20DEVILS

고등수학 (하)

20데빌즈는

- 고등수학 하 철저분석 20개의 테마

- 완벽한 기출 분석으로 1등급을 결정하는 20개의 테마선정

- 강남특구 지역과 상위권 학교의 문항분석

  강남,서초,송파 교육특구 기출문항 분석
  지방 상위권 학교의 우수문항 분석

- 각 테마별 5문항으로 구성

  테마를 완벽하게 체화하도록 구성

- 최고난도 최고퀄 문항 구성

  출제되지 않는 어려운 문제는 쓸모가 없다.
  출제 빈도가 높은 문항을 정복하라.

- 문제에 바로 적용되는 공격적인 개념

  교과개념을 완벽하게 숙지하되 실전 개념을 연습하자
  문제를 풀기 위한 전투적인 스킬로 개념을 정복한다.
  전 단원 손필기 직관 개념으로 이해력 증가

- 상세한 해설

  일방적인 풀이를 지양한다.
  여러 가지 다양한 방법으로 상세풀이 구성

CONTENTS

Theme 01

부분집합

개념 01

자주 사용되는 원소의 개수 구하는 식

1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

$\qquad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

- 포제의 원리 (포함 배제의 원리) ~

* tip 1. 원소의 개수를 구할때 위의 식보다 벤다이어그램을 그려서 생각하는 것이 편할때가 더 많다!

* tip 2. 원소의 개수를 구하는 식은 원소의 합에서도 그대로 적용 !!

eg. $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$

개념 02

진법

- 진법 : 수를 표기하는 기수법 중 하나

① 십진법 : 수의 자리가 하나씩 올라감에 따라 10배씩 커지는 수

② 이진법 : 수의 자리가 하나씩 올라감에 따라 2배씩 커지는 수

* 참고 . 십진법 ⟶ 이진법

$$\begin{array}{r|l}
2 & 25 \\
2 & 12 \ \cdots 1 \\
2 & 6 \ \cdots 0 \\
2 & 3 \ \cdots 1 \\
 & 1 \ \cdots 1
\end{array}$$

$25 = 11011_{(2)}$

$= 2^4 + 2^3 + 1$

개념 03

부분집합의 원소의 합

- $A=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 부분 집합에 속하는 모든 원소의 합

① 원소 1의 개수 : 2^{n-1}

② 원소 2의 개수 : 2^{n-1}

③ 원소 3의 개수 : 2^{n-1}

⋮

원소 n의 개수 : 2^{n-1}

$\therefore\ n(n+1)\cdot 2^{n-2}$

* 참고. $A=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 k개인 부분 집합에 속하는 모든 원소들의 합

: ${}_{n-1}C_{k-1}\times(1+2+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{2}\times{}_{n-1}C_{k-1}$

개념 04

나머지의 계산(mod)

- $1+2\equiv 0 \pmod 3$ ← 3으로 나누었을때,

(나머지가 1인수)+(나머지가 2인수)

= (3의 배수)

- $1\times 2\equiv 2 \pmod 3$ ← 3으로 나누었을때,

(나머지가 1인수)×(나머지가 2인수)

= (나머지가 2인수)

개념 05

배수집합과 약수집합

① A_n : n의 **배수** 집합일 때

1) $A_k \subset A_l$: k는 l의 **배수**

2) $A_k \cap A_l = A_n$: n은 k, l의 **최소공배수**

3) $(A_k \cup A_l) \subset A_n$: n은 k, l의 **공약수**

4) $A_n \subset (A_k \cap A_l)$: n은 k, l의 **공배수**

② A_n : n의 **약수** 집합일 때

1) $A_k \subset A_l$: k는 l의 **약수**

2) $A_k \cap A_l = A_n$: n은 $k. l$의 **최대공약수**

3) $(A_k \cup A_l) \subset A_n$: n은 $k. l$의 **공배수**

4) $A_n \subset (A_k \cup A_l)$: n은 $k. l$의 **공약수**

* tip. $1, 2, 3, 4, \cdots, n$에서 a의 **배수의 개수** $(a<n)$: [$\frac{n}{a}$개]

01-1

전체집합 $U=\{x \mid x$는 23 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(A\cup B)=14$, $n(A\cap B)=1$
(나) 집합 A의 임의의 서로 다른 두 원소는 서로소이다.
(다) $n(A)\geq 2$, $n(A)\leq n(B)$

집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 할 때, $S(A)-S(B)$의 최댓값은?

① 81 ② 83 ③ 85
④ 87 ⑤ 89

01-2

자연수 a_1, a_2, $\cdots$, a_k에 대하여

$$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ \cdots \ + 2^{a_k} \ (a_1 < a_2 < \ \cdots \ < a_k)$$

일 때, 집합 $S(n) = \{a_1,\ a_2,\ \cdots\ ,\ a_k\}$라 하자. 집합 $S(118)$의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{31}이라 할 때, 각각의 집합 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{31}에서 가장 작은 원소를 뽑아 이들을 모두 더한 값은? (단, k는 자연수이다.)

① 64 ② 66 ③ 68
④ 70 ⑤ 72

01-3

자연수를 원소로 가지는 집합 A에 대하여 다음 규칙에 따라 $m(A)$의 값을 정하자.

(가) 집합 A의 원소가 1개인 경우, 집합 A의 원소를 $m(A)$의 값으로 한다. (나) 집합 A의 원소가 2개 이상인 경우, 집합 A의 원소를 큰 수부터 차례로 나열하고, 나열한 수들 사이에 $-$, $+$를 이 순서대로 번갈아 넣어 계산한 결과를 $m(A)$의 값으로 한다.

예를 들어, $A=\{6\}$이면 $m(A)=6$이고, $B=\{2,\ 4\}$, $C=\{2,\ 4,\ 6\}$이면, $m(B)=4-2=2$, $m(C)=6-4+2=4$가 되어 $m(B)+m(C)=(4-2)+(6-4+2)=6$이다.
집합 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 X_1, X_2, $\cdots$, X_{31}이라 할 때, $m(X_1)+m(X_2)+\cdots+m(X_{31})$의 값을 구하시오.

01-4

3으로 나눈 나머지가 k인 자연수들의 집합을 A_k라고 할 때, 자연수 전체의 집합의 부분집합 X가 상수 p에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $n(X)=2$

(나) $x \in X$일 때,

$x \in A_1$이면, $\dfrac{x+p}{3} \in X$

$x \in A_2$이면, $\dfrac{x+(p-1)}{3} \in X$

$x \in A_0$이면, $\dfrac{x+(p-2)}{3} \in X$

$4 \in X$일 때, 모든 자연수 p의 값의 합은?

① 25 ② 27 ③ 29

④ 31 ⑤ 33

01-5

두 자연수 a, b의 공약수 개수를 $N(a,\ b)$라 하자. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 100이하의 자연수$\}$의 부분집합 $A_k(a)$를 $A_k(a)=\{x\,|\,N(a,\ x)=k\}$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보기 〉

ㄱ. $4\in A_1(3)$

ㄴ. 집합 $A_3(4)$의 원소의 개수는 25개다.

ㄷ. a가 소수이면 집합 $A_2(a)$의 원소의 개수는 $\left[\dfrac{100}{a}\right]$개다. (단, $[\,x\,]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Theme 01 부분집합

01-1 정답 ③

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A)+n(B)=15$

$n(A)\geq 2,\ n(A)\leq n(B)$이므로

가능한 $n(A)$와 $n(B)$는 다음과 같다.

$n(A)$	2	3	4	5	$\cdots$	6	7
$n(B)$	13	12	11	10	$\cdots$	9	8

이때 $S(A)-S(B)$가 최대가 되기 위해서는 집합 A의 원소가 최대한 많고,

집합 $A-B$의 원소들이 크고, 집합 $B-A$의 원소들이 작아야 한다.

따라서 $S(A)-S(B)$의 최댓값은

$A=\{23,\ 21,\ 20,\ 19,\ 17,\ 13,\ 11\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11\}$일 때

$S(A)-S(B)=85$

1등급 NOTE

조건 (나)에서 집합 A의 임의의 서로 다른 두 원소는 서로소이므로 A의 원소는 홀수만 있어야 한다. 또한, 집합 $A-B$의 원소들은 큰 값이어야 하므로 A의 원소들은 23부터 큰 홀수 7개를 원소로 갖고, $n(A\cap B)=1$이고 $B-A$의 원소들은 작은 값 이어야 하므로 집합 B는 집합 A의 원소 중 가장 작은 11을 원소로 갖고 나머지는 1부터 7까지의 수를 원소로 갖는다.

01-2 정답 ①

$n=2^{a_1}+2^{a_2}+\ \cdots\ +2^{a_k}\ (a_1<a_2<\ \cdots\ <a_k)$일 때,

$118=2^1+2^2+2^4+2^5+2^6$이므로

집합 $S(118)=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6\}$이다.

집합 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots\ ,A_{31}$중에서

(ⅰ) 최소인 원소가 1인 집합은 1이 속하는 집합이므로

부분집합의 개수는 $2^4=16$개

(ⅱ) 최소인 원소가 2인 집합은 2는 속하고 1은 속하지 않는 집합이므로

부분집합의 개수는 $2^3=8$개

(ⅲ) 최소인 원소가 4인 집합은 4는 속하고 1, 2는 속하지 않는 집합이므로

부분집합의 개수는 $2^2=4$개

(ⅳ) 최소인 원소가 5인 집합은 5는 속하고 1, 2, 4는 속하지 않는 집합이므로

부분집합의 개수는 $2^1=2$개

(ⅴ) 최소인 원소가 6인 집합은 6만 속하는 집합이므로

부분집합의 개수는 1개

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 구하는 원소의 합은 $1\times16+2\times8+4\times4+5\times2+6\times1=64$

01-3 정답 160

각각의 부분집합에서 $m(A)$를 구하지 않고, 31개의 부분집합의 각각의 원소를 모두 합하여도 된다. 가장 큰 원소 10은 $2^4=16$번 나온다.

원소 8, 6, 4, 2는 각각 8번씩, -8, -6, -4, -2는 각각 8번씩 나온다.
따라서 $10\times16+(8+6+4+2)\times8+(-8-6-4-2)\times8=160$

01-4 정답 ①

$4\in X$이고 $4\in A_1$이므로, $\dfrac{4+p}{3}\in X$이다.

(i) $\dfrac{4+p}{3}\in A_1$인 경우

$$\frac{\frac{4+p}{3}+p}{3}=\frac{4+p}{3}$$

$p=8$

이때 $p=8$이면 $\dfrac{4+8}{3}=4$이므로 $n(X)=1$이다.

(ii) $\dfrac{4+p}{3}\in A_2$인 경우

$\dfrac{\frac{4+p}{3}+p-1}{3}=4$, $\quad p=\dfrac{35}{4}$는 자연수가 아니다.

$\dfrac{\frac{4+p}{3}+p-1}{3}=\dfrac{4+p}{3}$, $\qquad p=11$

(iii) $\dfrac{4+p}{3}\in A_0$인 경우

$\dfrac{\frac{4+p}{3}+p-2}{3}=4$, $\quad p=\dfrac{38}{4}$은 자연수가 아니다.

$\dfrac{\frac{4+p}{3}+p-2}{3}=\dfrac{4+p}{3}$, $\qquad p=14$

(i)~(iii)에 의하여 만족하는 자연수 p는 11, 14이므로
모든 자연수 p의 값의 합은 25이다.

다른 풀이

$4\in A_1$, $\dfrac{4+p}{3}\in X$

이때, $\dfrac{4+p}{3}$은 자연수가 되야 하므로 p는 3으로 나누었을 때 나머지가 2 인 수이다.

따라서 $p=3n+2$라고 하면 $\dfrac{6+3n}{3}=n+2\in X$이다.

(i) $2+n\in A_1$일 때

$\dfrac{2+n+3n+2}{3}=\dfrac{4+4n}{3}\in X$

$\dfrac{4+4n}{3}=4$이면 $n=2$가 되어 $n(X)=1$ (모순)

$\dfrac{4+4n}{3}=n+2$이면 $n=2$ (모순)

(ii) $2+n\in A_2$일 때

$\dfrac{2+n+3n+1}{3} \in X$

$\dfrac{4n+3}{3}=4$이면 $n=\dfrac{9}{4}$ (모순)

$\dfrac{4n+3}{3}=n+2$이면 $n=3$ $\quad\therefore\ p=11$

(iii) $2+n \in A_0$일 때

$\dfrac{4n+2}{3}=4$이면 $n=\dfrac{5}{2}$ (모순)

$\dfrac{4n+2}{3}=n+2$이면 $n=4$ $\quad\therefore\ p=14$

(i)~(iii)에 의하여 $11+14=25$

01-5 정답 ⑤

ㄱ. $A_1(3)=\{x \mid N(3,\ x)=1\}$이고 3과 공약수가 1개인 수의 집합이므로 $4 \in A_1(3)$ (참)

ㄴ. $A_3(4)=\{x \mid N(4,\ x)=3\}$이고 4와 공약수가 3개인 100이하의 자연수의 집합이고 4는 약수가 3개이므로 따라서 구하는 집합 $A_3(4)$는 4의 배수의 집합이 된다. 따라서 집합 $A_3(4)$의 원소의 개수는 25개다. (참)

ㄷ. $A_2(a)=\{x \mid N(a,\ x)=2\}$이고 a가 소수이면 집합 $A_2(a)$는 a의 배수의 집합이 된다. 따라서 집합 $A_2(a)$의 원소의 개수는 $\left[\dfrac{100}{a}\right]$개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ