

2022.03

2022학년도 고3 3월 모의고사 분석

made by 물덕

본 표지는 '디자인. 히웅'에서
무료 배포된 양식을
사용하였습니다.

제 2 교시

수학 영역

5 지 선 다 형

1. $(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

$$\begin{aligned} & (3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} \\ &= 3^2 = 9 \end{aligned}$$

2. 함수 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ 에 대하여 $f'(-1)$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 4x + 3 \\ f'(-1) &= 3 - 4 + 3 = 2 \end{aligned}$$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_4 = 6, \quad 2a_7 = a_{19}$$

일 때, a_1 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

공차 : d

$$a_1 + 3d = 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2(a_1 + 6d) = a_1 + 18d$$

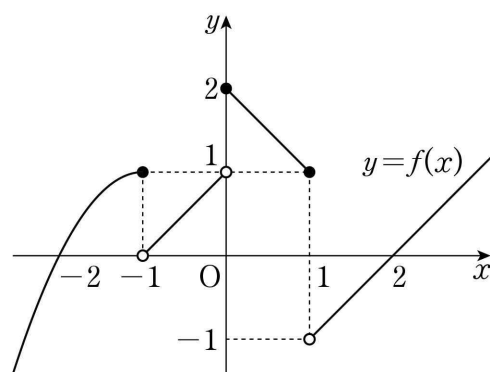
$$\Rightarrow a_1 = 6d \quad \dots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입

$$9d = 6$$

$$\therefore d = \frac{2}{3}, \quad a_1 = 4$$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$$0 + 1$$

5. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos\theta \tan\theta = \frac{1}{2}$ 일 때, $\cos\theta + \tan\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ② $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 ④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

$$\begin{aligned}\cos\theta \tan\theta &= \cos\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \sin\theta = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc}\swarrow & \searrow \\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}$$

$$(\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$$

$$\begin{aligned}\cos\theta + \tan\theta &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\frac{5\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

6. 함수 $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a+1$ 까지 변할 때의 평균변화율이 7이다. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h}$ 의 값은?
 (단, a 는 상수이다.) [3점]

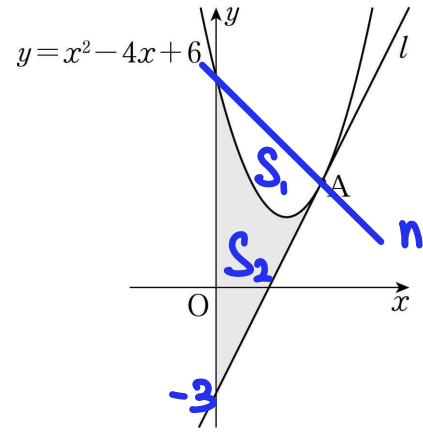
- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$$\begin{aligned}\frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} &= \{2(a+1)^2 - 3(a+1) + 5\} - (2a^2 - 3a + 5) \\ &= 4a + 2 - 3 = 4a - 1 = 7 \\ \therefore a &= 2\end{aligned}$$

$$f'(x) = 4x - 3$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h} &= 2f'(a) \\ &= 2(4 \times 2 - 3) \\ &= 10\end{aligned}$$

7. 그림과 같이 곡선 $y = x^2 - 4x + 6$ 위의 점 $A(3, 3)$ 에서의 접선을 l 이라 할 때, 곡선 $y = x^2 - 4x + 6$ 과 직선 l 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]



- ① $\frac{26}{3}$ ② 9 ③ $\frac{28}{3}$ ④ $\frac{29}{3}$ ⑤ 10

풀이 1. 직선 l 의 방정식 구하기

$$\text{let } f(x) = x^2 - 4x + 6$$

$$f'(3) = 2$$

$$\begin{aligned}l: y &= 2(x - 3) + 3 \\ &= 2x - 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{넓}) &= \int_0^3 \{(x^2 - 4x + 6) - (2x - 3)\} dx \\ &= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_0^3 = 9$$

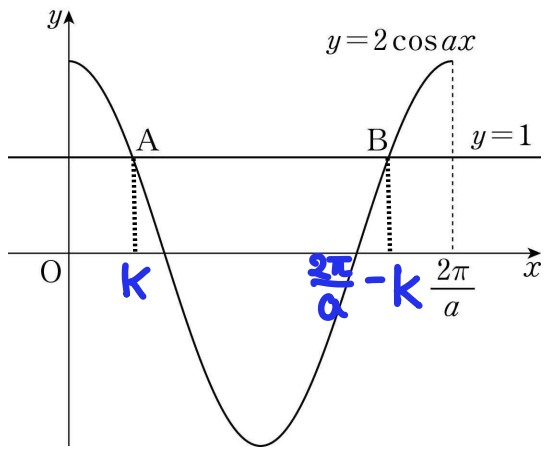
풀이 2. 공식 $S = \frac{a}{6} |a - b|^3$ 이용하기

직선 $m: (0, 6)$ 과 점 A 를 지나는 직선

직선 l 기울기 : $f'(x) = 2$
 $\Rightarrow$ y절편 : -3

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{2} \times 9 \times 3 - S_1 \\ &= \frac{27}{2} - \frac{1}{6} \times 3^3 \\ &= 9\end{aligned}$$

8. 그림과 같이 양의 상수 a 에 대하여 곡선 $y=2\cos ax\left(0\leq x\leq \frac{2\pi}{a}\right)$ 와 직선 $y=1$ 이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=\frac{8}{3}$ 일 때, a 의 값은? [3점]



- ① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ☒ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{12}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

$2\cos ak = 1$
 $\cos ak = \frac{1}{2}$
 $ak = \frac{\pi}{3}$
 $k = \frac{\pi}{3a}$

$\frac{2\pi}{a} - 2k$
 $= \frac{4\pi}{3a} = \frac{8}{3}$
 $a = \frac{\pi}{2}$

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t\geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$v(t)=3t^2+at$

이다. 시간 $t=0$ 에서의 점 P의 위치와 시간 $t=6$ 에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시간 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 움직인 거리는? (단, a 는 상수이다.) [4점]

- ☒ ① 64 ② 66 ③ 68 ④ 70 ⑤ 72

$\int_0^6 v(t) dt = 0$
 $\left[t^3 + \frac{a}{2}t^2\right]_0^6 = 216 + 18a = 0$
 $\therefore a = -12$

$\int_0^6 |3t^2 - 12t| dt$
 $= \int_0^4 (-3t^2 + 12t) dt + \int_4^6 (3t^2 - 12t) dt$
 $= \left[-t^3 + 6t^2\right]_0^4 + \left[t^3 - 6t^2\right]_4^6$
 $= 32 + 32 = 64$

10. 두 함수

$f(x)=x^2+2x+k, \quad g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$

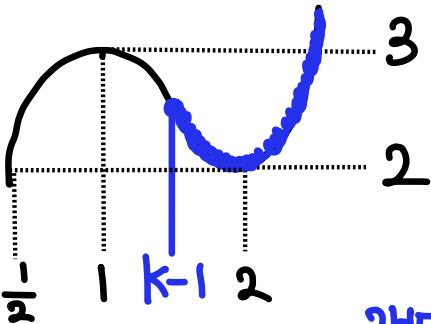
에 대하여 함수 $(g\circ f)(x)$ 의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k 의 최솟값은? [4점]

- ① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ☒ ⑤ $\frac{3}{2}$

$f(x) = (x+1)^2 + k - 1$

$\therefore f(x) \geq k - 1$

$g'(x) = 6x^2 - 18x + 12$
 $= 6(x-1)(x-2)$



$\frac{1}{2} \leq k - 1 \leq 2$

2보다 크면 최솟값이 2보다 큼
2보다 작으면 최솟값이 2보다 작다

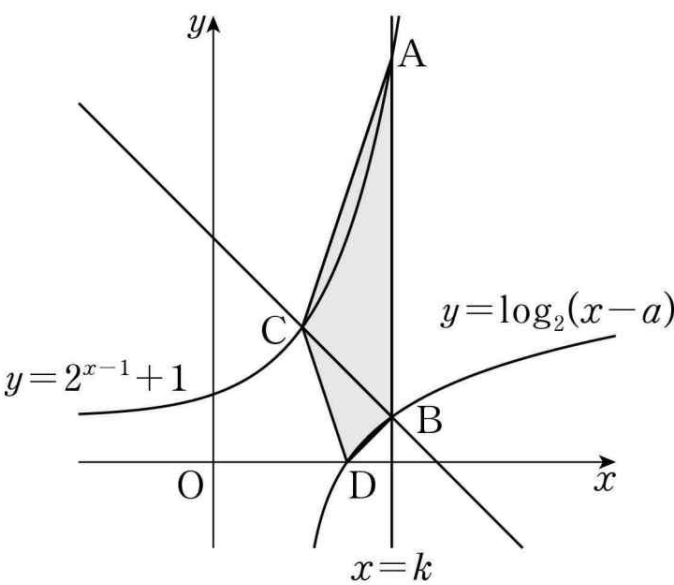
$\frac{3}{2} \leq k \leq 3$

공통 문항

1. 11번
2. 12번
3. 14번
4. 22번

11.

그림과 같이 두 상수 a, k 에 대하여 직선 $x=k$ 가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1, y=\log_2(x-a)$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=8, \overline{BC}=2\sqrt{2}$ 일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$ 가 x 축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0 < a < k$)



[생각해봅시다.]

- 점 B, C의 좌표를 정확하게 구할 수 있을까?
- 직선 BC의 기울기가 -1 이다. 점 B와 점 C의 x 좌표의 차이는 얼마일까?

[기본 개념 정리]

① 기울기

중학교 교과서에는 기울기를 다음과 같이 정의합니다

점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 기울기는

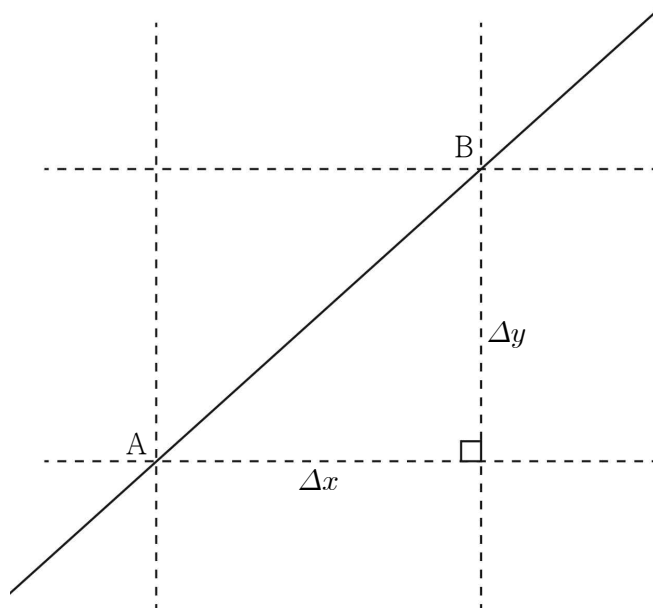
$$(\text{기울기}) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

물론 이것이 틀렸다는 것은 아니다. 하지만 이 공식을 다음과 같이 생각해봅시다

$$(\text{기울기}) = \frac{y\text{의 차이}}{x\text{의 차이}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

수학II에서 배웠던 평균변화율을 생각해도 괜찮습니다.

이것을 이용하면 이러한 그림을 그릴 수 있겠습니다.



직선 위의 두 점을 이은 선분 AB를 빗변으로 하는 하나의 직각삼각형을 만들 수 있습니다. 여기에서 중학교 개념 하나만 더 가지고 오겠습니다.

기울기가 a 인 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 이면

$$\tan \theta = a$$

너무나도 당연한 개념인데, 이 개념을 우리는 이렇게도 해석할 수 있습니다.

기울기를 알면 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 알 수 있다.

직선 위의 두 점 A, B 사이의 거리를 l , 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면 $\Delta x = l \cos \theta$, $\Delta y = l \sin \theta$ 이라고 할 수 있습니다.

즉, 우리는 직선의 기울기와 두 점 사이의 거리만을 알아도 두 점의 x 좌표의 차와 y 좌표의 차를 알 수 있습니다.

[주의]

① 지수함수(로그함수)와 직선의 교점을 정확하게 구할 수는 없다.

$y=2^x$ 과 $x+y=10$ 이 만나는 점을 구하겠다는 생각을 하지 말자. 대충 교점의 범위만을 알 수 있지, 정확한 값을 알지는 못한다.

[이제 풀어봅시다]

점 A, B가 기울기가 -1 인 직선 위에 있다고 합니다. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$ 를 이용해서 x 좌표의 차와 y 좌표의 차를 구해봅시다.

기울기가 -1 이므로 빗변의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 직각이등변삼각형을 그릴 수 있습니다.

두 점의 x 좌표의 차이는 2, y 좌표의 차이도 2라는 것을 알 수 있습니다.

점 B의 x 좌표가 k 이므로 C의 좌표는 $k-2$ 가 되겠습니다.

y 좌표의 차이가 2라는 것을 이용해봅시다.

점 B의 y 좌표는 $\log_2(k-a)$, 점 C의 y 좌표는 $2^{k-3}+1$ 이므로

$$\log_2(k-a)+2=2^{k-3}+1 \dots \textcircled{1}$$

라고 할 수 있습니다.

이제 아직 안 쓴 조건 $\overline{AB}=8$ 을 이용해봅시다.

점 A, B의 x 좌표가 k 로 같으므로 이걸 간단해 보입니다.

점 A의 y 좌표는 $2^{k-1}+1$, 점 B의 y 좌표는 $\log_2(k-a)$ 이므로

$$\log_2(k-a)+8=2^{k-1}+1 \dots \textcircled{2}$$

①, ②식을 연립해봅시다.

$\log_2(k-a)$ 가 두 식에 공통적으로 있으므로 이를 기준으로 정리하면 되겠습니다.

$$2^{k-3}-1=2^{k-1}-7$$

$$2^{k-1}=4 \times 2^{k-3} \text{이므로}$$

$$2^{k-3}-1=4 \times 2^{k-3}-7$$

$$2^{k-3}=2$$

$$\therefore k=4$$

$$\log_2(4-a)+8=8+1$$

$$\therefore \log_2(4-a)=1, a=2$$

따라서 A(4, 9), B(4, 1), C(2, 3), D(3, 0)이 된다.

사각형 ACDB의 넓이를 구하기 위해서 삼각형 ABC와 삼각형 BCD로 쪼개서 계산합니다.

삼각형 ABC의 넓이는 선분 AB를 밑변으로 하여 계산하면 $\frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8$ 이다.