Mechanica

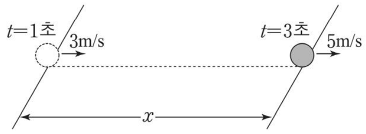
물리학 I

역학

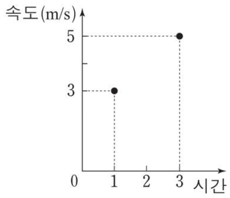
contents

④ 두 시점에서의 속도를 알고 있다면, 가속도를 구할 수 있다.
또한 변위도 구할 수 있다. 다음 예시를 보자.

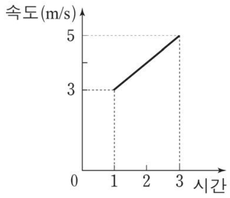
물체가 $t=1$초부터 $t=3$초까지 등가속도 직선 운동한다. $t=1$초일 때 속도가 3m/s, $t=3$초일 때 속도는 5m/s이다. $t=1$초부터 $t=3$초까지 이동 거리는 x이다. x를 구해보자.



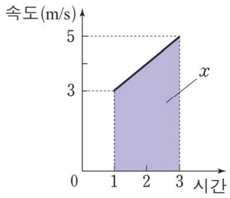
$t=1$초일 때 속도와 $t=3$초일 때 속도가 각각 3m/s, 5m/s이므로, 이를 통해 속도-시간 그래프를 그려보면 다음과 같이 두 점으로 표현할 수 있다.



그런데, 물체가 등가속도 직선 운동하므로, 가속도가 일정한 운동을 한다.
즉, 그래프는 두 점을 지나고 기울기가 일정한 직선의 형태이다. 이제 우리는 두 점을 이을 수 있다.



속도-시간 그래프에서의 밑면적이 변위이다. 따라서



$$x=\frac{1}{2}(3\text{m/s}+5\text{m/s})\times(3\text{s}-1\text{s})=8\text{m}$$

정리 문제를 풀기 위해 필요한 것과 목표

- ○ 문제의 상황을 알기 위해서는
  두 시점에서의 속도
  또는
  한 시점에서의 속도와 가속도
  를 찾으면, 문제를 풀었다고 할 수 있다.
- ○ 우리는 물체의 가속도를 찾는게 최종 목표이다!
- ○ 그렇게 한 시점에서의 속도와 가속도를 알고 있다면
  $v=v_0+a\Delta t$를 통해 내가 알고자 하는 '특정 시각에서의 속도'를 구할 수 있고
  평균 속도와 이동 시간을 곱해 내가 알고자 하는 변위를 구할 수 있다.

다섯 가지 정보 중 세 가지 정보

수능 문제에서는 아래 다섯 가지 정보를 가지고 상황을 분석한다.

1) 가속도(a)
2) 첫 번째 시각에서의 속도(v_1)
3) 두 번째 시각에서의 속도(v_2)
4) 변위 (s)
5) 두 시각 사이 간격〔시간〕 (t_0)

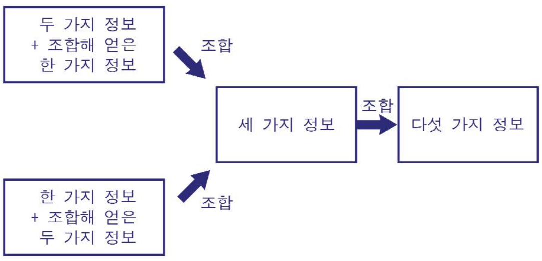
문제에서는 보통 위의 다섯 가지 정보 중 최소 세 가지를 알려 주고, 나머지 두 가지 정보를 찾으라고 한다.

〔1〕 세 가지 정보는 문제에서 직접 제시되기도 하고,

〔2〕 두 가지 정보를 제시해 주고,
다른 물체와의 관계나 제시된 조건을 가지고 조합하여 나머지 하나의 정보를 구하게끔 하여 세 가지 정보를 모으도록 한다.

〔3〕 또는 한 가지 정보만 제시하고
다른 물체와의 관계나 제시된 조건을 가지고 조합하여 두 가지 정보를 구하게끔 하여 세 가지 정보를 모으도록 한다.

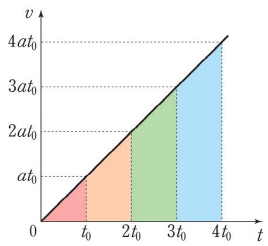
즉, 문제를 푸는 순서도는 다음과 같다.

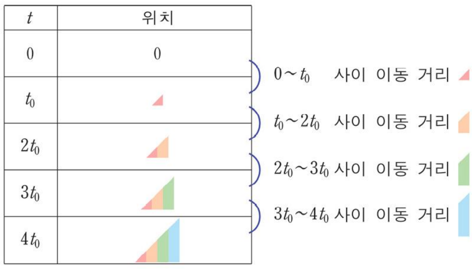


조합해서 문제의 정보를 얻는 과정 즉, 〔2〕와 〔3〕의 과정은 수능에 나온 특별한 상황(타점 기록계 유형)을 제외하고는 일반화하여 설명할 수 없다.
왜냐하면, 이 과정은 온전히 출제자가 만든 상황에 따라 달라질 수 있기 때문이다. 쉽게 말해서 수능에 나올 수 있는 모든 상황을 유형화해서 설명할 수는 없다는 것이다.

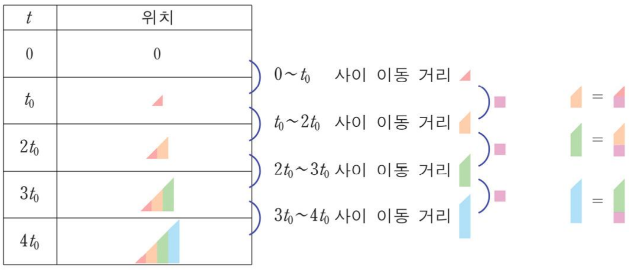
세 가지 정보 정보를 이용하여 다섯 가지 정보를 끌어내는 것은 모든 문제의 공통 사항이다.
이를 설명하겠다.

상황을 분석하기 위해 등가속도 직선 운동하는 물체의 $v-t$그래프를 살펴보자.
정지 상태에서 출발한 물체의 위치를 시간에 따라 나타내면 다음과 같다.

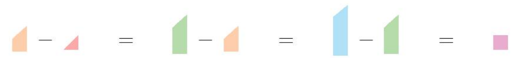




$t=0$일 때 위치를 0으로 잡으면, $t=t_0$에서의 위치는 $0\sim t_0$까지 물체의 이동 거리이다.
마찬가지로
$t=2t_0$일 때 위치는 $t=0$의 위치에서 $t=2t_0$까지 이동 거리와 같다.
그렇다면,
$t=t_0$부터 $t=2t_0$까지 이동한 거리는 $t=t_0$의 위치에서 $t=2t_0$의 위치를 빼면 된다.



각 시간 구간 (예를 들어 $0\sim t_0$까지, $t_0\sim 2t_0$까지...) 동안 이동한 거리의 차이( )는 일정하다.



정량적으로 그 크기를 생각해 보자. 문제에서는 가 주어진다.

이 정보를 통해 바로 옆 정보와의 차이를 구하여 를 구할 수 있다.

또한 그 차이를 통해 를 구할 수 있다.

의 의미를 알아보자.

일단 의 크기는 그래프의 밑면적이므로 그 크기를 각각 구해보면 다음과 같다.

: $\dfrac{0+at_0}{2}\times t_0=\dfrac{1}{2}at_0^2$

: $\dfrac{at_0+2at_0}{2}\times t_0=\dfrac{3}{2}at_0^2$

: $\dfrac{2at_0+3at_0}{2}\times t_0=\dfrac{5}{2}at_0^2$

: $\dfrac{3at_0+4at_0}{2}\times t_0=\dfrac{7}{2}at_0^2$

즉, : : : = 1:3:5:7 이다.

즉, 정지 상태에서 출발하여 등가속도 직선 운동을 하는 물체의 위치를 일정 시간마다 기록할 때, 각 시간 구간별 이동 거리는 1:3:5:7:9:.... 의 비를 이룬다.

■ 는 $\frac{3}{2}at_0^2-\frac{1}{2}at_0^2=\frac{5}{2}at_0^2-\frac{3}{2}at_0^2=\frac{7}{2}at_0^2-\frac{5}{2}at_0^2=at_0^2$ 이다.

■ 는 at_0^2 와 같다.

$$■ = at_0^2$$

즉, 제시된 정보를 통해 ■를 구할 수 있고, 그 크기는 at_0^2 이다.

그리고 t_0의 크기도 알고 있다.

따라서 가속도의 크기를 ■와 t_0를 통해 바로 구할 수 있다.

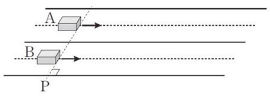
$$a = \frac{■}{t_0^2}$$

앞선 문제를 한번 풀어보자. 가속도의 크기만 구해보자.

기출 예시 2

18학년도 9월 모의고사 4번 문항

그림은 물체 A, B가 나란한 직선 경로를 따라 등가속도 운동을 하는 모습을 나타낸 것이다. 표는 기준선 P로부터 A, B까지의 거리를 나타낸 것이다.

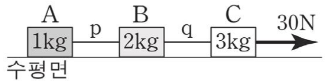


시간(초)	P로부터의 거리(cm)	
	A	B
0	0	0
1	35	26
2	60	48
3	75	66
4	80	80
5	75	90
6	60	96

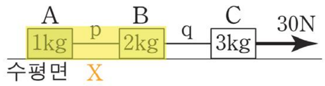
A와 B의 가속도의 크기를 구해보아라.

내부힘

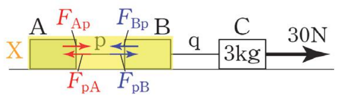
그림과 같이 질량이 1kg, 2kg, 3kg인 물체 A, B, C를 실 p, q로 연결한 후 C를 오른쪽 방향으로 30N으로 당긴다.



계는 '한 덩어리로 두는 것' 이다. A, B, p를 하나의 계로 두자. (이를 X로 부르겠다.)



p가 A를 당기는 힘(F_{Ap})
A가 p를 당기는 힘은 (F_{pA})
작용 반작용 관계의 힘이다.



p와 A는 모두 X이므로, 다음과 같다.

p가	A를	당기는 힘
X가	X를	당기는 힘

p가 A를 당기는 힘과 A가 p를 당기는 힘은 모두 X가 X에 작용하는 힘으로,
작용 반작용에 해당하는 두 힘이 모두 X의 것이므로, 서로 합할 수 있다.

p가 B를 당기는 힘과 B가 p를 당기는 힘(F_{Bp}, F_{pB})도 마찬가지로
X가 X에 작용하는 힘으로, X의 것이다. 따라서 서로 합할 수 있다.

즉, 계내에 서로가 서로에게 작용하는 힘은 합할 수 있다.
그런데,

작용 반작용 관계에 있는 힘은 크기가 같고 방향이 서로 반대이므로 다음이 성립한다.

$$F_{\mathrm{Ap}} = -F_{\mathrm{pA}},\quad F_{\mathrm{Bp}} = -F_{\mathrm{pB}}$$

즉, $F_{\mathrm{Ap}} + F_{\mathrm{pA}} = 0$, $F_{\mathrm{Bp}} + F_{\mathrm{pB}} = 0$ 으로,

계 내에서 서로가 서로에게 작용하는 힘의 합은 0이다.

결론적으로
계 내부에서 서로가 서로에게 작용하는 힘(F_{Ap}, F_{pA}, F_{Bp}, F_{pB})은 계(X)의 알짜힘을 계산할 때 전부 상쇄되어 0이 된다.

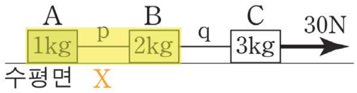
이렇듯 계(X)를 설정하였을 때, 계(X) 안에서 서로가 서로에게 작용하는 힘을 내부힘이라 부른다.
그리고 계(X)의 알짜힘을 계산할 때 내부힘은 서로 상쇄되어 0이 되므로
전체 계(X)의 **알짜힘에 영향을 미치지 않는다.**

정리 내부힘

- ○ 내부힘: 설정한 계에서 계 내부에서 서로가 서로에게 작용하는 힘
- ○ 내부힘은 계의 알짜힘을 계산하는 과정에서 전부 0이 되어 없어지므로, 계의 운동을 분석할 때 고려할 필요가 없다.

외부힘

외부힘은 '계 외부에서 계에 작용하는 힘'이다. 방금 예시를 다시 한번 살펴보자.
A, B, p를 하나의 계로 두자. (이를 X로 부르겠다.)



A와 p 사이, p와 B 사이 작용하는 힘은 A(X), p(X), B(X) 사이의 상호 작용으로 X의 내부힘이다.

그렇다면 q가 B를 당기는 힘은 어떠한가?

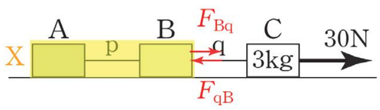
q는 X에 속해있지 않으면서, X와 상호 작용하는 힘이다.

q가	B를	당기는 힘
	X를	당기는 힘

q가 B를 당기는 힘(F_{Bq})과
B가 q를 당기는 힘(F_{qB})은 서로 작용 반작용에 해당하는 힘이지만

B가 q를 당기는 힘은 X의 것이 아니다.

따라서 F_{Bq}와 F_{qB}는 서로 합할 수 없다.



이렇듯 계(X)를 설정하였을 때, 계(X) 외부에서 계(X)에 작용하는 힘을 외부힘이라 부른다.
그리고 계(X)의 알짜힘을 계산할 때 내부힘은 서로 서로 상쇄되어 0이 되지만
외부힘은 작용 반작용에 해당하는 힘을 합할 수 없기 때문에 무조건 0이 되지 않는다.
따라서 외부힘은 계(X)의 알짜힘에 영향을 미친다.

이를 토대로 X에 작용하는 알짜힘은
X의 내부 힘과 외부힘들의 합력인데
X의 내부힘은 서로 상쇄되어 0이 되므로
X의 외부힘의 합력인 X에 작용하는 알짜힘과 같다.

정리 외부힘

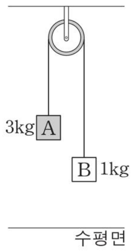
○ 외부힘: 설정한 계에 대해 계 외부에서 계에 작용하는 힘
○ 외부힘은 계의 알짜힘을 계산하는 과정에서 고려해야 하는 힘이다.
○ 중요!: 알짜힘은 계에 작용하는 모든 외부힘의 합력과 같다.
알짜힘을 계산할 때 내부힘은 전혀 고려하지 않아도 된다.

도르래

실의 힘의 방향을 바꾸어주는 도구

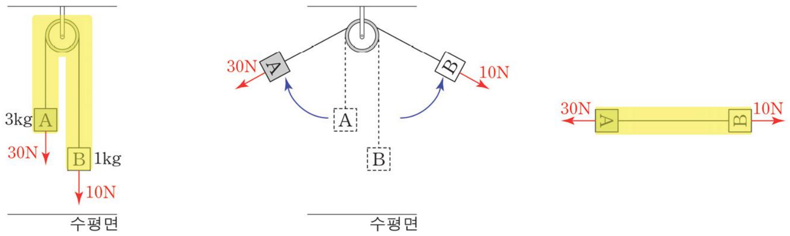
그림과 같이 도르래를 두고 질량이 3kg, 1kg인 물체 A, B를 실로 연결하였다.

(중력 가속도 10m/s^2)



도르래는 힘의 방향을 바꾸어주는데,

아래 그림처럼 도르래를 기준으로 실을 양쪽으로 펼친 결과와 같다.

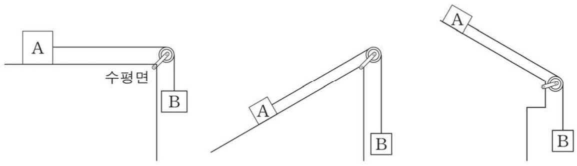


노란색 계를 X로 두자. (A와 B를 전체 계)

A, B의 중력 방향은 도르래 때문에 서로 반대가 되므로 빼주어야 한다.

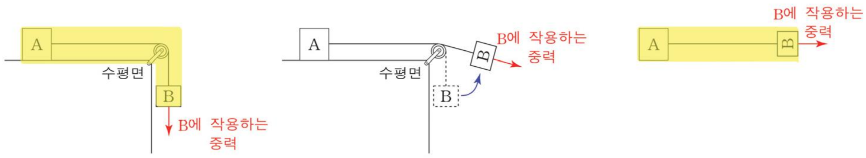
이에 따라 X의 알짜힘은 30N－10N＝20N임을 확인할 수 있다.

마찬가지로 아래 그림 (가)~(다)과 같은 상황은 실을 펼친 상황과 같음을 설명할 수 있으며, A+B 전체 계(X)의 알짜힘은 다음과 같이 계산될 수 있다.



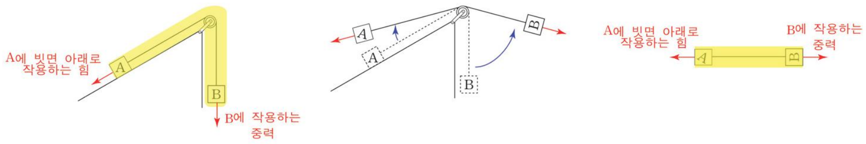
(가) (나) (다)

(가)



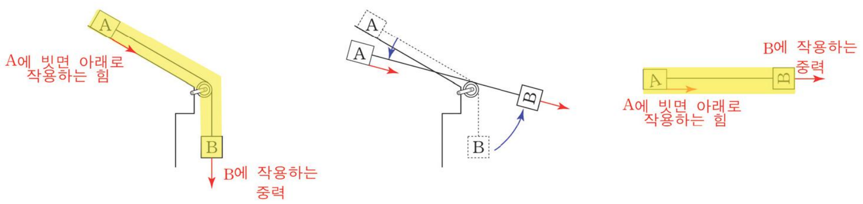
X의 알짜힘= B의 중력

(나)



X의 알짜힘= B에 작용하는 중력 − A가 빗면 아래로 작용하는 힘

(다)



X의 알짜힘= B에 작용하는 중력 + A가 빗면 아래로 작용하는 힘

○ (다)
조심하자! 이때는 더해주어야 한다.

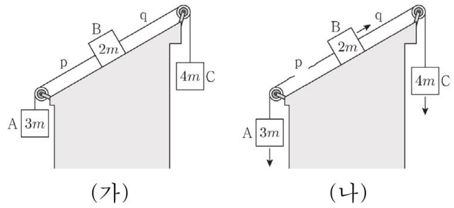
정리 **도르래**

- ○ 도르래는 힘의 방향을 바꾸어주는 도구이다.
- ○ 도르래에 걸쳐진 실에 연결된 물체들의 알짜힘을 구하려면 도르래에 걸쳐진 실을 펼쳐 해석하면 된다.

기출 예시 17

19학년도 수능 18번 문항

그림 (가)와 같이 질량이 각각 $3m$, $2m$, $4m$인 물체 A, B, C가 실로 연결된 채 정지해 있다. 실 p, q는 빗면과 나란하다. 그림 (나)는 (가)에서 p가 끊어진 후, A, B, C가 등가속도 운동하는 모습을 나타낸 것이다.



(나)에서 B의 가속도의 크기는? (단, 중력 가속도는 g이고, 실의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.)

해설

모든 물체의 질량이 주어져 있다.
그리고 p가 끊어진 후 A의 가속도의 크기는 중력 가속도(g)이다.
p 끊어지기 전에는 A, B, C는 정지해 있으므로 가속도는 0이다.
A, B, C의 가속도를 p가 끊어지기 전 후 로 나누어 정리해 보면 다음과 같다.
A에 작용하는 중력의 방향을 양(+)으로 두자.

	A	B	C
실이 끊어지기 전	0		
실이 끊어진 후	$+g$	$-a$	

A의 질량은 $3m$이고
B와 C의 전체 질량 합이 $6m$이므로,
A:B+C의 질량 비는 1:2이다.

즉, 가속도의 변화량의 크기 비는 질량 비의 역수 비인 2:1이다.

A의 가속도의 변화량의 크기는 g
B+C의 가속도의 변화량의 크기는 a이다.
질량의 역수 비가 2:1 이므로 a를 계산해 보면 다음과 같다.

$$g:a=2:1,\ a=\frac{1}{2}g$$

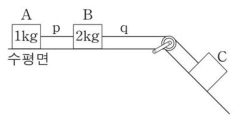
정답 기출 예시 17

$\frac{1}{2}g$

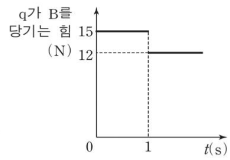
예제 22

19학년도 수능완성 14번 문항 변형 변형

그림 (가)와 같이 물체 A, B, C가 실 p, q로 연결되어 $t=0$일 때 정지 상태에서 출발하여 함께 등가속도 운동을 한 후, $t=1$초일 때 p가 끊어졌다. 그림 (나)는 q가 B를 당기는 힘의 크기를 시간 t에 따라 나타낸 것이다. A, B의 질량은 각각 1kg, 2kg이다.



(가)



(나)

C의 질량은? (단, 실의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.)

정답 예제 22

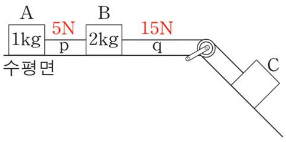
3kg

해설

C의 질량을 m_C로 두자.

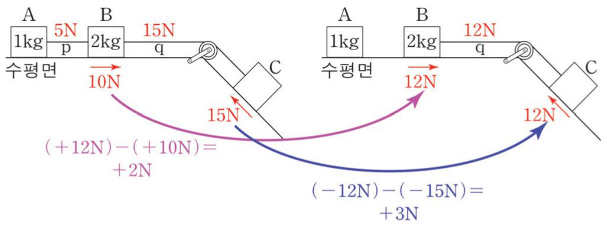
p가 끊어지기 전 p와 q의 장력 비는 A와 A+B의 질량비이다. 따라서 다음 식이 성립한다. (실이 끊어지기 전 p의 장력 T_p)

$$T_p : 15\text{N} = 1\text{kg} : (1\text{kg} + 2\text{kg}),\ T_p = 5\text{N}$$



B에 작용하는 장력의 합력은 오른쪽 방향으로 15N−5N=10N이고
C에 작용하는 장력의 합력은 빗면 위 방향으로 15N이다.

이 상태에서 실이 끊어지면
B에 작용하는 장력의 합력은 오른쪽 방향으로 12N이고
C에 작용하는 장력의 합력은 빗면 위 방향으로 12N이다.



오른쪽 방향을 양(+)으로 두고 p가 끊어지기 전후 B와 C의 외부힘의 합력을 정리해보면 다음과 같다.

물체	B	C
p가 끊어지기 전	+10N	−15N
p가 끊어진 후	+12N	−12N
변화량	+2N	+3N

즉,
실의 장력의 합력의 변화량의 크기 비가 2N : 3N = 2 : 3이고
이는 B와 C에 작용하는 알짜힘의 변화량의 크기 비와 같으며
이는 B와 C의 질량 비와 같다.
따라서 m_C는 다음과 같다.

$$2\text{kg} : m_C = 2 : 3,\ m_C = 3\text{kg}$$

○ **심화 문제 (운동량 - 시간 그래프의 기울기)**

○ 운동량-시간 그래프에서 순간 기울기는 다음과 같은 의미를 가진다.

$$\frac{\text{운동량 변화량}(\Delta p = I)}{\text{시간 변화량}(\Delta t)} = \text{평균 힘}$$

그런데 물체의 알짜힘의 크기가 일정한 운동(등가속도 운동)을 할 경우
물체가 받는 평균 힘의 크기는 물체의 작용하는 알짜힘의 크기와 같다.
이 경우 운동량-시간 그래프의 기울기는 알짜힘과 같다.

$$\frac{\text{운동량 변화량}(\Delta p = I)}{\text{시간 변화량}(\Delta t)} = \text{알짜힘}$$

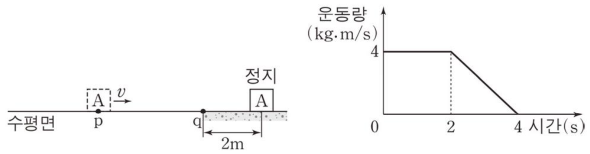
심화 문제는 아래와 같이 크기 두 가지 유형으로 나뉜다.

① 수평면과 마찰면에서의 운동
② 빗면에서의 운동

두 가지 유형을 문제풀이와 함께 분석해 보자.

간단 예시 **운동량-시간 그래프 ① 수평면과 마찰면에서의 운동**

그림과 같이 물체 A가 점 p에서 마찰면이 시작되는 점 q를 향해 v의 일정한 속도로 운동하는 모습을 나타낸 것이다. A는 마찰면의 시작점 q에서 도달한 후 마찰력만 받아 2m만큼 운동한 후 정지한다. 그림 (나)는 (가)에서 A가 점 p를 지나는 순간부터 A가 정지할 때까지 A의 운동량을 시간에 따라 나타낸 것이다.



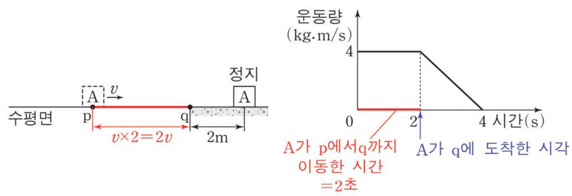
(가) (나)

다음을 답해 보자.

○ A의 질량은?

○ p와 q 사이의 거리는?

① 등속도 운동하는 구간 해석
오른쪽 방향을 양(+)으로 두자.



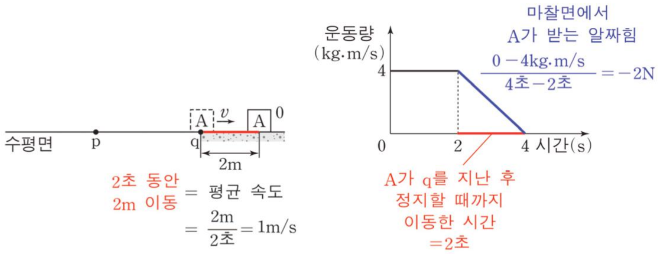
○ A는 p에서 q까지 속도의 크기가 v로 일정한 등속도 운동한다.
그런데 그림 (나)를 살펴보면 2초인 순간 그래프가 꺾인다.
즉, A는 2초인 순간 점 q에 도달하는 것을 알 수 있다.

○ A가 p를 지나는 시각이 0초, q를 지나는 시각이 2초이므로
A가 p에서 q까지 이동한 시간은 2초임을 알 수 있다.

○ A가 p에서 q까지 이동한 시간이 2초이고
p에서 q까지 A의 속도는 $+v$이므로
p와 q사이의 거리는 다음과 같이 계산된다.

$$v \times 2 = 2v$$

② 마찰 구간 해석



○ 그림 (나)에서 A의 운동량은 점점 감소하여 0이된다.
운동량 - 시간 그래프의 기울기는 물체가 받는 알짜힘이다.
그래프의 기울기는 마찰면에서 A가 받는 알짜힘(마찰력)이다.
그 값은 다음과 같다.

$$\frac{0-(+4kg\cdot m/s)}{4초-2초} = -2N$$

○ A가 q를 지나는 시각이 2초, A가 정지한 시각이 4초이므로
A가 q를 지난 후 정지할 까지 이동한 시간은 2초임을 알 수 있다.

○ A가 q를 지난 후 정지할 때까지 이동한 시간이 2초이고
마찰면에서 A의 변위가 +2m이므로
마찰면에서 A는 2초 동안 2m만큼 이동한 후 정지한다.
따라서 A의 평균 속도의 크기는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{+2m}{2초} = +1m/s$$

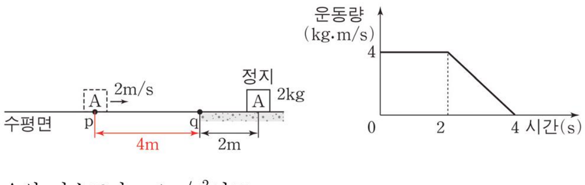
그런데 A는 등가속도 운동을 하므로
A의 평균 속도는 2초일 때 속도($+v$)와 4초일 때 속도(0)의 중간 값과 같다.
따라서 다음이 성립한다.

$$\frac{+v+0}{2} = +1m/s,\ v = +2m/s$$

○ 마찰면에서 물체의 가속도를 계산할 수 있다.
A의 속도는
2초일 때: +2m/s
4초일 때: 0 이므로
가속도는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{0-(+2m/s)}{4초-2초} = -1m/s^2$$

③ 정리



○ p에서
A의 속력이 2m/s이고,
운동량의 크기가 4kg·m/s이므로
A의 질량을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$4kg\cdot m/s = m \times 2m/s$$
$$m = 2kg$$

○ 마찰면에서 A의 가속도가 $-1m/s^2$이고,
A의 알짜힘이 −2N이므로
A의 질량(m)을 다음과 같이 계산할 수 있다.

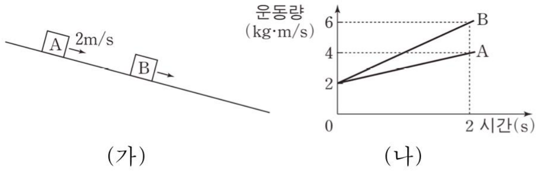
$$-2N = m\times(-1m/s^2),\ m = 2kg$$

○ p와 q사이의 거리는 다음과 같이 계산된다.

$$2m/s \times 2s = 4m$$

예제 24

그림 (가)와 같이 물체 A, B가 마찰이 없는 빗면 위에서 각각 등가속도 운동하는 모습을 나타낸 것이다. $t=0$일 때 A의 속도는 빗면 아래로 2m/s이다. 그림 (나)는 (가)에서 $t=0$부터 $t=2$까지 A와 B의 운동량을 시간에 따라 나타낸 것이다. $t=2$초일 때 A와 B가 만난다.



다음을 답해보자. (단, 물체의 크기는 무시한다.)

① A와 B의 질량은?
② $t=0$일 때 A와 B사이의 거리는?

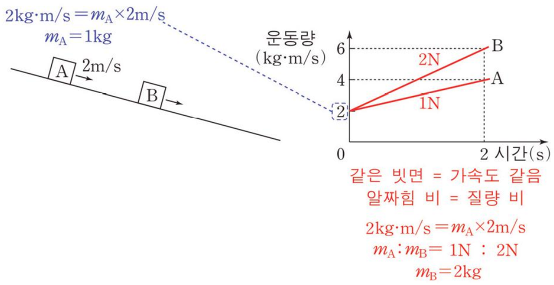
정답 예제 24

ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

빗면 아래 방향을 양(+)으로 두자.

A와 B의 질량을 m_A, m_B로 두자.



① 0초일 때 A의 속도의 크기는 2m/s이고
0초일 때 A의 운동량의 크기는 2kg·m/s이다.
따라서 다음 식이 성립한다.

$$2\text{kg}\cdot\text{m/s} = m_A \times 2\text{m/s}$$
$$m_A = 1\text{kg}$$

② A와 B는 동일한 빗면에서 등가속도 운동을 하므로
A와 B의 가속도는 같다.
그런데 그림 (나)에서 A와 B의 그래프 기울기가 각각 2N, 1N이므로
A와 B의 알짜힘의 크기 비는 A와 B의 질량 비와 같다.
따라서 다음 식이 성립한다.

$$m_A : m_B = 1\text{N} : 2\text{N}$$
$$m_B = 2\text{kg}$$

③ 0초일 때 B의 속도의 크기를 v로 두자.
0초일 때 B의 운동량의 크기는 2kg·m/s이다.
따라서 다음 식이 성립한다.

$$2\text{kg}\cdot\text{m/s} = 2\text{kg} \times v$$
$$v = 1\text{m/s}$$

③ A와 B가 만나기 전까지
2초일 때 A에 대한 B의 상대 속도는
0초일 때 A에 대한 B의 상대 속도와 같다.
그 크기는 다음과 같이 계산된다.

$$+1\text{m/s} - (+2\text{m/s}) = -1\text{m/s}$$

A가 관측했을 때 B는 −1m/s의 일정한 속도로 운동하여 2초 후에 만난다.
0초일 때 A와 B사이의 거리를 L이라 하면
A가 관측한 B의 변위는 $-L$이다.(A가 관측한 B는 빗면 위로 올라오는 것처럼 보인다.)
따라서 다음 식이 성립한다.

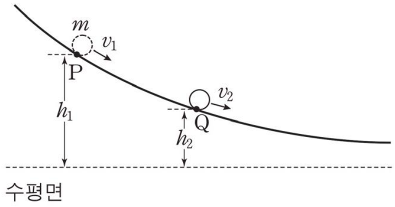
$$-L = (-1\text{m/s}) \times 2\text{s}, \quad L = 2\text{m}$$

[문제 풀이 추가] 속력 제곱 차와 높이 차의 관계

1. 기본 성질

문제 풀이에 있어서 매우 중요한 성질을 다루겠다. 아래 상황을 보자.

그림과 같이 마찰이 없는 경로 위에 수평면으로부터 높이가 h_1인 점 P에서 속력 v_1으로 출발한 물체가 마찰이 없는 경로를 따라 운동하다가 경로 위에 수평면으로부터 높이가 h_2인 점 Q에서 속력이 v_2가 된 모습을 나타낸 것이다. (중력 가속도 g)



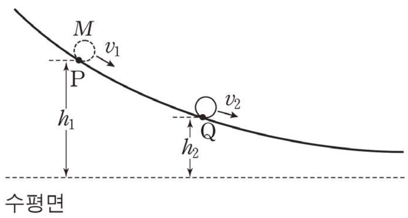
P와 Q에서 에너지 보존법칙을 세워보면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}mv_1^{\,2}+mgh_1=\frac{1}{2}mv_2^{\,2}+mgh_2 \rightarrow \underline{\frac{1}{2}v_1^{\,2}+gh_1=\frac{1}{2}v_2^{\,2}+gh_2}$$

$$\frac{v_2^{\,2}-v_1^{\,2}}{(h_1-h_2)}=2g$$

위의 밑줄 친 부분을 잘 관찰해 보자. 에너지 보존법칙을 쓰는 과정에서 '질량 항'이 양변에서 사라진다. 정말 중요한 포인트다.
위의 결과는 '질량과 관계없이 항상 성립하는 식'이라는 점을 확인할 수 있다.

쉽게 이야기하면, 아래 그림처럼 질량 m을 M으로 바꾸어보고 계산해도 $\frac{v_2^{\,2}-v_1^{\,2}}{(h_1-h_2)}=2g$이라는 결과가 나올 것이다.



여기서 h_1-h_2를 높이 변화(Δh)로 표현하고, $v_2^{\,2}-v_1^{\,2}$을 속력의 제곱의 변화(Δv^2)로 표현하면 다음 식으로 표현할 수 있다.

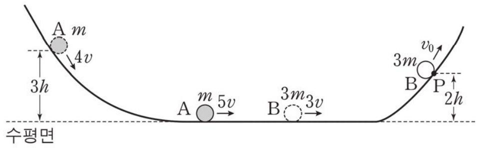
$$\frac{\Delta v^2}{\Delta h}=2g$$

$2g$는 변하지 않는 상수이므로, $\frac{\Delta v^2}{\Delta h}$는 항상 일정한 값이다.

실전에 적용해 보면 다음과 같다.
서로 다른 두 높이에서 속력의 제곱 차를 높이차로 나누어준 값은 그 어떤 물체든 간에 동일하다.
단! 두 위치 사이에 역학적 에너지가 보존되어야 한다.
간단 예시를 통해 체화시켜보자.

간단 예시 속력의 제곱차와 높이차의 관계

그림은 물체 A, B가 각각 마찰이 없는 궤도상을 운동하는 모습을 나타낸 것이다. 궤도상의 수평면으로부터 높이 $3h$인 지점에서 A의 속력은 $5v$이고, 수평면에서 A, B의 속력은 각각 $4v$, $3v$이다. 이후 B는 높이가 $2h$인 궤도상의 점 P를 v_0의 속력으로 지난다. A와 B의 질량은 각각 m, $3m$이다.



v_0는? (단, 물체는 동일 연직면상에서 운동하며, 물체의 크기 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.)

$\dfrac{\Delta v^2}{\Delta h} = 2g$을 적용해 보자.

A에서 $3h$ 높이와 수평면에서 $\dfrac{\Delta v^2}{\Delta h}$는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{(5v)^2-(4v)^2}{3h} = 2g$$

B에서 $2h$ 높이와 수평면에서 $\dfrac{\Delta v^2}{\Delta h}$는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{(3v)^2-(v_0)^2}{2h} = 2g$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\frac{(5v)^2-(4v)^2}{3h} = \frac{(3v)^2-(v_0)^2}{2h}$$

$$v_0 = \sqrt{3}\,v$$

<u>질량이 m, $3m$이라는 것은 활용되지 않는다.</u>

○ 조심하자.
제곱 차를 할 때는 높이가 낮은 위치에서의 속력의 제곱에서 높이가 높은 위치에서의 속력의 제곱을 빼야한다.

정리 속력의 제곱 차와 높이 차의 관계

○ 역학적 에너지가 보존될 때, 문제에서 주어진 모든 물체에 대해 다음 식이 성립된다.

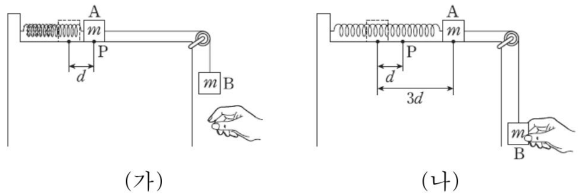
$$\frac{\Delta v^2}{\Delta h} = 2g$$

따라서 역학적 에너지가 보존되는 모든 물체의 $\dfrac{\Delta v^2}{\Delta h}$는 같다.

기출 예시 68

13학년도 수능 19번 문항

그림 (가)와 같이 마찰이 없는 수평면에서 용수철과 연결된 물체 A를 물체 B와 실로 연결하였더니, 용수철이 원래 길이에서 d만큼 늘어나 A가 점 P에 평형 상태로 정지해 있었다. 그림 (나)는 (가)에서 B를 중력 방향으로 당겨 용수철이 원래 길이에서 $3d$만큼 늘어나도록 잡고 있는 모습을 나타낸 것이다. (나)에서 B를 가만히 놓으면 A는 P를 v의 속력으로 지난다. A와 B의 질량은 m으로 같다.



다음을 구해보아라.(단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기, 용수철과 실의 질량, 도르래의 마찰, 공기 저항은 무시한다.)

① v는?

② (나)에서 B를 놓은 후 용수철의 길이가 원래 길이가 되는 순간 A의 속력은?

해설

(가)에서 A+B계의 힘 평형식을 세워보면 다음과 같다.

$$mg = kd$$

(가)에서 A+B의 계의 알짜힘의 크기가 0이 되므로 점 P는 평형점이라는 사실을 알 수 있다.
(나)에서 용수철은 평형점으로부터 $3d - d = 2d$만큼 늘어나 정지한다.

손을 놓으면 (나)에서 A의 위치(Q)가 정지점이고, 평형점이 P이므로 진폭은 $2d$임을 알 수 있다.
① P는 평형점이다. $v = A\sqrt{\frac{k}{m}}$ 를 이용하면 다음과 같다.

$$v = 2d\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$k = \frac{mg}{d}$이므로 위에 대입해 보면 다음과 같다.

$$v = 2d\sqrt{\frac{k}{2m}} = 2d\sqrt{\frac{mg}{2md}} = \sqrt{2gd}$$

② 용수철이 원래 길이가 되는 위치는 평형점 P로부터 d만큼 떨어진 지점이다.
이 위치에서 A+B의 운동 에너지는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{1}{2}k(2d)^2 - \frac{1}{2}k(d)^2 = \frac{3}{2}kd^2 = \frac{3}{2}mgd$$

이 순간 A의 속력을 v_0로 두면, A+B 계의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}(m+m){v_0}^2 = m{v_0}^2$이므로 다음 식이 성립한다.

$$\frac{3}{2}mgd = mv_0^2\ ,\ v_0 = \sqrt{\frac{3}{2}gd}$$

정답 기출 예시 68

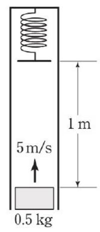
① $v = \sqrt{2gd}$
② $\sqrt{\frac{3}{2}gd}$

연결되어 있다고 가정

그렇다면 아래 문제는 어떻게 단진동으로 해석할 수 있을까?
간단한 발상 하나를 소개하고자 한다.

11학년도 수능 11번 문항

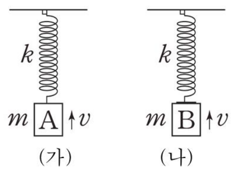
그림과 같이 고정된 관의 위쪽 끝에 용수철 상수가 150N/m인 용수철을 매달고, 용수철의 아래쪽 끝으로부터 1m아래인 지점에서 질량 0.5kg인 물체를 연직 위로 5m/s의 속력으로 던졌다.



물체가 용수철을 최대로 압축시킨 순간, 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 가속도는 $10m/s^2$이고, 물체의 크기, 용수철의 질량, 공기 저항은 무시한다.)

ㄴ. 용수철은 0.1m만큼 압축된다.

만약 그림과 같이 질량이 같은 물체 A, B가 용수철 상수가 동일한 용수철을 압축하는 상황을 생각해 보자. 용수철이 원래 길이일 때 두 물체의 속력은 v로 같다.
두 상황에서 유일한 차이점은
(가)는 용수철과 A가 연결되어 있고,
(나)는 11학년도 수능 11번처럼 용수철과 B가 분리되어 있다.



A와 B가 용수철을 최대로 각각 x_1과 x_2만큼 압축한 후 정지할 때, x_1과 x_2의 관계가 어떻게 될까?
당연히 x_1과 x_2는 정확하게 같다.
용수철이 물체와 연결 상태와 관계없이 용수철을 압축한 길이는 서로 같다. (에너지 보존법칙 때문이다.)

그렇다면 (나)의 상황을 (가)와 같이 연결되어 있다고 가정하고 평형점과 정지점을 각각 구해보면 최대로 압축된 길이를 계산할 수 있을 것이다.

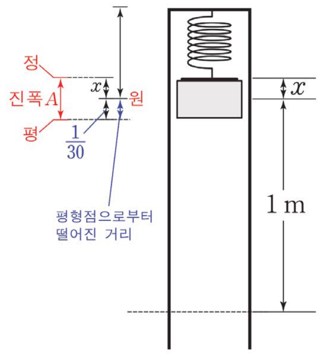
순서는 다음과 같다.

계산법 제곱-제곱 차이 이용

① 진폭을 미지수 A로 잡는다.
① 평형점과 원래 길이 지점 사이의 거리(L)을 계산한다.
③ 용수철이 원래 길이가 되는 순간 운동 에너지(E)를 구한다.
④ 제곱-제곱 차를 이용하여 다음 식이 성립된다.

$$\frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kL^2 = E$$

이를 이용하여 11학년도 수능 11번 문제의 ㄴ 선택지만 다시 풀어보자.



① 진폭을 미지수 A로 잡고, 최대로 압축된 길이를 x로 두자.

① 용수철과 물체가 연결되어 있다고 가정한 경우, 평형점과 원래 길이 지점 사이의 거리(L)을 계산해 보면 다음과 같다. (평형점 계산)

$$150\text{N/m} \times L = 0.5\text{kg} \times 10\text{m/s}^2, \quad L = \frac{1}{30}\text{m}$$

이에 따라 다음 관계식이 성립한다.

$$L + x = A, \quad \frac{1}{30} + x = A$$

③ 용수철이 원래 길이가 되는 순간 운동 에너지(E)를 구한다.
물체의 높이가 1m만큼 증가하는 동안 물체의 역학적 에너지가 보존되므로 다음 식이 성립된다. (위 그림에서 점선에서 물체의 중력 퍼텐셜 에너지를 0으로 잡자.)

$$\frac{1}{2}(0.5\text{kg}) \times (5\text{m/s})^2 + 0 = E + 0.5\text{kg} \times 10\text{m/s}^2 \times 1\text{m}$$

$$E = \frac{5}{4}\text{J}$$

④ 제곱-제곱 차를 이용하여 다음 식이 성립된다.

$$\frac{1}{2}150\text{N/m}\left(A^2 - \left(\frac{1}{30}\text{m}\right)^2\right) = \frac{5}{4}\text{J}, \quad A = \frac{2}{15}\text{m}$$

$A = \frac{2}{15}\text{m}$를 $\frac{1}{30} + x = A$에 대입하여 x를 구해보면 다음과 같다.

$$\frac{1}{30} + x = \frac{2}{15}, \quad x = 0.1\text{m}$$

이렇게 하면 이차 방정식을 풀지 않고도 단진동 상황을 이용하여 단순 제곱근만을 이용하여 문제를 풀 수 있다. 이는 최대로 압축된 길이가 주어져 있을 경우에서도 활용될 수 있는데, 다음 페이지의 21학년도 6월 모의고사 20번 문제를 풀어보면서 익혀보자.