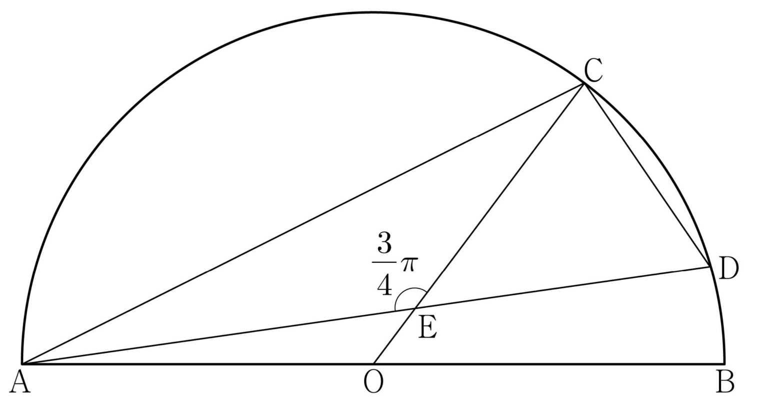
풀리지 않는 도형은 핑계다

오르비 악어새

27. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\ \overline{ED}=3\sqrt{2},\ \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은?



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$ ④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

27

[2023학년도 6월 평가원]

정답 : ⑤

<문제 풀이 전 생각>
- 선분의 길이를 구하라고 하였으므로 선분을 포함하는 삼각형을 관찰한다.
- 선분의 길이를 구하기 위해 사인법칙 또는 코사인법칙을 이용하지 않을까라는 생각을 해본다.

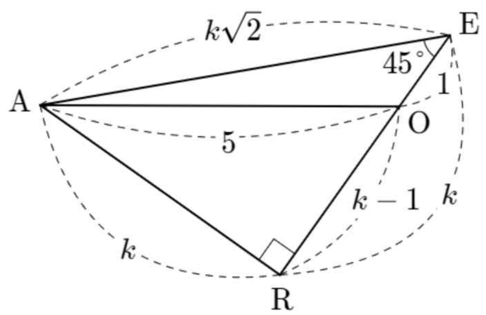
먼저 $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이를 구해보자. **$\overline{\mathrm{CD}}$의 길이를 구하기 위해서는 $\overline{\mathrm{CD}}$를 포함한 삼각형인 ECD를 관찰하여야 한다.** 삼각형 ECD에서 $\overline{\mathrm{CE}}$, $\overline{\mathrm{ED}}$, $\angle \mathrm{CED}=45°$인 것을 모두 알고 있으므로 코사인법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이를 구할 수 있다.
하지만 코사인법칙을 이용하기 전에 항상 먼저 해봐야 할 것이 직각삼각형을 이용한 피타고라스 정리이다. 현재 $\angle \mathrm{CED}=45°$를 알고 있으므로 점 C에서 선분 ED에 내린 수선의 발을 P라 하면 $\overline{\mathrm{EP}}=\overline{\mathrm{CP}}=2\sqrt{2}$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$이다.

결국 $\overline{\mathrm{AC}}$의 길이를 구하는 것이 이 문제의 핵심 포인트인데 마찬가지로 **$\overline{\mathrm{AC}}$의 길이를 구하기 위해 $\overline{\mathrm{AC}}$를 포함한 삼각형인 ACE를 관찰하자.** $\overline{\mathrm{CE}}$의 길이와 $\angle \mathrm{AEC}$의 크기를 알고 있으므로 만약 선분 AE의 길이를 알 수만 있다면 코사인법칙을 통해 $\overline{\mathrm{AC}}$를 구할 수 있을 것이다. **$\overline{\mathrm{AE}}$의 길이를 구하기 위해 $\overline{\mathrm{AE}}$를 포함한 삼각형인 AEO를 관찰하자.** 삼각형 AEO에서 $\angle \mathrm{AEO}=\frac{\pi}{4}$인 것을 알고 있음과 동시에 $\overline{\mathrm{AO}}=r$, $\overline{\mathrm{OE}}=r-4$인 것을 알 수 있다. 하지만 아직 r 또한 미지수이므로 지금 당장은 $\overline{\mathrm{AE}}$의 길이를 구할 수 없으며 r를 먼저 구해야 한다.

반지름인 r를 구하기 위해서는 반지름에 해당하는 길이들을 관찰하여야 한다. $\overline{\mathrm{AO}}$는 우리가 해결해야 할 과제이기 때문에 사용할 수 없다. $\overline{\mathrm{OC}}$ 또한 $r-4$를 표현하는데에 그친다. 바로 원 위의 점 D가 중요 포인트이다. **점 D는 원 위의 점이므로 당연히 원의 중심과 잇고 반지름을 표시하여야 한다.**

반지름을 표시한 순간 삼각형 OED가 등장하며, $\angle \mathrm{OED}=\frac{3}{4}\pi$, $\overline{\mathrm{OE}}=r-4$, $\overline{\mathrm{OD}}=r$이므로 코사인법칙을 통해 r를 구할 수 있다. 하지만 마찬가지로 코사인법칙을 사용하기 전 직각삼각형을 이용할 수 없는지 먼저 살펴보자. 점 D에서 선분 EC에 내린 수선의 발을 Q라 하면 $\overline{\mathrm{DQ}}=3$, $\overline{\mathrm{OQ}}=r-1$, $\overline{\mathrm{OD}}=r$이다.
따라서 $3:4:5$가 적용되는 직각삼각형이 나오고 $r=5$임을 쉽게 알 수 있다.

다시 삼각형 AEO로 돌아와서 $\overline{\mathrm{AE}}$의 길이를 구할텐데 마찬가지로 코사인법칙보다는 직각삼각형을 이용해 보자.
점 A에서 선분 OC의 연장선에 내린 수선의 발을 R라 하면 다음 그림이 생겨난다.



따라서 $k=4$이고 $\overline{\mathrm{AE}}=4\sqrt{2}$이다. 삼각형 ACP 또한 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 이용하여 선분 AC의 길이를 구해주면 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=4\sqrt{5}$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=20\sqrt{2}$이다.