파·급·효·과·수·학·N·제

기하

기하

파급효과 수학 N제

기하

저자의 말

안녕하세요. 파급 팀입니다. 기출의 파급효과 시리즈, EBS 선별을 통해 큰 사랑을 받아온 파급 팀이 '수학 N제'라는 새로운 도전을 시작합니다. 여기까지 오는 데 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 '파급효과 N제 기하' 소개를 해보도록 하겠습니다.

'기하와 벡터'가 '기하'로 바뀌면서 원래도 그리 많지 않았던 시험 범위가 더욱 축소되었습니다. 좁은 범위의 시험이 변별력을 갖추려면 개별 문제들의 난이도를 올려야 할 것입니다. 어려운 수능을 대비하는 데에 있어서 이 책은 좋은 연습 상대가 될 것입니다.

1. 본문

기하와 관련된 기본 개념 및 실전 개념과 기출에서 얻을 수 있는 도구와 태도는 '기출의 파급효과 기하'에 이미 실어두었습니다. 따라서 본 교재의 칼럼에는 교과 외인 공간벡터를 공부하고자 하는 학생들을 위해 관련 개념만을 짤막하게 실었고, 실제로 문제를 풀 때 사용하는 아이디어를 예제와 함께 실었습니다.

꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각에서는 교과 내 문항을 공간벡터를 이용하여 더 빨리 풀 수 있는 방법을 소개합니다.

좌표축 설정의 자유에서는 문제를 좌표로 해결하고 싶을 때, 좌표를 효율적으로 도입하는 방법과 문제에서 주어진 점들의 좌표를 임의로 바꾸어도 되는 상황과 조건을 설명합니다.

이등변삼각형의 각 구하기에서는 이등변삼각형의 각을 빨리 계산하는 방법을 소개합니다. 계산은 벡터로 하지만, 이차곡선 문제나 공간도형 문제에서도 얼마든지 쓸 수 있는 방법입니다. 처음에 증명 방법을 배운 뒤에, 나중에는 결과만 암기해도 좋겠습니다.

문제편은 50개의 자작 문제와 4개의 기출문제로 구성되어 있습니다. 54문항은 모두 교과 내입니다. 자작 문제는 평가원 문제의 아이디어와 기조를 잘 따르면서도, 단순 변형이 아니며 또 너무 과하지도 않게 만들었습니다. 교육과정이 개편되면서 빠진 기출문제들의 아이디어 손실을 적절히 메워주었습니다.

본문의 마지막 부분인 **공간벡터 회전** 칼럼에서는 이전 교육과정에서 킬러 문제로 출제되었던 유형의 해법을 제시합니다. 22학년도 예비평가 30번도 이 유형에 속하며, 알아두면 기계적인 계산만으로 문제가 해결됩니다.

2. 해설

해설의 논리를 누구나 납득할 수 있게 작성했으며, 실제로 제가 문제를 푸는 방식대로 일관되게 해설을 작성하였습니다. 문제를 풀 때 필요한 그림만을 제시하며, 무엇을 그려야 하고 무엇을 그리지 않아도 되는지, 또 무엇을 눕혀서 그리는 게 유리한지를 명시했습니다.

3. 학습 방법
한 문제를 풀 때 최대 몇 분까지 고민할 건지를 정해두고 푸셨으면 좋겠습니다. 어려워서 못 풀더라도 **30분 정도는 스스로 고민해보고 해설지를 보는 것을 추천합니다.**

맞힌 문제의 해설도 정독하세요. 제가 왜 저렇게 풀었는지를 완전히 이해하셔야 비로소 자기 것이 됩니다. 특히 무엇을 그리고 무엇을 안 그렸는지, 무엇을 눕혀 그렸는지에 집중해서 읽어주세요.

한 번 풀고 말기에는 문제가 아깝습니다. 처음 풀 때에는 노트에 푸시고, 복습할 때에는 책에 푸셨으면 좋겠습니다. 책에 풀이를 적을 때에는 가능한 한 논리적으로, 본인이 알아보기 좋게 깔끔하게 적으세요.

4. 공간벡터?
교육과정이 바뀌면서 삭제된 내용이지만, 여전히 몇몇 교과 내 문제에서 공간벡터를 이용해 문제를 풀 수 있습니다. 22학년도 예비평가 30번의 경우 공간벡터를 이용해 푸는 게 전혀 불리하지 않습니다. 잘 알고 있는 사람에게는 오히려 공간벡터를 이용해 푸는 것이 더 편합니다.

교과 내 풀이가 떠오르지 않을 때나 제대로 풀었는지 검토할 때 공간벡터로 풀 수 있는 능력을 갖출 것을 추천합니다. **수능 문제는 이렇게 풀 수 없으면 저렇게라도 풀어야 하는 것입니다.**

공간벡터를 공부하라고 강요하는 건 아닙니다. 공부할지 말지는 학생이 선택하시면 되겠습니다. 어느 쪽을 선택하든 존중합니다. 다만, 공부할 거라면 제대로 하셨으면 좋겠습니다.

쉬운 4점 수준의 기출문제까지는 직접 풀어보고, 어려운 4점 기출문제는 해설을 읽고 왜 저렇게 풀었는지 이해할 수 있을 정도로 공부하시면 되겠습니다. 이 책에 있는 공간도형 문제에 대해서 공간벡터로 푸는 게 괜찮은 경우, 그 풀이를 제시했습니다.

22학년도 예비평가 30번과 같은 공간벡터 회전 유형에 대해서는 본문의 마지막으로 빼서 따로 제시했습니다. 마지막 문제는 매우 어렵습니다. 풀어내지 못하더라도 괜찮습니다.

5. 질문
네이버 카페를 이용하셔도 좋겠지만 저는 카톡으로 질문 받는 게 편해서 링크를 적어놓겠습니다.
https://open.kakao.com/o/s1oVUVnd
종이책을 구매했음을 인증해주시는 분들의 질문만 받겠습니다.
이 책의 문제나 평가원, 교육청, 사관학교 기출이 아닌 문제에 대한 질문은 받지 않습니다.

기출의 파급효과 수학

atom.ac/books/7608
기출의 파급효과 수학 시리즈

기출의 파급효과 영어

atom.ac/books/8503
기출의 파급효과 영어 시리즈

파급의 기출효과

cafe.naver.com/spreadeffect
파급의 기출효과 NAVER 카페

기출의 파급효과 물리학1

atom.ac/books/8428
기출의 파급효과 물리학1

기출의 파급효과 사회・문화

atom.ac/books/8543
기출의 파급효과 사회・문화

기출의 파급효과 시리즈는 기출 분석서입니다.
기출의 파급효과 시리즈 과목에는 수학, 영어, 물리학 1, 사회・문화가 있습니다.

준킬러 이상 기출에서 얻어갈 수 있는 '꼭 필요한 도구와 태도'를 정리합니다.
'꼭 필요한 도구와 태도' 체화를 위해 관련도가 높은 준킬러 이상 기출을 바로바로 보여주며 체화 속도를 높입니다. 단시간 내에 점수를 극대화할 수 있도록 교재가 설계되었습니다.

학습하시다 질문이 생기신다면 '파급의 기출효과' 카페에서 질문을 할 수 있습니다.
교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

마법사, 영감, 얀드브, 슬기롭다, 파급효과 등등 오르비 저자분들이 올리시는 학습자료를 받아보실 수 있습니다.
위 저자 분들의 컨텐츠 질문 답변도 교재 인증 시 가능합니다.

이외에도 **검증된 우수한 컨설팅 팀이 정리한 과거부터 현재까지 정시, 수시 입결을 확인할 수 있습니다.**
입시에 대한 질문은 가입하시기만 하면 팀장 및 팀원분들께 하실 수 있습니다.

더 궁금하시다면 https://cafe.naver.com/spreadeffect/15에서 확인하시면 됩니다.

06 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 제1사분면 위의 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}$의 값을 구하시오. (단, 점 O는 좌표평면의 원점이다.) [4점]

(가) 직선 OP와 직선 PF는 서로 수직이다. (나) $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=18$ (다) 직선 OP와 직선 F′Q는 서로 평행하다.

14 좌표평면의 두 점 O, A에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}=2$이고, 좌표평면의 세 점 P_1, P_2, P_3가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=4n\ (n=1, 2, 3)$
> (나) 삼각형 OAP_2의 무게중심은 P_1이다.
> (다) 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$의 무게중심을 G라 할 때, 세 점 O, A, G는 한 직선 위에 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3}=0$일 때, $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{G}}^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

21 좌표평면의 원점 O를 중심으로 하는 원과 직선 l 위의 세 점 A, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 P, Q는 원 위의 점이고, $\overline{\mathrm{OA}} > \overline{\mathrm{OQ}}$이다.
(나) 직선 OA와 직선 l이 이루는 각은 $\frac{\pi}{4}$이다.
(다) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 8+2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 8-2\sqrt{2}$

$\cos(\angle \mathrm{AOP}) = a+b\sqrt{2}$이다. $a+b=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 유리수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

45 중심이 O이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 구 S가 점 A에서 평면 α와 접한다. 구 S 위의 점 B와 평면 α 위의 점 C에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=6$이고, 직선 BC는 구 S와 접한다. $\cos(\angle \mathrm{ACB})=\frac{3}{5}$일 때, 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점]

<보 기>

ㄱ. 삼각형 ABC의 평면 OAB 위로의 정사영은 정삼각형이다.

ㄴ. 평면 ABC와 평면 OAB가 이루는 예각은 $\frac{\pi}{6}$이다.

ㄷ. 점 O와 평면 ABC 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49 좌표공간의 원점 O와 점 A$(8, 0, 0)$에 대하여 두 점 O, A를 지름의 양끝으로 하는 구를 S_1이라 하고, O를 중심으로 하고 A를 지나는 구를 S_2라 하자. 점 A를 지나는 직선 l이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 l과 x축이 이루는 예각을 θ라 할 때, $\cos\theta = \frac{1}{4}$이다.
(나) 직선 l과 구 S_1의 교점을 P라 할 때, P의 z좌표는 1이다.

직선 l과 구 S_2의 교점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 S이다. S^2의 값을 구하시오. [4점]

기하

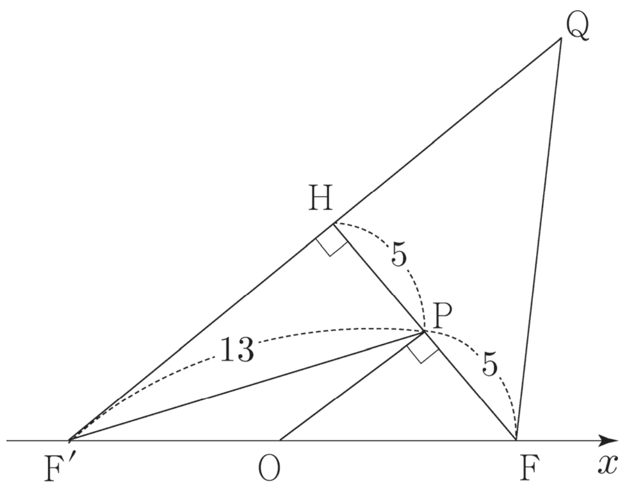
해설

빠른정답

문항번호	정 답	문항번호	정 답	문항번호	정 답	문항번호	정 답	문항번호	정 답
1	23	2	11	3	⑤	4	149	5	17
6	37	7	48	8	31	9	48	10	8
11	9	12	52	13	27	14	41	15	163
16	4	17	8	18	37	19	11	20	24
21	11	22	28	23	①	24	50	25	10
26	181	27	68	28	①	29	137	30	27
31	7	32	7	33	7	34	9	35	101
36	62	37	3	38	25	39	20	40	61
41	55	42	40	43	17	44	11	45	⑤
46	②	47	①	48	9	49	44	50	15
51	⑤	52	24	53	16	54	126		

06 답 : 37

1. F의 x좌표가 양수인지 음수인지 알려주지 않았다. 알아내라는 뜻이다.
   F의 x좌표가 음수라고 가정해보면, P가 제 1사분면 위에 있으므로 $\angle$FOP가 둔각이다.
   그렇다면 조건 (가)를 만족시킬 수 없으므로 F의 x좌표는 양수이다.
   쌍곡선의 주축의 길이가 8이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=8$이다.
   이 식과 (나)의 식을 통해 $\overline{\mathrm{PF'}}=13$, $\overline{\mathrm{PF}}=5$를 얻을 수 있다.



   점 P에서 직선 F′Q에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{OF}}:\overline{\mathrm{F'F}}=1:2$이므로 직각삼각형의 닮음에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{HF}}=1:2$이다.

2. 삼각비 $5:12:13$이 보인다. $\overline{\mathrm{F'H}}=12$이다.
   $\overline{\mathrm{HQ}}=d$라 하자. 쌍곡선의 주축의 길이가 8이므로 $\overline{\mathrm{QF}}=d+4$이다.
   직각삼각형 FHQ에 대하여 피타고라스 정리를 쓰자. $(d+4)^2=d^2+100$에서 $d=\dfrac{21}{2}$이다.
   구하고자 하는 값은 $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=2d+16=37$이다.

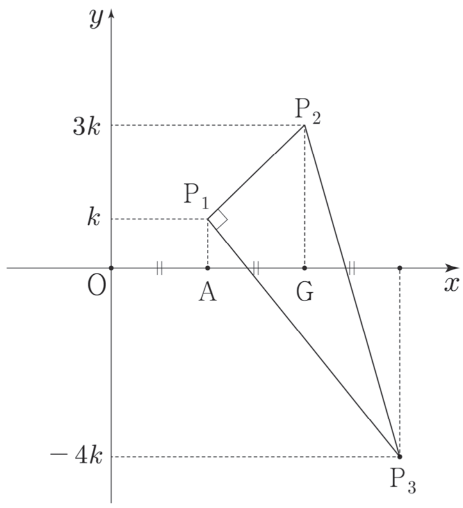
14 답 : 41

1. 이 문제를 푸는 가장 좋은 방법은 좌표를 사용하는 것이다. $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,0)$으로 좌표를 설정하자.
   (가)에서 세 점 P_1, P_2, P_3의 x좌표를 각각 $2, 4, 6$으로 구할 수 있다.

   (나)에서 P_1의 y좌표는 P_2의 y좌표의 $\frac{1}{3}$이다. 각각 k, $3k$로 잡자.

   (다)에서 직선 OA가 x축이므로 G의 y좌표는 0이다. 그러므로 P_3의 y좌표는 $-4k$이다.

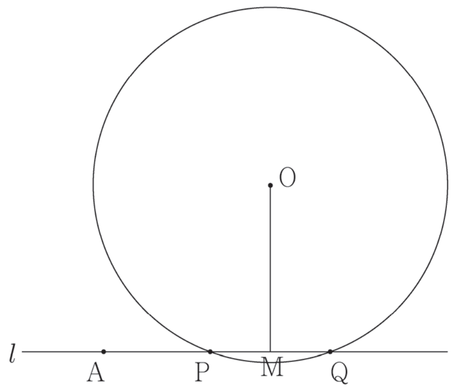
2. 모든 점의 위치를 그림으로 나타내보면 다음과 같다.



세 점 P_1, P_2, P_3의 x좌표의 평균이 4이므로 G의 좌표는 $(4,0)$이다.
마지막 줄의 조건을 적용해보면 $\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3} = (2, 2k) \cdot (4, -5k) = 8 - 10k^2 = 0$에서
$k^2 = \frac{4}{5}$이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{G}}^{\,2} = 9k^2 = \frac{36}{5}$이다.

21 답 : 11

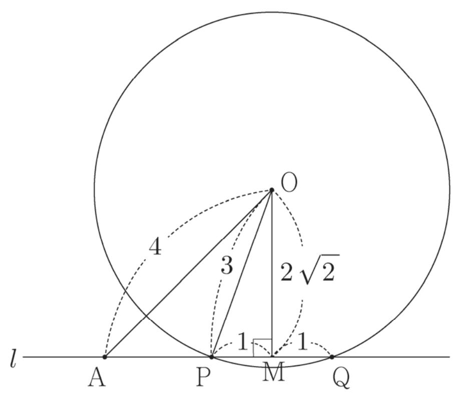
1. 문제에서 주어진 도형은 1개의 원과 1개의 직선뿐이다. 이 정도는 모두 그려도 좋겠다.
두 점 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$이고, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} > \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$이다. 두 점 P와 Q 중에서 A에 더 가까운 점은 P이다. (가), (나), (다) 조건을 모두 만족시키도록 원과 직선 l을 그려보자. l을 눕혀서 그리는 게 보기 편하겠다.



선분 PQ의 중점을 M이라 하자. 조건 (나)에 따르면 $\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{AM}}$이다. 마지막으로 (다)의 해석만이 남았다.

2. (다)의 두 수 $8+2\sqrt{2}$와 $8-2\sqrt{2}$를 각각 보기에는 다소 불편하다. 하지만 두 수의 합과 차는 각각 16과 $4\sqrt{2}$이므로 보기 편하다. 그렇다면 다음과 같은 풀이가 가능하다.

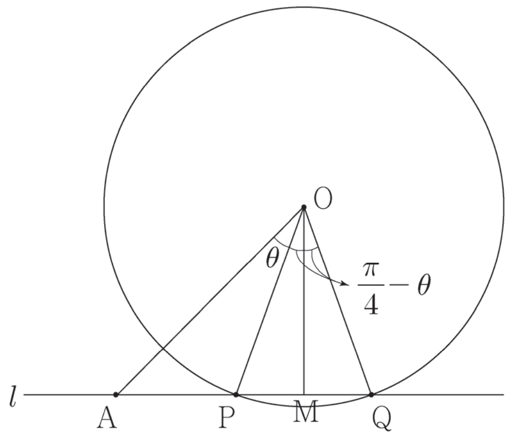
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}=2|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=16$에서 $\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{AM}}=2\sqrt{2}$이고,
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{MA}} \times \overline{\mathrm{QP}}=4\sqrt{2}$에서 $\overline{\mathrm{AM}}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{QP}}=2$이다. 선분의 길이와 원의 반지름이 모두 결정된다.



3. 마지막으로 $\cos(\angle \mathrm{AOP})$의 값을 계산하자. 여러 가지 방법이 있겠지만 가장 좋은 방법은 내적의 정의를 이용하는 것이다. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 크기를 구해냈고, 두 벡터의 내적은 문제에서 주어져 있다. 이들을 쓰지 않을 이유가 없다.
$\cos(\angle \mathrm{AOP})=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\dfrac{8+2\sqrt{2}}{12}$이다. $a+b=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$이다.

※ 두 개의 내적 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 8+2\sqrt{2}$와 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = 8-2\sqrt{2}$를 따로따로 생각해서 문제를 해결하려 했다면 매우 힘들었을 것이다. 계산 과정에서 이중근호도 풀어야 한다.

다른 풀이



$\angle \mathrm{AOP} = \theta$라 하자. 구하고자 하는 것은 $\cos\theta$이다. (다)를 내적의 정의로 계산하자.

$8+2\sqrt{2} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta$

$8-2\sqrt{2} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OQ}|\sin\theta$

여기서 $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}|$이므로 $\tan\theta$를 계산할 수 있다.

$\tan\theta = \dfrac{8-2\sqrt{2}}{8+2\sqrt{2}} = \dfrac{9-4\sqrt{2}}{7}$

$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$를 이용하자.

$\sec^2\theta = \dfrac{162-72\sqrt{2}}{49} = \dfrac{18(9-4\sqrt{2})}{49}$

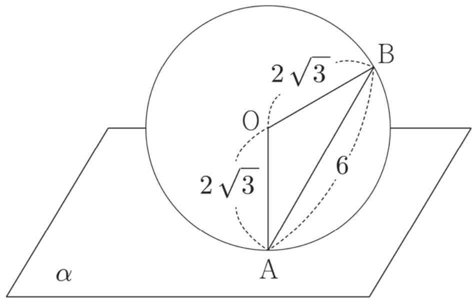
여기서 이중근호를 풀어야 한다.

$9-4\sqrt{2} = (m+n\sqrt{2})^2$이라 하면, $m=-1$, $n=2$을 얻을 수 있다.

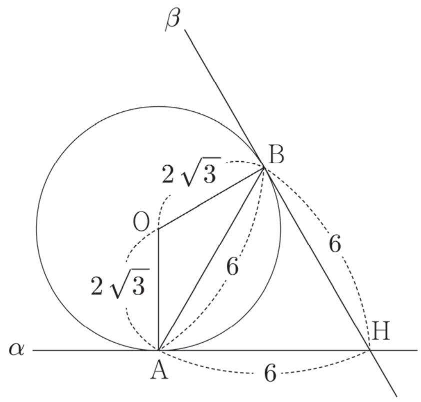
$\sec\theta = \dfrac{3\sqrt{2}\times(2\sqrt{2}-1)}{7} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$에서 $\cos\theta = \dfrac{4+\sqrt{2}}{6}$를 얻는다.

45 **답 : ⑤**

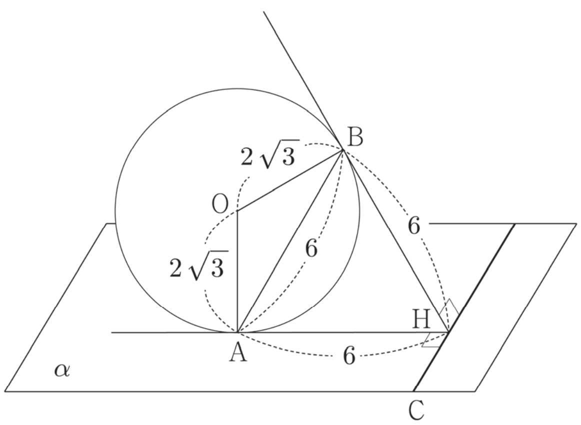
1. 그림을 일단 그려보자.



직선 BC를 그리기 전에, 점 B에서 구에 접하는 평면을 생각하자. 그 평면을 β라 하자. C는 평면 β 위의 점이고, 문제에서 C가 평면 α 위의 점이라고 하였으므로 C는 두 평면 α, β의 교선 위의 점이다. 다음과 같이 단면화하여 그리자.



단면화를 했는데, 점 H가 두 평면 α, β의 교선의 역할을 한다. 이 직선 위에 점 C가 놓인다.



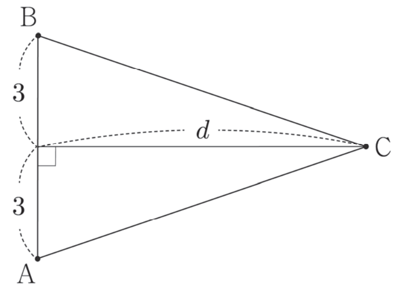
바로 ㄱ 선택지를 판단할 수 있다. 직선 CH가 두 직선 AH, BH와 수직이다. 그러므로 직선 CH는 평면 ABH와 수직이고, 평면 ABH는 평면 OAB와 같다.

그러므로 삼각형 ABC의 평면 OAB 위로의 정사영은 정삼각형 ABH이다. ㄱ 선택지는 옳다.

2. ㄴ 선택지를 판단할 때 ㄱ 선택지의 도움을 받자. 삼각형 ABC의 평면 OAB 위로의 정사영이 한 모서리의 길이가 6인 정삼각형이라는 것을 알기 때문에 삼각형 ABC의 넓이를 구해서 두 평면 ABC, OAB가 이루는 예각 θ를 구하자.

$\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CB}}$이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

삼각형 ABC의 넓이를 $\cos(\angle \mathrm{ACB})=\dfrac{3}{5}$라는 조건을 이용해 구하자.



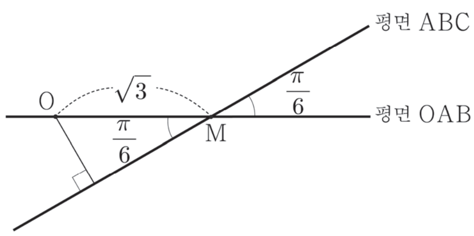
$\cos(\angle \mathrm{ACB})=\dfrac{d^2-3^2}{d^2+3^2}$이다. 이 값이 $\dfrac{3}{5}$이므로 $d^2=36$이고, $d=6$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 18이다.

한 모서리의 길이가 6인 정삼각형 ABH의 넓이는 $9\sqrt{3}$이므로

$\cos\theta=\dfrac{9\sqrt{3}}{18}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$이다. ㄴ 선택지는 옳다.

3. ㄷ 선택지를 판단할 때 ㄴ 선택지의 도움을 받자. $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{3}$이다.



점 O와 평면 ABC 사이의 거리는 $\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다. ㄷ 선택지는 옳다.

※ ㄷ 선택지를 판단하는 다른 방법이 있는데, 사면체 OABC의 부피를 두 가지 방식으로 구하는 것이다. ㄴ 선택지를 판단하고 나면 $\overline{\mathrm{CH}}$의 길이를 어렵지 않게 구할 수 있다. $\overline{\mathrm{CH}}=3$이다.

삼각형 OAB의 넓이가 $3\sqrt{3}$이므로 사면체 OABC의 부피는 $\dfrac{1}{3}\times 3\sqrt{3}\times 3$이다.

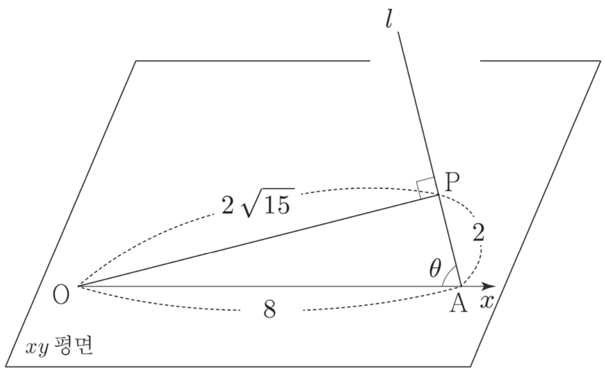
한편, 구하고자 하는 값인 점 O와 평면 ABC 사이의 거리를 h라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 18이라는 것을 역시 ㄴ 선택지를 판단할 때 구했다. 사면체 OABC의 부피는 $\dfrac{1}{3}\times 18\times h$이다.

$18h=9\sqrt{3}$에서 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

49 답 : 44

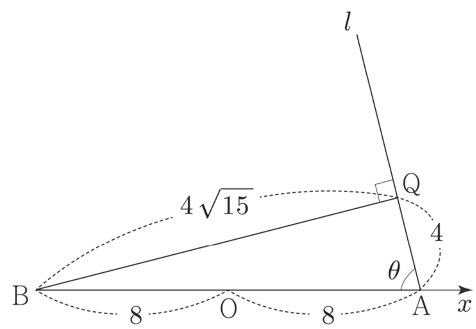
1. 구 S_1의 반지름의 길이는 4이고, 구 S_2의 반지름의 길이는 8이다. 당장 두 개의 구를 그리는 것이 문제를 푸는 데 그다지 도움이 되지 않는다. 박스 안의 조건을 해석해야 한다.

   우선 (가)를 보면, x축이 직선 OA와 같으므로 직선 l과 OA가 이루는 각을 알려주는 조건이다. (나)에서 P의 z좌표를 주었는데, 박스 아래에 보면 'xy평면'이 있다. P의 z좌표가 1이라는 것으로부터 점 P와 xy평면 사이의 거리가 1이라는 것을 얻는다.
   그림을 그려보자.



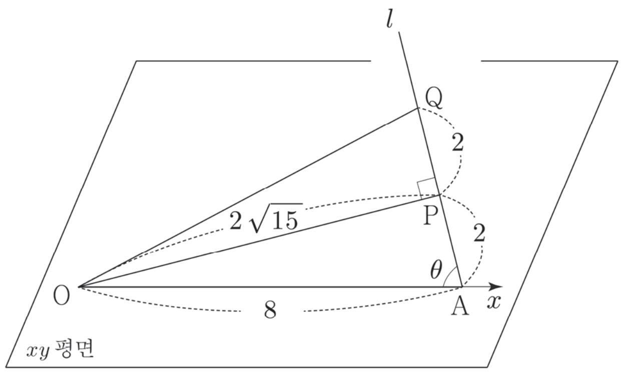
   두 점 O, A가 구 S_1의 지름의 양끝점이므로 $\angle \mathrm{OPA} = \frac{\pi}{2}$이다.

2. 이제 Q의 위치를 정해야 한다. 두 점 A, B가 구 S_2의 지름의 양끝점이 되도록 하는 점 $\mathrm{B}(-8, 0, 0)$을 설정하자.

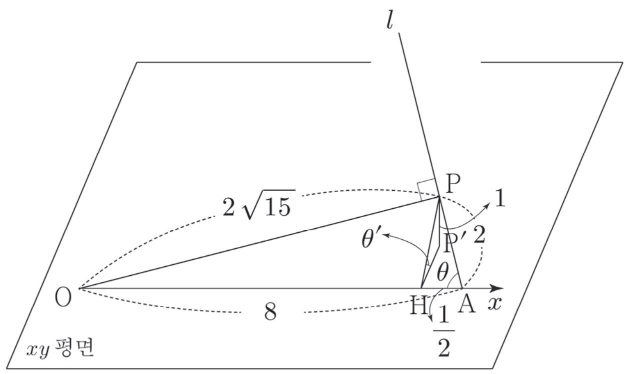


   $\angle \mathrm{AQB} = \frac{\pi}{2}$이고, $\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta = 4$이다. P는 $\overline{\mathrm{AQ}}$의 중점이다.

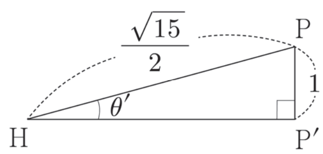
3. 삼각형 OPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 구해야 한다. 그러려면 삼각형 OPQ를 구해야 하고, 평면 OPQ와 xy평면이 이루는 각도 구해야 한다.



삼각형 OPQ의 넓이는 $2\sqrt{15}$이다. 이제 두 평면 OPQ, xy평면이 이루는 각을 구하자.
평면 OPQ는 평면 OPA와 같다. 평면 OPQ와 xy평면의 교선은 직선 OA이다. P에서 xy평면에 내린 수선의 발과 P에서 직선 OA에 내린 수선의 발의 위치를 결정하자.



P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 P′이라 하고, P에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하자.
(나)에 의하면 $\overline{\mathrm{PP'}} = 1$이고, $\overline{\mathrm{AH}} = 2\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{PH}} = 2\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{2}$이다.



평면 OPQ와 xy평면이 이루는 각을 θ'이라 할 때, $\sin\theta' = \frac{2}{\sqrt{15}}$이고 $\cos\theta' = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$이다.
따라서 삼각형 OPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 $2\sqrt{15}\cos\theta' = 2\sqrt{11}$이다.