문제지

	수정전	수정후
239쪽 쌍둥이 문제 빠진부분에 배치하기	**쌍둥이 문제-풀이 없음** 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (가) $f(1)=1$, $\int_{1}^{3} f(x)dx=\frac{15}{4}$ (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(3x)=3f(x)$이다. $\int_{1}^{9} xf'(x)dx$의 값을 구하시오. [4점] **정답** 38	

471번	보기 배열 정렬	

풀이집

꼬릿말	풀이집 짝수쪽 꼬릿말 전체 수정해야 되겠습니다. 3. 적분 -level3 ⇒ −상세해설−	
591번 풀이 전체 교체	[치환적분법이용]-세미나(89), (102) 참고 $\int_1^8 xf'(x)dx$에서 $x=g(t)$라 하면 $dx=g'(t)dt$이고	

함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 역함수 관계이므로
$f(g(t))=t$이고 $f'(g(t))g'(t)=1$이다.
또한
$f(1)=1$이고, $g(2x)=2f(x)$에
$x=1$을 대입하면 $g(2)=2f(1)=2$에서 $f(2)=2$
$x=2$를 대입하면 $g(4)=2f(2)=4$에서 $f(4)=4$
$x=4$를 대입하면 $g(8)=2f(4)=8$에서 $f(8)=8$
이므로
$x:1\to 8$이면 $t:1\to 8$이다.
그러므로

$$\int_1^8 xf'(x)dx$$

$$=\int_1^8 g(t)f(g(t))g'(t)dt$$

$$=\int_1^8 g(t)dt$$이다.

$$\int_1^8 g(t)dt=\int_1^2 g(t)dt+\int_2^4 g(t)dt+\int_4^8 g(t)dt$$이고

(i) $young's$법칙에서

$$\int_1^2 g(t)dt+\int_1^2 f(t)dt=4-1=3$$이므로

$$\int_1^2 g(t)dt=3-\int_1^2 f(t)dt=\frac{7}{4}$$이다.

(ii) $\int_2^4 g(t)dt$에서 $t=2a$라 두면

$$\int_2^4 g(t)dt=2\int_1^2 g(2a)da$$

$$=2\int_1^2 2f(a)da=4\times\frac{5}{4}=5$$

(iii) $\int_4^8 g(t)dt$에서 $t=2b$라 두면

$$\int_4^8 g(t)dt=2\int_2^4 g(2b)db$$

$$=2\int_2^4 2f(b)da=4\int_2^4 f(b)db$$

(ii)에서 $\int_2^4 g(t)dt=5$이므로

$young's$법칙에서

$\int_{2}^{4} f(b)db+\int_{2}^{4} g(b)db=16-4$에서

$\int_{2}^{4} f(b)db=12-5=7$

따라서 $\int_{4}^{8} g(t)dt=4\int_{2}^{4} f(b)db=28$

(i), (ii), (iii)에서

$\int_{1}^{8} g(t)dt=\frac{7}{4}+5+28=\frac{139}{4}$이고 $p+q=143$이다.

[다른 풀이]-부분적분법 이용

$f(1)=1$이고, $g(2x)=2f(x)$에

$x=1$을 대입하면 $g(2)=2f(1)=2$에서 $f(2)=2$

$x=2$를 대입하면 $g(4)=2f(2)=4$에서 $f(4)=4$

$x=4$를 대입하면 $g(8)=2f(4)=8$에서 $f(8)=8$

$\int_{1}^{8} xf'(x)dx$

$=\Big[\ xf(x)\ \Big]_{1}^{8}-\int_{1}^{8} f(x)dx$

$=8f(8)-f(1)-\int_{1}^{8} f(x)dx$

$=63-\int_{1}^{8} f(x)dx$이다.$\cdots$㉠

$\int_{1}^{8} f(x)dx=\int_{1}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{8} f(x)dx$에서

$\int_{1}^{2} f(x)dx=\frac{5}{4}$이고

$young's$법칙에서

$\int_{2}^{4} f(x)dx+\int_{2}^{4} g(x)dx=16-4=12$

$\int_{2}^{4} g(x)dx=2\int_{1}^{2} g(2a)da=2\int_{1}^{2} 2f(a)da=4\times\frac{5}{4}=5$이므로

$\int_{2}^{4} f(x)dx=12-5=7$

또

$\int_{4}^{8} f(x)dx+\int_{4}^{8} g(x)dx=64-16=48$

	$\int_{4}^{8} g(x)dx = 2\int_{2}^{4} g(2a)da = 2\int_{2}^{4} 2f(a)da = 4\times 7 = 28$이므로 $\int_{2}^{4} f(x)dx = 48-28 = 20$ $\int_{1}^{8} f(x)dx = \frac{5}{4}+7+20 = \frac{113}{4} \cdots$ ㉡ ㉠, ㉡에서 $\int_{1}^{8} xf'(x)dx = 63-\frac{113}{4} = \frac{252-113}{4} = \frac{139}{4}$ 그러므로 $p+q=143$이다.	