2023학년도 수능대비
방구석 방학특강

2022.07

통계 정리

made by 물덕

본 표지는
'디자인 히읗'의 무료 표지를
사용하였습니다.

1. 확률변수

① 확률변수의 정의

> **Intro**
> 확률변수는 통계에서 가장 중요한 부분이다. 앞으로 배울 이산확률분포, 연속확률분포 및 정규분포, 통계적 추정까지 고등학교 통계는 확률변수 없이는 설명할 수 없다. 굉장히 중요한 부분인 만큼 정확하게 의미를 알고 이해하고 있는 것이 중요하다.

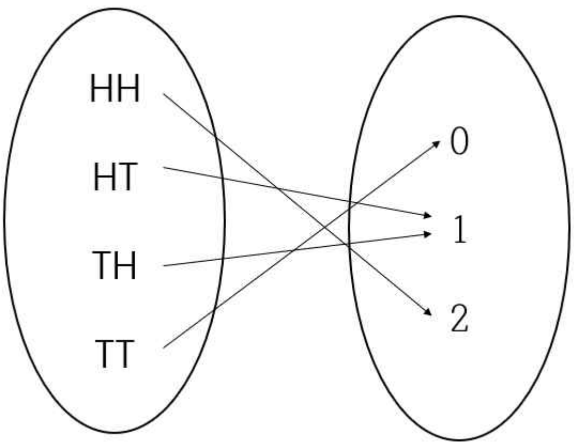
확률변수란 무엇일까?
교과서에서는

> 확률변수는 어떤 시행에서 **표본공간의 각 원소**에
> **하나의 실수의 값**을 대응시키는 **함수**이다.

라고 정의한다. 솔직히 잘은 이해가 안 간다. 이 한 문장을 3개로 끊으면
① 표본공간[1]이 있음
② 이 원소에 실수의 값을 대응시킨다.
③ 이렇게 대응시켜서 만든 함수가 확률변수이다.
라고 정리할 수 있다. 조금 더 이해를 돕기 위해 하나의 예시를 가져오자.

서로 다른 동전 2개를 동시에 던진다고 해보자. 그러면 표본공간 S는 {HH, HT, TH, TT}이다. (H: 앞면, T: 뒷면)

이제 앞면이 나온 횟수를 확률변수 X라고 하자. 아까 얘기했듯이, 확률변수는 표본공간의 원소에 실수의 값을 대응시키는 함수라고 했다. 이 함수를 만드는, 다시 말해 실수의 값을 대응시키는 규칙이 있을 것이다. 앞면이 나온 횟수를 확률변수 X라고 하기로 했으므로 **이 확률변수라는 함수를 만드는 규칙**은 '앞면이 나온 횟수'이다. 이 규칙에 따라서 표본공간의 각 원소에 실수의 값을 대응시키자.
① HH는 앞면이 2번 나온 경우이므로 실수 2에 대응될 것이다.
② HT와 TH는 앞면이 1번 나온 경우이므로 실수 1에 대응될 것이다.
③ TT는 앞면이 0번 나온 경우이므로 실수 0에 대응될 것이다.
이를 그림으로 그려보자.



1) 표본공간: 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합
ex) 서로 다른 동전 2개를 동시에 던지는 시행을 할 때, 표본공간 S는 {HH, HT, TH, TT}이다.

Ⅰ. 확률변수와 이산확률분포

1. ③

시행은 주사위를 한 번 던지는 것이고

확률변수 X는 주사위에서 나온 눈의 수를 4로 나눈 나머지라고 했다. 이를 통해 확률분포표를 그리면

X	0	1	2	3	합
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$

2. ①

표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$이므로

이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르는 확률변수 X의

표준편차는

$\sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=\frac{20}{5}=4$

$\therefore\ \sigma(3X-4)=3\sigma(X)=12$

3. ①

확률분포표에서의 확률의 총합이 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{8}+b=1$

$\therefore\ a+b=\frac{5}{8}$ …… ㉠

또한 확률변수 X의 평균이 5이므로

$1\times\frac{1}{4}+2\times a+4\times\frac{1}{8}+8\times b=5$

$8a+32b=17$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{8},\ b=\frac{1}{2}$

이제 이것을 바탕으로 X^2의 확률분포표를 그려보자

X^2	1	4	16	64	합계
$\mathrm{P}(X^2=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=1\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}+16\times\frac{1}{8}+64\times\frac{1}{2}=\frac{139}{4}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{139}{4}-5^2=\frac{39}{4}=9.75$

4. 105

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{10}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}=\frac{3}{2}$

이것을 바탕으로 X^2의 확률분포표를 그려보자

X^2	0	1	4	9	계
$\mathrm{P}(X^2=x)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=0\times\frac{2}{10}+1\times\frac{3}{10}+4\times\frac{3}{10}+9\times\frac{2}{10}=\frac{33}{10}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{33}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{21}{20}$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(10X+5)=100\mathrm{V}(X)=100\times\frac{21}{20}=105$

5. ⑤

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}X+5\right)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+5=30$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=50$

6. ⑤

$\mathrm{B}(n,\ p)$에서 $\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=np(1-p),$

$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

$\therefore\ \mathrm{E}(2X-5)=2\mathrm{E}(X)-5=2np-5=175$

$\therefore\ np=90$ …… ㉠

$\sigma(2X-5)=2\sigma(X)=2\sqrt{np(1-p)}=12$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $p=\frac{3}{5}$

$\therefore\ n=150$

[다른 풀이]

$\mathrm{E}(2X-5)=175$에서

$2\mathrm{E}(X)-5=175,\ 2\mathrm{E}(X)=180$ $\therefore\ \mathrm{E}(X)=90$

$\mathrm{V}(2X-5)=12^2$에서 $4\mathrm{V}(X)=144$ $\therefore\ \mathrm{V}(X)=36$

이때, 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로

$np=90,\ np(1-p)=36$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $p=\frac{3}{5},\ n=150$

[개념 정리] 분산과 표준편차

분산을 $\mathrm{V}(X)$, 표준편차를 $\sigma(X)$라고 할 때,

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

$\mathrm{V}(X)=\{\sigma(X)\}^2$