Theme 01

지수 로그 계산

01-1 정답 ②

$2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32,\ \cdots$

$5^1=5,\ 5^2=25,\ 5^3=125,\ 5^4=625,\ 5^5=3125\cdots,$

이므로 자연수 n은 4보다 큰 자연수임을 알 수 있다.

ㄱ. $n=5,\ a=3$일 때,

$3\cdot 10^p<2^5<4\cdot 10^p$

2^n의 최고 자리의 숫자가 a이고 2^n이 두 자리 이상의 자연수이므로

$$a\cdot 10^p<2^n<(a+1)\cdot 10^p \quad \cdots\cdots ㉠$$

을 만족하는 자연수 p가 존재한다. (참)

ㄴ. $n=5,\ a=3$일 때, $3^2<10^r<4^2$에서 $r=1$

따라서 $a^2<10^r<(a+1)^2$인 자연수 r가 있다. (참)

ㄷ. $a=7$이라면 ㄴ에서 $7^2<10^r<8^2$인 자연수 r가 존재해야 한다.

그런데 이를 만족시키는 자연수 r가 존재하지 않으므로 $a\neq 7$이다.

즉, a의 값이 7이 되도록 하는 n이 존재하지 않는다.

a는 한 자리의 자연수이고 조건 ㄴ을 만족해야 하므로

$a=3$이어야 한다. $(\because\ 3^2<10<4^2)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

01-2 정답 ④

$x>1,\ y>1$이고

밑 변환 공식에 의하여

$$\frac{\log_x 2+\log_y 2}{\log_{xy}2}=\frac{(\log_2 x+\log_2 y)^2}{\log_2 x\cdot\log_2 y}$$

이 값이 최소일 때는 분자가 최소일 때이다.

$\log_2 x>0,\ \log_2 y>0$이므로

$\log_2 x+\log_2 y\ \geq\ 2\sqrt{\log_2 x\times\log_2 y}$ (단, 등호는 $\log_2 x=\log_2 y$ 즉, $x=y$일 때 성립)

$$\therefore\ (\log_2 x+\log_2 y)^2=4\log_2 x\log_2 y\ \geqq\ \frac{4\log_2 x\log_2 y}{\log_2 x\log_2 y}=4$$

다른 풀이

$$\frac{\log_x 2+\log_y 2}{\log_{xy}2}=\frac{\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}}{\dfrac{1}{\log_2 xy}}=\frac{\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}}{\dfrac{1}{\log_2 x+\log_2 y}}$$

이때 $\log_2 x=a,\ \log_2 y=b$라 하면 $a>0,\ b>0$이므로

$$\frac{\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}}{\dfrac{1}{\log_2 x+\log_2 y}}=\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a+b}}=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2=4\ \left(\text{단, 등호는 }\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\text{, 즉 }a=b\text{일 때 성립}\right)$$

01-3 정답 55

(i) $\log_3 \frac{m}{15} > 0$, $m > 15$ 일 때

$\left|\log_3 \frac{m}{15}\right| + \log_3 \frac{n}{3} \le 0$, $\log_3 \frac{m}{15} + \log_3 \frac{n}{3} \le 0$

$\log_3 \frac{mn}{45} \le 0$이므로

$\frac{mn}{45} \le 1$, $m \le \frac{45}{n}$

따라서 $15 < m \le \frac{45}{n}$ 이므로

① $n = 1$ 일 때, $15 < m \le 45$ 이므로 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 30 개

② $n = 2$ 일 때, $15 < m \le 22.5$ 이므로 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 7 개

③ $n \ge 3$일 때, $m \le 15$이므로 순서쌍 $(m,\ n)$은 존재하지 않는다.

①~③에 의하여

$m > 15$일 때 주어진 조건을 만족하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $30 + 7 = 37$

(ii) $\log_3 \frac{m}{15} = 0$, $m = 15$ 일 때,

$\left|\log_3 \frac{m}{15}\right| + \log_3 \frac{n}{3} \le 0$, $\log_3 \frac{n}{3} \le 0$, $n \le 3$

즉, $m = 15$일 때, 주어진 조건을 만족하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 3개

(iii) $\log_3 \frac{m}{15} < 0$, $0 < m < 15$ 일 때,

$\left|\log_3 \frac{m}{15}\right| + \log_3 \frac{n}{3} \le 0$, $-\log_3 \frac{m}{15} + \log_3 \frac{n}{3} \le 0$

$\log_3 \frac{5n}{m} \le 0$이므로

$\frac{5n}{m} \le 1$, $m \ge 5n$

그런데 $0 < m < 15$이므로 $5n \le m < 15$

④ $n = 1$ 일 때, $5 \le m < 15$ 이므로 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 10 개

⑤ $n = 2$ 일 때, $10 \le m < 15$ 이므로 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 5 개

④, ⑤에 의하여 $0 < m < 15$일 때 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $10 + 5 = 15$

따라서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $37 + 3 + 15 = 55$

01-4 정답 ③

x 의 상용로그 값을 다음과 같이 나타내면

$$\log x = n + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$$

ㄱ. 정수부분이 1 일 때

$$1 \le \log x < \frac{3}{2}$$

$$10 \le x < 10\sqrt{10} \ (= 31.623)$$

따라서 자연수 x 의 개수는 22 개 (참)

ㄴ. 정수부분이 n 일 때

소수부분이 $\frac{1}{2}$ 보다 작은 자연수의 x 의 개수 a_n 은

$$n \le \log x < n + \frac{1}{2}$$

$$10^n \le x < 10^n \sqrt{10}$$

$$\therefore \ a_n = [10^n \sqrt{10}] - 10^n + 1$$

$$= 10^n [\sqrt{10}] - 10^n + 1$$

$$= 2 \cdot 10^n + 1$$

소수부분이 $\frac{1}{2}$ 보다 큰 자연수 x 의 개수는 b_n 은

$$n + \frac{1}{2} < \log x < n + 1$$

$$10^n \sqrt{10} < x < 10^{n+1}$$

$$\therefore \ b_n = 10^{n+1} - [10^n \sqrt{10}] - 1$$

$$= 10^{n+1} - 10^n [\sqrt{10}] - 1$$

$$= 10 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^n - 1$$

$$= 7 \cdot 10^n - 1$$

따라서 $a_n + b_n = (2 \cdot 10^n + 1) + (7 \cdot 10^n - 1)$

$= 9 \cdot 10^n$ (참)

ㄷ. ㄴ의 결과를 이용하면

$$3a_n - b_n + 100 = 3(2 \cdot 10^n + 1) - (7 \cdot 10^n - 1) + 100$$

$$= -10^n + 104$$

따라서 $n \ge 2$ 인 경우 음수가 된다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

01-5 정답 ③

$N(10x) \cdot N\left(\frac{y}{10}\right) = 0$, $\{N(x)+1\}\{N(y)-1\} = 0$이므로

$N(x) = -1$ 또는 $N(y) = 1$

(i) $N(x) = -1$일 때

$|N(x)| + |N(y)| = 2$에서 $N(y) = \pm 1$

$\therefore \ \frac{1}{10} \le x < 1, \ 10 \le y < 100, \ \frac{1}{10} \le y < 1$

(ii) $N(y) = 1$일 때

$|N(x)| + |N(y)| = 2$에서 $N(x) = \pm 1$

$\therefore \ 10 \le y < 100, \ 10 \le x < 100, \ \frac{1}{10} \le x < 1$

조건을 만족하는 영역의 넓이 S 는

$$S = \frac{9}{10} \times \left(90 + \frac{9}{10}\right) + 90 \times 90$$

$$= 81 + 0.81 + 8100 = 8181.81$$

Theme 02 지수함수와 로그함수

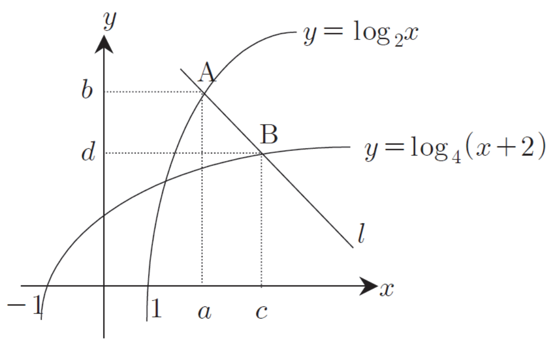
02-1 정답 ⑤

직선의 기울기가 -1이고, $\overline{AB}=\sqrt{2}$ 이므로 $c-a=1$이고, $b-d=1$

$b=\log_2 a$ …… ㉠

$d=\log_4(c+2)=\log_4(a+3)$ …… ㉡

식 ㉠에서 식 ㉡을 빼면



$b-d=\log_2 a-\log_4(a+3)=1$

$\log_2 a=\log_4(a+3)+1$

$\log_4 a^2=\log_4(4a+12)$

$a^2=4a+12$

$a^2-4a-12=0$

$(a+2)(a-6)=0$

$a=6$ $(\because\ a>1)$이고 $c=a+1=7$

$\therefore\ a+c=6+7=13$

02-2 정답 ⑤

로그의 정의에 의해

$$x+\sqrt{2}y>0,\ x-\sqrt{2}y>0$$

주어진 식 $\log_2(x+\sqrt{2}y)+\log_2(x-\sqrt{2}y)=2$ 에서

$$\log_2(x+\sqrt{2}y)+\log_2(x-\sqrt{2}y)=\log_2(x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y)$$
$$=\log_2(x^2-2y^2)=2$$

$$\therefore x^2-2y^2=4$$

$x+\sqrt{2}y>0,\ x-\sqrt{2}y>0$에서

$x>\pm\sqrt{2}y$이므로 $|x|>|y|$

$|x|=X,\ |y|=Y$라 하면

$X^2-2Y^2=4$ …… ㉠

$|x|-|y|=X-Y=k$ (단, $k>0$) …… ㉡

㉡에서 $Y=X-k$이므로 ㉠에 대입하여 정리하면

$$X^2-2(X-k)^2=4,$$
$$X^2-4kX+2k^2+4=0$$

이때 X에 대한 이차방정식 $X^2-4kX+2k^2+4=0$ 의 판별식을 D라고 하면 실근을 가져야 하므로

$D \geq 0$이어야 한다. 즉,

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 2k^2 - 4 = 2k^2 - 4 \geq 0$$

$$\therefore \ k \geq \sqrt{2} \ (\because \ k > 0)$$

$|x| - |y| = k$이고, $k \geq \sqrt{2}$

따라서 구하는 $|x| - |y|$의 최솟값은 $\sqrt{2}$

02-3 정답 ①

$|\log_x n| \leq 2$에서

$$-2 \leq \log_x n \leq 2$$

$$\log_x \frac{1}{x^2} \leq \log_x n \leq \log_x x^2$$

(i) $x > 1$일 때

$$-2 \leq \log_x n \leq 2$$

$$x^{-2} \leq n \leq x^2$$

이므로 $f(x) = [x^2]$

(ii) $0 < x < 1$일 때

$$-2 \leq \log_x n \leq 2$$

$$x^2 \leq n \leq x^{-2}$$

이므로 $f(x) = [x^{-2}]$

ㄱ. $f(2) = [2^2] = 4$ (참)

ㄴ. (반례) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right] = 4$이고, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right] = 9$이므로

$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$이지만 $f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right)$ (거짓)

$1 < x < y$이면 $x^2 < y^2$이므로 $f(x) \leq f(y)$

$0 < x < y < 1$이면 $\frac{1}{y^2} < \frac{1}{x^2}$이므로 $f(x) \geq f(y)$

ㄷ. x가 1이 아닌 자연수이므로 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\left(\frac{1}{x}\right)^{-2}\right] = x^2$

$x^2 \leq 30$을 만족시키는 1이 아닌 자연수 x는

2, 3, 4, 5의 4개 (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ

02-4 정답 ②

$1 < [\log_4 x]^2 + [\log_4 y]^2 < 4$

$[\log_4 x]^2 + [\log_4 y]^2$의 값은 2, 3이고, 각각 정수의 제곱수이므로

$[\log_4 x]^2 + [\log_4 y]^2 = 2$ 뿐이다.

$[\log_4 x]^2 = 1$, $[\log_4 y]^2 = 1$

(i) $[\log_4 x] = 1$일 때, $1 \leq \log_4 x < 2$

$$4 \leq x < 16 \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

$[\log_4 y] = 1$일 때, $1 \leq \log_4 y < 2$