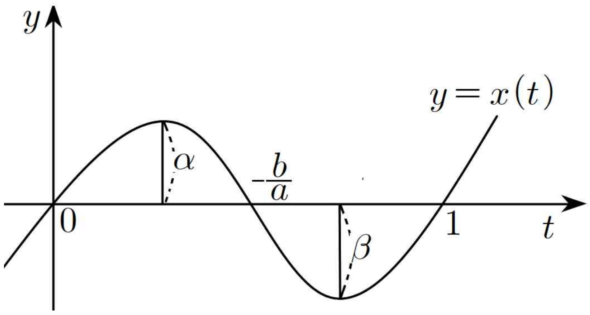
문제지

	수정전	수정후
501번 박스안 ㄴ. 수정	수정전 ㄴ. $b<0$이고 $x(t_1)=0$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 2)$에 존재할 때, $x(t_2)\geq 2$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 2)$에 존재한다. 수정후 ㄴ. $b<0$이고 $x(t_1)=0$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 2)$에 오직 하나 존재할 때, $x(t_2)\geq 2$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 2)$에 존재한다.	
502번	의 값을 구하시오. [4점]	$60\times\int_1^2 f(x)dx$ 의 값을 구하시오. [4점]
503번 문제 전체 교체	실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)=2x$이다. (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x+1)+xf(x)=ax+b$이다. (다) 어떤 상수 c, d에 대하여 구간 $(-\infty,\ 1]$에서 $f(x-1)-xf(x)=cx+d$이다. $f(a+b+c+2d)$의 값을 구하시오. [4점]	

풀이집

500번	ㄴ. 풀이 전체 교체 (ㄱ. ㄷ. 부분은 그대로) 수정후 ㄴ. $y=t(t-1)(at+b)$에서 $a>0$라 가정하면 $t=0,\ t=1,\ t=-\dfrac{b}{a}$에서 점 P의 위치가 원점이다. (i) $-\dfrac{b}{a}\ \leq 0$일 때,	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
$y=x(t)$의 그래프에서 열린구간 $(0,1)$에서 점 P는 음수쪽에만 위치하는 그래프가 된다.
따라서 열린구간 $(0,1)$의 t_1에 대하여 $\left|x(t_1)\right| \le 1$
(ii) $-\dfrac{b}{a} \ge 1$일 때,
$y=x(t)$의 그래프에서 열린구간 $(0,1)$에서 점 P는 양수쪽에만 위치하는 그래프가 된다.
따라서 열린구간 $(0,1)$의 t_1에 대하여 $\left|x(t_1)\right| \le 1$
(iii) $0 < -\dfrac{b}{a} < 1$일 때,
$\displaystyle\int_0^1 |v(t)|dt = 2$이므로 구간 $(0,\ 1\ )$에서 $v(t)$가 음수인 구간과 양수인 구간이 반드시 존재한다. 이때, 극댓값을 α, 극솟값을 $-\beta$라 할 때, $y=x(t)$의 그래프를 그려보면 아래의 그림과 같다.


$\displaystyle\int_0^1 |v(t)|dt$는 t가 움직인 거리이므로 위치가 0에서 α가 되고 그 후에 $-\beta$가 된 후 다시 0이 되었으므로
$\displaystyle\int_0^1 |v(t)|dt = \alpha+\alpha+\beta+\beta = 2\alpha+2\beta = 2$
$\alpha+\beta=1$
따라서 열린구간 $(0,1)$의 t_1에 대하여 $\left|x(t_1)\right| < 1$
(i), (ii), (iii)에서
$\therefore\ \left|x(t_1)\right| \le 1$ (거짓)
</td>
</tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr>
<td>503번
풀이 전체 교체</td>
<td>
수정후

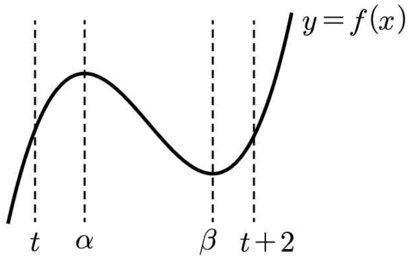
(i) (나)의 준식에 $x=0$을 대입하면
$f(1)=b=2$
(나)의 준식을 x에 관해 미분하면
$f'(x+1)+f(x)+xf'(x)=a$
</td>
</tr>
</table>

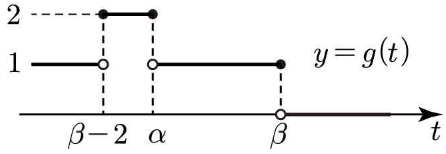
	$x=0$을 대입하면 $f'(1)+f(0)=a=2$ 따라서 $a=b=2$ (ii) (다)의 준식에 $x=1$을 대입하면 $f(0)-f(1)=c+d=-2$ (다)의 준식을 x에 관해 미분하면 $f'(x-1)-f(x)-xf'(x)=c$ $x=1$을 대입하며 $f'(0)-f(1)-f'(1)=c=-2$ 따라서 $c=-2$, $d=0$ (i), (ii)에서 $a+b+c+d=2$ (나)에서 $f(x+1)=-xf(x)+2x+2$ $0 \le x \le 1$에서 $f(x+1)=-2x^2+2x+2$ $x=t-1$라 하면 $f(t)=-2(t-1)^2+2(t-1)+2$ $1 \le t \le 2$에서 $f(t)=-2t^2+6t-2$ $f(a+b+c+d)=f(2)=-8+12-2=2$ **[다른 풀이]** $0 \le x \le 1$일 때, $f(x)=2x$이므로 (i) $x \ge 0$일 때, (나)에서 $f(x+1)=-xf(x)+ax+b$ $\quad\quad\quad=-2x^2+ax+b$ $x+1=t$라 두면 $1 \le t \le 2$에서 $f(t)=-2(t-1)^2+a(t-1)+b$ $\quad=-2t^2+(4+a)t-a+b-2$ 즉, $1 \le x \le 2$에서 $f(x)=-2x^2+(4+a)x-a+b-2$ 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다. 따라서 $2=b$ $f'(x)=2$, $f'(x)=-4x+4+a$ 에서 $a=2$ 그러므로 $1 \le x \le 2$일 때, $f(x)=-2x^2+6x-2$이다. (ii) $x \le 1$일 때, (다)에서 어떤 상수 c, d에 대하여 구간 $(-\infty, 1]$에서 $f(x-1)-xf(x)=cx+d$ 이다. $0 \le x \le 1$에서 $f(x)=2x$이므로 $f(x-1)=xf(x)+cx+d$

	$=2x^2+cx+d$ $x-1=t$라 두면 $-1 \leq t \leq 0$에서 $f(t)=2(t+1)^2+c(t+1)+d$ $=2t^2+(4+c)t+c+d+2$ 즉, $-1 \leq x \leq 0$에서 $f(x)=2x^2+(4+c)x+c+d+2$ 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다. 따라서 $0=c+d+2$, $\therefore\ c+d=-2$ $f'(x)=2,\ f'(x)=4x+4+c$ 에서 $c=-2$ 따라서 $d=0$ 그러므로 $-1 \leq x \leq 0$일 때, $f(x)=2x^2+2x$이다. $\therefore\ f(x)=\begin{cases} 2x^2+2x & (-1 \leq x < 0) \\ 2x & (0 \leq x \leq 1) \\ -2x^2+6x-2 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$ $a=2,\ b=2,\ c=-2,\ d=0$이므로 $f(a+b+c+2d)=f(2)=-8+12-2=2$
552번 풀이 전체 교체	수정후 (풀이 전체 교체) [그림 : 최성훈T] 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 함수 $y=f(x)$의 접선의 기울기가 0인 점의 개수로 보고 적분없이 삼차함수 비율과 그래프 개형으로 문제를 풀어보자. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 그래프가 극점이 존재하지 않으면 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=0$이므로 조건을 만족하지 않는다. 따라서

삼차함수 $f(x)$는 극대, 극소 순으로 나타나는 그래프 개형을 가진다.
방정식 $f'(x)=0$의 해를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하고 닫힌구간 $[t, t+2]$의 구간의 길이가 2이므로 $\beta-\alpha<2$, $\beta-\alpha>2$, $\beta-\alpha=2$일 때로 나눠 생각해 보자.

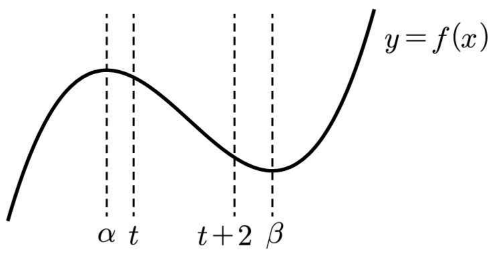
(i) $\beta-\alpha<2$일 때,
$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(t)$의 그래프 개형은 다음과 같다.

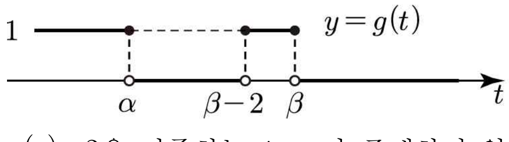




따라서 $\lim_{t\to a+} g(t)=\lim_{t\to a+} g(t)=g(a)=2$인 a가 존재해서 조건(가)에 모순이다.

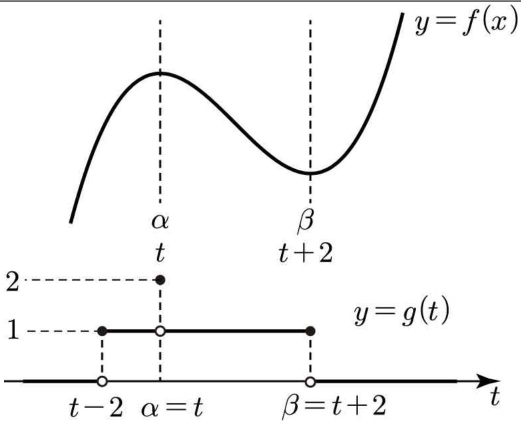
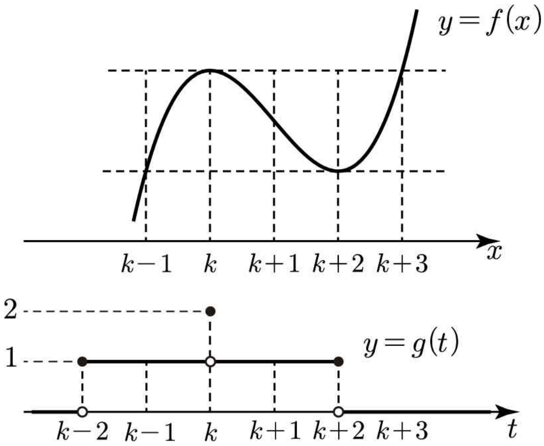
(ii) $\beta-\alpha>2$일 때,
$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(t)$의 그래프 개형은 다음과 같다.

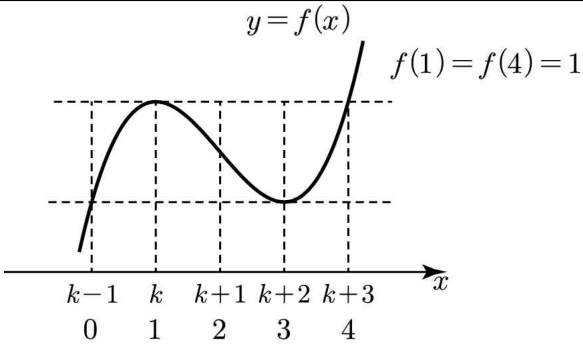




$g(a)=2$을 만족하는 $t=a$가 존재하지 않으므로 조건(나)에 모순이다.

(iii) $\beta-\alpha=2$일 때,
$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(t)$의 그래프 개형은 다음과 같다.

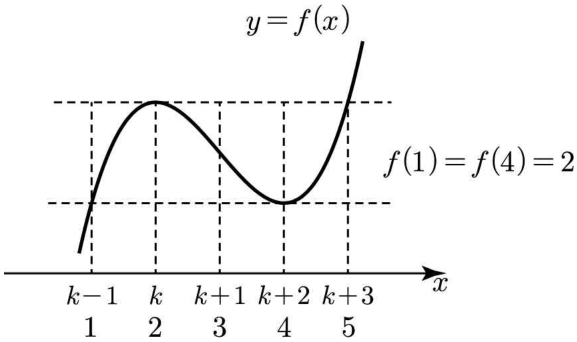
	 따라서 $\alpha=k$, $\beta=k+2$라 할 때, $g(k)=2$이므로 $g(f(1))=g(f(4))=2$에서 $f(1)=f(4)=k$ $y=f(x)$와 $y=g(t)$의 그래프 개형은 다음과 같다.  $f(1)$과 $f(4)$에서 $x=1$과 $x=4$의 차이는 3이므로 극댓값과 극솟값을 갖는 x값의 차이가 2인 삼차함수 그래프에서는 비율관계에 의해 $f(1)$과 $f(4)$는 동시에 극댓값이거나 극솟값일 수 밖에 없다. 따라서 ① $x=1$에서 극댓값을 가질 때, $y=f(x)$의 그래프가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 $k=1$이다. 따라서 $f(1)=f(4)=1$을 가지므로 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$이다.



② $x=4$에서 극솟값을 가질 때,

$y=f(x)$의 그래프가 $x=4$에서 극솟값을 가지므로 $k=2$이다. 따라서

$f(1)=f(4)=2$을 가지므로 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)(x-4)^2+2$



이제 ①, ②에서 마지막 남은 조건 $g(f(0))=1$을 만족하는 함수 $f(x)$를 구하자.

①에서 $f(0)=-1$이고 $g(1)=2$이므로 $g(-1)=1$로 조건을 만족한다.

②에서 $f(0)=-6$이고 $g(2)=2$이므로 $g(-6)=0$으로 조건에 모순이다.

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$**이다.**

$f(5)=9$

[다른 풀이]

조건 (가)를 만족하기 위해서는 두 극값의 차이가 2여야 하므로 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$의 도함수는 다음과 같다.

$f'(x)=\dfrac{3}{2}(x-\alpha)(x-\alpha-2)$

따라서

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}(\alpha+1)x^2+\dfrac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x+C$ (단, C는 상수)

조건 (나)의 $g(f(1))=g(f(4))=2$를 만족하려면 $f(1)=f(4)$이므로, 이를 대입하여 정리하면 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=2$ 이다.

$\alpha=2$일 때, 조건 (나)의 $g(f(0))=1$을 만족하지 않으므로 $\alpha=1$.

	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-1$ $\therefore f(5)=9$	