20DEVILS

고등수학 (상)

20데빌즈는

○ **고등수학상 철저분석 20개의 테마**

○ **완벽한 기출 분석으로 1등급을 결정하는 20개의 테마선정**

○ **강남특구 지역과 상위권 학교의 문항분석**

강남,서초,송파 교육특구 기출문항 분석
지방 상위권 학교의 우수문항 분석

○ **각 테마별 5문항으로 구성**

테마를 완벽하게 체화하도록 구성

○ **최고난도 최고퀄 문항 구성**

출제되지 않는 어려운 문제는 쓸모가 없다.
출제 빈도가 높은 문항을 정복하라.

○ **문제에 바로 적용되는 공격적인 개념**

교과개념을 완벽하게 숙지하되 실전 개념을 연습하자
문제를 풀기 위한 전투적인 스킬로 개념을 정복한다.
전 단원 손필기 직관 개념으로 이해력 증가

○ **상세한 해설**

일방적인 풀이를 지양한다.
여러 가지 다양한 방법으로 상세풀이 구성

20데빌즈는

○ **고등수학상 철저분석 20개의 테마**

○ **완벽한 기출 분석으로 1등급을 결정하는 20개의 테마선정**

○ **강남특구 지역과 상위권 학교의 문항분석**

강남,서초,송파 교육특구 기출문항 분석
지방 상위권 학교의 우수문항 분석

○ **각 테마별 5문항으로 구성**

테마를 완벽하게 체화하도록 구성

○ **최고난도 최고퀄 문항 구성**

출제되지 않는 어려운 문제는 쓸모가 없다.
출제 빈도가 높은 문항을 정복하라.

○ **문제에 바로 적용되는 공격적인 개념**

교과개념을 완벽하게 숙지하되 실전 개념을 연습하자
문제를 풀기 위한 전투적인 스킬로 개념을 정복한다.
전 단원 손필기 직관 개념으로 이해력 증가

○ **상세한 해설**

일방적인 풀이를 지양한다.
여러 가지 다양한 방법으로 상세풀이 구성

CONTENTS

Theme 01

항등식

개념 01

항등식의 미정계수법 : 계수비교법

(개념) 계수비교법 : 등식의 양변의 동류항이 같다

예) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$

$\Leftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

(Tip) ① $f(x)$에서 $f(x-k)$를 대입 후 양변을 내림차순으로 전개한 후 동류항 계수 비교한다

② 식 전체 전개하기 보다는 각 차수별로 계수만 정리하여 식을 만든다

개념 02

항등식의 미정계수법 : 수치대입법

(개념) 수치대입법 : 계산이 간단한 특정 수를 대입하여 미지수 결정

(Tip) ① 계수의 합을 구할때 수치대입법 이용

② $a_0,\ a_1+a_2+a_3+a_4,\ a_5,\ a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$

이 4가지 모양을 어떻게 구분할수 있는지에서부터 풀이 접근

(필요한 공식) ① 양변에 $x=0$ 대입하면 $k^n=a_0$

② 양변에 $x=1$ 대입하면

$(1+k)^n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{n-2}+\cdots+a_0$

개념 03

항등식의 미정계수법 : 수치대입법

(개념) 수치대입법 : 계산이 간단한 특정 수를 대입하여 미지수 결정

(Tip) ① x에 대한 고차식에서 계수를 구할때에는
$x=0$ 또는 $x=\pm 1$을 대입한다

② $f(x)$의 차수를 구하고 차수에 맞는 $f(x)$를 대입해
수치대입법으로 계수를 비교해 미정계수를 정한다

(필요한 공식) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

홀수 차수 항의 계수의 합 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$

짝수 차수 항의 계수의 합 $\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$

개념 04

항등식의 미정계수법 : 수치대입법

(개념) 수치대입법 : 계산이 간단한 특정 수를 대입하여 미지수 결정

(Tip) ① x에 대한 고차식에서 계수를 구할때에는
$x=0$ 또는 $x=\pm 1$을 대입한다

② $f(x)$의 차수를 구하고 차수에 맞는 $f(x)$를 대입해
수치대입법으로 계수를 비교해 미정계수를 정한다

개념
05

항등식의 미정계수법 : 수치대입법

(개념) 수치대입법 : 계산이 간단한 특정 수를 대입하여 미지수 결정

(Tip) 방정식 해를 이용한 식 만들기

$(n+1)f(n)=(n+2)$ 의 해가 $n=1, 2, 3, \cdots, 10$ 이므로

다항식 $f(n)=\frac{n+2}{n+1}$ 는 $(n-1), (n-2), (n-3), \cdots, (n-10)$을

인수로 갖는다. 이를 이용하여 $1 \sim 10$ 까지의 모든 자연수를

근으로 하는 방정식을 세운다

01-1

$f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$에 대하여 $f(x-k) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$이고 $a_1 \times a_2 - 3a_3 = 0$일 때, $3k + \dfrac{1}{k}$의 값은? (단, k, a_1, a_2, a_3는 상수, $k \neq 0$이다.)

① -3　　② -1　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

01-2

등식 $(x^2-2x)^5+3=a_0+a_1x+a_2x^2+\ \cdots\ +a_{10}x^{10}$ 이 x 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $4a_0+3(a_1+a_2+a_3+a_4)+2a_5+(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$의 값은? (단, a_0, a_1, $\cdots$, a_{10}은 상수이다.)

① -53　② -21　③ -19　④ 11　⑤ 43

01-3

1보다 큰 두 자연수 m, k에 대하여 등식

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ \cdots\ +a_{106}x^{106}=\left(x^m-m\right)^k\ \left(a_{106}\neq 0,\ a_0>0\right)$$

이 모든 실수 x에 대하여 성립할 때 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{103}+a_{105}$의 값을 구하시오.

(단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_{105}, a_{106}은 상수이다.)

01-4

x 에 대한 n 차 다항식 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 가 모든 실수 x 에 대하여
$\{f(x)\}^2 = a_n\{f(x)\}^n + a_{n-1}\{f(x)\}^{n-1} + \cdots + a_1 f(x) + a_0$ 를 만족시킬 때, $f(10)$ 의 값을 구하시오.
(단, n 은 자연수이고, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n 은 실수이다.)

01-4

x 에 대한 n 차 다항식 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $\{f(x)\}^2 = a_n\{f(x)\}^n + a_{n-1}\{f(x)\}^{n-1} + \cdots + a_1 f(x) + a_0$ 를 만족시킬 때, $f(10)$ 의 값을 구하시오.

(단, n 은 자연수이고, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n은 실수이다.)

01-5

9차다항식 $f(x)$가 1부터 10까지의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=\dfrac{n+2}{n+1}$를 만족시키고 $f(11)=2$일 때, $f(0)\times f(12)$의 값은?

① 115 ② 125 ③ 135
④ 145 ⑤ 155

Theme 01

항등식

01-1 정답 ①

$$f(x-k)=(x-k)^3-(x-k)^2+3(x-k)-1$$
$$=x^3-3x^2k+3xk^2-k^3-x^2+2kx-k^2+3x-3k-1$$
$$=x^3-(3k+1)x^2+(3k^2+2k+3)x-k^3-k^2-3k-1$$

$a_1=-3k-1$

$a_2=3k^2+2k+3$

$a_3=-(k^3+k^2+3k+1)$

$a_1a_2-3a_3=-6k^3-6k^2-2k=0$

$k\neq 0$이므로 양변을 $-2k^2$로 나누면 $3k+3+\dfrac{1}{k}=0$이다.

따라서 $3k+\dfrac{1}{k}=-3$

다른 풀이

$(x-k)^3-(x-k)^2+3(x-k)-1=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$

양변에 $x=0$을 대입하면 $-k^3-k^2-3k-1=a_3$

[수학2의 미분법과 수치대입법을 이용하여 미정 계수 정하기]

$3(x-k)^2-2(x-k)+3=3x^2+2a_1x+a_2$

양변에 $x=0$을 대입하면 $3k^2+2k+3=a_2$

$6(x-k)-2=6x+2a_1$

양변에 $x=0$을 대입하면 $-6k-2=2a_1$

01-2 정답 ②

$(x^2-2x)^5+3=x^5(x-2)^5+3=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$

$x=0$을 대입하면 $a_0=3$

x^5항부터 시작이므로 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$

$x=1$을 대입하면 $a_0+a_1+\cdots+a_{10}=2$

계수비교법에 의하여

$a_5=-32$

$4a_0+3(a_1+a_2+a_3+a_4)+2a_5+(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$

$=12+3\times 0+2\times(-32)+(2-3+32)=-21$

01-3 정답 -106

$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{106}x^{106}=(x^m-m)^k$에서

$x=0$ 일 때, $a_0=(-m)^k$에서

k는 짝수이어야 한다. ($\because\ a_0>0$)

또한 좌변의 최고차항의 차수가 106이므로 우변도 $mk=106$이어야 한다.

k가 짝수이면서 $mk=106$을 만족하는 1보다 큰 자연수는

$m=53$, $k=2$일 때만 가능하다.
따라서 주어진 식은

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{106}x^{106}=\left(x^{53}-53\right)^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 ㉠에
$x=1$을 대입하면

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{106}=52^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$x=-1$을 대입하면

$$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{106}=(-54)^2=(54)^2 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡$-$㉢하여 정리하면

$$a_1+a_3+\cdots+a_{105}=\frac{52^2-54^2}{2}$$

01-4 정답 100
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$가 n차식이므로 $\{f(x)\}^2$은 $2n$차식이고,
$a_n\{f(x)\}^n+a_{n-1}\{f(x)\}^{n-1}+\cdots+a_1f(x)+a_0$는 n^2차식이다.
즉, $2n=n^2$
$\therefore\ n=2$ ($\because$ n은 자연수)
$\therefore\ f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ $(a_2\neq 0)$
즉, $(a_2x^2+a_1x+a_0)^2=a_2(a_2x^2+a_1x+a_0)^2+a_1(a_2x^2+a_1x+a_0)+a_0$ $\cdots\cdots$ ㉠
이므로 양변의 4차 계수를 비교하면 $a_2^2=a_2^3$, $a_2\neq 0$이므로 $a_2=1$
㉠식에 $a_2=1$을 대입하고 정리하면
$a_1(x^2+a_1x+a_0)+a_0=0$
이고 x에 대한 항등식이므로 $a_1=0$, $a_0=0$이다.
$\therefore\ f(x)=x^2$
$\therefore\ f(10)=100$

다른 풀이

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$가 n차식이므로 $\{f(x)\}^2$은 $2n$차식이고,
$a_n\{f(x)\}^n+a_{n-1}\{f(x)\}^{n-1}+\cdots+a_1f(x)+a_0$는 n^2차식이다.
즉, $2n=n^2$
$\therefore\ n=2$ ($\because$ n은 자연수)
$\therefore\ f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ $(a_2\neq 0)$ 즉,
$(a_2x^2+a_1x+a_0)^2=a_2(a_2x^2+a_1x+a_0)^2+a_1(a_2x^2+a_1x+a_0)+a_0$
이므로 양변을 정리하면
(좌변)$=a_2{}^2x^4+2a_1a_2x^3+(a_1{}^2+2a_0a_2)x^2+2a_0a_1x+a_0{}^2$
(우변)$=a_2{}^3x^4+2a_1a_2{}^2x^3+(a_1{}^2a_2+2a_0a_2{}^2+a_1a_2)x^2+(2a_0a_1a_2+a_1{}^2)x+(a_0{}^2a_2+a_0a_1+a_0)$
차수가 같은 항끼리 계수를 비교하면
$a_2{}^2=a_2{}^3$ $\cdots\cdots$ ㉠
$2a_1a_2=2a_1a_2{}^2$ $\cdots\cdots$ ㉡