랑데뷰
N제
2023

쉬삼어삼-수학 I

◆ 개념 15 - 로그 방정식

1. 로그방정식의 풀이 ($a>0,\ a\neq 1$ 일 때)

(1) $\log_a x = p \Leftrightarrow x = a^p\ (x>0)$

(2) $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2\ (x_1>0,\ x_2>0\ )$

이때 로그방정식의 해가 로그가 정의되기 위한 조건, 즉

$(\text{진수})>0,\ (\text{밑})>0,\ (\text{밑})\neq 1$ 을 만족하는지 반드시 확인해야 한다.

2. 특수한 형태의 지수・로그방정식의 풀이

(1) 같은 꼴이 반복되는 로그방정식-같은 꼴을 치환하여 푼다.

(2) 진수가 같은 로그방정식- 밑이 같다 또는 (진수)=1임을 이용한다.

즉 $\log_a f(x) = \log_b f(x) \Leftrightarrow a=b$ 또는 $f(x)=1$

(3) 지수에 로그를 포함한 $x^{\log_a x} = x$ 꼴의 지수방정식

$x^{\log_a x} = x$꼴의 지수방정식은 양변에 밑이 a인 로그를 취한 후 치환하여 푼다. 즉 $x^{\log_a x} = x \Rightarrow (\log_a x)^2 = \log_a x \Rightarrow \log_a x = t$ 로 치환

(4) 밑이 다른 $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ 꼴의 지수방정식

$a^{f(x)} = b^{g(x)}$ 꼴의 지수방정식은 양변에 상용로그를 취하여 푼다. 즉

$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Rightarrow \log a^{f(x)} = \log b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\log a = g(x)\log b$

◆ 개념 16 - 로그 부등식

1. 로그부등식의 풀이 ($a>0,\ a\neq 1$ 이고 $x_1>0,\ x_2>0$ 일 때)

(1) $a>1$일 때 $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

(2) $0<a<1$ 일 때, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$

이때 로그부등식의 해가 로그가 정의되기 위한 조건, 즉

$(\text{진수})>0,\ (\text{밑})>0,\ (\text{밑})\neq 1$ 을 만족하는지 반드시 확인해야 한다.

2. 특수한 형태의 지수・로그부등식의 풀이

(1) 같은 꼴이 반복되는 로그부등식-같은 꼴을 치환하여 푼다.

(2) 밑에 문자를 포함하는 로그부등식

밑의 범위에 따라 부등호의 방향이 바뀌므로 밑에 문자를 포함한 로그부등식인 경우에는 $0<(\text{밑})<1$, $(\text{밑})>1$ 인 경우로 나누어 푼다.

(3) 지수에 로그를 포함한 $x^{\log_a x} > x$ 꼴의 지수부등식

$x^{\log_a x} > x$ 꼴의 지수부등식은 양변에 밑이 a인 로그를 취한 후 치환하여 푼다. 즉 (ⅰ) $a>1$인 경우 $x^{\log_a x} > x \Leftrightarrow (\log_a x)^2 > \log_a x$

(ⅱ) $0<a<1$ 인 경우 $x^{\log_a x} > x \Leftrightarrow (\log_a x)^2 < \log_a x$

(4) 밑이 다른 $a^{f(x)} > b^{g(x)}$ 꼴의 지수부등식

$a^{f(x)} > b^{g(x)}$ 꼴의 지수부등식은 양변에 상용로그를 취하여 푼다.

즉, $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\log a > g(x)\log b$

[랑데뷰팁]

로그 방정식 : 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함하고 있는 방정식

로그 부등식 : 로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함하고 있는 부등식

[랑데뷰팁]

밑과 진수의 조건의 확인

로그방정식과 로그부등식을 풀 때, 밑과 진수의 조건을 반드시 확인해야 한다.

$y=\log_{g(x)} f(x)$에서

(1) 밑의 조건 :

$g(x)>0,\ g(x)\neq 1$

(2) 진수의 조건 :

$f(x)>0$

(1) 기본문제

1) 2022학년도 사관학교

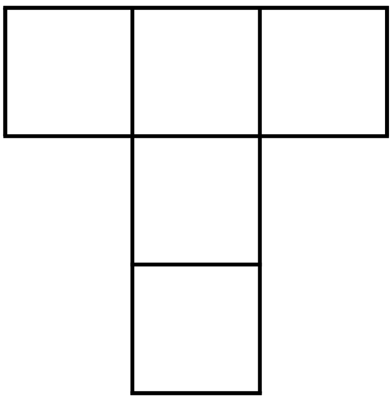
$\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2) 2022학년도 사관학교

그림과 같은 5 개의 칸에 5 개의 수 $\log_a 2$, $\log_a 4$, $\log_a 8$, $\log_a 32$, $\log_a 128$ 을 한 칸에 하나씩 적는다. 가로로 나열된 3 개의 칸에 적힌 세 수의 합과 세로로 나열된 3 개의 칸에 적힌 세 수의 합이 15 로 서로 같을 때, a 의 값은?

① $2^{\frac{1}{3}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ 2 ④ $2^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{3}}$



3) 2020년 7월 교육청

1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여

$$\log_{27}a=\log_3\sqrt{b}$$

일 때, $20\log_b\sqrt{a}$의 값을 구하시오.

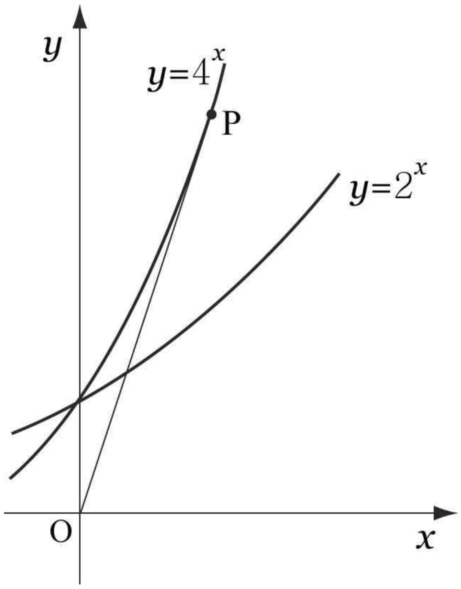
4) 2020년 5월 교육청

$\log_3 10+\log_3\frac{9}{5}-\log_3\frac{2}{3}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

205) 2009년 7월 교육청

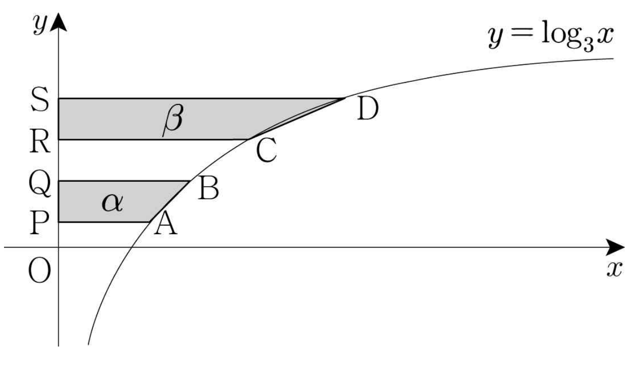
원점 O에서 함수 $f(x)=4^x$ 위의 한 점 P를 잇는 선분 OP가 있다. 함수 $g(x)=2^x$의 그래프가 선분 OP를 $1:3$으로 내분할 때, 점 P의 x좌표는?



① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $\frac{6}{7}$ ④ 1 ⑤ $\frac{8}{7}$

206) 2009년 10월 교육청

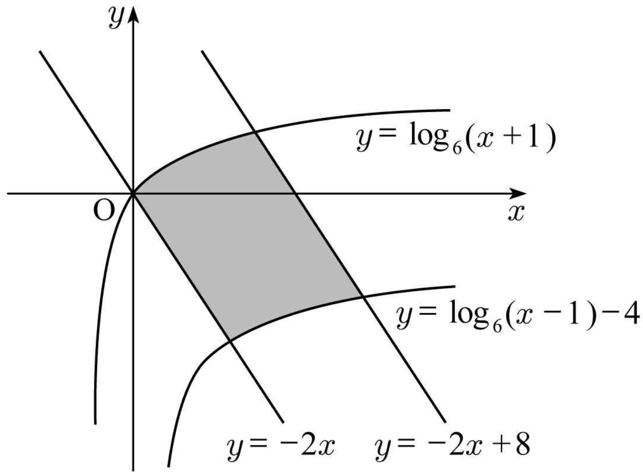
그림과 같이 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R, S라 하자. 두 사각형 ABQP, CDSR의 넓이를 각각 α, β라 하고, 네 점 P, Q, R, S의 y좌표를 각각 p, q, r, s라 하자. p, q, r, s가 이 순서대로 등차수열을 이루고, $\beta=3\alpha$일 때, $s-p$의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

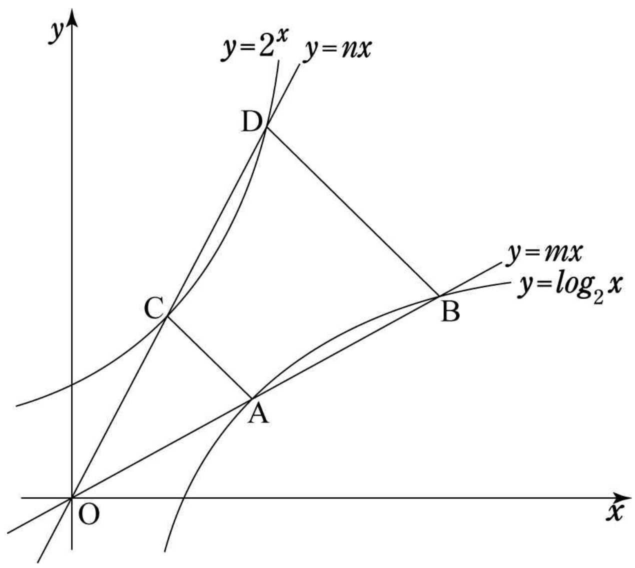
207) 2010년 3월 교육청

그림과 같이 두 곡선 $y=\log_6(x+1)$, $y=\log_6(x-1)-4$와 두 직선 $y=-2x$, $y=-2x+8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



208) 2010년 7월 교육청

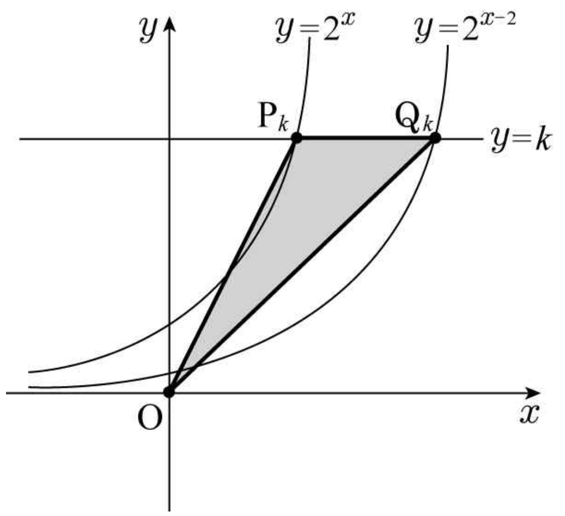
그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=mx$의 두 교점을 A, B라 하고, 함수 $y=2^x$의 그래프와 직선 $y=nx$의 두 교점을 C, D라 하자. 사각형 ABDC는 등변사다리꼴이고 삼각형 OBD의 넓이는 삼각형 OAC의 넓이의 4배일 때, $m+n$의 값은? (단, O는 원점)



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

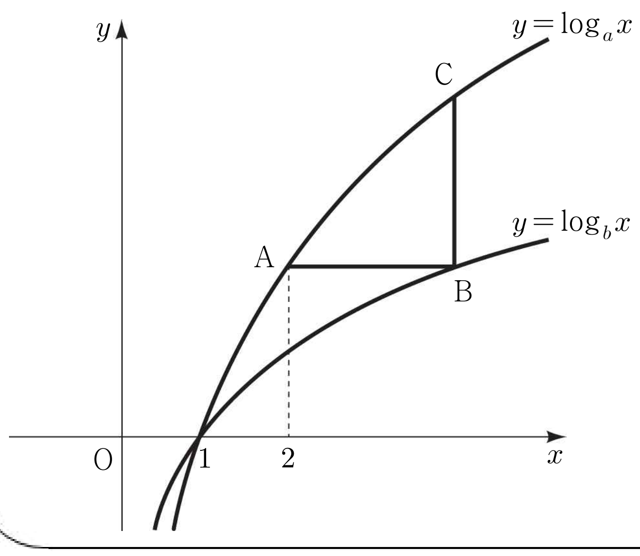
209) 2010년 10월 교육청

그림과 같이 두 곡선 $y=2^x$, $y=2^{x-2}$과 직선 $y=k$의 교점을 각각 P_k, Q_k라 하고, 삼각형 $\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k$의 넓이를 A_k라 하자. $A_1+A_4+A_7+A_{10}$의 값을 구하시오. (단, k는 자연수이고, O는 원점이다.)



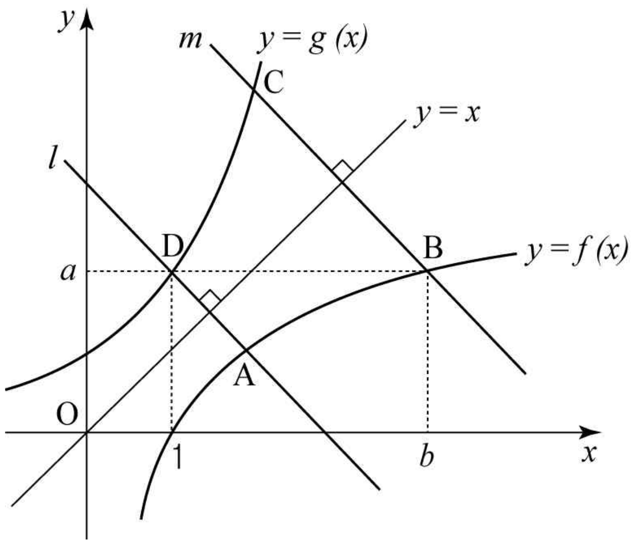
210) 2011년 4월 교육청

그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ \log_a 2)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, $1<a<b$)



211) 2011년 7월 교육청

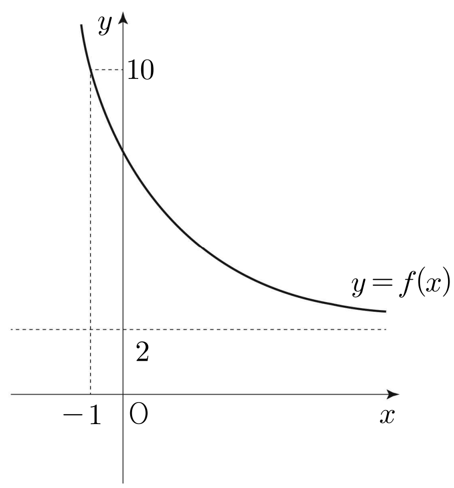
그림과 같이 직선 $y=x$와 수직으로 만나는 평행한 두 직선 l, m이 있다. 두 직선 l, m이 함수 $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=2^x$의 그래프와 만나는 교점을 A, B, C, D라 하자. $f(b)=g(1)=a$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는?



① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

212) 2012년 4월 교육청

점근선의 방정식이 $y=2$인 지수함수 $y=2^{2x+a}+b$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1,10)$을 지날 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

단원평가

236)

x의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f_n(x)$라고 할 때, $f_2(-4)+f_3(0)+f_4(\sqrt[3]{8})$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

237)

$\left(\dfrac{2^{\sqrt{5}}}{8}\right)^{\sqrt{5}+3}$ 의 값은?

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{8}$ ⑤ $\dfrac{1}{16}$ [

238)

$\sqrt[3]{64}\times 4^{\log_2 3}$ 의 값은?

① 4 ② 9 ③ 12 ④ 24 ⑤ 36

239)

$\dfrac{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}\right)^2+\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}}}{\sqrt[3]{3}}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

240)

$3^{\sqrt{2}}\times 3^{2-\sqrt{2}}$ 의 값은?

① $5\sqrt{2}$ ② 8 ③ $6\sqrt{2}$ ④ 9 ⑤ $7\sqrt{2}$

241)

$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2\div 2^2\times(\sqrt[4]{2})^6$의 값은?

① $2^{\frac{1}{2}}$ ② $2^{\frac{1}{3}}$ ③ $2^{\frac{1}{4}}$

④ $2^{\frac{1}{5}}$ ⑤ $2^{\frac{1}{6}}$

594) 정답 ③
595) 정답 ④
596) 정답 ③
597) 정답 ⑤
598) 정답 ④
599) 정답 ③
600) 정답 3
601) 정답 ④
602) 정답 ①
603) 정답 ⑤
604) 정답 307
605) 정답 23
606) 정답 ④
607) 정답 ②
608) 정답 49
609) 정답 ③
610) 정답 ①
611) 정답 11
612) 정답 12
613) 정답 ③
614) 정답 ②
615) 정답 15
616) 정답 ①
617) 정답 ④
618) 정답 4
619) 정답 450
620) 정답 ⑤
621) 정답 150
622) 정답 ③
623) 정답 55
624) 정답 ④
625) 정답 ⑤
626) 정답 22
627) 정답 ③
628) 정답 ④
629) 정답 5
630) 정답 36
631) 정답 12
632) 정답 216
633) 정답 12
634) 정답 ①
635) 정답 32
636) 정답 ⑤
637) 정답 ③
638) 정답 ①
639) 정답 ④
640) 정답 15
641) 정답 ⑤
642) 정답 ⑤
643) 정답 420
644) 정답 20
645) 정답 ③
646) 정답 ①
647) 정답 ②
648) 정답 ⑤
649) 정답 ②
650) 정답 22
651) 정답 8
652) 정답 ⑤
653) 정답 ④
654) 정답 ④
655) 정답 5
656) 정답 85
657) 정답 ②
658) 정답 ①
659) 정답 440
660) 정답 ③
661) 정답 23
662) 정답 22
663) 정답 30
664) 정답 26
665) 정답 ①
666) 정답 191
667) 정답 11
668) 정답 95
669) 정답 ①
670) 정답 3
671) 정답 ④
672) 정답 ②
673) 정답 29
674) 정답 ②
675) 정답 ②
676) 정답 ①
677) 정답 421

1) 정답 ③

$\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}=2^{\frac{6}{m}}\times3^{\frac{4}{n}}$ 의 값이 자연수이므로

m 은 6 의 약수, n 은 4 의 약수

m, n 이 2 이상의 약수이므로

$m=2,\ 3,\ 6,\ n=2,\ 4$

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$3\times2=6$

2) 정답 ②

5 개의 수가 $\log_a 2$, $2\log_a 2$, $3\log_a 2$, $5\log_a 2$, $7\log_a 2$ 이므로 1, 2, 3, 5, 7 중 가로와 세로에 공통인 수를 하나 제외한 나머지 네 수 중 두 수끼리의 합이 같아야 한다. 네 수의 합이 짝수가 되어야 하는데, 네 수 중 2 만 짝수이므로 두 수끼리의 합은

$1+7=3+4$

만 가능하다. 따라서 공통인 수는 2 이므로

$\log_a 2+7\log_a 2+2\log_a 2=15$

; $2\log_a 2=3$; $a^3=2^2$

$\therefore\ a=2^{\frac{2}{3}}$

3) 정답 15

$\log_{27}a=\log_{3^3}a=\dfrac{1}{3}\log_3 a$,

$\log_3\sqrt{b}=\log_3 b^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_3 b$이므로

$\dfrac{1}{3}\log_3 a=\dfrac{1}{2}\log_3 b$

$\log_b a=\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}=\dfrac{3}{2}$

따라서

$20\log_b\sqrt{a}=10\log_b a=15$

4) 정답 ③

$\log_3\left(10\times\dfrac{9}{5}\div\dfrac{2}{3}\right)=\log_3 27=3$

5) 정답 ⑤

$a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad\therefore\ k=\dfrac{2}{3}$

6) 정답 ①

$\sqrt[8]{6}=\sqrt[8]{2}\,\sqrt[8]{3}=\sqrt[4]{\sqrt{2}}\,\sqrt{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{a}\,\sqrt{b}$

7) 정답 15

(i) $x-2>0,\ x-2\neq1$

(ii) $-x^2+5x+14>0$

$(x+2)(x-7)<0$

(i), (ii)에서 만족하는 정수는 4, 5, 6

따라서 합은 15

8) 정답 5

$a^6\div a^3\times a^2=a^5=a^k$

$\therefore\ k=5$

9) 정답 ③

$x^2-4=\left(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}\right)^2$ 이므로

$\sqrt{x^2-4}+x=\left(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}\right)+\left(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}\right)=2^{\frac{5}{4}}$

10) 정답 15

$36=2^2\cdot3^2=a^m b^n=2^{\frac{2m}{3}}\cdot3^{\frac{n}{6}}$ 에서

$\dfrac{2m}{3}=2$, $\dfrac{n}{6}=2$ ($\because$ m, n은 자연수)

$\therefore\ m+n=3+12=15$

11) 정답 16

$2^a=3^2$, $3^b=5^3$ 에서 $3=2^{\frac{a}{2}}$, $5=3^{\frac{b}{3}}$ 이므로

$5^c=\left(3^{\frac{b}{3}}\right)^c=3^{\frac{bc}{3}}=\left(2^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{bc}{3}}=2^{\frac{abc}{6}}$

$=2^{\frac{24}{6}}=2^4=16$

12) 정답 ①

ㄱ. 밑의 조건: $a^2-a+2=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>1$

진수의 조건: $a^2+1\geq1$

따라서 항상 로그를 정의할 수 있다.