제 2 교시

2022학년도 『제헌절 기념』OIS 모의고사 문제지

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					–				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

아무런 설명 없이 나의 편이 되어줘

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $2^{-\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{3}{4}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

2. $\int_0^2 x^3\,dx$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

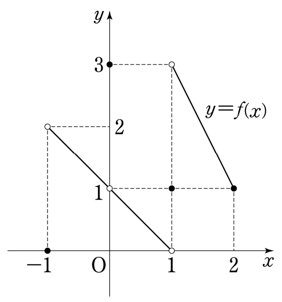
3. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 4, \quad \sum_{n=1}^{10} (a_n + 3b_n) = 34$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10} b_n$의 값은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

4. 닫힌 구간 $[-1,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $f(x)=x^3-4x$ 에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2$$

를 만족시키는 모든 상수 a 의 값의 곱은? [3점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

6. 함수 $y=(x+1)^3(x-1)$ 의 극솟값은? [3점]

① $-\frac{27}{16}$ ② $-\frac{9}{8}$ ③ $-\frac{9}{16}$ ④ $-\frac{3}{8}$ ⑤ $-\frac{3}{16}$

7. 두 실수 a, b가

$$2^{a+b}=3^{ab}=5$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 의 값은? [3점]

① $2\log_3 2$ ② $\log_3 5$ ③ $\log_2 3$
④ 2 ⑤ $\log_2 5$

8. 상수 a에 대하여 좌표평면에서 두 직선

$$y=4^a(x+1),\quad y=(2^{a+2}-3)x+1$$

이 서로 평행할 때, 이 두 직선 사이의 거리는 k이다. k^2의 값은? [3점]

① $\frac{29}{41}$ ② $\frac{30}{41}$ ③ $\frac{31}{41}$ ④ $\frac{32}{41}$ ⑤ $\frac{33}{41}$

9. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\int_0^3 x^2 f(t)\,dt+2x$$

를 만족시킨다. $f(4)$의 값은? [4점]

① -18 ② -16 ③ -14 ④ -12 ⑤ -10

10. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=\frac{n}{2^n}\times(n+1)!$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{(n+2)!}{2^n}-2\ \cdots\cdots\ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (*)이 성립한다.
> (ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
> $$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{(m+2)!}{2^m}-2$$
> 이다. $n=m+1$일 때,
> $$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\frac{(m+2)!}{2^m}-2+\boxed{(가)}\times\frac{(m+2)!}{2^{m+1}}$$
> $$=\boxed{(나)}\times\frac{(m+2)!}{2^{m+1}}-2$$
> $$=\frac{(m+3)!}{2^{m+1}}-2$$
> 이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
> $$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{g(7)}{f(4)}$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

11. 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)(x-3) & (x<2)\\ a & (x\geq 2)\end{cases}$$

에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-b}{f(x)} & (x\neq b)\\ c & (x=b)\end{cases}$$

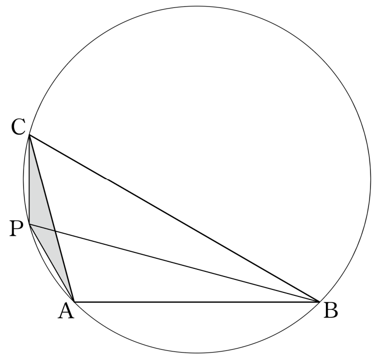
가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(1)+g(3)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

12. 그림과 같이 원에 내접하고

$$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}:1,\quad \angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{6}$$

인 삼각형 ABC가 있다. 점 B를 포함하지 않는 호 AC를 이등분하는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{BP}}=2\sqrt{3}$일 때, 삼각형 ACP의 넓이는? (단, $0<\angle\mathrm{ACB}<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{2}-1$ ③ $2-\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$

13. $0<k<1$ 인 상수 k에 대하여 함수 $y=-k^{2x}+\frac{9}{4}$ 의 그래프 위의 x좌표가 양수인 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선이 함수 $y=\log_{\frac{1}{k}} x$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 원점 O에 대하여 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OB}}=2\overline{\mathrm{OA}}$ (나) 두 직선 OA, OB의 기울기의 곱이 1이다.

삼각형 OAB의 넓이는? [4점]

① 12 ② $\frac{27}{2}$ ③ 15 ④ $\frac{33}{2}$ ⑤ 18

14. 삼차함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_{a^2}^{x} f(t)\,dt$$

라 하자. 곡선 $y=F(x)$가 x축과 서로 다른 네 점에서 만나고, 이 네 점의 x좌표가 각각

$$a-2,\quad a-1,\quad 2a-1,\quad 2a+3$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a=1$ 또는 $a=3$이다.
ㄴ. $f(0)>0$이면 $f(5)>0$이다.
ㄷ. $f(9)<0<f(5)$이면 $\int_{m}^{m+3} f(x)\,dx>0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (n<4) \\ -\dfrac{a_n}{2} & (n \geq 4) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 점 P_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

(가) P_0은 원점이다. (나) 점 P_{n-1}의 좌표가 $(x,\ y)$일 때, $a_n<20$이면 점 P_n의 좌표는 $(x+1,\ y)$이고, $20 \leq a_n<90$이면 점 P_n의 좌표는 $(x,\ y+1)$이고, $a_n \geq 90$이면 점 P_n의 좌표는 $(x+1,\ y+1)$이다.

홀수 k에 대하여 점 P_9의 좌표가 $(6,\ k)$이고 a_1이 자연수일 때, 모든 a_1의 개수는? [4점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

단답형

16. 함수 $f(x)=2\cos x+30$의 최솟값을 구하시오. [3점]

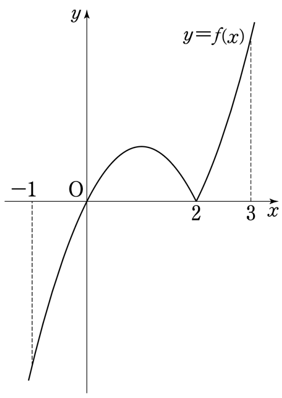
17. 함수 $f(x)=3x^5+5x^3-x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

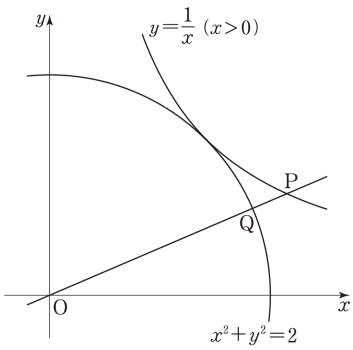
$$a_3 + a_7 = a_4 = 4$$

일 때, a_2의 값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x) = x|x-2|$에 대하여 $\int_{-1}^{3} f(x)dx = k$라 할 때, $30k$의 값을 구하시오. [3점]



20. 그림과 같이 곡선 $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 2$와 직선 OP가 제1사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 길이를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 1+} \frac{f(t)}{(t-1)^2} = k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, $t > 1$이다.) [4점]



21. $a>0$, $\pi \le b \le 3\pi$인 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\cos(bx)$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{ab}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $f(1)=f(3)$ (나) $f\left(\frac{10}{3}\right)-f\left(\frac{4}{3}\right)=4$

22. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^3-4x \le f(x) \le x^3+2x^2+2 \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여, 다음 조건을 만족시키도록 고정된 두 점 A, B와 양의 상수 k를 정한다.

(가) 점 A는 모든 곡선 $y=f(x)$가 항상 지나는 점이다. (나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k,\ f(k))$에서의 모든 접선이 y축과 항상 점 B에서 만난다.

$(*)$을 만족시키는 어떤 다항함수 $f(x)$와 점 $\mathrm{P}(k,\ f(k))$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선과 직선 BP가 서로 수직일 때 $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

∗ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시 수학 영역(확률과 통계) 홀수형

5지선다형

23. ${}_{8}\mathrm{H}_{2}$의 값은? [2점]

① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

24. 두 사건 A와 B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

25. 어느 학교 학생 600명을 대상으로 수업방식에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 등교수업과 온라인수업 중 하나를 선택하였고, 각각의 수업방식을 선택한 학생의 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	등교수업	온라인수업	합계
남학생	a	$300-a$	300
여학생	$300-2a$	$2a$	300

이 조사에 참여한 학생 600명 중에서 임의로 선택한 1명이 온라인수업을 선택한 학생일 때 이 학생이 여학생일 확률을 p_1, 이 조사에 참여한 학생 600명 중에서 임의로 선택한 1명이 등교수업을 선택한 학생일 때 이 학생이 남학생일 확률을 p_2라 하자. $3p_1 = 4p_2$일 때, a의 값은? [3점]

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

26. $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^5\left(x+\frac{1}{x}\right)$의 전개식에서 상수항은? [3점]

① 25 ② 30 ③ 35 ④ 40 ⑤ 45

27. 어느 농장에서 수확하는 석류 1개의 무게는 평균이 300 g, 표준편차가 24 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 수확한 석류 중에서 임의추출한 석류 16개의 무게의 표본평균이 291 g 이상이고 303 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6687
④ 0.7745 ⑤ 0.8185

28. 5 이상의 자연수 n과 양의 상수 k에 대하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

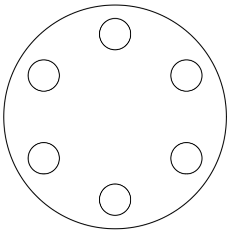
X	3	9	27	$\cdots$	3^n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{k}$	$\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{k}$	$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{k}$	$\cdots$	$\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{k}$	1

$\mathrm{E}\left(\frac{X-1}{4}\right)=32$일 때, n의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

단답형

29. 그림과 같이 최대 6개의 용기를 넣을 수 있는 원형의 실험 기구가 있다. 서로 다른 6개의 용기 A, B, C, D, E, F를 이 실험 기구에 모두 넣을 때, A와 B는 이웃하게 되도록 넣고 B와 C는 이웃하지 않게 되도록 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



30. 전체집합

$$U = \{x \mid x\text{는 } 12 \text{ 이하의 자연수}\}$$

에 대하여 원소의 개수가 4인 집합 U의 부분집합 중에서 임의로 한 개의 집합을 선택하고, 선택한 집합을 A라 하자.

$$A \cap \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \neq \varnothing$$

일 때, $\{5,\ 6\} \subset A$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-8n}\right)$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

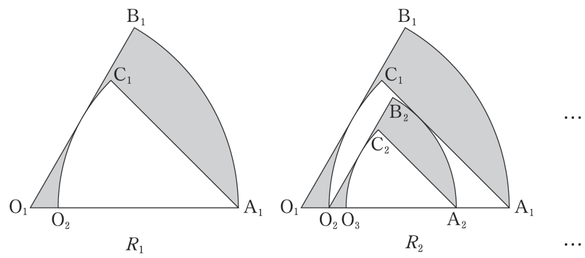
24. 좌표평면에서 곡선 $y=e^x$와 직선 $y=x+4$가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 a라 하자. $\int_0^a (x-a)e^x\,dx$의 값은? [3점]

① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -2 ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -1

25. 곡선 $(x^2+y^2)(\sqrt{y}+\sqrt{a})=128$ 위의 점 $(a,\ a)$에서의 접선의 y절편은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① $\frac{32}{5}$ ② $\frac{34}{5}$ ③ $\frac{36}{5}$ ④ $\frac{38}{5}$ ⑤ 8

26. 중심이 O_1, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1B_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{O_1A_1}$ 위의 점 O_2와 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1B_1}$의 내부의 점 C_1에 대하여 중심이 A_1, 중심각의 크기가 45°인 부채꼴 $\mathrm{A_1O_2C_1}$을 선분 $\mathrm{O_1B_1}$과 호 $\mathrm{O_2C_1}$이 접하도록 그린다. 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1B_1}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{A_1O_2C_1}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{A_1O_2}$ 위의 점 A_2와 부채꼴 $\mathrm{A_1O_2C_1}$의 내부의 점 B_2에 대하여 중심이 O_2, 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 $\mathrm{O_2A_2B_2}$를 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 호 $\mathrm{A_2B_2}$가 접하도록 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 부채꼴 $\mathrm{A_2O_3C_2}$를 그리고 부채꼴 $\mathrm{O_2A_2B_2}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{A_2O_3C_2}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

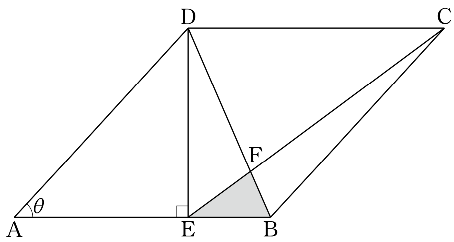


① $\frac{7\pi}{12}$ ② $\frac{7\pi}{13}$ ③ 2π ④ $\frac{7\pi}{15}$ ⑤ $\frac{7\pi}{16}$

27. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(k+n)(k+2n)}$ 의 값은? [3점]

① $\ln\frac{9}{8}$ ② $\ln\frac{4}{3}$ ③ $\ln\frac{3}{2}$ ④ $\ln\frac{9}{4}$ ⑤ $\ln\frac{8}{3}$

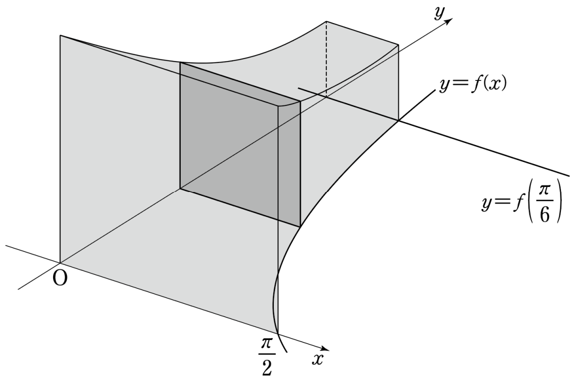
28. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다. 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고, 선분 BD와 선분 CE의 교점을 F라 하자. $\angle DAB=\theta$일 때, 삼각형 FEB의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

단답형

29. 그림과 같이 $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ 에서 감소하는 함수 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ 의 그래프와 x축, y축 및 직선 $y = f\left(\frac{\pi}{6}\right)$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하고 y축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는 $a\pi + b$이다. $\frac{1}{a^2} + b$의 값을 구하시오. (단, b는 자연수이다.) [4점]



30. 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x) = e^{2x} + ae^{x} + b$가 있다. 함수 $f(x)$와 함수

$$g(x) = |f(x) - 2|$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $3a + 2b$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M \times m$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 동일한 최솟값을 갖는다.
> (나) 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는 2이다.
> (다) 함수 $g(x)$가 $x = \alpha$에서 극대이고, 방정식
> $$g(x) = g(\alpha)$$
> 의 실근의 개수는 2이다.

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 벡터 $\vec{a}=(-2,\ 1)$의 크기는? [2점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

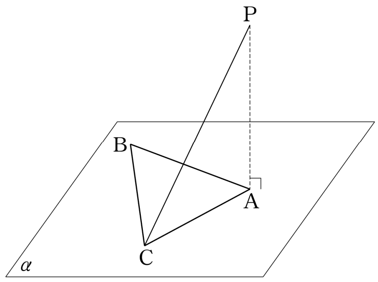
24. 직선 $y=2x+1$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 직선이 포물선 $y^2=4x$에 접할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

25. 좌표공간의 점 P(2, -3, 4)를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q라 하고, 점 P를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이는? [3점]

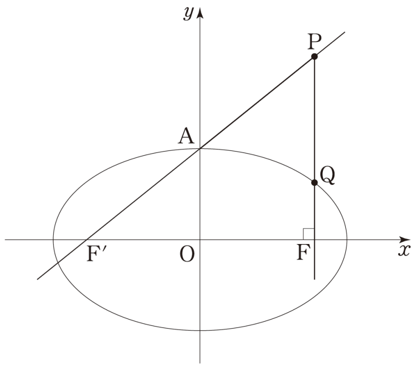
① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

26. 그림과 같이 평면 α 위에 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선이 발이 A일 때, 직선 AB와 직선 PC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta = \frac{1}{4}$일 때, 선분 PA의 길이는? [3점]



① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

27. 두 초점이 F(c, 0), F′($-c$, 0) ($c>0$)인 타원이 y축과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 A라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선과 직선 AF′의 교점을 P라 하고, 선분 PF와 타원의 교점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{AP}}=\frac{7}{2}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=3$일 때, $\overline{\mathrm{FF'}}^2$의 값은? [3점]



① $12\sqrt{7}-7$ ② $13\sqrt{7}-7$ ③ $14\sqrt{7}-7$
④ $15\sqrt{7}-7$ ⑤ $16\sqrt{7}-7$

28. $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 P, 선분 BC의 중점을 Q라 하고, 선분 PQ의 중점을 M이라 하자.

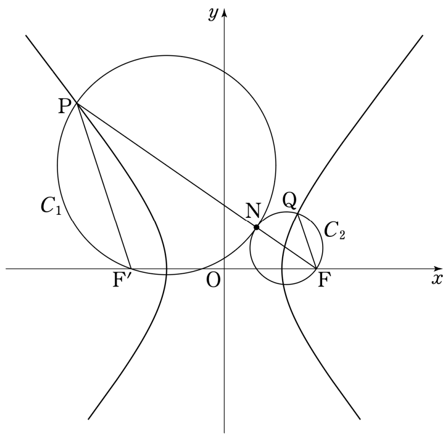
$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

일 때, $\tan(\angle\mathrm{CAB})$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{15}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{30}}{10}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ④ $\frac{\sqrt{15}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

단답형

29. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(3 < c < 5)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b}=1$ 위에 있고 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 PF를 $3:1$로 내분하는 점을 N이라 하자.
두 선분 PN, NF를 각각 지름으로 하는 두 원을 C_1, C_2라 하고, 쌍곡선과 원 C_2가 제1사분면에서 만나는 점을 Q라 하자.
두 직선 PF′, QF가 서로 평행하고, 원 C_1이 점 F′을 지날 때 $10b$의 값을 구하시오. (단, b는 양수이다.) [4점]



30. 좌표공간에서 서로 평행한 두 평면 α와 β 사이의 거리가 4이다. 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B에 대하여 선분 AB의 중점을 M이라 하자. 평면 α 위를 움직이는 점 P와 평면 β 위를 움직이는 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $k > 4$인 상수 k에 대하여 $\overline{\mathrm{MP}}=\overline{\mathrm{PQ}}=k$이다.
(나) 직선 AB와 직선 MP가 서로 수직이 되도록 하는 점 P의 개수는 1이다.
(다) 삼각형 ABQ의 넓이의 최댓값과 최솟값의 합은 $12\sqrt{2}$이다.

선분 AB의 길이를 p라 하고, 점 Q가 나타내는 영역의 넓이를 $q\pi$라 할 때, $\dfrac{p\times q}{\sqrt{33}}$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2022학년도 『제헌절 기념』
OIS 모의고사 해설지

1	③	2	②	3	②	4	④	5	⑤
6	①	7	③	8	④	9	⑤	10	①
11	①	12	③	13	①	14	⑤	15	④
16	28	17	29	18	8	19	40	20	2
21	10	22	23						

[확률과 통계]

23	④	24	②	25	⑤	26	①	27	②
28	③	29	36	30	91				

[미적분]

23	②	24	①	25	③	26	④	27	②
28	⑤	29	49	30	18				

[기하]

23	③	24	②	25	④	26	⑤	27	③
28	①	29	135	30	32				

Offering an Ideal Solution

1.
$2^{-\frac{1}{2}}\times 4^{\frac{3}{4}}=2^{-\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{2}}=2^1=2$

2.
$\int_0^2 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=4$

3.
$\sum_{n=1}^{10}(a_n+3b_n)=\sum_{n=1}^{10}a_n+3\sum_{n=1}^{10}b_n=34$ 이고,
$\sum_{n=1}^{10}a_n=4$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10}b_n=10$

4.
$\lim_{x\to 0}f(x)=1$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=3$ 이므로
$\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=1+3=4$

5.
함수 $f(x)=x^3-4x$ 를 미분하면
$f'(x)=3x^2-4$ 이다.
$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)=2$ 에서
$f'(a)=3a^2-4=2$, $a^2=2$ 이므로
$a=\sqrt{2}$ 또는 $a=-\sqrt{2}$ 이다.
따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은 -2

6.
$y=(x+1)^3(x-1)$ 의 양변을 x 에 대해 미분하면
$y'=3(x+1)^2(x-1)+(x+1)^3$
$=(x+1)^2\{3(x-1)+(x+1)\}$
$=2(x+1)^2(2x-1)$
이다. y' 의 부호가 $x=\frac{1}{2}$ 의 좌우에서 음수에서
양수로 변하므로 함수 $y=(x+1)^3(x-1)$ 는
$x=\frac{1}{2}$ 에서 극솟값 $\frac{27}{8}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{16}$ 을 갖는다.

7.
$2^{a+b}=5$ 에서 $a+b=\log_2 5$ 이고, $3^{ab}=5$ 에서
$ab=\log_3 5$ 이다.
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{\log_2 5}{\log_3 5}$ … ㉠이다.
이때 $\log_2 5=\frac{1}{\log_5 2}$, $\log_3 5=\frac{1}{\log_5 3}$ 이므로 ㉠에서
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{\log_2 5}{\log_3 5}=\frac{\log_5 3}{\log_5 2}=\log_2 3$

8.
두 직선 $y=4^a(x+1)$, $y=(2^{a+2}-3)x+1$ 이 서로 평행하므로
이 두 직선의 기울기가 서로 같고, y 절편이 서로 다르다.
곧, $4^a=2^{a+2}-3$, $2^{2a}-4\times 2^a+3=0$,
$(2^a-1)(2^a-3)=0$ 이므로
$2^a=1$ 또는 $2^a=3$ 이다. …… ㉠
또한, 두 직선 $y=4^a(x+1)$, $y=(2^{a+2}-3)x+1$ 의
y 절편은 각각 4^a, 1 이므로 $4^a\neq 1$ 이다. …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $2^a=3$ 이다.
한편, $2^a=3$ 이면 두 직선은 $y=9x+9$,
$y=9x+1$ 이므로 이 두 직선 사이의 거리는
점 $(0,\ 9)$ 와 직선 $9x-y+1=0$ 사이의 거리와 같다.
곧, $k=\frac{|9\times 0-9+1|}{\sqrt{9^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{82}}$ 이다.
따라서 $k^2=\frac{32}{41}$

9.
$f(x)=\int_0^3 x^2f(t)dt+2x=x^2\int_0^3 f(t)dt+2x$ 이므로
$\int_0^3 f(t)dt=m$ 이라 하면 $f(x)=mx^2+2x$ 이다.
$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3(mx^2+2x)dx=\left[\frac{1}{3}mx^3+x^2\right]_0^3=m$,
$9m+9=m$, $m=-\frac{9}{8}$ 이다. 따라서
$f(x)=-\frac{9}{8}x^2+2x$ 이므로 $f(4)=-18+8=-10$ 이다.

10.
(ⅰ) $n=1$ 일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1$ 이므로
(*)이 성립한다.
(ⅱ) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{(m+2)!}{2^m}-2$
이다.
$n=m+1$ 일 때,
$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$
$=\frac{(m+2)!}{2^m}-2+\boxed{m+1}\times\frac{(m+2)!}{2^{m+1}}$
$=(2+m+1)\times\frac{(m+2)!}{2^{m+1}}-2$
$=\boxed{m+3}\times\frac{(m+2)!}{2^{m+1}}-2$
$=\frac{(m+3)!}{2^{m+1}}-2$
이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$ 이다.
이상에서 $f(m)=m+1$, $g(m)=m+3$ 이므로
$\frac{g(7)}{f(4)}=\frac{10}{5}=2$

11.
$b\geq 2$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x<2$ 일 때,
$g(x)=\frac{x-b}{(x-1)(x-3)}$ 이므로
함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.
$b<2$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x<b$ 또는 $b<x<2$ 일 때,
$g(x)=\frac{x-b}{(x-1)(x-3)}$ 이므로
$b\neq 1$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.
따라서 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이려면
$b=1$ 이어야 한다.
곧 $g(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{f(x)} & (x\neq 1)\\ c & (x=1)\end{cases}$ 이므로
$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=c$ 에서
$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{2}=c$ 이다.
한편, 함수 $g(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{f(x)} & (x\neq 1)\\ -\frac{1}{2} & (x=1)\end{cases}$ 가
실수 전체의 집합에서 연속이려면
함수 $f(x)$ 도 실수 전체의 집합에서 연속이어야
하므로 $\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$ 에서 $a=-1$ 이다.
따라서 $g(1)=c=-\frac{1}{2}$ 이고,
$g(3)=\frac{2}{f(3)}=-2$ 이므로
$g(1)+g(3)=-\frac{5}{2}$

12.
삼각형 ABC 에 사인법칙을 적용하면,
$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle\mathrm{ABC})}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{ACB})}$ 에서
$\sin(\angle\mathrm{ACB})=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.
그러므로 $\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{4}$ 이다.
원주각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{4}$ 이고,
점 P 는 호 AC 를 이등분하는 점이므로
$\angle\mathrm{PBA}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{12}$ 이다.
삼각형 APB 의 내각의 합은 π 이므로
$\angle\mathrm{PAB}=\pi-(\angle\mathrm{APB}+\angle\mathrm{PBA})=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\pi}{3}$
이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하자. 삼각형 APB도 이 원에 내접하므로
삼각형 APB에 사인법칙을 적용하면,

$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\sin(\angle \mathrm{PAB})}=2R$ 에서 $R=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$이다.

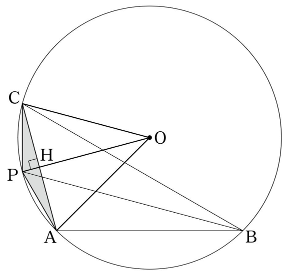
삼각형 ABC에 사인법칙을 적용하면

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle \mathrm{ABC})}=2R$ 에서

$\overline{\mathrm{AC}}=2R\sin(\angle \mathrm{ABC})=2\times2\times\frac{1}{2}=2$이다.

한편, 외접원의 중심을 O라 하면,

$\angle \mathrm{AOC}=2\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 AOC는 정삼각형이다. 선분 OP와 선분 AC가 만나는 점을 H라 하자.



$\angle \mathrm{CHP}=\frac{\pi}{2}$이고, $\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OH}}=2-\sqrt{3}$이다.

그러므로 삼각형 ACP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{HP}}=2-\sqrt{3}$

13.

점 A의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면, 점 B의 x좌표를 $(p,\ r)$라 할 수 있다. 이때 두 직선 OA, OB의 기울기의 곱이 1이므로

$\frac{q}{p}\times\frac{r}{p}=1 \Rightarrow \frac{q}{p}=\frac{p}{r}$에서 $p:q=r:p$이므로

$r=cp$, $p=cq$이다. (단, $c\neq0$)

곧, 점 B의 좌표가 $(cq,\ cp)$이다.

이때 $\overline{\mathrm{OB}}=2\overline{\mathrm{OA}}$이므로 $c=2$이다.

따라서 점 B의 좌표는 $(2q,\ 2p)$이다.

점 B의 x좌표는 p이므로 $2q=p$이다.

따라서 두 점 A와 B의 좌표를 p에 대하여

$\mathrm{A}\left(p,\ \frac{p}{2}\right)$, $\mathrm{B}(p,\ 2p)$로 나타낼 수 있다.

점 B는 함수 $y=\log_{\frac{1}{k}}x$ 의 그래프 위의 점이므로

$2p=\log_{\frac{1}{k}}p=-\log_k p=\log_k\frac{1}{p}$ 에서 $\log_k\frac{1}{p}=2p$,

$k^{2p}=\frac{1}{p}$ …… ㉠ 이다.

또한, 점 A는 함수 $y=-k^{2x}+\frac{9}{4}$의 그래프 위의 점이므로 $\frac{p}{2}=-k^{2p}+\frac{9}{4}$이다. ㉠에서 $k^{2p}=\frac{1}{p}$이므로

$\frac{p}{2}=-\frac{1}{p}+\frac{9}{4}$이다. 식을 정리하면 $2p^2-9p+4=0$,

$(2p-1)(p-4)=0$에서 $p=\frac{1}{2}$ 또는 $p=4$이다.

이때 $k^{2p}=\frac{1}{p}$에서 $p=\frac{1}{2}$이면 $k=2$이고,

$p=4$이면 $k^8=\frac{1}{4}$, $k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$이다.

$0<k<1$이므로 $p=4$이다.

한편, $\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 8)$이므로 삼각형 OAB의 밑변의 길이를 $\overline{\mathrm{AB}}=6$이라 하면, 높이는 4이다.

따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times4=12$

14.

ㄱ. 함수 $F(x)=\int_{a^2}^{x}f(t)\,dt$에 대하여

$F(a^2)=0$이므로 $a^2=a-2$ 또는 $a^2=a-1$ 또는 $a^2=2a-1$ 또는 $a^2=2a+3$이다.

이때 두 방정식 $a^2=a-2$, $a^2=a-1$은 실근을 갖지 않고,

$a^2=2a-1$이면 $(a-1)^2=0$이므로 $a=1$이고,

$a^2=2a+3$이면 $(a+1)(a-3)=0$이므로

$a=-1$ 또는 $a=3$이다.

이때 네 수 $a-2$, $a-1$, $2a-1$, $2a+3$는 각각

$a=-1$일 때, -3, -2, -3, 1이고

$a=1$일 때, -1, 0, 1, 3이고

$a=3$일 때, 1, 2, 5, 9이다.

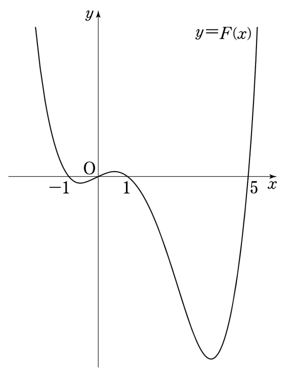
곧 $a=-1$이면 곡선 $y=F(x)$는 x축과 서로 다른 네 점에서 만나지 않으므로 조건에 모순이다.

따라서 조건을 만족시키는 a의 값은

$a=1$ 또는 $a=3$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 곡선 $y=F(x)$가 x축과 서로 다른 네 점에서 만나는 경우는 a의 값에 따라 두 가지 경우가 있다. 이때 $f(0)=F'(0)>0$이므로 곡선 $y=F(x)$ 위의 점 $(0,F(0))$에서의 접선의 기울기가 양수이다. a의 값에 따라 함수 $F(x)$의 그래프를 나타내면 다음과 같다.

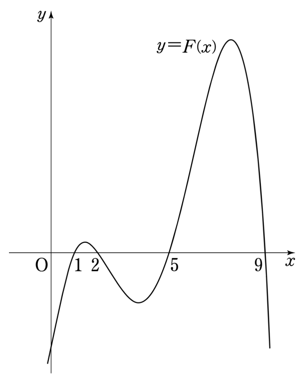
(i) $a=1$인 경우



[그림 1]

곡선 $y=F(x)$ 위의 점 $(5,F(5))$에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f(5)=F'(5)>0$이다.

(ii) $a=3$인 경우



[그림 2]

곡선 $y=F(x)$ 위의 점 $(5,F(5))$에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f(5)=F'(5)>0$이다.

(i), (ii) 의 두 경우 모두 $f(0)>0$이면, $f(5)>0$이다. (참)

ㄷ. 먼저 $f(5)=F'(5)$, $f(9)=F'(9)$이다.

(iii) $a=1$인 경우

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면,
[그림 1]에서 $f(5)>0$, $f(9)>0$이므로
$f(9)<0<f(5)$를 만족시키지 않는다.
또한, 최고차항의 계수가 음수이면,
$f(5)<0$, $f(9)<0$이므로 $f(9)<0<f(5)$을 만족시키지 않는다.

(iv) $a=3$인 경우

(iii) 에서와 같은 방법으로
$f(9)<0<f(5)$이면,
곡선 $y=F(x)$는 [그림 2]와 같다.

$\int_m^{m+3}f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_m^{m+3}=F(m+3)-F(m)$

에서

$F(4)-F(1)<0$,
$F(5)-F(2)=0$,
$F(6)-F(3)>0$,
$F(7)-F(4)>0$,
$F(8)-F(5)>0$

이고, $m\geq6$인 자연수 m에 대하여
$F(m+3)-F(m)<0$이므로

$\int_m^{m+3}f(x)\,dx>0$을 만족시키는 자연수 m은

$m=3$, $m=4$, $m=5$이다.

(iii), (iv) 에 의하여 $f(9)<0<f(5)$일 때,

$\int_m^{m+3}f(x)\,dx>0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15.

점 $\mathrm{P}_0(0,0)$에서 점 $\mathrm{P}(6,k)$로
x좌표의 값은 6만큼 증가하였으므로
수열 $\{a_n\}$의 항 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_9$ 중에서
$a_n<20$ 또는 $a_n\geq90$을 만족시키는 항의 개수는 6,
곧 $20\leq a_n<90$을 만족시키는 항의 개수는 3이다.
또한 점 $\mathrm{P}_0(0,0)$에서 점 $\mathrm{P}(6,k)$로
y좌표의 값은 홀수 k만큼 증가하였으므로
수열 $\{a_n\}$의 항 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_9$ 중에서
$a_n\geq20$을 만족시키는 항의 개수는 홀수 k(개)이다.
$a_1=a$ (a는 자연수)라 하고, 수열 $\{a_n\}$을 제9항까지 나열하면

$a,\ 2a,\ 4a,\ 8a,\ -4a,\ 2a,\ -a,\ \frac{a}{2},\ -\frac{a}{4}$

이 중에서 양수의 항 6개를 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$\frac{a}{2},\ \ a,\ \ 2a,\ \ 2a,\ \ 4a,\ \ 8a$

이 중에서 $20\leq a_n<90$을 만족시키는 항의 개수가 3이려면 이 3개의 항은

'$a,\ 2a,\ 2a$' 또는 '$2a,\ 2a,\ 4a$'

이다.

(i) $20\leq a_n<90$을 만족시키는 3개의 항이
$a,\ 2a,\ 2a$인 경우
$a_n\geq20$을 만족시키는 항은
$a,\ \ 2a,\ \ 2a,\ \ 4a,\ \ 8a$
로 그 개수는 5(홀수)가 되어 조건을 만족시킨다.
이때 $\frac{a}{2}<20\leq a,\ 2a<90\leq4a$

곧 $\frac{45}{2}\leq a<40$

자연수 a는 $23,\ 24,25,\ \cdots,39$이고
그 개수는 17

(ⅱ) $20 \le a_n < 90$을 만족시키는 3개의 항이
$2a$, $2a$, $4a$인 경우
$a_n \ge 20$을 만족시키는 항은
$2a$, $2a$, $4a$, $8a$
로 그 개수는 4(짝수)가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 자연수 $a_1 = a$의 개수는 17

16.
$-1 \le \cos x \le 1$ 이므로
$-2+30 \le 2\cos x + 30 \le 2+30$,
$28 \le 2\cos x + 30 \le 32$ 이다.
따라서 함수 $f(x) = 2\cos x + 30$ 의 최솟값은 28

17.
$f'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 1$ 이므로 $f'(1) = 29$

18.
$a_3 + a_7 = 4$에서 $2a_5 = 4$, 곧 $a_5 = 2$
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면,
$d = a_5 - a_4 = 2 - 4 = -2$
그러므로 $a_2 = a_4 - 2d = 4 + 4 = 8$

19.
$x < 2$일 때 $f(x) = -x^2 + 2x$이고 $x \ge 2$일 때 $f(x) = x^2 - 2x$ 이므로

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (-x^2+2x)\,dx + \int_{2}^{3} (x^2-2x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{2}^{3}$$

$$= \left\{\left(-\frac{8}{3}+4\right) - \left(\frac{1}{3}+1\right)\right\} + \left\{\left(\frac{27}{3}-9\right) - \left(\frac{8}{3}-4\right)\right\} = \frac{4}{3}$$

이다.
$k = \frac{4}{3}$ 이므로 $30k = 40$

[다른 풀이]
$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\int_{2}^{3} f(x)\,dx$ 이므로
$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} f(x)\,dx$ 이다.
이차함수 $g(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\beta > \alpha)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ 이므로
$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \frac{|-1|}{6}(2-0)^3 = \frac{4}{3}$ 이다.
$k = 3$ 이므로 $30k = 40$

20.
$f(t) = \overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{OP}} - \overline{\mathrm{OQ}}$ 에서
$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{(t-0)^2 + \left(\frac{1}{t} - 0\right)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}$ 이고
$\overline{\mathrm{OQ}}$는 원 $x^2 + y^2 = 2$의 반지름의 길이인 $\sqrt{2}$ 이므로
$f(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} - \sqrt{2}$ 이다. 따라서

$$\lim_{t \to 1+} \frac{f(t)}{(t-1)^2} = \lim_{t \to 1+} \frac{\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} - \sqrt{2}}{(t-1)^2}$$

$$= \lim_{t \to 1+} \frac{t^2 + \frac{1}{t^2} - 2}{(t-1)^2\left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{t \to 1+} \frac{\frac{1}{t^2}(t^2-1)^2}{(t-1)^2\left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{t \to 1+} \frac{(t+1)^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{4}{1 \times 2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

이다. 따라서 $k = \sqrt{2}$ 이므로 $k^2 = 2$

21.
조건 (가)에서 $a\cos b = a\cos 3b$ 이고
$\cos b = \cos 3b$ 이다.
각 b를 나타내는 동경과 각 $3b$를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로
$b + 3b = 4\pi$, 6π, $\cdots$, 12π,
$b = \pi$, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, 3π 이다.
$b = m\pi\,(m = 1,\ 2,\ 3)$ 이면
$\frac{10b}{3} - \frac{4b}{3} = 2b = 2m\pi$ 이므로
$f\left(\frac{10}{3}\right) - f\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \ne 4$ 이다.
따라서 가능한 b의 값은 $\frac{3\pi}{2}$ 또는 $\frac{5\pi}{2}$ 이다.
(ⅰ) $b = \frac{3\pi}{2}$ 인 경우
$f\left(\frac{10}{3}\right) - f\left(\frac{4}{3}\right) = 4$에서
$a\cos(5\pi) - a\cos(2\pi) = 4$,
$-a - a = 4$, $a = -2$ 이다.
$a > 0$ 이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $b = \frac{5\pi}{2}$ 인 경우
$f\left(\frac{10}{3}\right) - f\left(\frac{4}{3}\right) = 4$에서
$a\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) - a\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = 4$,
$a\cos\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) - a\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 4$,
$\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right) = 4$, $a = 4$ 이다.
따라서 $\frac{ab}{\pi} = 10$

22.
모든 실수 x에 대하여
$x^3 - 4x \le f(x) \le x^3 + 2x^2 + 2$ …… (*) 이므로
$x > 0$일 때, $\frac{x^3 - 4x}{x^3} \le \frac{f(x)}{x^3} \le \frac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^3}$ 에서
$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 4x}{x^3} = 1$, $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^3} = 1$ 이므로
함수의 극한의 대소 관계에 의하여
$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$ 이다.
따라서 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.
두 함수 $g(x)$, $h(x)$를 각각
$g(x) = x^3 - 4x$, $h(x) = x^3 + 2x^2 + 2$라 하자.
부등식 (*)에 의하여 모든 곡선 $y = f(x)$가 항상 지나는 점은 두 곡선 $y = g(x)$, $y = h(x)$가 만나는 점이다. 방정식 $x^3 - 4x = x^3 + 2x^2 + 2$를 정리하면
$x^2 + 2x + 1 = 0$에서 $(x+1)^2 = 0$, $x = -1$ 이므로
두 곡선 $y = g(x)$, $y = h(x)$가 만나는 점의 x좌표는 -1이고, $g(-1) = h(-1) = 3$이다.
따라서 모든 곡선 $y = f(x)$가 항상 지나는 점은 $\mathrm{A}(-1, 3)$ 이고, $f(-1) = 3$ 이다.
이때 부등식 (*)의 양변에서 3을 빼면,
$f(-1) = g(-1) = h(-1) = 3$ 이므로
$g(x) - g(-1) \le f(x) - f(-1) \le h(x) - h(-1)$이고
$x > -1$일 때,
$\frac{g(x) - g(-1)}{x+1} \le \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \le \frac{h(x) - h(-1)}{x+1}$
이다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$는 다항함수이므로 도함수의 우극한의 값과 좌극한의 값과 함숫값은 서로 같다.
$g'(x) = 3x^2 - 4$, $h'(x) = 3x^2 + 4x$ 이므로
$\lim_{x \to -1+} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = g'(-1) = -1$,
$\lim_{x \to -1+} \frac{h(x) - h(-1)}{x+1} = h'(-1) = -1$ 에서
함수의 극한의 대소 관계에 의하여
$\lim_{x \to -1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = f'(-1) = -1$ 이다.
이상에서 부등식 (*)을 만족시키는 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,
$f(-1) = 3$, $f'(-1) = -1$ 이므로
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 하면
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이고,
$f(-1) = -1 + a - b + c = 3$,
$f'(-1) = 3 - 2a + b = -1$ 이다.
따라서 $b = 2a - 4$, $c = a$ 이므로
$f(x) = x^3 + ax^2 + (2a-4)x + a$ 이다.
한편, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 방정식은 $y = f'(k)(x-k) + f(k)$ 이다.
이 접선의 y절편을 p라 하면 점 B의 좌표는 p가 일정한 값을 가질 때, $(0, p)$가 된다.
$p = -kf'(k) + f(k)$ 에서
$p = -(3k^3 + 2ak^2 + (2a-4)k) + k^3 + ak^2 + (2a-4)k + a$
$= -2k^3 - ak^2 + a$
$= -2k^3 - a(k-1)(k+1)$
이므로
$k = -1$ 이면, a의 값에 관계없이 $p = 2$, $\mathrm{B}(0, 2)$ 이고,
$k = 1$ 이면, a의 값에 관계없이 $p = -2$,
$\mathrm{B}(0, -2)$ 이다.
이때 $k > 0$ 이므로 $k = 1$ 이고,
두 점 B, P는 각각 $\mathrm{B}(0, -2)$, $\mathrm{P}(1, f(1))$ 이다.
곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1, f(-1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = -1$ 이고,
직선 BP의 기울기는 $\frac{f(1) - (-2)}{1 - 0} = 4a - 1$ 이다.
두 직선이 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱이 -1 이다. 곧 $(-1) \times (4a-1) = -1$ 에서 $a = \frac{1}{2}$ 이다.
따라서 $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$ 이므로
$f(3) = 27 + \frac{9}{2} - 9 + \frac{1}{2} = 23$ 이다.

[참고]
함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + (2a-4)x + a$와 모든 실수 x에 대하여 $x^3 - 4x \le f(x) \le x^3 + 2x^2 + 2$이기 위한 실수 a의 값의 범위는 다음과 같이 구할 수 있다.
$f(x) \ge x^3 - 4x$ 에서 $ax^2 + 2ax + a \ge 0$,
$a(x+1)^2 \ge 0$ 이므로 $a \ge 0$ 이고,
$f(x) \le x^3 + 2x^2 + 2$ 에서
$(a-2)x^2 + 2(a-2)x + (a-2) \le 0$,
$(a-2)(x+1)^2 \le 0$ 이므로 $a \le 2$ 이다.
즉, $0 \le a \le 2$ 이고, $a = \frac{1}{2}$ 는 이 범위 안에 포함되므로 문제의 조건을 만족시킨다.

[확률과 통계]

23.

$_8\mathrm{H}_2 = {}_9\mathrm{C}_2 = \dfrac{9\times 8}{2} = 36$

24.

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{3}\mathrm{P}(B)$ 이다.

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B)$

$= \dfrac{1}{3} + \mathrm{P}(B) - \dfrac{1}{3}\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$

이므로 $\dfrac{2}{3}\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{4}$ 이다.

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B) = \dfrac{1}{3}\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{12}$

25.

이 조사에 참여한 학생 600명 중에서 임의로 1명을 선택할 때, 선택한 학생이
온라인수업을 선택한 학생인 사건을 A,
등교수업을 선택한 학생인 사건을 B,
남학생인 사건을 C, 여학생인 사건을 D라 하자.

$p_1 = \mathrm{P}(D|A) = \dfrac{\mathrm{P}(D\cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{n(D\cap A)}{n(A)} = \dfrac{2a}{300+a}$

$p_2 = \mathrm{P}(C|B) = \dfrac{\mathrm{P}(C\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{n(C\cap B)}{n(B)} = \dfrac{a}{300-a}$

$3p_1 = 4p_2$이므로 $3\times\dfrac{2a}{300+a} = 4\times\dfrac{a}{300-a}$,

$\dfrac{3}{300+a} = \dfrac{2}{300-a}$, $900-3a = 600+2a$, $a = 60$

26.

$\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$의 전개식에서 상수항은

$\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^5$의 전개식에서 x의 계수와 $\dfrac{1}{x}$의 계수의 합과 같다.

이때 $\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$_5\mathrm{C}_r(2x)^{5-r}\left(\dfrac{1}{2x}\right)^r = {}_5\mathrm{C}_r 2^{5-2r}x^{5-2r}$ $(r=0, 1, \cdots, 5)$

로 나타낼 수 있다. 따라서 $\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^5$의 전개식에서

x의 계수는 $5-2r=1$, $r=2$일 때,

$_5\mathrm{C}_2\times 2^1 = 20$이고,

$\dfrac{1}{x}$의 계수는 $5-2r=-1$, $r=3$일 때,

$_5\mathrm{C}_3\times 2^{-1} = 5$이다.

그러므로 $\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$의 전개식에서 상수항은

$20+5=25$

27.

이 농장에서 수확하는 석류 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 24^2)$을 따른다.
(단, 무게의 단위는 g이다.)
이때 이 농장에서 수확한 석류 중에서 임의추출한 석류 16개의 무게의 표본평균을 확률변수 $\overline{X}$라 하면

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(300,\ \dfrac{24^2}{16}\right)$, 곧 $\mathrm{N}(300,\ 6^2)$을

따르고, 확률변수 $Z = \dfrac{\overline{X}-300}{6}$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(291 \le \overline{X} \le 303)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{291-300}{6} \le Z \le \dfrac{303-300}{6}\right)$

$= \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 0.5)$

$= \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$

$= 0.4332 + 0.1915$

$= 0.6247$

28.

확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{1}{k}\left({}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\right) = 1$이다.

곧, $k = {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n - 1$이다.

이때

$\mathrm{E}(X)$

$= \dfrac{1}{k}\left(3\cdot{}_n\mathrm{C}_1 + 3^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + 3^3\cdot{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + 3^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n\right)$

$= \dfrac{1}{k}\left(3^0\cdot{}_n\mathrm{C}_0 + 3\cdot{}_n\mathrm{C}_1 + 3^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + 3^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n - 3^0\cdot{}_n\mathrm{C}_0\right)$

$= \dfrac{1}{k}\{(1+3)^n - 1\}$

$= \dfrac{1}{k}(4^n - 1)$

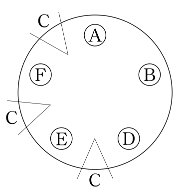
$= 2^n + 1$

이므로 $\mathrm{E}\left(\dfrac{X-1}{4}\right) = \dfrac{\mathrm{E}(X)-1}{4} = 2^{n-2} = 32$이다.

곧, $n-2=5$이므로 $n=7$

29.

A와 B를 하나로 생각하고, C를 제외한 4개를 원형으로 나열하는 경우의 수는 $(4-1)! = 6$이다.
이 각각에 대하여 A와 B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$이다. 5개의 용기가 원형으로 나열되어 있을 때, C는 B와 이웃하지 않아야 하므로 C가 놓일 수 있는 자리의 수는 3이다.



그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times 2\times 3 = 36$

30.

전체집합 $U = \{x\,|\,x$는 12 이하의 자연수$\}$에 대하여 원소의 개수가 4인 집합 U의 부분집합의 개수는 $_{12}\mathrm{C}_4$이다.
이 부분집합 중에서 임의로 한 개의 집합 A를 선택할 때, $A\cap\{1, 2, 3,\ 4\} \ne \varnothing$인 사건을 B, $\{5, 6\}\subset A$인 사건을 C라 하면,

구하는 확률은 $\mathrm{P}(C|B) = \dfrac{\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(B)}$ 이다.

(i) $A\cap\{1, 2, 3,\ 4\} \ne \varnothing$이려면
네 원소 1, 2, 3, 4 중에서 적어도 하나의 원소가 집합 A에 포함되어야 한다.
네 원소 1, 2, 3, 4가 모두 포함되지 않는 집합 U의 부분집합 A의 개수는 $_8\mathrm{C}_4$이므로

$\mathrm{P}(B) = 1 - \dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = 1 - \dfrac{14}{99} = \dfrac{85}{99}$ 이다.

(ii) $A\cap\{1, 2, 3,\ 4\} \ne \varnothing$이고, $\{5, 6\}\subset A$이려면
'(ii−1) 네 원소 1, 2, 3, 4 중에서 한 원소만 집합 A에 포함되는 경우'와
'(ii−2) 네 원소 1, 2, 3, 4 중에서 두 원소가 집합 A에 포함되는 경우'가 있다.
(ii−1)의 경우 :
네 원소 1, 2, 3, 4 중에서 한 원소를 선택하는 경우의 수는 $_4\mathrm{C}_1 = 4$이고, 여섯 개의 원소 7, 8, 9, 10, 11, 12 중에서 한 원소를 선택하는 경우의 수는 $_6\mathrm{C}_1 = 6$이므로
구하는 경우의 수는 $4\times 6 = 24$이다.
(ii−2)의 경우 :
네 원소 1, 2, 3, 4 중에서 두 원소를 선택하는 경우의 수는 $_4\mathrm{C}_2 = 6$이다.

그러므로 $\mathrm{P}(B\cap C) = \dfrac{24+6}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \dfrac{30}{495} = \dfrac{2}{33}$ 이다.

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(C|B) = \dfrac{\dfrac{2}{33}}{\dfrac{85}{99}} = \dfrac{6}{85}$ 이다.

$p=85$, $q=6$이므로 $p+q=91$

[미적분]

23.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-8n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n^2-8n)}{n+\sqrt{n^2-8n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n}{n+\sqrt{n^2-8n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{1+\sqrt{1-\dfrac{8}{n}}}$

$=\dfrac{8}{1+\sqrt{1}}=4$

24.

곡선 $y=e^x$와 직선 $y=x+4$가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표가 a $(a>0)$이므로 $e^a=a+4$, $e^a-a=4$이다. 따라서

$$\int_0^a (x-a)e^x\,dx=\Big[(x-a)e^x\Big]_0^a-\int_0^a e^x dx$$
$$=a-e^a+1$$
$$=-4+1$$
$$=-3$$

25.

$(x^2+y^2)(\sqrt{y}+\sqrt{a})=128$에 $x=a$, $y=a$를 대입하면 $4a^2\sqrt{a}=128$, $a=4$이다.

$(x^2+y^2)(\sqrt{y}+2)=128$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\left(2x+2y\times\dfrac{dy}{dx}\right)(\sqrt{y}+2)+(x^2+y^2)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\times\dfrac{dy}{dx}\right)=0$

$x=4$, $y=4$를 대입하면

$\left(8+8\times\dfrac{dy}{dx}\right)\times4+32\times\left(\dfrac{1}{4}\times\dfrac{dy}{dx}\right)=0$,

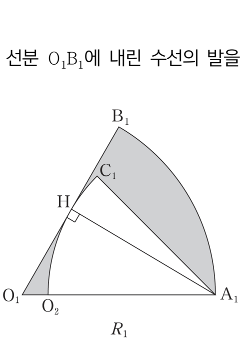
$32+32\times\dfrac{dy}{dx}+8\times\dfrac{dy}{dx}=0$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4}{5}$ 이다.

따라서 곡선 $(x^2+y^2)(\sqrt{y}+2)=128$ 위의 점 $(4,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{4}{5}(x-4)+4$이므로 이 접선의 y절편은 $\dfrac{36}{5}$

26.

점 A_1에서 선분 O_1B_1에 내린 수선의 발을 H라 하자.



R_1

직각삼각형 A_1O_1H에서 $\angle A_1O_1H=60^\circ$ 이므로 $\overline{A_1O_1}:\overline{AH_1}=2:\sqrt{3}$ 에서 $\overline{A_1H}=\sqrt{3}$ 이다.

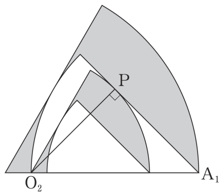
곧 부채꼴 $A_1O_2C_1$의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다.

따라서 S_1의 값은

$\pi\times2^2\times\dfrac{60}{360}-\pi\times(\sqrt{3})^2\times\dfrac{45}{360}=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{7}{24}\pi$

이다.

한편, 그림 R_2의 부채꼴 $O_2A_2B_2$에서 선분 A_1C_1과 호 A_2B_2가 서로 접하므로 그 접점을 P라 하면 삼각형 A_1O_2P는 빗변의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{A_1P}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 이다.



두 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 $O_2A_2B_2$의 닮음비가 $2:\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 이므로 넓이의 비는 $1:\dfrac{3}{8}$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $\dfrac{7}{24}\pi$이고 공비가 $\dfrac{3}{8}$ 인 등비급수이다.

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{7}{24}\pi}{1-\dfrac{3}{8}}=\dfrac{8}{5}\times\dfrac{7}{24}\pi=\dfrac{7}{15}\pi$

27.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{(k+n)(k+2n)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\left(\dfrac{k}{n}+1\right)\left(\dfrac{k}{n}+2\right)}\times\dfrac{1}{n}$

$=\displaystyle\int_0^1\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}dx$

$=\displaystyle\int_0^1\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)dx$

$=\Big[\ln(x+1)-\ln(x+2)\Big]_0^1$

$=\ln2-\ln3-(-\ln2)$

$=2\ln2-\ln3\ =\ln\dfrac{4}{3}$

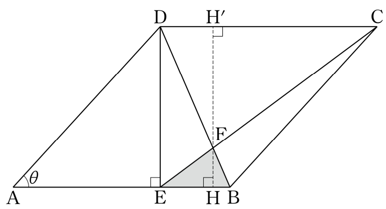
28.

직각삼각형 DAE에서 $\overline{DE}=\sin\theta$, $\overline{AE}=\cos\theta$ 이다.

따라서 $\overline{EB}=\overline{AB}-\overline{AE}=1-\cos\theta$ 이다.

두 직선 AB, DC가 서로 평행하므로 $\angle FEB=\angle FCD$ (평행선의 엇각)이다.

$\angle EFB=\angle CFD$ (맞꼭지각)이므로 두 삼각형 EFB, CFD는 서로 닮은 도형이다. 점 F에서 두 선분 EB, DC에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하자.



$\overline{FH}=h$라 하면, $\overline{FH'}=\overline{DE}-\overline{FH}=\sin\theta-h$ 이다.

$\overline{FH}:\overline{FH'}=\overline{EB}:\overline{CD}$

$\Rightarrow\ h:(\sin\theta-h)=(1-\cos\theta):1$ 이므로

$(1-\cos\theta)(\sin\theta-h)=h$,

$(1-\cos\theta)\sin\theta-(1-\cos\theta)h=h$,

$(2-\cos\theta)h=(1-\cos\theta)\sin\theta$,

$h=\dfrac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{2-\cos\theta}$

따라서 삼각형 FEB의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{EB}\times\overline{FH}$

$=\dfrac{1}{2}\times(1-\cos\theta)\times\dfrac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{2-\cos\theta}$

$=\dfrac{(1-\cos\theta)^2\sin\theta}{2(2-\cos\theta)}$

이다. 그러므로

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^5}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\left\{\dfrac{1}{2(2-\cos\theta)}\times\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right\}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\left\{\dfrac{1}{2(2-\cos\theta)}\times\left(\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\dfrac{1}{1+\cos\theta}\right)^2\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right\}$

$=\dfrac{1}{2\times1}\times\left(1^2\times\dfrac{1}{2}\right)^2\times1$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times1=\dfrac{1}{8}$

29.

함수 $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ 가 $0<x\le\dfrac{\pi}{2}$ 에서 감소하므로 이 구간에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

이 역함수를 $g(x)$라 하자.

y축 위의 점 $(0,\ t)$ $\left(0\le t\le f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$를 지나고 y축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $g(t)$인 정사각형이므로 단면의 넓이는 $\{g(t)\}^2$이다.

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\displaystyle\int_0^{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}\{g(x)\}^2dx$ 이다.

$g(x)=t$로 놓으면 $x=f(t)$, $\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ 이고,

$x=0$일 때 $\dfrac{\cos t}{t}=0$에서 $t=\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\because\ 0<t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$x=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$일 때, $f(t)=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$에서 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 이므로

$\displaystyle\int_0^{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}\{g(x)\}^2dx$

$=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\{t^2\times f'(t)\}dt$

$=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\left\{t^2\times\dfrac{-\sin t\times t-\cos t\times1}{t^2}\right\}dt$

$=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(t\sin t+\cos t)\,dt$

$=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$

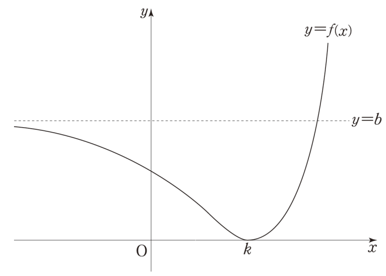
$=\Big[-t\cos t\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)\,dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$

$=0-\left(-\dfrac{\pi}{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\Big[2\sin t\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

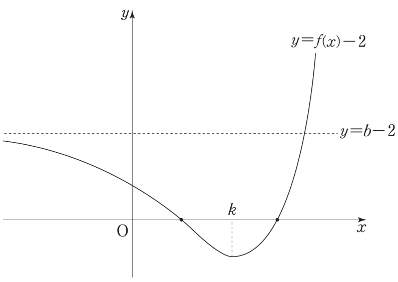
$=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi+1$

따라서 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$, $b=1$이므로 $\dfrac{1}{a^2}+b=\dfrac{144}{3}+1=49$

30.
모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이면
함수 $g(x)$의 최솟값은 함수 $f(x)$의 최솟값보다 작으므로 (가)조건을 만족시키지 않는다.
반면, 어떤 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이면
함수 $g(x)$의 최솟값은 0이고, 함수 $f(x)$의 최솟값은 0보다 작으므로 (가)조건을 만족시키지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 최솟값 0을 가져야 한다.
함수 $f(x)$를 미분하면
$f'(x)=2e^{2x}+ae^x=e^x(2e^x+a)$이므로
함수 $f(x)$가 극소가 되는 x를 k라 하면
함수 $f(x)$는 $x=k=\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$ ⋯ ㉠에서
극솟값이자 최솟값 0을 갖는다. 따라서
$f\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)=b-\frac{a^2}{4}=0 \Leftrightarrow b=\frac{a^2}{4}$ ⋯ ㉡이다.
㉠에 의해 $a<0$ ⋯ ㉢이고,
함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 파악해 보면
함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극솟값 0을 가지고,
$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=b$이므로 다음과 같다.

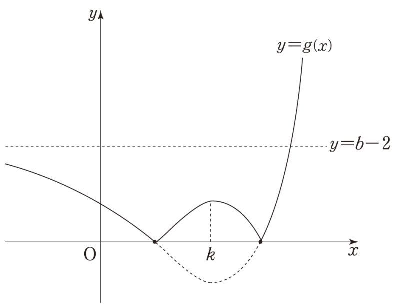


함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수가 2이므로
곡선 $y=g(x)=|f(x)-2|$의 점근선의 방정식인
$y=b-2$가 항상 제 1, 2사분면을 지나야 한다.
이는 함수 $y=f(x)-2$의 그래프를 통해 알 수 있다.



[그림 1]

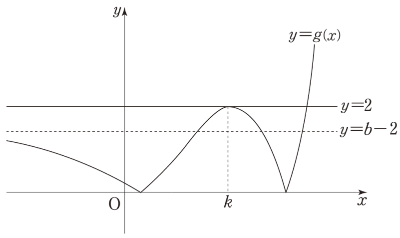
[그림 1]에서 함수 $y=f(x)-2$의 그래프와 x축의 교점이 2가 되는 경우에 [그림 2]와 같이
함수 $y=g(x)=|f(x)-2|$가 극소가 되는 x의 개수가 2이다.



[그림 2]

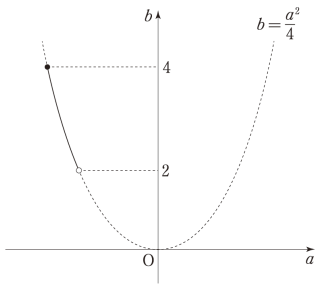
따라서 $b-2>0 \Rightarrow b>2$ ⋯ ㉣이다.

한편, 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대이므로
$\alpha=k$이다. 이때, $f(k)=0$이고
$g(k)=|f(k)-2|$이므로 $g(k)=g(\alpha)=2$이다.
즉, 방정식 $g(x)=2$의 실근의 개수는 2이다.
방정식 $g(x)=2$의 실근의 개수는 2가 되기 위해서는 [그림 3]과 같이 곡선 $y=g(x)$의 점근선인 직선 $y=b-2$가 직선 $y=g(k)=2$보다 아랫부분에 있거나 두 직선이 서로 일치해야 한다.



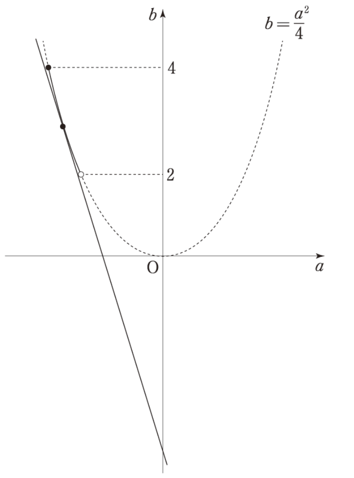
[그림 3]

따라서 $2-b\geq 2 \Leftrightarrow b\leq 4$ ⋯ ㉤이다.
이상에서 ㉡, ㉢, ㉣, ㉤을 통해 $3a+2b$의 최댓값과 최솟값을 구하기 위해 함수 $b=\frac{a^2}{4}$의 그래프를 그리면 [그림 4]와 같이 나타낼 수 있다.



[그림 4]

$3a+2b=t \Rightarrow b=-\frac{3}{2}a+\frac{t}{2}$라 하면 기울기가 $-\frac{3}{2}$,
y절편이 $\frac{t}{2}$인 직선을 그려봄으로써 $3a+2b$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.
[그림 4]에서 기울기가 $-\frac{3}{2}$인 직선의 y절편이 최소가 되는 직선을 나타내면 [그림 5]와 같다.



[그림 5]

이때 곡선 $y=\frac{x^2}{4}$에 접하고 기울기가 $-\frac{3}{2}$인 직선과 곡선 $y=\frac{x^2}{4}$의 접점은 $y=\frac{x^2}{4}$의 양변을 미분하여 구할 수 있다. $y'=\frac{x}{2}$에서 $x=-3$, $y=\frac{9}{4}$이므로
접점의 좌표는 $\left(-3,\ \frac{9}{4}\right)$이며,
$3a+2b$는 $a=-3$, $b=\frac{9}{4}$일 때 최소이다.
따라서 $m=3\times(-3)+2\times\left(\frac{9}{4}\right)=-\frac{9}{2}$이다.
한편, $3a+2b$의 최댓값은
$a=-4$, $b=4$일 때 $3a+2b=-4$이다.
따라서 $M=3(-4)+2(4)=-4$이므로
$M\times m=18$이다.

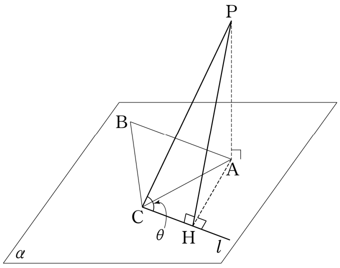
[기하]

23.
벡터 $\vec{a}=(-2,1)$의 크기는
$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

24.
포물선 $y^2=4x$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은 $y=2x+\frac{1}{2}$이고, 직선 $y=2x+1$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 직선의 방정식은 $y=2(x-k)+1$, $y=2x-2k+1$이므로
$-2k+1=\frac{1}{2}$에서 $k=\frac{1}{4}$

25.
점 $\mathrm{P}(2,-3,4)$를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(2,3,-4)$이고, 점 P를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점 R의 좌표는 $\mathrm{R}(-2,-3,4)$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{6^2+8^2}=10$, $\overline{\mathrm{PR}}=4$이다.
한편, 직선 PQ는 x축에 수직이고, 직선 PR은 x축에 평행하므로 직선 PQ와 직선 PR은 서로 수직이다. $\angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 PQR의 넓이는 $\frac{1}{2}\times10\times4=20$

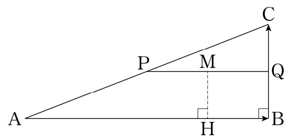
26.
점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선을 l이라 하자. 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\theta=\angle\mathrm{PCH}$이고, 삼수선의 정리에 의하여 $\angle\mathrm{AHC}=\frac{\pi}{2}$이다.



직각삼각형 ACH에서
$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AC}}\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1$이다.
따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{PC}}}=\frac{1}{\overline{\mathrm{PC}}}=\frac{1}{4}$이므로 $\overline{\mathrm{PC}}=4$이다.
직각삼각형 PAC에 피타고라스의 정리를 적용하면,
$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PC}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$이다.
따라서 선분 PA의 길이는 $2\sqrt{3}$

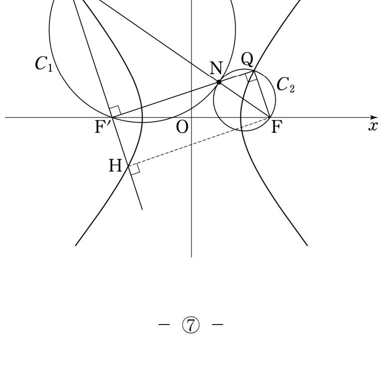
27.
두 삼각형 $\mathrm{OAF'}$, $\mathrm{FPF'}$은 닮음이므로 $\overline{\mathrm{AF'}}=\frac{7}{2}$이다.
이때, $\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AF}}$이므로 타원의 장축의 길이는 7이다.
$\overline{\mathrm{FF'}}=2c$이고, $\overline{\mathrm{QF}}=m$이라 하자. 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{QF'}}=7-m$이다. 직각삼각형 $\mathrm{FPF'}$에서
$7^2=(2c)^2+(m+3)^2$ ⋯ ㉠
이고, 직각삼각형 $\mathrm{QFF'}$에서
$(7-m)^2=(2c)^2+m^2$ ⋯ ㉡
이다. ㉠, ㉡을 연립하여 m의 값을 구하면
$m=4+\sqrt{7}$ 또는 $m=4-\sqrt{7}$이다.
이때 $\overline{\mathrm{QF}}<\overline{\mathrm{AO}}<\overline{\mathrm{AF'}}=\frac{7}{2}$이므로 $m=4-\sqrt{7}$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{FF'}}^2=4c^2=14\sqrt{7}-7$이다.

28.
그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4\vec{x}$,
$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\vec{y}$라 하자.



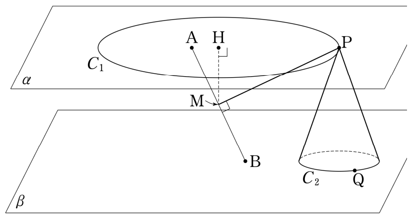
점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HM}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{HM}})\\&=(3\vec{x}+\vec{y})\cdot(-\vec{x}+\vec{y})\\&=-3|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2\end{aligned}$$
이고,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\&=(4\vec{x}+2\vec{y})\cdot(-2\vec{y})\\&=-4|\vec{y}|^2\end{aligned}$$
따라서 $3|\vec{x}|^2=5|\vec{y}|^2$, $|\vec{y}|=\frac{\sqrt{15}}{5}|\vec{x}|$이다.
$\therefore\ \tan(\angle\mathrm{CAB})=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{|2\vec{y}|}{|4\vec{x}|}=\frac{|\vec{y}|}{2|\vec{x}|}=\frac{\sqrt{15}}{10}$

29.
두 선분 PN, NF는 각각 두 원 C_1, C_2의 지름이므로 $\angle\mathrm{PF'N}=\angle\mathrm{NQF}=\frac{\pi}{2}$이다.
이때 두 직선 $\mathrm{PF'}$, QF가 서로 평행하므로 세 점 $\mathrm{F'}$, N, Q는 한 직선 위에 있다.
따라서 $\angle\mathrm{PNF'}=\angle\mathrm{FNQ}$이므로 두 삼각형 $\mathrm{PNF'}$과 FNQ는 서로 닮음이다. $\overline{\mathrm{FN}}:\overline{\mathrm{NP}}=1:3$이므로 $\overline{\mathrm{QF}}=k$라 하면, $\overline{\mathrm{PF'}}=3k$이다.
이때 두 점 P, Q는 쌍곡선 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=6$, $\overline{\mathrm{QF'}}-\overline{\mathrm{QF}}=6$에서
$\overline{\mathrm{PF}}=3k+6$, $\overline{\mathrm{QF'}}=k+6$이다.
점 F에서 직선 $\mathrm{PF'}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

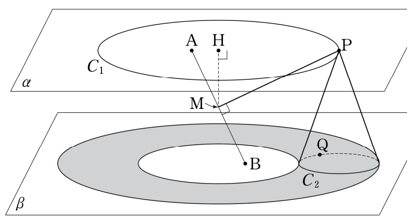


$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'H}}=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF}}=4k$이고,
$\overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{QF'}}=k+6$이므로
직각삼각형 PHF에 피타고라스의 정리를 적용하면,
$(4k)^2+(k+6)^2=(3k+6)^2$이다. 식을 정리하면,
$8k^2-24k=0$에서 $k(k-3)=0$이므로
$k=3$이다. $(\because k>0)$
따라서 직각삼각형 $\mathrm{FQF'}$에 피타고라스의 정리를 적용하면, $\overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{3^2+9^2}=3\sqrt{10}$이다.
이때 $\overline{\mathrm{FF'}}=2c=2\sqrt{9+b}$이므로
$2\sqrt{9+b}=3\sqrt{10}$에서 $4(9+b)=90$, $b=\frac{27}{2}$
따라서 $10b=135$

30.
직선 AB와 평면 α가 서로 수직이면, 선분 AB의 중점 M에 대하여 직선 AB와 직선 MP가 서로 수직이 되도록 하는 점 P는 존재하지 않는다.
$\overline{\mathrm{MP}}=k$이므로 점 P는 점 M을 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 구와 평면 α가 만나서 생기는 원 C_1 위에 있다.
점 M에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면, 점 H가 원 C_1의 중심이다.
조건 (나) 만족시키는 상황을 찾기 위해
각 $\angle\mathrm{AMP}$의 크기를 생각해보자.
각 $\angle\mathrm{AMP}$은 세 점 A, H, P가 이 순서대로 한 직선 위에 있을 때 최댓값을 갖는다.
이 최댓값을 θ라 하자.
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이면 직선 AB와 직선 MP가 서로 수직이 되도록 하는 점 P는 존재하지 않는다.
$\theta>\frac{\pi}{2}$이면 직선 AB와 직선 MP가 서로 수직이 되도록 하는 점 P의 개수가 2이다.
따라서 $\theta=\frac{\pi}{2}$이다.
한편, $\overline{\mathrm{PQ}}=k$이므로 점 Q는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 구와 평면 β가 만나서 생기는 원 C_2 위에 있다.

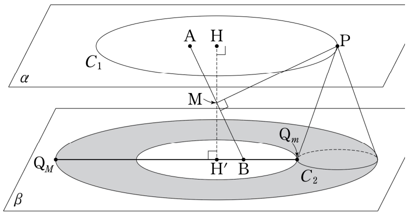


이때 점 P가 원 C_1 위를 움직이면 점 Q가 나타내는 영역은 다음 그림의 색칠한 영역과 같다.



삼각형 ABQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BQ}}\times4=2\overline{\mathrm{BQ}}$이므로
조건 (다)에서 선분 BQ의 길이의 최댓값과 최솟값의 합이 $6\sqrt{2}$이다.

점 M에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H'이라 하자.
점 Q 중에서 $\overline{\mathrm{BQ}}$의 값이 최소가 되는 점을 Q_m, $\overline{\mathrm{BQ}}$의 값이 최대가 되는 점을 Q_M이라 하면, 네 점 Q_M, H', B, Q_m은 한 직선 위에 있다.



원 C_1의 반지름의 길이를 r_1, 원 C_2의 반지름의 길이를 r_2라 하자. $\overline{\mathrm{H'Q}_M}=r_1+r_2$, $\overline{\mathrm{H'Q}_m}=r_1-r_2$이고, $\overline{\mathrm{Q}_M\mathrm{Q}_m}=6\sqrt{2}$이므로 $(r_1+r_2)+(r_1-r_2)=6\sqrt{2}$에서 $r_1=3\sqrt{2}$이다.
따라서 직각삼각형 PMH에 피타고라스의 정리를 적용하면, $k^2=(r_1)^2+2^2=22$에서 $k=\sqrt{22}$이고, $\overline{\mathrm{PQ}}^2=(r_2)^2+4^2=22$에서 $r_2=\sqrt{6}$이다.
$\angle\mathrm{PMH}=\angle\mathrm{MAH}$이므로 두 직각삼각형 PMH, MAH는 서로 닮음이다. 따라서
$\overline{\mathrm{AM}}:\overline{\mathrm{MH}}=\overline{\mathrm{MP}}:\overline{\mathrm{PH}}$에서
$\overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{2\sqrt{22}}{\sqrt{18}}=\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$이고,
$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{4\sqrt{11}}{3}$이다.
또한, 점 Q가 나타내는 영역의 넓이는
$\pi(r_1+r_2)^2-\pi(r_1-r_2)^2=\pi\times4r_1r_2=24\sqrt{3}\pi$이다.
그러므로 $p=\dfrac{4\sqrt{11}}{3}$, $q=24\sqrt{3}$에서 $\dfrac{p\times q}{\sqrt{33}}=32$