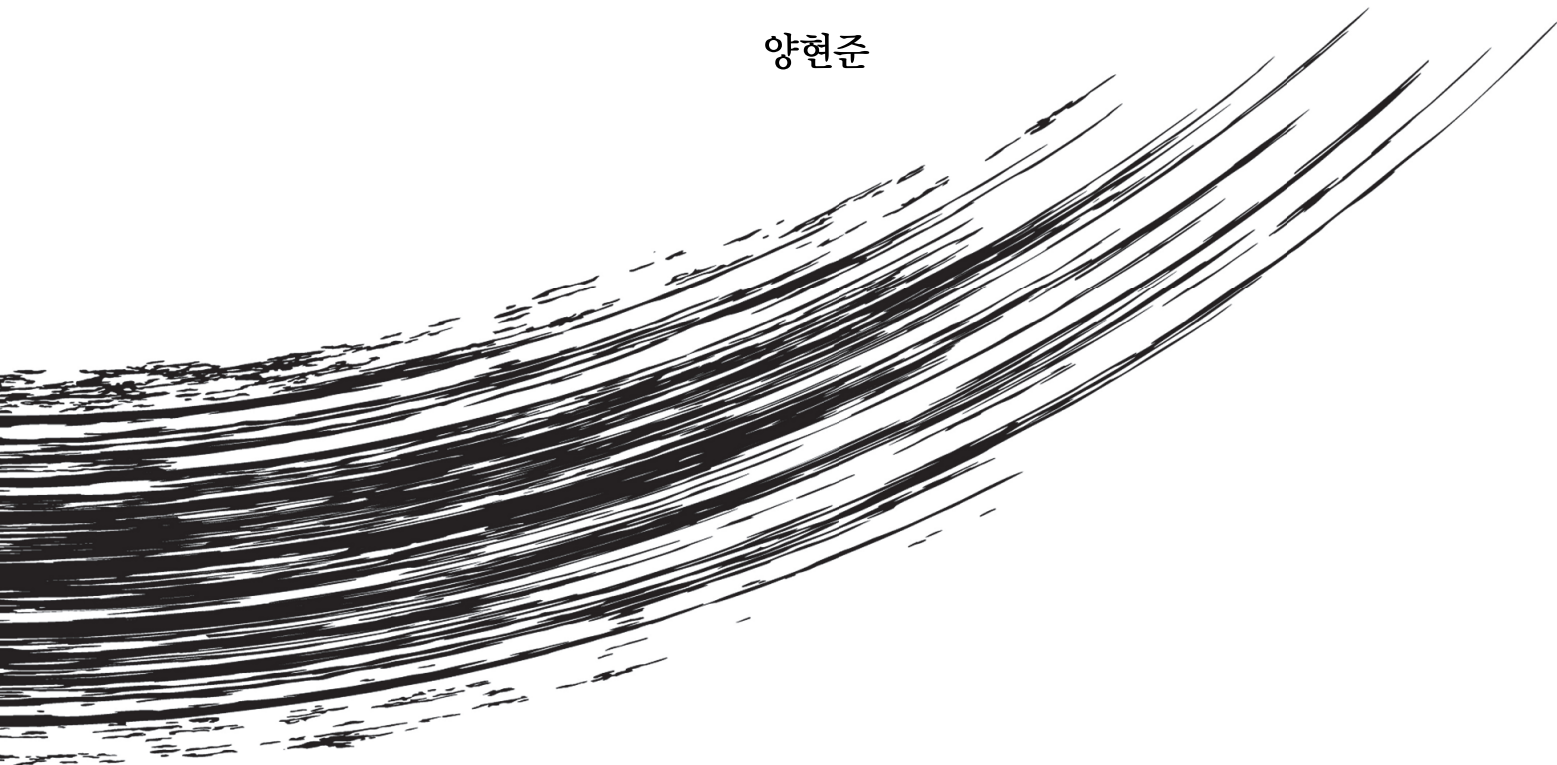
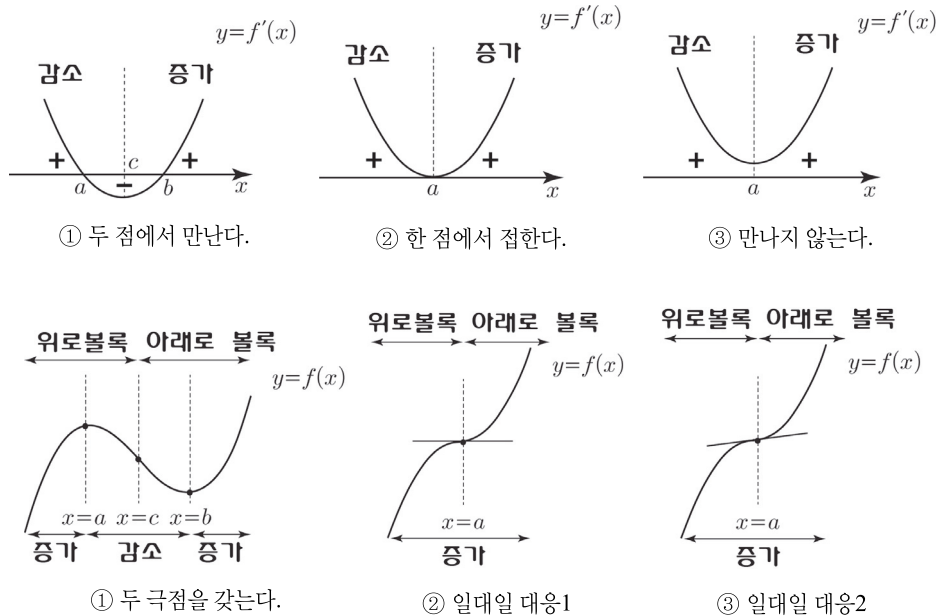


내가 그린 그래프 그림

양현준



이때 도함수 $f'(x)$ 의 부호와 동시에 증가 감소에 따라서
삼차함수 $f(x)$ 의 개형과 볼록성을 완전하게 나타낸 개형은 다음과 같다.



도함수 $f'(x)$ 의 극점(이차함수의 꼭짓점)의 x 좌표를 기준으로
도함수 $f'(x)$ 의 그래프가 감소하다가 증가하므로
삼차함수 $f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하다가 아래로 볼록하다. 또한
추가적으로 삼차함수에서 인지하고 있어야 할 기본특징들은 다음과 같다.

삼차함수 그래프의 기본특징(최고차항의 계수 양수 기준)

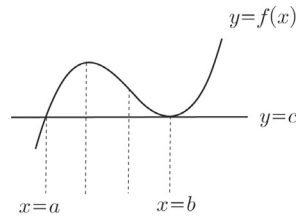
- ① 감소하는 구간을 갖는 개형은 극값을 갖는 개형뿐이다.
- ② 최솟값 또는 최댓값을 갖지 않는다.
- ③ 적어도 x 축과 한 점에서 만난다.
- ④ 치역이 실수 전체의 집합이다.

특징①을 통한 문제풀이에서의 사고과정은 예를 들어 다음과 같다.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 $f'(0) = -1$ 이라고 하면
 $f'(0)$ 의 값이 음수라는 것과 $f'(0)$ 의 값이 수치로서 -1 이라는 두 가지의 의미로 보고
 $f(x)$ 의 그래프를 두 극값을 갖는 개형으로 결정한다. 이후 문제의 조건을 모두 해석하여
 $f'(0) = -1$ 으로 구체적인 $f(x)$ 의 식을 구한다.

C개념: 필수 심화 도구 비율관계 활용 1

삼차함수 $f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다고 하자.



함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 극솟값 c 를 갖고 $f(a)=c$ 이다. 이때
 함수 $f(x)$ 의 식은 $f(x)=k(x-a)(x-b)^2+c$ 라고 할 수 있다.
 함수 $f(x)$ 의 극댓값의 x 좌표를 구해보자.

$$f(x) = k(x-a)(x-b)^2 + c \text{ 은}$$

$$f(x) = k(x-a)(x^2 - 2bx + b^2) + c \text{ 이고 곱의 미분법에 의해}$$

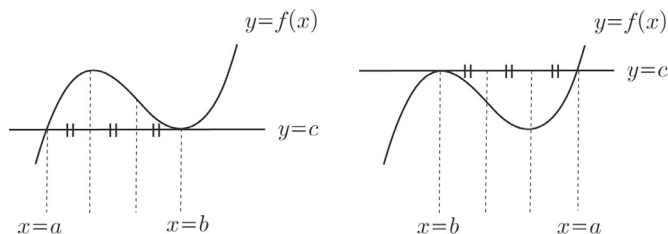
$$f'(x) = k(x-b)^2 + 2k(x-a)(x-b) \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = k(x-b)(3x - 2a - b) \text{ 이다.}$$

방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근은 $x=b$, $x=\frac{2a+b}{3}$ 이고 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{2a+b}{3}$ 에서
 극댓값을 갖는데 이 값은 함수 $f(x)$ 와 직선 $y=c$ 가 만나는 두 점 (a, c) , (b, c) 을
 양 끝점으로 하는 선분의 1:2 내분점의 x 좌표이다.

또한 극대점의 x 좌표와 극소점의 x 좌표의 중간 값이 대칭점의 x 좌표이므로
 다음의 점들의 x 좌표 사이의 거리에는 그림과 같은 1:1:1 비율관계가 항상 성립하며
 이는 최고차항의 계수가 음수일 때도 성립한다.

- ① 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=c$ 와의 극점이 아닌 교점
- ② 곡선 $y=f(x)$ 의 극소점과 극대점
- ③ 곡선 $y=f(x)$ 의 대칭점



D개념: 활용 소재

부등식과 미분계수

미분계수는 다항함수의 개형에서 증가와 감소에 대한 정보를 준다. 그렇기 때문에 미분계수를 많이 알면 알수록 다항함수 개형 파악에 유리하다. 이때 문제 상황에서는 부등식을 많이 활용하는데 극값의 정의를 통해 부등식에서 미분계수 값을 알아내야 한다.

극값의 정의와 미분계수

- ① 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f(a)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극솟값 $f(a)$ 를 갖는다.
- ② 함수 $f(x)$ 가 $x = b$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq f(b)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x = b$ 에서 극댓값 $f(b)$ 를 갖는다.

만약 함수 $f(x)$ 가 $x = c$ 에서 미분가능하고 $x = c$ 에서 극값을 갖는다면 $f'(c) = 0$ 이다. 따라서 어떤 열린구간에서 성립하는 부등식을 $f(x) \geq f(c)$ 또는 $f(x) \leq f(c)$ 의 형태로 인지한 후 어떤 열린구간에 포함되는 $x = c$ 에 대하여 $f'(c) = 0$ 임을 이용하는 것이다.

[예제]

실수 전체의 집합에서 사차함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 1$ 이고
실수 전체의 집합에서 $f(x) \geq 2x - 1$ 을 만족시킨다고 하자. 그러면
실수 전체의 집합에서 $f(x) - 2x + 1 \geq 0$ 이다.

함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x) - 2x + 1$ 라고 하면 $f(1) = 1$ 이므로 $g(1) = 0$ 이고
실수 전체의 집합에서 $g(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$ 을 만족시킨다.
실수 전체의 집합은 $x = 1$ 을 포함하므로 극값의 정의에 의해
함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극솟값 $g(1)$ 을 갖는다. 따라서
함수 $g(x)$ 는 $g'(1) = f'(1) - 2 = 0$ 이고 $f'(1) = 2$ 이다.
위의 방식을 일반화하면 부등식과 미분계수의 관계를 다음과 같이 서술할 수 있다.

48번

2015학년도 9월 21번

최고차항의 계수가 1 인 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

(가) $f(0) = -3$

(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $6x - 6 \leq f(x) \leq 2x^3 - 2$ 이다.

① 36

② 38

③ 40

④ 42

⑤ 44

곡선 $y = x^3 + 3x^2$ 위의

임의의 점 $(m, m^3 + 3m^2)$ 에서의 접선의 방정식은 $y = (3m^2 + 6m)(x - m) + m^3 + 3m^2$ 이다.

접선이 점 $(-4, a)$ 를 지난다고 하자.

$$a = (3m^2 + 6m)(-4 - m) + m^3 + 3m^2 \text{ 이고}$$

$$a = -2m^3 - 15m^2 - 24m \text{ 이다.}$$

함수 $g(m)$ 을 $g(m) = -2m^3 - 15m^2 - 24m$ 라고 하자.

함수 $g'(m)$ 은 $g'(m) = -6m^2 - 30m - 24$ 이고
 $g'(m) = -6(m+1)(m+4)$ 이므로 $g(m)$ 의
 극댓값은 $g(-1) = 11$ 이고
 극솟값은 $g(-4) = -16$ 이다.

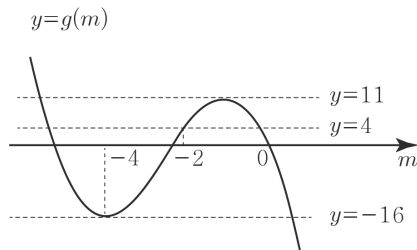
$f'(m) = 3m(m+2)$ 에서

$m < -2, m > 0$ 이면 접선의 기울기가 양수

$-2 < m < 0$ 이면 접선의 기울기가 음수이고

$g(-2) = 4, g(0) = 0$ 이므로

$g(m)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



곡선 $y = g(m)$ 과 직선 $y = a$ 가 세 점에서 만나면

$-16 < a < 11$ 이다. 또한 세 점의 x 좌표를 각각

p, q, r ($p < q < r$)라고 하면 (나) 조건에 의해서

$f'(p)f'(q)f'(r) < 0$ 이어야 한다. 이때

a 의 값과 관계없이 $p < -2$ 이므로 $f'(p) > 0$ 이다.

$-16 < a < 0$ 이면 $q < -2, q > 0$ 이므로

$f'(q) > 0, f'(r) > 0$ 이고

$f'(p)f'(q)f'(r) > 0$ 이다.

$4 < a < 11$ 이면 $-2 < q < 0, -2 < q < 0$ 이므로

$f'(q) < 0, f'(r) < 0$ 이고

$f'(p)f'(q)f'(r) > 0$ 이다.

$0 < a < 4$ 이면 $q < -2, -2 < q < 0$ 이므로

$f'(q) > 0, f'(r) < 0$ 이고

$f'(p)f'(q)f'(r) < 0$ 이다.

따라서 정수 a 의 최댓값은 $M = 3$ 이고 $M^2 = 9$

comment

접선의 개수 문제는 방정식의 활용 문제이다.

특히 (나)조건과 같이 방정식의 실근의 개수와

동시에 실근의 특정 범위를 관찰하는 것이

난이도가 높다. 이때는 범위의 경계에서의 함숫값을

구하여 그래프에 표현해놓아야 한다.