길이 또는 각 찍기

길이 또는 각을 찍는 것은 의외로 단순하다. 답을 찾겠다는 노력만 있으면 된다.

1) 각을 찍는 방법

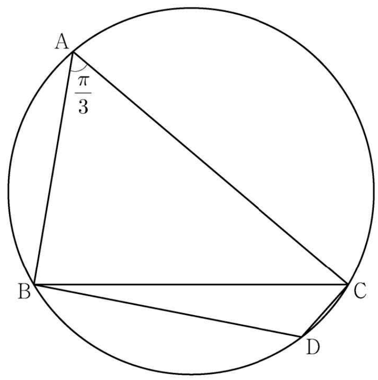
각을 찍기 위해서는 무조건 그 각을 포함한 직각삼각형이 필요하다. 세 변의 길이의 비율을 대략적으로 예측하여 삼각비를 추정해야 한다.

2) 길이를 찍는 방법

길이를 찍기 위해서는 기준이 되는 길이가 필요하다. 짧은 선분이 기준으로 유리하며, 최대한 등분을 열심히 해서 몇 대 몇 비율일지 측정하는 것이 중요하다.

35

반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은?



① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$

④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

$\overline{BD}+\overline{CD}$의 길이를 구하라고 하였으므로 우리는 $\overline{BD}$와 $\overline{CD}$의 길이를 찾으면 된다. 길이를 못 구하겠으면 적어도 서로 어떤 실수배 관계에 있는지 최대한 찾아보도록 하자. $\overline{CD}$의 길이를 k라 한다면 (항상 짧은 것을 기준으로 잡아야 한다.) $\overline{BD}$의 길이는 몇 k같아 보이는가? 열심히 샤프로 k를 잡고 계산해보면 $4k$라고 할 수 있을 것 같다. 즉, $\overline{BD}+\overline{CD}=5k$이다. 따라서 답은 5의 배수여야 한다. 답이 될 수 있는 것은 ② 밖에 없다.

찍을만한 선지

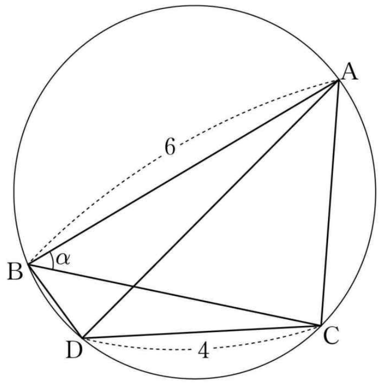
②

실제 답

②

36

그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=6$이고 $\angle\mathrm{ABC}=\alpha$라 할 때, $\cos\alpha=\frac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{CD}}=4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2=9:5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.



문항 해설

삼각형 ADC의 넓이를 일단 표현해보자. $S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times 4\times\sin\alpha$

$\therefore S=\frac{\sqrt{7}}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}$

여기서 멈추면 안되고 답의 꼴은 S^2이기에 S^2까지 나타내야 한다.

$S^2=\frac{7}{4}\times\overline{\mathrm{AD}}^2$

일단 답은 무조건 7의 배수로 찍어야 한다. 마킹가능하기 위해서는 분모의 4가 약분되어야 하기 때문이다. 또한 $\overline{\mathrm{AD}}$의 길이를 찍어야 하는데 제곱해서 4의 배수가 되어야하므로 짝수로 찍어야 한다.

기준이 되는 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{CD}}=4$로 비교해서 $\overline{\mathrm{AD}}$를 추정해보자면 $\overline{\mathrm{AD}}=6$이다. 따라서 답은 $\frac{7}{4}\times 36=63$이다.

답으로 선택할만한 수

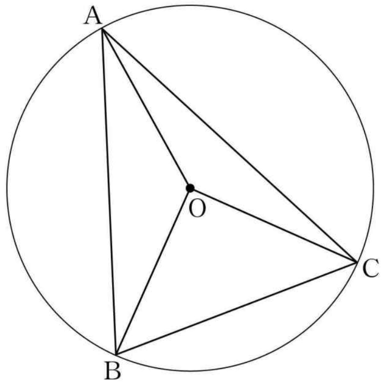
63

실제 답

63

37

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1=4S_2$이고, $\overline{BC}=2\sqrt{5}$일 때, 선분 AB의 길이는?



① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

선지 분석

$\sqrt{\ }$ 안의 숫자들이 공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

선분 AB의 길이를 알려면 반지름의 길이 $r=\sqrt{10}$을 알고 있으므로 코사인법칙을 사용하기 위해 각 AOB의 코사인 값만 알면 된다.

$\overline{AB}^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\cos(\angle AOB)$

$=20-20\cos(\angle AOB)$

① $28=20-20\times\left(-\frac{2}{5}\right)$ $\therefore \cos(\angle AOB)=-\frac{2}{5}$

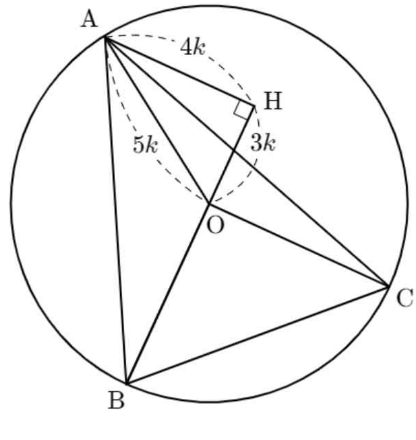
② $30=20-20\times\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\therefore \cos(\angle AOB)=-\frac{1}{2}$

③ $32=20-20\times\left(-\frac{3}{5}\right)$ $\therefore \cos(\angle AOB)=-\frac{3}{5}$

④ $34=20-20\times\left(-\frac{7}{10}\right)$ $\therefore \cos(\angle AOB)=-\frac{7}{10}$

⑤ $36=20-20\times\left(-\frac{4}{5}\right)$ $\therefore \cos(\angle AOB)=-\frac{4}{5}$

일단 코사인 값이 말이 안되는 ①과 ④는 지우자. ②, ③, ⑤의 코사인 값은 자주 보던 값이다. 삼각비를 추정하는 가장 좋은 방법은 직각삼각형을 만드는 것이다.



매우 합리적으로 각 AOB의 코사인 값은 $-\frac{3}{5}$라고 할 수 있을 것 같다.

찍을만한 선지

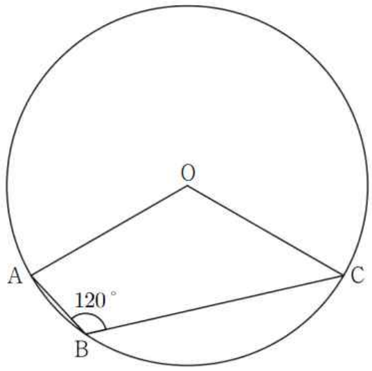
③

실제 답

③

38

그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\angle ABC = 120°$, $\overline{AB}+\overline{BC}=2\sqrt{15}$일 때, 사각형 OABC의 넓이는?



① $5\sqrt{3}$　② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$　③ $6\sqrt{3}$　④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$　⑤ $7\sqrt{3}$

선지 분석

$\sqrt{3}$을 제외하면 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

이 사각형의 넓이의 경우 단순 밑변×높이로 이루어져 있지 않다. 따라서 소수를 함부로 거르면 안 된다. 사각형의 넓이를 한 번에 구하기 어려우므로 당연히 선분 AC를 그어 두 삼각형의 넓이의 합으로 구해야겠다고 생각할 것이다. 두 삼각형은 밑변이 선분 AC로 같으므로 높이의 비만 찾으면 넓이를 찾을 수 있다. 점 O와 점 B에서 선분 AC에 수선의 발을 내려 두 수선의 길이의 비를 열심히 추정해보자. 일단 $1:1$은 아닌 것 같다. 따라서 짝수의 값을 가지는 ③은 답이 아니다. 우리는 항상 비율을 찍을 때에는 정수의 비로 찍어야 한다. 만약 ①이 답이라면 높이의 비율은 $3:2$일 것이고 ⑤가 답이라면 $4:3$의 비율일 것이다. $3:2$이면 정확히 3등분이 되지 않는 듯하다. $4:3$으로 찍자. 따라서 넓이는 7의 배수여야 한다.

찍을만한 선지

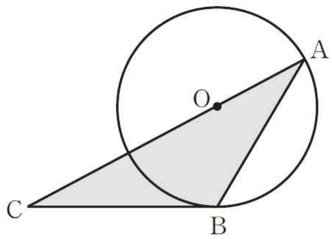
⑤

실제 답

⑤

39

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점 A에 대하여 $\sin(\angle OAB)=\frac{1}{3}$이 되도록 원 위에 점 B를 잡는다. 점 B에서의 접선과 선분 AO의 연장선이 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ACB의 넓이는?



① $\frac{24}{7}\sqrt{2}$　② $\frac{26}{7}\sqrt{2}$　③ $4\sqrt{2}$　④ $\frac{30}{7}\sqrt{2}$　⑤ $\frac{32}{7}\sqrt{2}$

선지 분석

분모를 7로 통분하면 분자가 공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

삼각형의 넓이는 곱으로 이루어져 있으므로 인수가 적은 26은 제외하자. 혼자 분수가 아닌 ③도 제외하자. 여기까지 왔으면 ①, ⑤가 답처럼 보여야 한다. 누구나 선분 OB를 그어 두 삼각형으로 쪼갤 것이다. 그러면 삼각형 AOB의 넓이는 $2\sqrt{2}$로 쉽게 구할 수 있다. 그럼 이제 삼각형 COB의 넓이만 추정하면 된다. 요주의 선지인 ①, ⑤를 $2\sqrt{2}$로 분리해보자.

① : $\frac{24}{7}\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\frac{10}{7}\sqrt{2}$ → 삼각형 $COB=\frac{10}{7}\sqrt{2}$

⑤ : $\frac{32}{7}\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\frac{18}{7}\sqrt{2}$ → 삼각형 $COB=\frac{18}{7}\sqrt{2}$

일단 $\frac{10}{7}\sqrt{2}$는 $2\sqrt{2}$보다도 작다. 그림상으로 아닌 것 같다. 그래서 답은 ⑤이다. 또한 삼각형 COB는 높이가 3이다. 즉, 삼각형 COB의 넓이는 3의 배수여야 한다. 따라서 $\frac{18}{7}\sqrt{2}$가 맞는 듯 하다. 이런 식으로 다른 선지도 $2\sqrt{2}$로 분리해주면 각각 왜 안되는지 알게 될 것이다.

찍을만한 선지

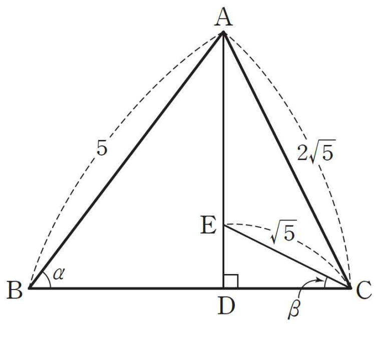
⑤

실제 답

⑤

40

그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{ED}=\sqrt{5}$이다.
$\angle ABD=\alpha$, $\angle DCE=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은?



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$
④ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

선지 분석

분모를 20으로 통분하면 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 값이 구해질 것이기 때문에 함부로 소수를 제외할 수는 없다.
삼각형 ABD의 빗변 5를 보고 당연히 피타고라스 수 3 : 4 : 5가 떠올라야 한다. 그럼 $\overline{AD}=3$, $\overline{AD}=4$로 찍자. 삼각형 ADC에서 빗변의 길이가 $\sqrt{5}$이다. 그러면 직각삼각형에서 $1:2:\sqrt{5}$가 떠올라야 한다. 그럼 $\overline{DC}=2$이고 $\overline{ED}=1$이다. 삼각형의 비율에 따라 값을 추정했을 뿐인데 정확하게 답이 나왔다. 굳이 주어진 조건을 통해 길이를 찾는 것이 아닌 길이를 먼저 찍고 거꾸로 조건에 부합하는지 보는 것도 좋은 방법이다.

찍을만한 선지

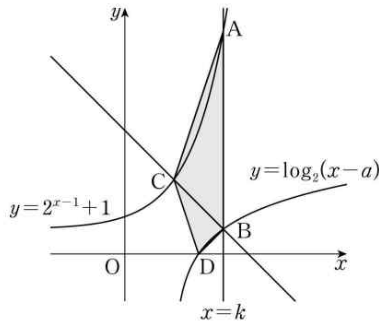
⑤

실제 답

⑤

41

그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자.
$\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0<a<k$)



① 14 ② 13 ③ 12
④ 11 ⑤ 10

선지 분석

공차가 -1인 등차수열이다.

문항 해설

$\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$인 것을 통해 아마 삼각형 ABC의 넓이가 8인 것은 누구나 구할 것이다. 문제는 삼각형 CBD의 넓이인데 이를 잘 찍어보도록 하자.

① $14=8+6$ ② $13=8+5$
③ $12=8+4$ ④ $11=8+3$
⑤ $10=8+2$

일단 삼각형 ABC의 넓이가 8인 것을 이용해 서로의 비율을 확인해보자. 확실해보이는 것은 삼각형 ABC의 넓이의 절반보다 작아보인다. 따라서 일단 ④, ⑤이다. $\overline{BC}=2\sqrt{2}$를 통해 $\overline{BD}$의 길이를 추정해보자. 딱 절반같아 보이므로 $\sqrt{2}$라고 생각할 수 있을 것이고, 각 CBD 또한 직각으로 보이므로 삼각형 CBD의 넓이는 2일 것이다.

찍을만한 선지

⑤

실제 답

⑤