Theme 01 지수함수와 로그함수

01-1 정답 ⑤

점 A의 x좌표를 a라 하면 A의 좌표는 $(a,\ 2^{a-1}+1)$

점 A와 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

점 B의 좌표는 $(2^{a-1}+1,\ a)$

점 B가 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$$a=\log_2(2^{a-1}+2)$$

$$2^a=2^{a-1}+2$$

$$2^{a-1}=2$$

$$\therefore\ a=2$$

점 A의 y좌표는 $2^{2-1}+1=3$

직선 AC가 x축과 평행하므로 점 C의 y좌표는 3이다.

$\log_2(x+1)=3$에서

$$x=2^3-1=7$$

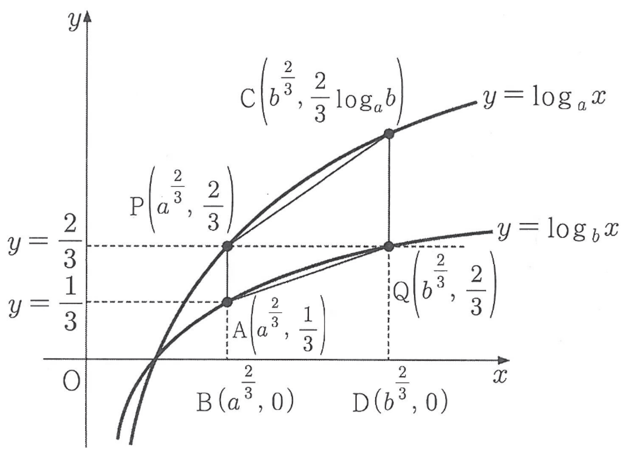
$$\therefore\ \mathrm{A}(2,\ 3),\ \mathrm{B}(3,\ 2),\ \mathrm{C}(7,\ 3)$$

이므로

무게중심은 $\left(\dfrac{2+3+7}{3},\ \dfrac{3+2+3}{3}\right)=\left(4,\ \dfrac{8}{3}\right)$

따라서 $p=4$, $q=\dfrac{8}{3}$이므로 $p+q=\dfrac{20}{3}$

01-2 정답 ③



$y=\dfrac{2}{3}$에서 점 $\mathrm{P}\left(a^{\frac{2}{3}},\ \dfrac{2}{3}\right)$, $\mathrm{A}\left(a^{\frac{2}{3}},\ \dfrac{1}{3}\right)$이 주어지므로

점 $\mathrm{A}\left(a^{\frac{2}{3}},\ \dfrac{1}{3}\right)$이 $y=\log_b x$ 위의 점이므로 대입하면

$\dfrac{1}{3}=\log_b a^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}\log_b a$에서

$$\log_b a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ b=a^2 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

또한, 사각형 PAQC의 넓이 S가 1이므로

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\log_a b-\frac{2}{3}\right)\left(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)$$

$=1$ ($\because$ $\log_a b=2$)

즉 $b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=2$, $a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=2$

$a^{\frac{2}{3}}=t>0$라 하면

$t^2-t-2=0$, $(t-2)(t+1)=0$

$\therefore$ $t=2$ 또는 $t=-1$

즉 $t=a^{\frac{2}{3}}=2$ ($\because t>0$)에서 $a^2=8$이므로 $a=2\sqrt{2}$

또한, $a^2=8$을 ㉠에 대입하면 $b=a^2=8$

따라서 $ab=2\sqrt{2}\cdot 8=16\sqrt{2}$

01-3 정답 ③

주어진 조건에서 50일 까지의 흥행 수입은 400억원 이므로

$f(50)=a(1-b^{50})=400$ $\cdots\cdots(1)$

또한, 100일 까지의 흥행 수입은 640억원 이므로

$f(100)=a(1-b^{100})=a(1-b^{50})(1+b^{50})=640$ $\cdots\cdots(2)$

(1)식을 (2)식에 대입하면

$$400(1+b^{50})=640,\ 1+b^{50}=\frac{640}{400}=\frac{8}{5}\ \Rightarrow\ \therefore b^{50}=\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$$

양변에 상용로그를 취해 계산하면

$50\log b=\log 6-\log 10=0.30+0.48-1=-0.22$

$$\therefore \log b=-\frac{0.22}{50}=-\frac{44}{10000}\Rightarrow b=10^{-\frac{44}{10000}}$$

이 여기서, 이 값을 (1)식에 대입하면

$$a\left(1-\frac{3}{5}\right)=400$$

$\therefore a=1000$

$$f(n)=1000\left(1-10^{-\frac{44}{10000}n}\right)$$

$f(n)$값이 800이상이 되는 n값을 구해주는 것이므로

$$1000\left(1-10^{-\frac{44}{10000}n}\right)\geqq 800$$

$$\frac{2}{10}\geqq 10^{-\frac{44}{10000}n}\Rightarrow \frac{10}{2}\leqq 10^{\frac{44}{10000}n}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$1-\log 2=\frac{7}{10}\leqq\frac{44}{10000}n$$

$$\therefore n\geqq\frac{7000}{44}\fallingdotseq 159.0909\cdots$$

따라서 개봉 후 160일 후에 처음으로 흥행 수입이 800억을 넘어간다.

01-4 정답 ④

$9^a = 2^{\frac{1}{b}}$에서

$$3^{2a} = 2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$(a+b)^2 = \log_3 64$에서

$$3^{(a+b)^2} = 64 = 2^6$$

$$3^{\frac{(a+b)^2}{6}} = 2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $2ab = \dfrac{(a+b)^2}{6}$이므로 $a^2 - 10ab + b^2 = 0$

$a^2 - 10ab + b^2 = 0$의 양 변을 b^2으로 나누면

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 10\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$$

$t = \dfrac{a}{b}$라 하면($a > b > 0$에서 $t > 1$)

$$t^2 - 10t + 1 = 0$$

$$\therefore \ t = 5 + 2\sqrt{6}$$

따라서 $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} = \dfrac{t-1}{t+1}$

$= \dfrac{4 + 2\sqrt{6}}{6 + 2\sqrt{6}} = \dfrac{2 + \sqrt{6}}{3 + \sqrt{6}}$

$= \dfrac{(2 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6})}{(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6})}$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

다른 풀이

$9^a = 2^{\frac{1}{b}}$에서 $3^{2a} = 2$이므로 로그의 정의를 이용하여 나타내면

$$2ab = \log_3 2$$

$(a+b)^2 = \log_3 64$이므로

$$a + b = \sqrt{6\log_3 2} \ (\because \ a, \ b는 양수)$$

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = \log_3 64 - \log_3 4 = \log_3 16$

$$\therefore \ a - b = 2\sqrt{\log_3 2} \ (\because \ a > b)$$

따라서 $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{2\sqrt{\log_3 3}}{\sqrt{6\log_3 2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$