

상황을 음이 아닌 정수 n개의 합이 자연수 r이 되는 경우로 해석하기

예제 1

중복조합

\approx 같은 것이 있는 순열 \approx 자리에 대한 조합

02 중복조합과 이항정리

같은 종류의 연필 15자루를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 4명 중 한 명은 2자루의 연필을 받고, 나머지 3명은 3자루 이상의 연필을 받도록 나누어 주는 경우의 수는?

- ① 60
- ② 80
- ③ 100
- ④ 120
- ⑤ 140

↓
누가 될지 미리 정하자 $(4C_1)$

A B C D

2개 3개 3개 3개 \Rightarrow 11개

+ b개 + c개 + d개 \Rightarrow 4개

$$b + c + d = 4 \quad (b, c, d \text{ 음이 아닌 정수})$$

$$\Rightarrow {}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \underline{15}$$

$$\Rightarrow 4 \times 15 = \underline{60}$$

1

같은 종류의 떡 7개를 서로 다른 4개의 접시에 남김없이 담을 때, 모든 접시에 1개 이상의 떡을 담는 경우의 수는?

[22010-0022]

- ① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

접시	A	B	C	D	
떡	$a + b + c + d = 7$				
	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{자연수}}$				

$$a' + b' + c' + d' = 3 \quad \Rightarrow \quad {}_4H_3 = {}_6C_3 = \underline{20}$$

$(a' = a - 1, b' = b - 1, c' = c - 1, d' = d - 1)$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{음이 아닌 정수}}$

다른 종류의 축구공 2개와 같은 종류의 농구공 5개를 3개 학급에게 남김없이 나누어 줄 때, 공을 한 개도 받지 못하는 학급이 없도록 나누어 주는 경우의 수는?

[22010-0023]

① 110

② 120

③ 130

④ 140

⑤ 150

축구공 i) 2개 0개 0개 ⇒ 누가 2개 받는지
 ${}^3C_1 = 3$

농구공 a b c ⇒ $a+b+c=5, a+b+c=3$ ${}^3H_3 = {}^5C_3 = \underline{10}$

30

축구공 ii) 1개 1개 0개 ⇒ 축구공이 서로 다름
1번 축구공 받을 학급
2번 축구공 받을 학급
 ${}^3P_2 = 6$

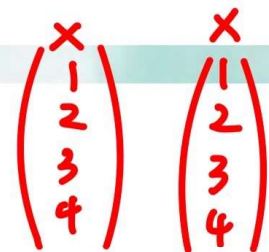
농구공 a b c ⇒ $a+b+c=5, a+b+c=4$ ${}^3H_4 = {}^6C_4 = \underline{15}$

90

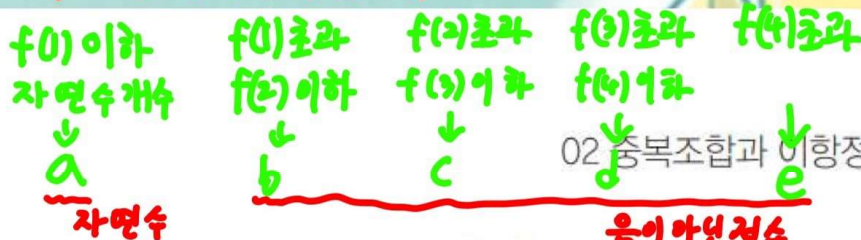
⇒ 120

함숫값 사이의 원소 개수를 이용하기

ex)



$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



02 중복조합과 이항정리

예제 2

중복조합의 활용

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수는?

(가) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 이다.

(나) $f(2) = f(3)$ 이고 $f(4) > f(5)$ 이다.

$$\Rightarrow a + b + c + d + e = 4 - 1$$

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

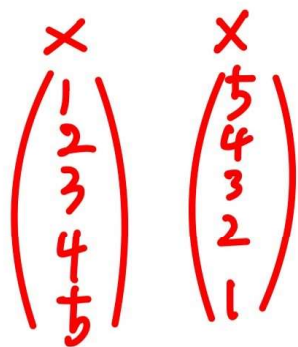
① 35

② 40

③ 45

④ 50

⑤ 55



f(1) 이상

f(2) 이상

f(3) 이상

f(4) 이상

f(5) 이상

f(5) 미만

f(1) 미만

f(2) 미만

f(3) 미만

f(4) 미만

a
자연수

b
음이 아닌 정수

c = 0

d
음이 아닌 정수

e
자연수

f
음이 아닌 정수

$$a + b + 0 + d + c + f = 5 - 2$$

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

3 다항식 $(a+b+c+d)^3$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는?

[22010-0024]

① 12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20 ✓

문자 3개의 곱 (중복 허용)

$$\underbrace{4}_{a, b, c, d \text{로}} H_3 = {}_6 C_3 = \underline{20} \checkmark$$

3개

4

다음 조건을 만족시키는 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는?

[22010-0025]

(가) $a \geq -1, b \geq -1, c \geq -1$

(나) $a + b + c = 3$

① 20

② 24

③ 28

④ 32

⑤ 36

$$a^+ = a + 1 \quad b^+ = b + 1 \quad c^+ = c + 1$$

a^+, b^+, c^+ 음이 아닌 정수

$$a^+ + b^+ + c^+ = 6$$

$$\Rightarrow {}_3H_6 = {}_8C_6 = \underline{\underline{28}}$$

예제 3 이항정리

x 에 대한 두 다항식 $(x+2)^5$, $(\sqrt{3}x+\sqrt{a})^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수가 서로 같을 때, 양수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$
 ② $\frac{2}{3}$
 ③ 1
 ④ $\frac{4}{3}$
 ⑤ $\frac{5}{3}$

$${}^5C_2 \times x^2 \times 2^3$$

$$= 10 \times 8 x^2$$

$$= \underline{80x^2}$$

$${}^6C_2 \times (\sqrt{3}x)^2 \times (\sqrt{a})^4$$

$$= 15 \times 3x^2 \times a^2$$

$$= \underline{45a^2x^2}$$

$$a^2 = \frac{16 \times 8}{1 \times 8} = \frac{4^2}{3^2}, \quad a = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

차수를 만들기 위한 상황 파악필수

5

 $(49x^2 + \frac{1}{7x})^7$ 의 전개식에서 $\frac{1}{x}$ 의 계수는?

[22010-0026]

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

$$\downarrow \quad (x^2)^n \times \left(\frac{1}{7x}\right)^{7-n} = x^{2n+n-7} = x^{3n-7} = x^{-1}$$

$n=2$

$${}^7C_2 (7^2 x^2)^2 \times \left(\frac{1}{7x}\right)^5 = 21 \times 7^4 \times \frac{1}{7^5} = 3$$

6

$(1 + \frac{1}{x})(2x+1)^6$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는?

[22010-0027]

① 408

② 414

③ 420

④ 426

⑤ 432

$$\frac{{}^6C_4 \times 2^4 \times 1 \times x^4}{x^1}$$

$$\frac{{}^6C_5 \times 2^5 \times 1 \times x^5}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 15 \times 16 + 6 \times 32 \\ &= 15 \times 16 + 12 \times 16 \\ &= 27 \times 16 \\ &= 54 \times 8 \\ &= 400 + 32 = \underline{432} // \end{aligned}$$

예제 4

이항계수의 활용

이항계수 성질은 필수

집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 50 \text{ 이하의 홀수인 자연수}\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 홀수인 집합의 개수는 N 이다. $\log_2 N$ 의 값을 구하시오.

25개

$$2^{25}$$

$$N = \frac{2^{25}}{2} = 2^{24}$$

$$\log_2 N = 24$$

확률적으로

부분집합을 만드는 과정

1, 3, 5, ..., 47, 49

각 원소가 포함될지

포함되지 않을지

정하고

마지막 49가

부분집합 원소개수의

홀짝을 정함

⇒ 홀수개 원소 갖는 부분집합은 전체의 절반

7

등식 $\sum_{r=0}^{n-1} {}_{2n-1}C_r = 256$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값은?

[22010-0028]

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

$${}_{2n-1}C_0 + {}_{2n-1}C_1 + \dots + {}_{2n-1}C_{n-1} + \underbrace{{}_{2n-1}C_n + \dots + {}_{2n-1}C_{2n-1}}_{\text{대칭}} = (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1}$$

$$\frac{2^{2n-1}}{2} = 2^{2n-2} = 256 = 2^8$$

$$\Rightarrow 2n-2 = 8 \quad 2n = 10$$

$$n = 5$$

8

방정식

$$a+b+c=d \quad (3 \leq d \leq 10)$$

[22010-0029]

을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는?

① 100

② 120

③ 140

④ 160

⑤ 180

$\underbrace{a+b+c}_{\text{자연수}} + \underbrace{e}_{\text{음이 아닌 정수}} = d + e = 10$

$\left. \begin{array}{l} \text{d가 10이 되는데} \\ \text{부족한 값을 e로 채워주기} \end{array} \right\}$

$$a'+b'+c'+e=7$$

$$4H_7 = {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = 10 \times 3 \times 4 = \underline{120} //$$

Level

1

기초 연습

02 중복조합과 이항정리

[22010-0030]

1

${}_4H_3 - {}_3H_4$ 의 값은?

① -10

② -5

③ 0

④ 5

⑤ 10

$$\begin{aligned} &= {}_6C_3 - {}_6C_4 \\ &= 20 - 15 = 5 \end{aligned}$$

Level

1

기초 연습

02 중복조합과 이항정리

[22010-0031]

2

딸기맛 사탕, 포도맛 사탕, 사과맛 사탕 중에서 중복을 허락하여 4개의 사탕을 택하는 경우의 수는?

① 9

② 12

③ 15

④ 18

⑤ 21

$$3H_4 = {}_6C_4 = 15$$

Level

1

기초 연습

02 중복조합과 이항정리

[22010-0032]

3

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는?

(가) $a+b+c+d=12$

(나) $d=a+b+c$

① 10



② 12

③ 14

④ 16

$$2(a+b+c) = 12$$

$$a+b+c = 6$$

$$a'+b'+c' = 3$$

$${}^3H_3 = {}^5C_3 = 10$$

Level

1

기초 연습

02 중복조합과 이항정리

[22010-0033]

4 $5 \leq x \leq y \leq z \leq 15$ 를 만족시키는 홀수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는?

① 52

② 56

③ 60

④ 64

⑤ 68

5 7 9 11 13 15

2이하 3이하 4이하 5이하

5이상 6초과 7초과 8초과

홀수 홀수 홀수 홀수

a

b

c

d

자연수

$$a + b + c + d = 6 - 1$$

$$\Rightarrow {}_4H_5 = {}_8C_5 = \underline{56}$$

[22010-0034]

5

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는?

집합 X 의 어떤 두 원소 a, b ($a < b$)에 대하여 $f(a) < f(b)$ 이다.

① 455

② 505

③ 555

④ 605

⑤ 655

↓ 부정 (역사건을 이용) ✓

모든 두 원소 $a < b$ 기대하여 $f(a) \geq f(b)$

$$X \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad Y \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \overbrace{a+b+c+d+f}^{\text{자연수}} = 5$$

$$a+b+c+d+f = 4$$

$$5H_4 = 8C_4 = 70$$

모든 함수 $5^4 = 625$

$$\rightarrow 625 - 70 = \underline{555}$$

Level

1

기초 연습

02 중복조합과 이항정리

[22010-0035]

6

 $\left(2x + \frac{1}{2x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는?

① 30

② 45

③ 60

④ 75

⑤ 90

$${}^6C_4 (2x)^4 \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 15 \times 16 \times \frac{1}{4} x^2 = 60x^2$$

Level

1

기초 연습

02 중복조합과 이항정리

[22010-0036]

7 $(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{2}}{x})^8 (\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{x})^8$ 의 전개식에서 $\frac{1}{x}$ 의 계수는? (단, $x > 0$)

① -448

② -224

③ -112

④ 112

⑤ 224

$$= \left(x - \frac{2}{x^2}\right)^8 \rightarrow (x)^5 \left(-\frac{2}{x^2}\right)^3 \times 8C_3$$

$$= -8 \times 56 \times \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{-448}} \times \frac{1}{x}$$

Level

1

기초 연습

02 중복조합과 이항정리

[22010-0037]

8

등식 ${}^9C_0 + {}^9C_2 + {}^9C_4 + {}^9C_6 + {}^9C_8 = {}_m\Pi_n$ 을 만족시키는 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는?

① 1



② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

$$\frac{2^9}{2}$$

$$= 2^8 = 4^4 = 16^2 = 256^1$$

$$(2, 8) \quad (4, 4) \quad (16, 2) \quad (256, 1)$$

[22010-0038]

1 흰 공 4개, 검은 공 6개와 네 상자 A, B, C, D가 있다. 이 10개의 공을 4개의 상자에 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.)

(가) 흰 공이 들어 있지 않은 상자의 개수는 1이다. $\Rightarrow {}_4C_1$
 (나) 검은 공이 들어 있지 않은 상자의 개수는 1이다. \Rightarrow 남은 곳 중 1개 $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 4 \times 3 = 12$
 (다) 모든 상자에는 적어도 한 개의 공이 들어 있다. $\Rightarrow {}_3C_1$

정해버리면 편함

① 300

② 360 ✓

③ 420

④ 480

⑤ 540

A B C D

W W W X

→ A, B, C 중 흰공 2개 받을 곳 고르기 ${}_3C_1 = 3$

B B X B

→ 4개 1개 1개 \Rightarrow 누가 4개 ${}_3C_1 = 3$
 3개 2개 1개 \Rightarrow 누가 1, 2, 3개 $3! = 6$
 2개 2개 2개 \Rightarrow 모두 2개 $1 = 1$] = 10

$\Rightarrow 3 \times 12 \times 10 = 360$

Level

2

기본 연습

02 중복조합과 이항정리

[22010-0039]

2

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는?

(가) $a+b+c+d=16$

(나) a, b, c, d 중 적어도 하나는 홀수이다.

① 400

② 420

③ 440

④ 460

⑤ 480

자연수 전체 경우

$$a' + b' + c' + d' = 12$$

$$4H_{12} = {}_{12}C_4$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

모두 짝수

$$2(A+B+C+D) = 16$$

$$(2A=a, 2B=b, 2C=c, 2D=d)$$

$$A' + B' + C' + D' = 4$$

$$4H_4 = {}_4C_4 = 1$$

$$\Rightarrow 495 - 1 = 494$$

$$= 494 //$$

[22010-0040]

3

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow A$ 의 개수는?

(가) $a \in A, b \in A$ 이고 $a < b \leq 4$ 이면 $f(a) \leq f(b) \leq 4$ 이다.

(나) $c \in A$ 이고 $c \geq 4$ 이면 $f(c) \geq 4$ 이다.

① 100

② 120

③ 140

④ 160

⑤ 180

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

앞에 함수에 중복조합 이용하는 방법참조

$$a + b + c + d = 4 - 1 \quad {}_4H_3 = {}_6C_3 = \underline{20}$$

(나)조건 포함 $f(4)=4$

$$f(5) \rightarrow 4, 5, 6$$

$$f(6) \rightarrow 4, 5, 6$$

$$\xrightarrow{3^2}$$

$$\Rightarrow \underline{180}$$

[22010-0041]

4

다항식 $(x + \sqrt[4]{2})^6$ 의 전개식에서 계수가 유리수인 항의 계수의 총합은?

① 31

② 33

③ 35

④ 37

⑤ 39

↓
 $\sqrt[4]{2}$ 가 네번 or 0번 곱해진 항

$${}^6C_4 \times (\sqrt[4]{2})^4 \times x^2$$

$$= 15 \times 2 \times x^2$$

$${}^6C_0 \times x^6$$

$$= x^6$$

$$30 + 1 = \underline{\underline{31}}$$

[22010-0042]

1 다항식 $(x^2+1)^5(x^3+2)^n$ 의 전개식에서 x^4 의 계수가 160일 때, x^6 의 계수는? (단, n 은 자연수이다.)

① 154

② 164

③ 174

④ 184

⑤ 194

$(x^2+1)^5$ 에서 x^4 의항과
 $(x^3+2)^n$ 에서 상수항의곱
 $\Rightarrow {}_5C_2 \times x^4 = 10x^4$
 $2^n \rightarrow 2^n \times 10 = 160$
 $2^n = 16$
 $n = 4$

$(x^2+1)^5$ 의 x^6 의항과 $(x^3+2)^4$ 의 상수항
 ${}_5C_3 \times x^6 \times 2^4 \Rightarrow \underline{160}$
 $(x^2+1)^5$ 의 상수항과 $(x^3+2)^4$ 의 x^6 의항
 $1 \times {}_4C_2 \times x^6 \times 2^2 \Rightarrow \underline{24}$

$\Rightarrow \underline{184}$

Level

3

실력 완성

02 중복조합과 이항정리

[22010-0043]

2

같은 종류의 구슬 10개가 있다. 다음 조건을 만족시키도록 구슬을 서로 다른 4개의 주머니에 넣는 경우의 수를 구하시오.

ABCD

695

→ 여사건

(가) 각 주머니에는 7개 이하의 구슬을 넣고, 빈 주머니가 있을 수 있다.

(나) 어느 주머니에도 넣지 않은 구슬이 있다.

↳ 남는 구슬을 넣는 주머니엔 꼭 구슬을 넣는다.
E

715 - 20 = 695 //

주머니 A B C D E

a + b + c + d + e = 10
사변수

a + b + c + d + e = 9

5H9 = 13C9 = $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

= 715

8개, 9개 들어가는 주머니가 있다면

i) 8개가 있다면

어떤 주머니인지 4C1
8 + b + c + d + e = 10 - 1 = 9
4C1] ⇒ 16 //

ii) 9개가 있다면

어떤 주머니일지 4C1] ⇒ 4 //

9 + b + c + d + e = 10 - 1 = 9
= 0

Level

3

실력 완성

02 중복조합과 이항정리

[22010-0044]

3 집합 $X = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수는?

(가) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $|f(x_1)| \leq |f(x_2)|$ 이다.

(나) 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값은 3이다

$\Rightarrow g(x) = |f(x)|$ 이면
 $g(x_1) \leq g(x_2)$

$g(x)$ 가 양수인지
음수인지
2씩 경우의 수에
㉠ 1344 곱하기

① 1088

② 1152

③ 1216

④ 1280

$g(x)$
 $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

자명수 \uparrow 음이 아닌 정수 \uparrow
 $a + b + c + d + e + f + g = 3$
정의역 개수
(방법은 앞의 문제들 참조)
 $a + b + c + d + e + f = 2$
 ${}^6H_2 = {}^6C_2 = 21$

$\Rightarrow 21 \times 2^6$
 $= 21 \times 64$
 $= 1280 + 64$
 $= 1344$