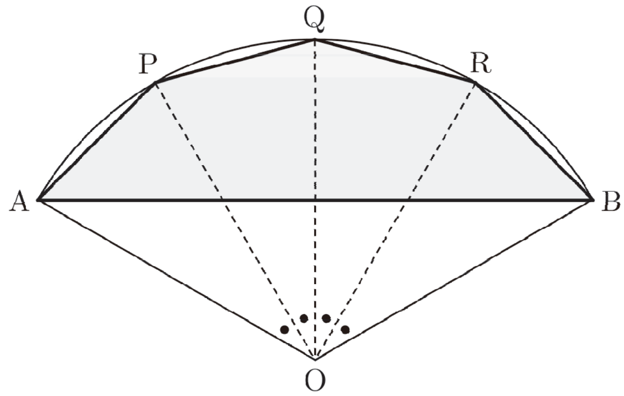
두 원의 교점에서 그은 각각의 접선이 서로 수직일 때, 두 원은 직교한다고 한다. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원과 $\sqrt{3}$인 원이 서로 직교할 때, 색칠한 부분의 넓이는 $\frac{a}{6}\pi-\sqrt{b}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 자연수이다.)



243

그림과 같이 중심이 O이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB를 사등분한 점을 점 A에서 가까운 점부터 차례로 P, Q, R라 할 때 오각형 QPABR의 넓이를 S라 하자. 호 AB의 길이가 4π일 때 $S=a+b\sqrt{3}$이다. $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수)



개념 08 ❙ $\sum$의 정의와 성질

(1) $\sum$의 정의

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 기호 $\sum$를 사용하여 다음과 같이 나타낸다. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$

(2) $\sum$의 기본 성질

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$ (복부호 동순)

② $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (단, c는 상수) ③ $\sum_{k=1}^{n} c = cn$ (단, c는 상수)

TIP

① $\sum_{k=1}^{n}(pa_k \pm qb_k)=p\sum_{k=1}^{n} a_k \pm q\sum_{k=1}^{n} b_k$ (단, p, q는 상수, 복부호 동순)

② $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\{a_i\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)\right\}$

개념 09 ❙ $\sum$ 의 계산

(1) 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

TIP

① $\sum_{k=1}^{n-1} k=\frac{n(n-1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n-1} k^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n-1} k^3=\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2$

(2) 여러 가지 수열의 합

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1$

③ $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2k+1-2\sqrt{k(k+1)}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1$

랑/데/뷰/팁/

주의해야 할 $\sum$의 계산

(1) $\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{l=1}^{n} a_l$
$=\sum_{i=1}^{n} a_i=\cdots$

(2)
$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \neq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$

(3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\neq\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$

(4) $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \neq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$

(5) $\sum_{k=1}^{n} n = n^2$

특수한 꼴의 수열의 합
식이 소거되는 합의 형태로 변형하여 계산을 간단히 한다.

(1) 부분분수 분해를 이용한다.

① $\frac{1}{k(k+a)}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right)$

② $\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$

③ $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

(2) 분모의 유리화를 이용한다.

① $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

② $\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}=\frac{1}{2}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

STEP-1

292

첫째항이 100인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차를 구하시오.

(가) 공차는 정수이다. (나) a_9는 양수이고, a_{10}은 음수이다.

293

첫째항이 8 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 제 3항과 제7항은 절댓값이 같고 부호가 서로 다르다고 할 때, a_{10} 의 값을 구하시오.

380

2이상의 자연수 n에 대하여 $y=mx$위의 점이 부등식 $x^2+y^2-2nx+n^2-1 \le 0$을 만족할 때 m의 최댓값을 $f(n)$이라 하자. 이때 $\sum_{n=2}^{10} \{f(n)\}^2$을 구하시오.

(단, m은 실수)

381

$\left[\sum_{n=1}^{960} \frac{1}{2\sqrt{n}} \right]$의 값을 구하시오.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

STEP-3

389 심화유형 3-1

다음 보기에서 옳은 것만 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이면 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 도 등비수열이다.

ㄴ. 수열 $\{a_{n+1}+a_n\}$이 등차수열이면 수열 $\{a_n\}$ 도 등차수열이다.

ㄷ. 수열 $\{a_na_{n+1}\}$ 이 등비수열이면 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 도 등비수열이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

390

다음 보기에서 옳은 것만 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이면 수열 $\{(a_{n+1})^2-(a_n)^2\}$도 등차수열이다.

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이면 수열 $\{a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}\}$도 등차수열이다.

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{a_{2n-1}+a_{2n}\}$도 등비수열이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ