2023

THE7

수능 직전 대비 모의고사

D-7

제작 및 검토

박종원 서울 구로 상아탑학원
박상우 건국대학교 교육공학과
김대현 건국대학교 수학과
김서영 국민대학교 경영정보학부
권용석 성균관대학교 수학과
신동하 성균관대학교 수학교육과
김종희 성균관대학교 수학교육과
허혁준 성균관대학교
오성원 홍익대학교 수학교육과
김주호 홍익대학교 화학공학과
차동희 용인 수학전문공감학원
임형석 고양 임형석대학진학연구소
윤성길 청주 엑스클래스수학학원
염승호 경기 전문과외

제 1 회

2023학년도 수능 대비 THE7 모의고사

수학 영역

성명		수험번호						–				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

너는 하늘이 눈물로 키우는 꽃

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 선택과목(확률과 통계, 미적분, 기하), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

하루종일수학연구소 D-7

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2023학년도 수능 대비 THE7 모의고사 문제지

제 1 회

수학 영역(공통)

5지선다형

1. $4^{\sqrt{2}-2} \times 2^{5-2\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

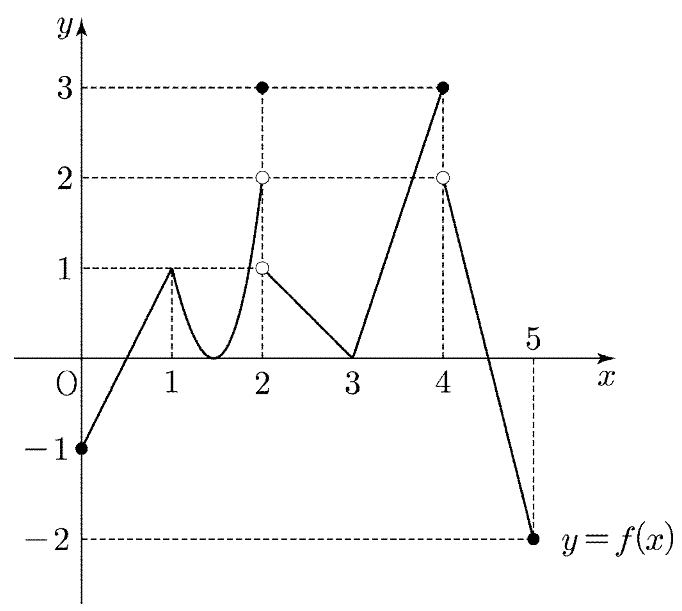
2. 함수 $f(x)=4x^2-5x+1$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

3. $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$에 대하여 $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{10}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{1}{6}$ ⑤ $-\frac{1}{7}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 2+} f(x) + \lim_{x \to 4-} f(x) - \lim_{x \to 5-} f(x)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

5. 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(1)=6,\ f(2)=12$$

를 만족시킬 때, 열린구간 $(1, 2)$에서 방정식 $f(x)=kx^2$이 적어도 하나의 실근을 가진다. 정수 k의 최댓값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

6. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$가

$$f(b-x)=f(b+x),\ f(0)=8$$

를 만족시키고 두 양수 a, b에 대하여

$$\lim_{x \to b-} f(x)=a^2-1,\ \lim_{x \to b+} f(x)=2a-2$$

를 만족시킬 때, $a+b+f(3)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

7. 실수 k에 대하여 $a<k<-2$일 때, 두 함수 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+k$, $g(x)=|2x^2-6x+4|$가 서로 다른 세 점에서 만난다. 상수 a의 값은? [3점]

① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -2 ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -1

8. 양수인 두 실수 a, b에 대하여 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 곡선 $y=\tan(ax)+b$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 $f(k)$라 하자.

$$f(k)=\begin{cases} 2 & (k<3) \\ 3 & (k \geq 3) \end{cases}$$

일 때, $a+b$의 값은? (단, k는 실수이다.) [3점]

① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

9. 최고차항의 계수가 2인 함수 $f(x)$가 자연수 n과 0이 아닌 실수 k에 대하여 방정식

$$(x^{2n}-k)f(x)=0$$

이 n의 값에 관계없이 서로 다른 실근의 개수가 3 이다.
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 $f(x)+f(-x-2)=60$이고 $x \geq 1$에서 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-5)$의 값은? [4점]

(가) 함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 -2이다.

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

10. 다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=2$일 때, (좌변)$=9$, (우변)$=9$이므로 $(*)$이 성립한다.
(ⅱ) $n=m\,(m \geq 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(m-1)^3+m^3=\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$$

이다.
위 등식의 양변에 $\boxed{(가)}$ 를 더하여 정리하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(m-1)^3+m^3+\boxed{(가)}$$
$$=\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2+\boxed{(가)}$$
$$=(m+1)^2\times\boxed{(나)}$$
$$=\boxed{(다)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 2 이상의 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $\frac{f(2)+g(-2)}{h(1)}$의 값은? [4점]

① 3 ② 1 ③ -1 ④ -3 ⑤ -5

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-12t+9,\ v_2(t)=2t-1$$

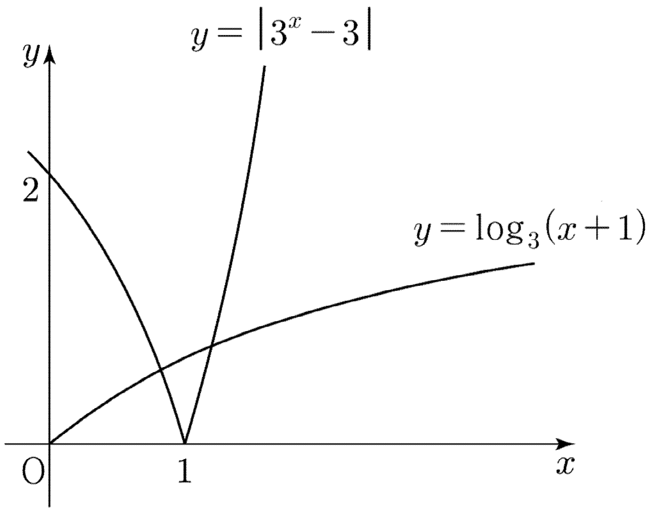
이다. 두 점 P, Q가 시각 $t=a$와 $t=b\,(0<a<b)$에서 만날 때, 시각 $t=0$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리를 D_1, 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 Q가 움직인 거리를 D_2라 하자. D_1-D_2의 값은? [4점]

① $\frac{47}{2}$ ② 24 ③ $\frac{49}{2}$ ④ 25 ⑤ $\frac{51}{2}$

12. 함수 $f(x)=x^3-3(a+1)x^2+3a(a+2)x+5$의 극댓값이 9일 때, 극솟값은 k이다. 양수 a에 대하여 $a+k$의 값은? (단, k는 실수이다.) [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

13. 그림과 같이 두 곡선 $y=|3^x-3|$, $y=\log_3(x+1)$이 만나는 두 점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$) [4점]



〈보기〉

ㄱ. $x_2-x_1>\log_3 2$

ㄴ. $(x_2-x_1)(3^{x_2}-3^{x_1})<2\log_3 2$

ㄷ. $\dfrac{1-\log_3 2}{\log_3 2}<\log_3(\log_6 12)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)=-3x+k$가 $x=1$에서 접한다. 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$가 극값을 가질 때, 함수 $h(x)$와 직선 $y=0$의 교점 중 접점이 아닌 점의 x좌표를 α라 하자. $f(\alpha)=5$일 때, 20 이하의 두 자연수 α, k에 대하여 가능한 모든 순서쌍 (α, k)의 개수는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

15. $a_1 = 6$, $a_4 = -4$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+4} = \begin{cases} 2a_{n+2} - a_n & (n\text{은 홀수}) \\ a_{n+2} - a_n & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} |a_{2k}| = 78$이고 $\sum_{k=1}^{13} a_k = 0$일 때, $a_{11} + a_{22}$의 값은? (단, $a_2 > 0$) [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

단답형

16. 방정식 $\log_x (x+12) = 2$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$이고 $f(1) + f(0) = 0$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} b_k = 11$일 때,

$$\sum_{k=1}^{10} c^2 a_k = 720, \ \sum_{k=1}^{10} \{ca_k + 4b_k\} = 74$$

를 만족시키는 자연수 c의 값을 구하시오. [3점]

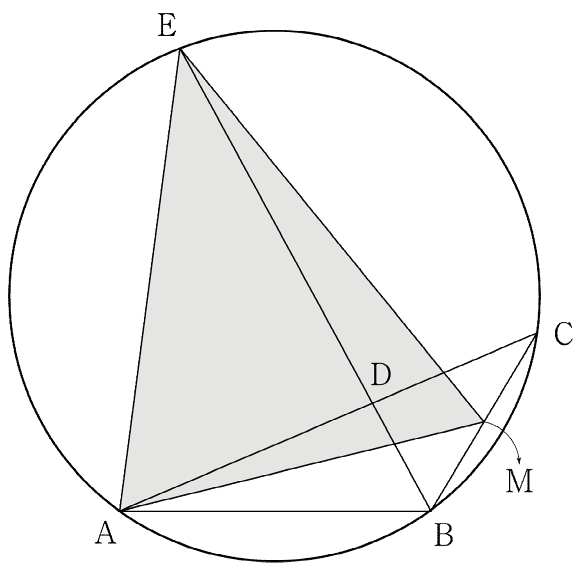
19. 두 자연수 a, p에 대하여 함수 $f(x) = a(x-p)^2 + 2$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(1, f(1))$, $\mathrm{B}(3, f(3))$, $\mathrm{C}(5, f(5))$가 있다.
두 점 A, C 사이의 평균변화율이 12이고 $f'(1)f'(5) < 0$이다. 점 B에서의 접선의 x절편을 m이라 할 때, $a \times p \times m$의 값을 구하시오. [3점]

20. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족할 때, 가능한 모든 자연수 a_1의 개수는 3이다. 가능한 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. (단, d는 정수이다.) [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + a_k) = 2S_6$

(나) $S_6 \neq S_7$, $a_7 \neq 0$

21. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=3$, $\overline{AC}>4$인 삼각형 ABC에 대하여 삼각형 ABC의 외접원 위의 두 점 A, C에서의 접선이 이루는 예각의 크기가 $60°$이다. $\angle ABC$를 이등분하는 직선이 선분 AC와 만나는 점을 D, $\angle ABC$를 이등분하는 직선이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하자. 선분 BC의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 AEM의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



22. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 k에 대하여 함수 $g(x)=f(|x|+k)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(4)=g'(4)=0$
(나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2023학년도 수능 대비 THE7 모의고사 문제지

제 1 회

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_6\mathrm{C}_5 + {}_6\mathrm{P}_3$의 값은? [2점]

① 123 ② 126 ③ 129 ④ 132 ⑤ 135

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(180, \frac{1}{6}\right)$을 따를 때, $\mathrm{P}(25 \le X \le 40)$의 값을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6687 ② 0.7745 ③ 0.8185 ④ 0.8413 ⑤ 0.9104

25. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A-B)=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{7}{10},\ \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B)$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

26. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르고, 확률변수 $Y=2X+5$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

〈보기〉

ㄱ. $\mathrm{P}(X>5)=\mathrm{P}(Y>15)$

ㄴ. $\mathrm{P}(|X-20|<5)<\mathrm{P}(40<Y<50)$

ㄷ. $\mathrm{P}(X>a)<\mathrm{P}(Y>2a)$

ㄹ. $\mathrm{P}(X<a+10)=\mathrm{P}(Y<2a+25)$

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

27. 동해에서 잡은 오징어 한 마리의 무게가 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 바다에서 잡은 오징어 중에서 임의추출한 크기가 36인 표본을 조사하였더니 오징어의 무게의 표본평균의 값이 300이었다.
이 결과를 이용하여 동해에서 잡은 오징어 한 마리의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구하면 $300+a \le m \le 300+b$이다. $2a+5b=9.03$일 때, σ의 값은?
(단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.58)=0.495$로 계산한다.) [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$와 두 함수 $g: X \to X$, $h: X \to X$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x=1, 3) \\ h(x) & (x=2, 4) \end{cases}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 h의 개수는? [4점]

(가) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) \le 8$
(나) $g(1)+h(1)=5$
(다) $g(3)-h(3)=1$

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

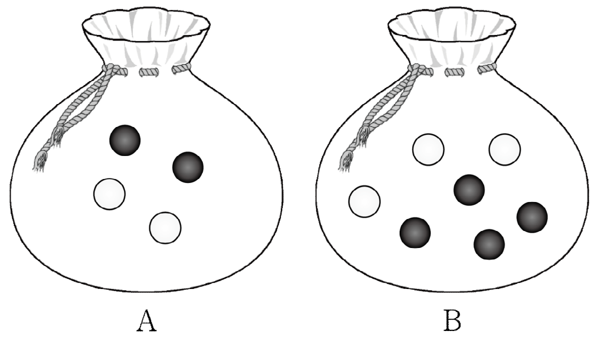
단답형

29. 연속확률변수 X가 만족하는 범위는 $1 \le X \le 9$이며, X의 확률밀도함수 $f(x)$는 직선 $x=5$에 대하여 대칭이다. 5 이상의 자연수 k가 다음 조건을 만족시킬 때, $6k \times \mathrm{P}(5 \le X \le k)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\displaystyle\sum_{n=5}^{k} \mathrm{P}(1 \le X \le n) = \frac{17}{6}$

(나) $\mathrm{P}(2 \le X \le k) = \frac{11}{12}$

30. 그림과 같이 흰 공과 검은 공이 각각 2개씩 들어있는 주머니 A가 있고, 흰공 3개와 검은 공 4개가 들어있는 주머니 B가 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내고 주머니 A에 남은 공 3개를 모두 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 꺼낸다. 주머니 B에서 꺼낸 공이 모두 흰 공일 때, 주머니 A에서 꺼낸 공이 흰공이었을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2023학년도 수능 대비 THE7 모의고사 문제지

제 1 회 수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

24. $\lim_{n \to -\infty} \left(\sqrt{n^2-5n+3}+n\right)$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

25. 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(\cos x)$에 대하여 방정식 $f(x)-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}=0$의 서로 다른 두 실근을 각각 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하자. $x=\alpha$에서 $x=\beta$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는? [3점]

① $\ln 5$ ② $\ln\frac{9}{2}$ ③ $\ln 4$ ④ $\ln\frac{7}{2}$ ⑤ $\ln 3$

26. 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)=e^{-x+1}(x^2-x)$와 함수 $f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선 $g(x)$가

$$(x-a)\{f(x)-g(x)\}\le 0$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$, 직선 $x=0$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 실수이다.) [3점]

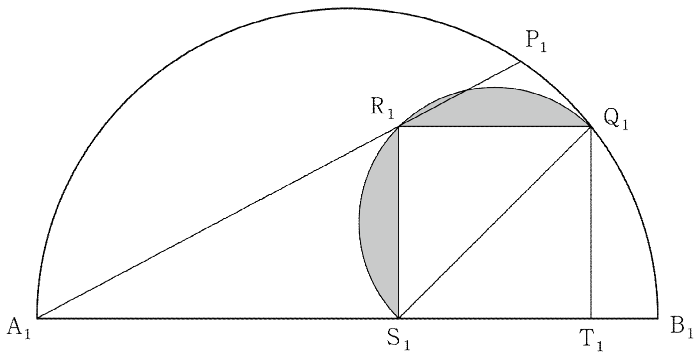
① $e-\frac{1}{2}$ ② $e-1$ ③ $e-\frac{3}{2}$ ④ $e-2$ ⑤ $e-\frac{5}{2}$

27. 그림과 같이 길이가 10인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원이 있다. 호 A_1B_1 위의 점 P_1에 대하여 $\angle P_1A_1B_1=\theta$라 할 때, $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$를 만족시킨다. 선분 A_1B_1 위의 서로 다른 두 점 S_1, T_1과 호 A_1B_1 위의 점 P_1이 아닌 점 Q_1, 선분 A_1P_1 위의 점 R_1에 대하여 사각형 $R_1S_1T_1Q_1$이 정사각형이 되도록 잡을 때, 선분 S_1Q_1을 지름으로 하는 반원의 내부와 삼각형 $S_1Q_1R_1$의 외부로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

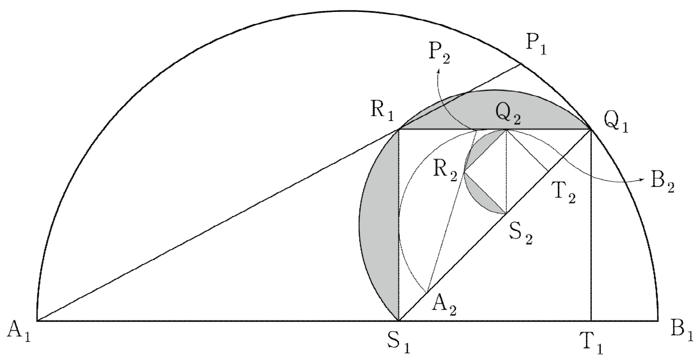
그림 R_1에서 선분 S_1Q_1 위의 서로 다른 두 점 A_2B_2를 지름으로 하고 삼각형 $S_1Q_1R_1$에 내접하는 반원을 잡는다.

호 A_2B_2 위의 점 P_2에 대하여 $\angle P_2A_2B_2=\theta$라 할 때, $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$를 만족시킨다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 Q_2, R_2, S_2, T_2를 잡아 얻은 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{225}{91}(a\pi-b)$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 자연수이다.) [3점]



R_1



R_2

⋮

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

28. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2\sin x)^{2n+1}-3\sin^2 x+2}{(2\sin x)^{2n}+1}$$

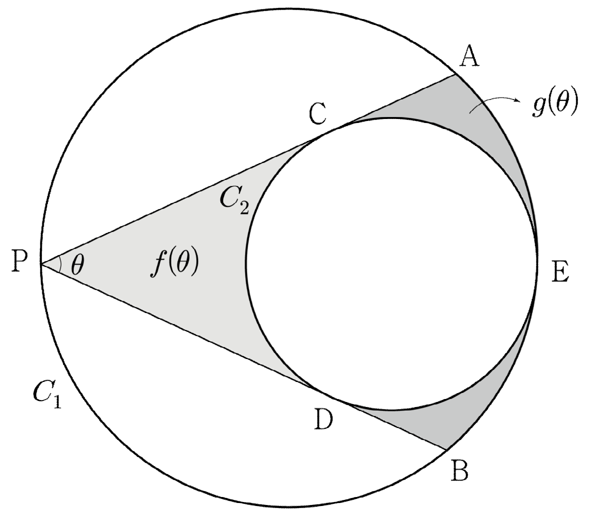
가 있다. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$는 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능하다. $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi^4}{108}+\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^3$ ② $\frac{\pi^4}{108}+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi^3$ ③ $\frac{\pi^4}{108}+\frac{\sqrt{6}}{9}\pi^3$

④ $\frac{\pi^4}{144}+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi^3$ ⑤ $\frac{\pi^4}{144}+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi^3$

단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 C_1 위의 점 P에 대하여 원 C_1 위의 점 P가 아닌 서로 다른 두 점 A, B에 각각 그은 두 선분 AP, BP와 점 P를 포함하지 않는 호 AB에 동시에 접하는 원 C_2가 있다. 두 선분 AP, BP와 원 C_2가 접하는 점을 각각 C, D라 하고, 원 C_1과 원 C_2가 접하는 점을 E라 하자. 두 선분 CP, DP와 점 E를 포함하지 않는 호 CD로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 AC, BD와 점 E를 포함하는 두 호 AB, CD로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이고 $\angle \mathrm{APB}=\theta$일 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\pi$) [4점]



30. 두 실수 m, $k(k>-e^2)$에 대하여 직선 $y=m(x-4)$와 곡선 $y=\ln(x-4)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하고, 직선 $y=m(x-4)$와 곡선 $y=e^{|x|-2}+k$(k는 실수)의 그래프가 만나는 점 중 x좌표가 4보다 작은 점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 함수 $f(m)+g(m)$이 $m=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, 가능한 모든 실수 k의 값의 곱이 $\frac{t}{e^s}$이다. $s+t$의 값을 구하시오. (단, s와 t는 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2023학년도 수능 대비 THE7 모의고사 문제지

제 1 회

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 포물선 $y^2 = 4px\ (p > 0)$에 대하여 직선 $y = p$와 만나는 점의 x좌표가 $\frac{1}{2}$일 때, p의 값은? [2점]

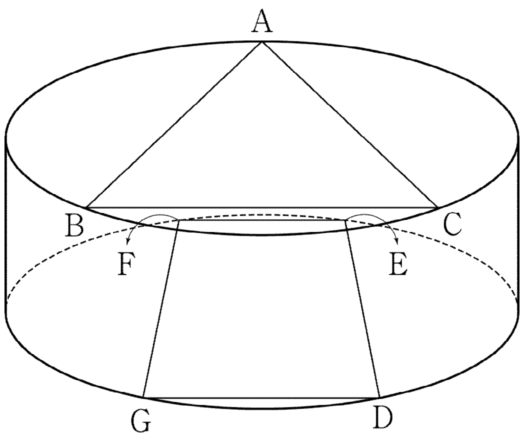
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 좌표공간에서 두 점 $(1,\ a,\ 2)$, $(-1,\ 4,\ b)$를 각각 xz평면에 대하여 대칭이동한 두 점의 중점이 $(0,\ 2,\ -3)$일 때, ab의 값은? [3점]

① 32 ② 40 ③ 48 ④ 56 ⑤ 64

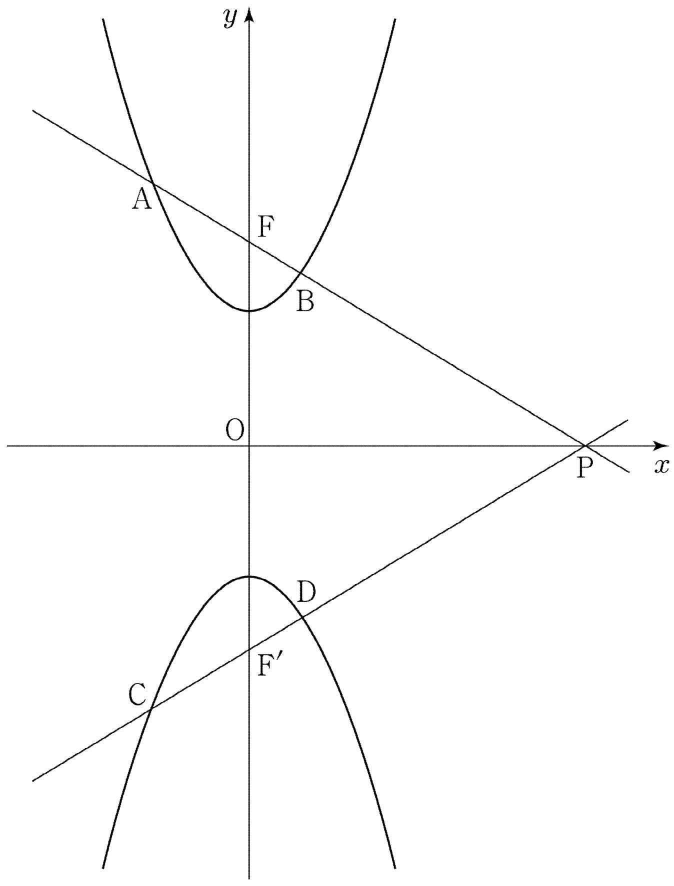
25. 그림과 같이 높이가 1, 밑면의 반지름의 길이가 2인 원기둥에서 윗면에는 정삼각형 ABC가 내접하고 밑면에는 정사각형 DEFG가 내접하고 두 선분 BC, DG가 평행한다. 선분 AB의 중점을 M이라 하고 점 M에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{MH}}^2=\frac{a+b\sqrt{3}}{4}$이다. $a-b$의 값은?

(단, a, b는 자연수이다.) [3점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

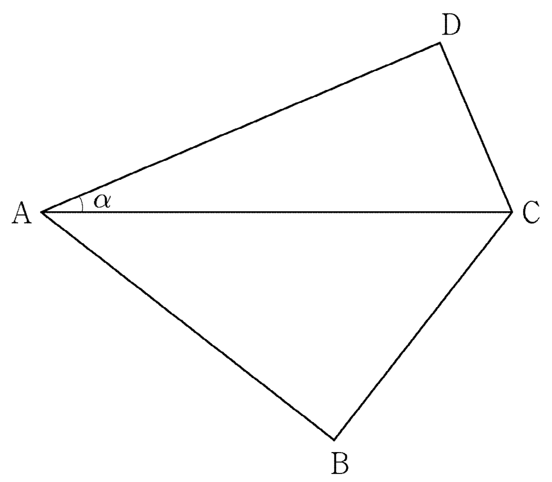
26. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=-1$의 두 초점 F, F′에 대하여 점 F와 x축 위의 점 P를 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고 점 F′과 x축 위의 점 P를 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}=6$일 때, 삼각형 ABF′의 둘레의 길이는? (단, 점 P의 x좌표는 0보다 크다.) [3점]



① 32 ② 31 ③ 30 ④ 29 ⑤ 28

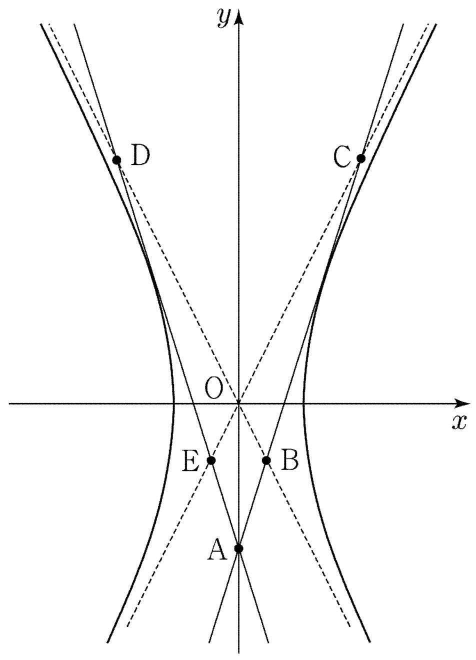
27. 그림과 같이 $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=10$인 사각형 ABCD가 있다. $\angle\mathrm{DAC}=\alpha$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$의 값은? [3점]

(가) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$
(나) $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{4}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{8}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}$



① 64 ② 60 ③ 56 ④ 52 ⑤ 48

28. 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(0,\ -4\sqrt{5})$에서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{64}=1$에 그은 두 접선과 쌍곡선의 두 점근선이 만나는 네 점을 각각 B, C, D, E라 하자. 삼각형 BCE의 넓이가 삼각형 ABE의 넓이의 k_1배이고 삼각형 OCD의 넓이가 삼각형 BOE의 넓이의 k_2배일 때, k_1+k_2의 값은? [4점]



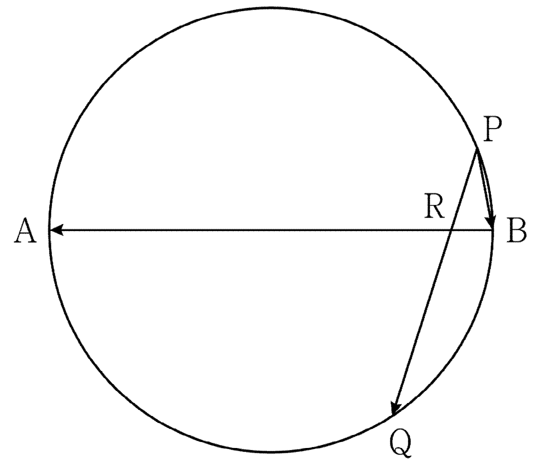
① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

단답형

29. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=4$
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=3t\overrightarrow{\mathrm{BA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}\ (0<t<1)$

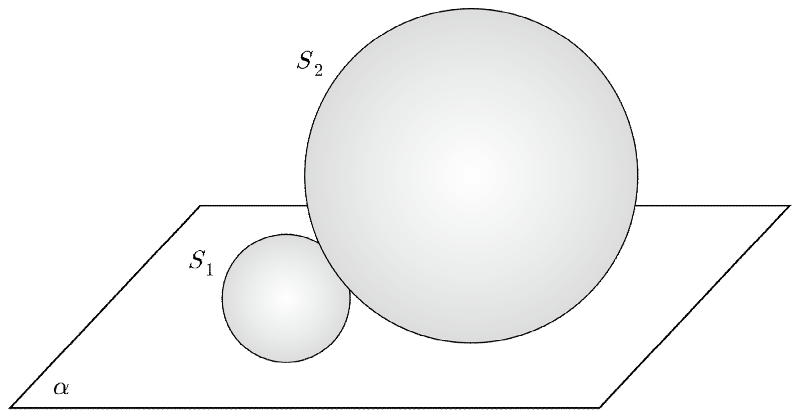
선분 AB와 선분 PQ가 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{\mathrm{AR}}^2+\overline{\mathrm{RB}}^2$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 구 S_1과 반지름의 길이가 20인 구 S_2에 대하여 두 구 S_1, S_2가 서로 외접하고 평면 α와 각각 한 점에서 만난다. 구 S_1 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> 점 P에서 구 S_2에 그은 접선이 구 S_2와 만나는 점을 Q라 할 때, 점 Q가 나타내는 도형의 길이는 $\frac{40\sqrt{65}\pi}{13}$이다.

점 P와 평면 α 사이의 거리가 최대일 때, 점 P에서 구 S_1과 접하는 평면을 β라 하자. 구 S_2와 평면 β가 만나서 생기는 원을 C라 할 때 원 C의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 $k\pi$이다. k의 값을 구하시오. (단, k는 실수이다.) [4점]



> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2023학년도 수능 대비 THE7 모의고사 문제지

수학 영역 정답 및 해설

[THE7 모의고사 빠른 정답]

공통

1	②	*2*	⑤	*3*	①	*4*	⑤	*5*	④
6	④	*7*	②	*8*	①	*9*	③	*10*	①
11	⑤	*12*	③	*13*	②	*14*	④	*15*	③
16	4	*17*	5	*18*	24	*19*	28	*20*	48
21	73	*22*	128						

확률과 통계

23	②	*24*	③	*25*	②	*26*	⑤	*27*	④
28	①	*29*	22	*30*	11				

미적분

23	①	*24*	②	*25*	⑤	*26*	⑤	*27*	⑤
28	④	*29*	2	*30*	7				

기하

23	②	*24*	⑤	*25*	⑤	*26*	①	*27*	①
28	④	*29*	269	*30*	300				

제작총괄 : ALL DAY Math Lab.

제작일자 : 2022.11.08

제작 및 검토

박종원 서울 구로 상아탑학원
박상우 건국대학교 교육공학과
김대현 건국대학교 수학과
김서영 국민대학교 경영정보학부
권용석 성균관대학교 수학과
신동하 성균관대학교 수학교육과
김종희 성균관대학교 수학교육과
허혁준 성균관대학교 (검토)
오성원 홍익대학교 수학교육과
김주호 홍익대학교 화학공학과
차동희 용인 수학전문공감학원
임형석 고양 임형석대학진학연구소
윤성길 청주 엑스클래스수학학원
염승호 경기 전문과외

[THE7 모의고사 해설]

1.

$$4^{\sqrt{2}-2}\times 2^{5-2\sqrt{2}}=2^{2\sqrt{2}-4}\times 2^{5-2\sqrt{2}}$$
$$=2^{2\sqrt{2}-4+5-2\sqrt{2}}$$
$$=2$$

2.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2$$
$$=2f'(1)$$

도함수 $f'(x)=8x-5$이므로 $f'(1)=3$

$\therefore\ 2f'(1)=6$

3.

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$

이므로 $\sin^2\theta=\frac{1}{10}$, $\sin\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}\left(\because\ \frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\right)$

$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

이므로 $\tan^2\theta=\frac{1}{9}$

$\therefore\ \tan\theta=-\frac{1}{3}\left(\because\ \frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\right)$

4.

$\lim_{x\to 2+}f(x)+\lim_{x\to 4-}f(x)-\lim_{x\to 5-}f(x)=1+3-(-2)=6$

5.

$g(x)=f(x)-kx^2$이라 하자. 방정식 $f(x)=kx^2$의 실근은 방정식 $g(x)=0$의 실근과 같고 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[1,2]$에서 연속이므로 열린구간 $(1,2)$에서 하나의 실근을 가지려면 사잇값 정리에 의해 $g(1)g(2)<0$

이때 $g(1)=f(1)-k=6-k$, $g(2)=f(2)-4k=12-4k$

이므로 $g(1)g(2)=(6-k)(12-4k)=4(k-3)(k-6)$

$\therefore\ 3<k<6$

따라서 정수 k의 최댓값은 5

6.

$f(b-x)=f(b+x)$이므로 축의 방정식이 $x=b$

이차함수 $f(x)$는 $x=b$에서 연속이므로

$a^2-1=2a-2$

$a^2-2a+1=(a-1)^2=0$

$\therefore\ a=1$

따라서 꼭짓점의 좌표가 $(b,\ 0)$이므로

$f(x)=2(x-b)^2$이고 $f(0)=8$, $2b^2=8$

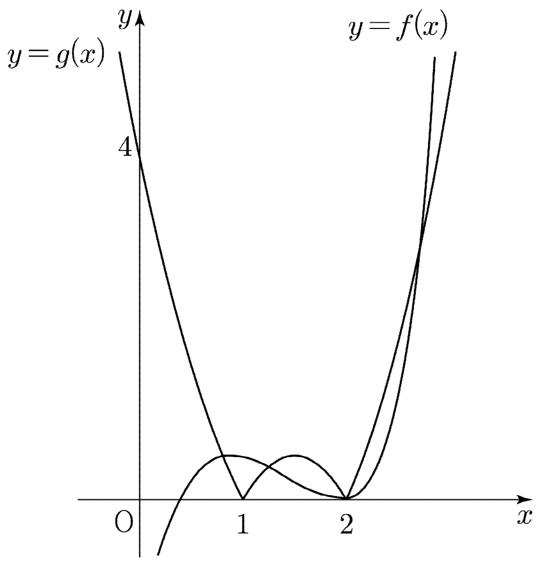
$\therefore\ b=2\ (\because\ b>0)$

$\therefore\ f(x)=2(x-2)^2$

$\therefore\ a+b+f(3)=1+2+2=5$

7.

우선, $k=-2$인 상황을 살펴보자.

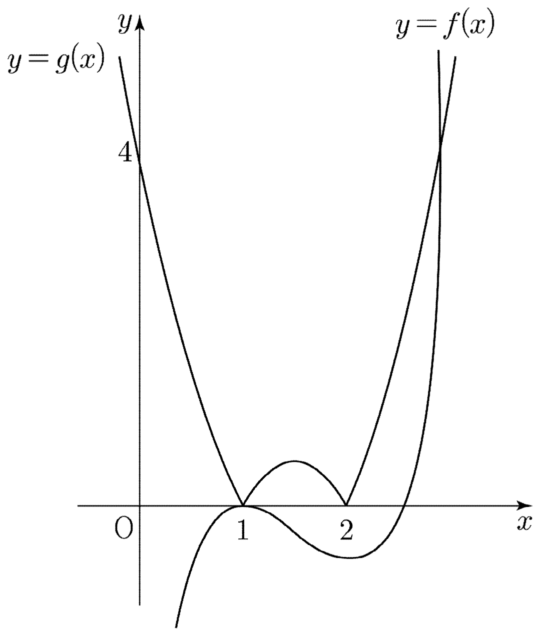


두 함수 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-2$, $g(x)=|2x^2-6x+4|$가 그림과 같이 서로 다른 네 점에서 만난다.

$k=-\frac{5}{2}$인 상황을 살펴보자.

두 함수 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-\frac{5}{2}$, $g(x)=|2x^2-6x+4|$가 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만난다.

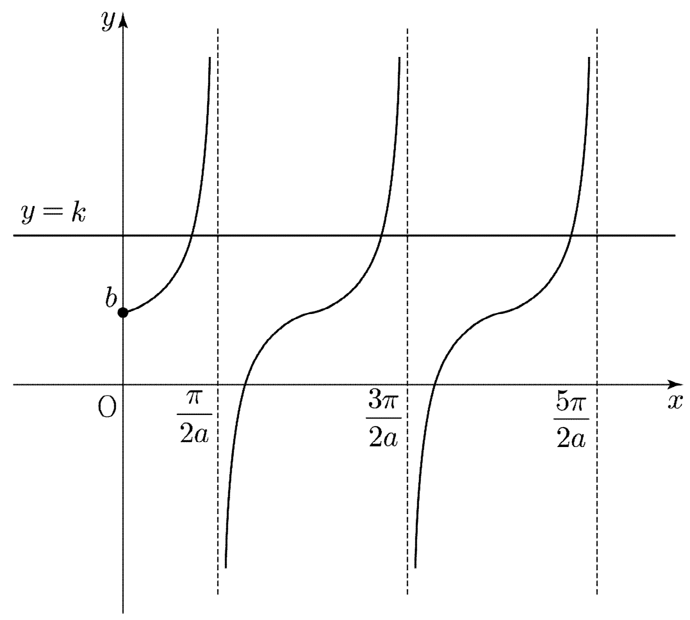
따라서 $-\frac{5}{2}<k<-2$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 다른 세 점에서 만난다.



그러므로 $f(2)=0$일 때, $k=-2$이고 $f(1)=0$일 때, $k=-\frac{5}{2}$

$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$

8.



곡선 $y=\tan(ax)+b$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수인 $f(k)$가 $k=3$을 기준으로 바뀌므로 $b=3$

$k\geq 3$일 때, $f(k)=3$이도록 하는 x의 범위는

$$0\leq x\leq \frac{5\pi}{2|a|}$$

이므로 $\frac{5\pi}{2|a|}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ a=5$

$\therefore\ a+b=5+3=8$

9.

자연수 n에 대하여 $2n$은 짝수이므로 방정식 $(x^{2n}-k)=0$은 k의 값에 따라 실근의 개수가 달라진다.

(i) $k>0$일 때

방정식 $(x^{2n}-k)=0$의 실근의 개수는 $x=\pm\sqrt[2n]{k}$으로 2이다.
따라서 방정식 $(x^{2n}-k)f(x)=0$의 실근의 개수가 3이 되기 위해서는 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 1이어야 하므로 함수 $f(x)$는 일차식이다.

(ii) $k<0$일 때

방정식 $(x^{2n}-k)=0$의 실근은 존재하지 않는다.
따라서 방정식 $(x^{2n}-k)f(x)=0$의 실근의 개수가 3이 되기 위해서는 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 3이어야 하므로 함수 $f(x)$는 삼차식이다.

(i), (ii)에 의해 함수 $f(x)$는 일차함수 또는 삼차함수이다.

$f(x)=ax+b$라 하면 함수 $f(x)$의 그래프는 직선이므로 $x\geq 1$에서 역함수를 갖고 조건 (나)에 의해

$f(1)=a+b=-2$ …… ㉠

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x-2)=60$이므로 함수 $f(x)$는 점 $(-1,\ 30)$에 대하여 대칭이다.

$f(-1)=-a+b=30$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-16$, $b=14$

$\therefore\ f(x)=-16x+14$

이때 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이어야 하므로 모순이다.

따라서 함수 $f(x)$는 삼차함수이다.

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x-2)=60$이므로 함수 $f(x)$는 점 $(-1,\ 30)$에 대하여 대칭이고, 도함수 $f'(x)$는 직선 $x=-1$에 선대칭이다.

이때 도함수 $f'(x)$는 이차함수이므로 점 $(-1,\ c)$(c는 상수)를 꼭짓점으로 갖는다고 하자.

$f'(x)=6(x+1)^2+c$이므로 $f(x)=2(x+1)^3+cx+d$ (d는 상수)

방정식 $(x^{2n}-k)f(x)=0$의 실근의 개수가 3이기 위해서는 방정식

$f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 갖는다.
조건 (가)에 의해 $x \geq 1$에서 함수 $f(x)$는 증가함수이고 조건 (나)에 의해

$$f(1)=a+b+16=-2,\ a+b=-18 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

또한, 함수 $f(x)$는 점 $(-1,\ 30)$에 대칭이므로

$$f(-1)=-a+b=30 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣을 연립하면 $a=-24,\ b=6$

$\therefore\ f(x)=2(x+1)^3-24x+6$

$\therefore\ f(-5)=-128+120+6=-2$

10.

(ⅰ) $1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \qquad \cdots (*)$

에서 $n=2$를 대입하면 (좌변)$=9$, (우변)$=9$
이므로 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=m\,(m \geq 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(m-1)^3+m^3=\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$$

이다.
이때 다음 항인 $m+1$번째 항에 해당되는 $\boxed{(m+1)^3}$을 양변에 더하여 정리하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(m-1)^3+m^3+\boxed{(m+1)^3}$$

$$=\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2+\boxed{(m+1)^3}$$

$$=(m+1)^2\times\boxed{\left\{\left(\frac{m}{2}\right)^2+(m+1)\right\}}$$

$$=(m+1)^2\times\boxed{\frac{m^2+4m+4}{4}}$$

$$=(m+1)^2\times\boxed{\left(\frac{m+2}{2}\right)^2}$$

$$=\boxed{\left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 2 이상의 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

$\therefore\ f(m)=(m+1)^3,\ g(m)=\left(\dfrac{m+2}{2}\right)^2,\ h(m)=\left\{\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$

$\therefore\ \dfrac{f(2)+g(-2)}{h(1)}=\dfrac{3^3+0}{3^2}=3$

11.

$v_1(t),\ v_2(t)$를 t에 대하여 적분하면

$$x_1(t)=t^3-6t^2+9t+C_1,\ x_2(t)=t^2-t+C_2$$

($C_1,\ C_2$는 적분상수)

또한, 두 점 P, Q의 시각 $t=0$에서 위치는 원점이므로

$$x_1(0)=x_2(0)=C_1=C_2=0$$

두 점 P, Q가 시각 $t=a,\ t=b\,(0<a<b)$에서 만나므로

$x_1(t)=x_2(t),\ t^3-6t^2+9t=t^2-t,\ t^3-7t^2+10t=0$

$\therefore\ t(t-2)(t-5)=0$

$\therefore\ a=2,\ b=5\ (\because\ 0<a<b)$

시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^5 |3t^2-12t+9|\,dt$

$\displaystyle=\int_0^1 (3t^2-12t+9)dt+\int_1^3 (-3t^2+12t-9)dt$

$\displaystyle+\int_3^5 (3t^2-12t+9)dt$

$=\left[t^3-6t^2+9t\right]_0^1+\left[-t^3+6t^2-9t\right]_1^3+\left[t^3-6t^2+9t\right]_3^5$

$=28$

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 Q가 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^2 |2t-1|\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}(-2t+1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^2 (2t-1)dt$

$\displaystyle=\left[-t^2+t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[t^2-t\right]_{\frac{1}{2}}^2$

$=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ D_1=28,\ D_2=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ D_1-D_2=28-\dfrac{5}{2}=\dfrac{51}{2}$

12.

$f'(x)=3x^2-6(a+1)x+3a(a+2)$
$=3(x-a)(x-a-2)$

이므로 $x=a$에서 극대, $x=a+2$에서 극소이다.

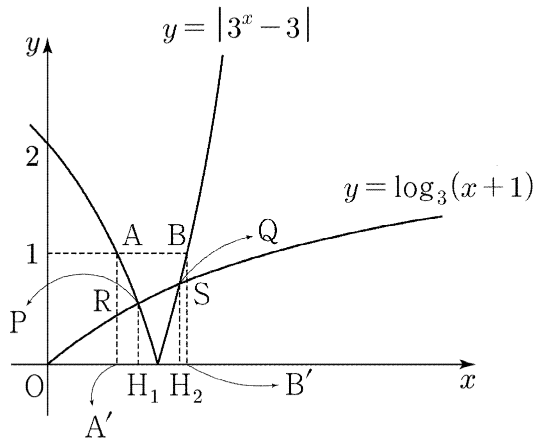
$f(a)=a^3+3a^2+5=9,\ a^3+3a^2-4=0,\ (a-1)(a+2)^2=0$

$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

$f(x)=x^3-6x^2+9x+5$에서 $f(3)=5$
이므로 $k=5$

$\therefore\ a+k=1+5=6$

13.



ㄱ. 직선 $y=1$과 곡선 $y=|3^x-x|$가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 두 점 A, B의 x좌표는 $\log_3 2,\ \log_3 4$이다.
이때 두 곡선 $y=|3^x-x|,\ y=\log_3(x+1)$이 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면 $x_2-x_1<\log_3 2$ (거짓)

ㄴ. 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H_1, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H_2라 하자.
이때 $x_2-x_1=$(사다리꼴 PH_1H_2Q의 높이),
$\log_3 2=$(두 선분 PH_1, QH_2의 길이의 합)
이므로 $(x_2-x_1)\left(3^{x_2}-3^{x_1}\right)\times\dfrac{1}{2}=$(사다리꼴 PH_1H_2Q의 넓이)
$(x_2-x_1)\left(3^{x_2}-3^{x_1}\right)<2\log_3 2$의 양변을 2로 나눠주면

$\frac{(x_2-x_1)(3^{x_2}-3^{x_1})}{2}<\log_3 2$

이고 $\log_3 2$는 밑변이 선분 AB이고 높이가 1인 직사각형을 의미한다. 직사각형이 사다리꼴 $\mathrm{PH_1H_2Q}$를 포함하므로

$(x_2-x_1)(3^{x_2}-3^{x_1})<2\log_3 2$는 참이다.

추가) ㄱ에 의해 $(x_2-x_1)<\log_3 2$이므로 $(3^{x_2}-3^{x_1})<2$와 비교하면 된다.

식을 변형하여 $\frac{3^{x_2}-3^{x_1}}{2}<1$로 바꿔주면 좌변은 선분 PQ의 중점의 y좌표를 의미하므로 1보다 작다.

$\therefore\ (x_2-x_1)(3^{x_2}-3^{x_1})<2\log_3 2$

ㄷ. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하자.

$\frac{1-\log_3 2}{\log_3 2}<\log_3(\log_6 12)$의 양변에 $\log_3 2$를 곱하면

$1-\log_3 2<\log_3 2\times\log_3(\log_6 12)$

좌변은 점 $\mathrm{H_1}$에서 점 $(1, 0)$까지의 거리이고, 우변의 $\log_3(\log_6 12)$는 두 선분 AA′, BB′과 곡선 $\log_3(x+1)$이 만나는 두 점 R, S의 y좌표의 차이다.

따라서 좌변은 높이가 1, 밑변이 $1-\log_3 2$인 삼각형이고 우변은 높이가 $\log_3(\log_6 12)$, 밑변이 $\log_3 2$인 삼각형이다.

이에 대소 관계를 비교하면

$\log_3 2<1$, $\log_3(\log_6 12)<\log_3\left(\frac{3}{2}\right)$

이므로 $\frac{1-\log_3 2}{\log_3 2}>\log_3(\log_6 12)$ (거짓)

따라서 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와

일차함수 $g(x)=-3x+k$가 $x=1$에서 접할 때,

함수 $h(x)$는 직선 $y=0$ 즉, x축과 $x=1$에서 접한다.

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 x축과 접하고 $x=\alpha$에서 x축과 접하지 않고 만나는 형태의 삼차함수이므로

$$h(x)=(x-1)^2(x-\alpha)$$

함수 $h(x)$는 극값을 가져야 하므로 도함수 $h'(x)$가 x축과 접하지 않고 만나야 한다.

$$\begin{aligned}h'(x)&=2(x-1)(x-\alpha)+(x-1)^2\\&=(x-1)(2x-2\alpha+x-1)\\&=(x-1)(3x-2\alpha-1)\\&=0\end{aligned}$$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$ 또는 $x=\frac{2\alpha+1}{3}$에서 극값을 갖는다.

만약, $1=\frac{2\alpha+1}{3}$이면 $3=2\alpha+1$, $2\alpha=2$, $\alpha=1$

하지만 이 경우에는 $h(x)=(x-1)^3$, $h'(x)=3(x-1)^2$이므로 $h'(x)$는 x축과 $x=1$에서 접하면서 만난다.

$h'(x)$가 x축과 $x=1$에서 접하면서 만나면, $h(x)$는 $x=1$에서 극점을 갖지 않고, x축과 $x=1$에서 삼중근을 갖는 그래프의 형태로 나타난다.

$\therefore\ \alpha\neq 1$

이때 $f(x)=h(x)+g(x)$이므로 $f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)-3x+k$

$\therefore\ f(\alpha)=(\alpha-1)^2(\alpha-\alpha)-3\times\alpha+k=-3\alpha+k=5$

이 경우에서 20 이하의 두 자연수 α, k에 대하여 가능한 모든 순서쌍 (α, k)의 개수는 $(2, 11)$, $(3, 14)$, $(4, 17)$, $(5, 20)$으로 4이다.

15.

$a_2=a$라 하자.

$a_4=-4$이므로

$a_6=a_4-a_2=-4-a$

$a_8=a_6-a_4=-a$

$a_{10}=a_8-a_6=4$

$a_{12}=a_{10}-a_8=a+4$

$\vdots$

이때 $a_2>0$이므로

$|a_2|=a$, $|a_4|=4$, $|a_6|=a+4$,

$|a_8|=a$, $|a_{10}|=4$, $|a_{12}|=a+4$, $\cdots$

즉, 자연수 m에 대하여

$|a_{6m-4}|=a$, $|a_{6m-2}|=4$, $|a_{6m}|=a+4$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}|a_{2k}|&=\sum_{k=1}^{18}|a_{2k}|+|a_{38}|+|a_{40}|\\&=\sum_{k=1}^{18}|a_{2k}|+|a_2|+|a_4|\\&=6\times(a+4+a+4)+a+4\\&=13a+52\end{aligned}$$

이므로 $13a+52=78$, $a=2$

$a_2=2$

$a_4=-4$

$a_6=-6$

$a_8=-2$

$a_{10}=4$

$a_{12}=6$

$\vdots$

이므로

$a_{12n-10}=2$, $a_{12n-8}=-4$, $a_{12n-6}=-6$, $a_{12n-4}=-2$, $a_{12n-2}=4$, $a_{12n}=6$

$\therefore\ a_{22}=a_{12\times2-2}=4$

한편, n이 홀수일 때,

$a_{n+4}=2a_{n+2}-a_n$

$a_{n+2}=\frac{a_{n+4}+a_n}{2}$

이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 등차수열

이때

$$\sum_{k=1}^{13}a_k=\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{6}a_{2k}$$

에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6}a_{2k}&=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}\\&=a+(-4-a)+(-a)+4+(4+a)+a\end{aligned}$$

$=0$

이므로 $\sum_{k=1}^{7} a_{2k-1}=0$

이때 $a_1=6$이므로

$\sum_{k=1}^{7} a_{2k-1}=\frac{7}{2}\{2a_1+(7-1)\times d\}$ (d는 상수)

$=\frac{7}{2}\{6d+12\}$

이고

$\sum_{k=1}^{7} a_{2k-1}=\frac{7}{2}\{6d+12\}=0$

$\therefore\ d=-2,\ a_{2n-1}=8-2n$

$\therefore\ a_{11}=a_{2\times 6-1}=-4$

$\therefore\ a_{11}+a_{22}=4-4=0$

16.

주어진 식에서 진수 조건과 밑 조건에 의해 $x>0$

$\log_x(x+12)=2$, $\log_x(x+12)=\log_x x^2$

이므로

$x^2=x+12$, $(x-4)(x+3)=0$

$\therefore\ x=4\ (\because\ x>0)$

17.

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(3x^2-4x+3)dx$

$=x^3-2x^2+3x+C$ (C는 적분상수)

이때 $f(1)+f(0)=0$이므로

$f(1)+f(0)=1-2+3+C+C=2C+2=0$, $C=-1$

$\therefore\ f(x)=x^3-2x^2+3x-1$

$\therefore\ f(2)=5$

18.

$\sum_{k=1}^{10}\{ca_k+b_k\}=c\sum_{k=1}^{10}a_k+44=74$

$c\sum_{k=1}^{10}a_k=30,\ \sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{30}{c}$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{10}c^2a_k=c^2\sum_{k=1}^{10}a_k=720$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$c^2\times\frac{30}{c}=30c=720$

$\therefore\ c=24$

19.

함수 $f(x)=a(x-p)^2+2$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수이므로 평균값 정리에 의해 함수 $f(x)$ 위의 두 점 A$(1, f(1))$, C$(5, f(5))$ 사이의 평균변화율과 값이 같은 미분계수가 존재하고, 이는 $x=\frac{1+5}{2}=3$에서의 미분계수와 같다.

$\therefore\ f'(3)=2a(3-p)=12$

$\therefore\ a(3-p)=6$ …… ㉠

이때 a, p는 모두 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, p)는 $(3, 1)$, $(6, 2)$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이고 $f'(1)f'(5)<0$이므로

$1<p<5$

$\therefore\ p=2,\ a=6$

함수 $f(x)=3(x-2)^2+2$이고 점 B에서의 접선은

$y=12(x-3)+8=12x-28$

따라서 접선의 x절편은 $\frac{7}{3}$이므로 $a\times p\times m=6\times 2\times\frac{7}{3}=28$

20.

조건 (가)에서

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2S_6$

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=2(a_1+a_2+a_3+\cdots a_6)$

이때 위의 식과 같은 경우가 나오기 위해서는

$a_1\ge 0,\ a_2\ge 0,\ \cdots,\ a_6\ge 0,\ a_7\le 0,\ a_8\le 0$ …… ㉠

이어야함을 알 수 있다.

또한, 이러한 조건을 만족하기 위해서는 d가 음의 정수이다.

($\because$ 등차수열 $\{a_n\}$에서 $d\ge 0$이면 n의 값이 커질수록 a_n의 값도 커지므로, ㉠을 만족할 수 없다.)

또한, ㉠을 만족해야

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2S_6$

$a_1+a_2+\cdots+a_6-a_7-a_8-\cdots-a_n+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=2a_1+2a_2+\cdots+2a_6$

$=2(a_1+a_2+\cdots+a_6)$

$=2S_6$

가 되므로 조건 (가)를 만족할 수 있다.

조건 (나)에 의해

$a_1+a_2+\cdots+a_6\ne a_1+a_2+\cdots+a_6+a_7$

$\therefore\ a_7\ne 0$

$a_1=a$라고 하면 $a_6=a+5d, a_7=a+6d$

$a_6\ge 0$이므로 $a+5d\ge 0$

$\therefore\ a\ge -5d$

이때 $a_7<0$이므로 $a+6d<0$

$\therefore\ a<-6d$

이때 a의 범위는 $-5d\le a<-6d$

d는 음의 정수이므로 자연수인 a의 개수는 $-d$임을 알 수 있다.

가능한 모든 자연수 a_1의 개수는 3이므로 $-d=3$

$\therefore\ d=-3$

d의 값에 의해 a는 $15\le a<18$이고,

이를 만족하는 자연수 a는 15, 16, 17

따라서 가능한 모든 자연수 a_1의 값의 합은

$15+16+17=48$

21.

먼저, 보조선 $\overline{\mathrm{EC}}$를 긋자.

삼각형 ABC의 외접원 위의 점 A, C에서 그은 각각의 접선이 이루는 예각의 크기가 60°이므로, 두 접선의 교점을 P라 할 때, 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해

$\angle\mathrm{CAP}=\angle\mathrm{ACP}=\angle\mathrm{AEC}$이며, 삼각형 ACP에 의해

$\angle \mathrm{CAP} = \angle \mathrm{ACP} = \angle \mathrm{AEC} = \frac{\pi}{3}$ 이다.

사각형 AECB는 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle \mathrm{ABC} = \pi - \angle \mathrm{AEC} = \frac{2\pi}{3}$ 이다.

삼각형 ABC에서

$\cos(\angle \mathrm{ABC}) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{4^2+3^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}{2\times 4\times 3}$, $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{37}$

$\angle$ABC를 이등분하는 직선이 선분 $\overline{\mathrm{AC}}$와 만나는 점이 D이므로,

$\overline{\mathrm{AD}} = \frac{4}{7}\sqrt{37}$, $\overline{\mathrm{CD}} = \frac{3}{7}\sqrt{37}$ 이다.

현 $\overline{\mathrm{EC}}$에 대한 원주각에 대하여 $\angle \mathrm{EBC} = \angle \mathrm{EAC} = \frac{1}{3}\pi$이다.

현 $\overline{\mathrm{EA}}$에 대한 원주각 $\angle$EBA와 현 $\overline{\mathrm{AC}}$에 대한 원주각 $\angle$AEC의 크기가 같으므로 $\overline{\mathrm{EA}} = \overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{37}$ 이다.

삼각형 AED에서

$$\cos(\angle \mathrm{EAD}) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{(\sqrt{37})^2+\left(\frac{4}{7}\sqrt{37}\right)^2-\overline{\mathrm{ED}}^2}{2\times\sqrt{37}\times\frac{4}{7}\sqrt{37}}$$

$\overline{\mathrm{ED}} = \frac{37}{7}$

원에 내접하는 사각형 AECB에 대하여 할선 정리에 의해

$\overline{\mathrm{DB}} = \frac{12}{7}$

삼각형 ABM에서

$$\cos(\angle \mathrm{ABM}) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{4^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\overline{AM}^2}{2\times 4\times\frac{3}{2}},\ \overline{\mathrm{AM}} = \frac{\sqrt{97}}{2}$$

이때 $\angle$ABC의 이등분선이 선분 $\overline{\mathrm{AM}}$과 만나는 점을 G라 할 때,

삼각형에서의 각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{AG}} : \overline{\mathrm{MG}} = \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{MB}} = 4 : \frac{3}{2} = 8 : 3$

이고

$\overline{\mathrm{AG}} = \frac{8}{11}\times\overline{\mathrm{AM}} = \frac{8}{11}\times\frac{\sqrt{97}}{2} = \frac{4}{11}\sqrt{97}$

삼각형 ABG에서

$$\cos(\angle \mathrm{ABG}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4^2+\overline{BG}^2-\left(\frac{4}{11}\sqrt{97}\right)^2}{2\times 4\times\overline{BG}}$$

이때 $\overline{\mathrm{BG}} = x$라 하면

$$\frac{1}{2} = \frac{16+x^2-\left(\frac{16}{121}\times 97\right)}{2\times 4\times x}$$

$x^2-4x+\frac{16(121-97)}{121} = 0$

$x^2-4x+\frac{12\times 24}{121} = 0$

$x = \frac{12}{11}$ 또는 $x = \frac{32}{11}$

이고 $\overline{\mathrm{BD}} > \overline{\mathrm{BG}}$이므로 $\overline{\mathrm{BG}} = \frac{12}{11}$

삼각형 AEB에서

$\frac{4}{\sin(\angle \mathrm{AEB})} = \frac{\sqrt{37}}{\sin(\angle EBA)} = \frac{\sqrt{37}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $\sin(\angle \mathrm{AEB}) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$

$\triangle \mathrm{AEM} = \frac{11}{8}\times\triangle\mathrm{AEG}$이므로

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{AEM} &= \frac{11}{8}\times\left\{\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{EG}}\times\sin(\angle \mathrm{AEG})\right\}\\ &= \frac{11}{8}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{37}\times\overline{\mathrm{EG}}\times\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{37}}\right)\\ &= \frac{11\sqrt{3}}{8}\overline{\mathrm{EG}}\\ &= \frac{11\sqrt{3}}{8}(\overline{\mathrm{EB}}-\overline{\mathrm{BG}})\\ &= \frac{11\sqrt{3}}{8}\left(7-\frac{12}{11}\right)\ \left(\because \overline{\mathrm{EB}} = \overline{\mathrm{ED}}+\overline{\mathrm{DB}} = \frac{37}{7}+\frac{12}{7} = 7\right)\\ &= \frac{11\sqrt{3}}{8}\times\frac{65}{11} = \frac{65}{8}\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ p+q = 73$

22.

$$g(x) = \begin{cases} f(x+k) & (x\ge 0)\\ f(-x+k) & (x<0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x\ge 0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 그래프의 $x\ge 0$인 부분이고, $x<0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 후 $x>0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

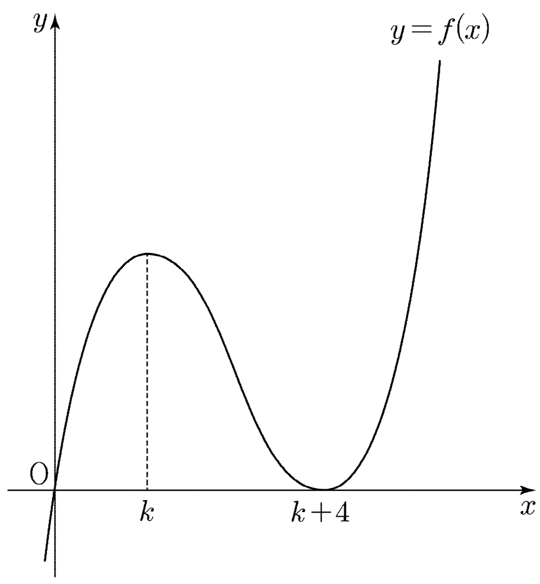
함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $g'(0)=0$이어야 하고, $g'(0)=f'(k)=0$이다.

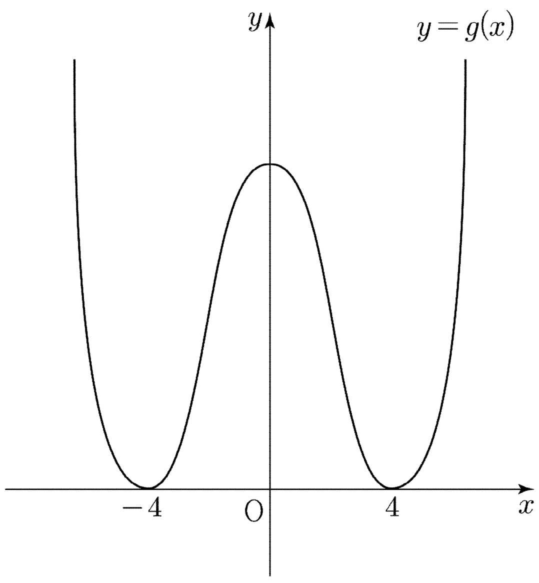
또한, 조건 (가)에서 함수 $y=g(x)$의 그래프가 $x=4$일 때 x축에 접하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=k+4$일 때 x축에 접한다.

$\therefore\ f'(k)=f'(k+4)$

$\therefore\ f(k+4)=f(0)=0$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.





$f(x)=x(x-k-4)^2$

$\quad =x^3-2(k+4)x^2+(k+4)^2x$

에서

$f'(x)=3x^2-4(k+4)x+(k+4)^2$

$\quad =(3x-k-4)(x-k-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{k+4}{3}$ 또는 $x=k+4$

$\dfrac{k+4}{3}=k$이므로 $k=2$이고

$f(x)=x(x-6)^2$

$x \geq 0$일 때 $g(x)=(x+2)(x-4)^2=x^3-6x^2+32$

이고 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 부분의 넓이를 S라 하면

$S=2\displaystyle\int_0^4 g(x)dx$

$=2\displaystyle\int_0^4 (x^3-6x^2+32)dx$

$=2\left[\dfrac{1}{4}x^4-2x^3+32x\right]_0^4$

$=2(64-128+128)$

$=128$

[THE7 확률과 통계 해설]

23.

${}_6C_5+{}_6P_3=6+120=126$

24.

확률변수 X는 이항분포 $B\left(180,\ \dfrac{1}{6}\right)$를 따르므로

$E(X)=180\times\dfrac{1}{6}=30$

$V(X)=180\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=25$

확률분포 X는 근사적으로 정규분포 $N(30, 5^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-30}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(25 \leq X \leq 40)=P\left(\dfrac{25-30}{5} \leq \dfrac{X-30}{5} \leq \dfrac{40-30}{5}\right)$

$=P(-1 \leq Z \leq 2)$

$=P(-1 \leq Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$

25.

$P(A\cup B)-P(A-B)=P(B)$이므로

$P(B)=\dfrac{7}{10}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{2}$이다.

$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(B)$이므로

$\{P(B)\}^2=\dfrac{1}{4}=P(A\cap B)$

$\therefore\ P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$

26.

ㄱ. 확률변수 X의 평균은 $100\times\dfrac{1}{5}=20$이고, 표준편차는

$\sqrt{100\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}}=4$이다. 그러므로, 확률변수 Y의 평균은

$2\times20+5=45$, 표준편차는 $|2|\times4=8$이다.

확률변수 X와 Y 모두 n 즉, 시행횟수가 100으로 충분히 크므로 정규분포도 따른다.

$P(X>20)=P(Y>45)=P(Z>0)$ (참)

ㄴ. $P(|X-20|<5)=P\left(|Z|<\dfrac{5}{4}\right)$, $P(40<Y<50)=P(|Y-45|<5)$

$=P\left(|Z|<\dfrac{5}{8}\right)$이고, $\dfrac{5}{4}>\dfrac{5}{8}$ (거짓)

ㄷ. $P(X>a)=P\left(Z>\dfrac{a-20}{4}\right)$, $P(Y>2a)=P\left(Z>\dfrac{2a-45}{8}\right)$이고,

$\dfrac{a-20}{4}>\dfrac{2a-40-5}{8}$ (참)

ㄹ. $P(X<a+10)=P\left(Z<\dfrac{a-10}{4}\right)$

$P(Y<2a+25)=P\left(Z<\dfrac{2a-20}{8}\right)=P\left(Z<\dfrac{a-10}{4}\right)$ (참)

따라서 참인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

27.

동해에서 잡은 오징어 한 마리의 무게는 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 36마리를 임의추출하여 구한 표본평균이 300이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$300-2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{36}} \leq m \leq 300+2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{36}}$이다.

$2a+5b=-2\times0.43\sigma+5\times0.43\sigma$

$\quad =3\times0.43\sigma=1.29\sigma$

따라서 $1.29\sigma=9.03$이므로 $\sigma=7$

28.

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4) \leq 8$에서

$f(x)$를 $g(x)$와 $h(x)$로 바꿔주면

$g(1)+h(2)+g(3)+h(4) \leq 8$ …… ㉠

조건 (나)에 의해 $h(1)$의 값이 정해지면 $g(1)$의 값이 정해질 수 있고, $h(1)$은 조건 (나)와 상관없이 모든 X의 값에 대응하므로

$g(1)$은 $h(1)$으로 바꿔줄 수 있다.
조건 (다)에 의해
$g(3)=h(3)+1$ …… ㉡
이므로, ㉠에 ㉡을 대입하면
$h(1)+h(2)+h(3)+h(4) \le 7$ …… ㉢
$h(1)=h'(1)+1$, $h(2)=h'(2)+1$, $h(3)=h'(3)+1$, $h(4)=h'(4)+1$
로 놓으면 ㉢에서
$h'(1)+h'(2)+h'(3)+h'(4) \le 3$ …… ㉣
이때 $k=0$, 1, 2, 3이라 하면 ㉣에서
$$h'(1)+h'(2)+h'(3)+h'(4)+k=3$$
이고
$$((h'(1), h'(2), h'(3), h'(4) \le 3)$$
위의 부등식을 만족하는 음이 아닌 정수
$h'(1), h'(2), h'(3), h'(4), k$의 모든 순서쌍
$(h'(1), h'(2), h'(3), h'(4), k)$의 개수는
$${}_5\mathrm{H}_3={}_{5+3-1}\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$$
즉, 가능한 함수 $h(x)$의 개수는 35

29.

확률밀도함수 $f(x)$는 직선 $x=5$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(1 \le \mathrm{X} \le 5)=\frac{1}{2}$를 만족한다.
조건 (가)에서
$$\sum_{n=5}^{k}\mathrm{P}(1 \le X \le n)=\mathrm{P}(1 \le X \le 5)+\cdots+\mathrm{P}(1 \le X \le k)$$
$$=\frac{1}{2}+\cdots+\mathrm{P}(1 \le X \le k)$$
$$=\frac{17}{6}-\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$$
이때 $k \ge 5$에서
$$\frac{1}{2} \le \mathrm{P}(1 \le X \le k) \le 1$$
이므로 k의 값에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) $k=6$
$$\frac{1}{2} \le \mathrm{P}(1 \le X \le 6) \le 1$$
$$\mathrm{P}(1 \le X \le 6)<\frac{7}{3}$$ (모순)

(ⅱ) $k=7$
$$1 \le \mathrm{P}(1 \le X \le 6)+\mathrm{P}(1 \le X \le 7) \le 2$$
$$P(1 \le X \le 6)+\mathrm{P}(1 \le X \le 7)<\frac{7}{3}$$ (모순)

(ⅲ) $k=8$
$$\frac{3}{2} \le \mathrm{P}(1 \le X \le 6)+\mathrm{P}(1 \le X \le 7)+\mathrm{P}(1 \le X \le 8) \le 3$$
$$\frac{4.5}{3} \le \mathrm{P}(1 \le X \le 6)+\mathrm{P}(1 \le X \le 7)+\mathrm{P}(1 \le X \le 8) \le \frac{9}{3}$$
해당 범위에 $\frac{7}{3}$이 존재가능

(ⅳ) $k=9$
$$2 \le \mathrm{P}(1 \le X \le 6)+\mathrm{P}(1 \le X \le 7)+\mathrm{P}(1 \le X \le 8)+P(1 \le X \le 9) \le 4$$
$$\mathrm{P}(1 \le X \le 6)+\mathrm{P}(1 \le X \le 7)+\mathrm{P}(1 \le X \le 8)+\mathrm{P}(1 \le X \le 9)>\frac{7}{3}$$
(모순)

(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 $k=8$
이때 조건 (나)에 의해
$$\mathrm{P}(2 \le X \le 8)=1-\mathrm{P}(1 \le X \le 2)-\mathrm{P}(8 \le X \le 9)=\frac{11}{12}$$
확률밀도함수 $f(x)$는 직선 $x=5$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(1 \le X \le 2)=\mathrm{P}(8 \le X \le 9)=t$
라 하자.
$$\therefore\ 1-2t=\frac{11}{12}$$
$$\therefore\ t=\mathrm{P}(1 \le X \le 2)=\mathrm{P}(8 \le X \le 9)=\frac{1}{24}$$
$$\therefore\ \mathrm{P}(5 \le X \le 8)=1-\mathrm{P}(1 \le X \le 5)-\mathrm{P}(8 \le X \le 9)$$
$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{24}=\frac{11}{24}$$
$$\therefore\ 48\times\mathrm{P}(5 \le X \le 8)=22$$

30.

주머니 A에서 흰 공 1개를 꺼내는 사건을 X, 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼내는 사건을 Y라 하자.
$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{45}=\frac{1}{15}$$
$$\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{45}=\frac{1}{9}$$
이므로
$$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)$$
$$=\frac{1}{15}+\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$
$$\mathrm{P}(X|Y)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(Y)}$$
$$=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{45}}=\frac{3}{8}$$
따라서 $p=8$, $q=3$이므로 $p+q=8+3=11$

[THE7 미적분 해설]

23.

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$$
$$=[-\cos x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\cos\frac{\pi}{2}-\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

24.

$$\lim_{n\to-\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+3}+n\right)$$

$$= \lim_{n\to-\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+3}+n\right)\times\frac{\sqrt{n^2-5n+3}-n}{\sqrt{n^2-5n+3}-n}$$

$$= \lim_{n\to-\infty}\frac{-5n+3}{\sqrt{n^2-5n+3}-n}$$

$t=-n$이라 하면 $n\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{-5n+3}{\sqrt{n^2-5n+3}-n}=\lim_{t\to\infty}\frac{5t+3}{\sqrt{t^2+5t+3}+t}=\frac{5}{2}$$

25.

먼저, 방정식 $f(x)=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해를 구하자.

$\ln(\cos x)=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로, 방정식 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 $x=\pm\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \alpha=-\frac{\pi}{6},\ \beta=\frac{\pi}{6}$

$x=\alpha$에서 $x=\beta$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는 다음과 같다.

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{(\sec x)^2}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sec x\,dx\ \ (\because \cos x>0)$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sec x\,dx\ =2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,dx$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx\ =2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

이때 $\sin x=t$라 하면

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t^2}\,dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\left[-\ln(1-t)+\ln(1+t)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{1}{2}=\ln 3$$

26.

함수 $f(x)$의 개형을 추론하기 위해 도함수 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=e^{-x+1}\left(-x^2+x+2x-1\right)=e^{-x+1}\left(-x^2+3x-1\right)$$

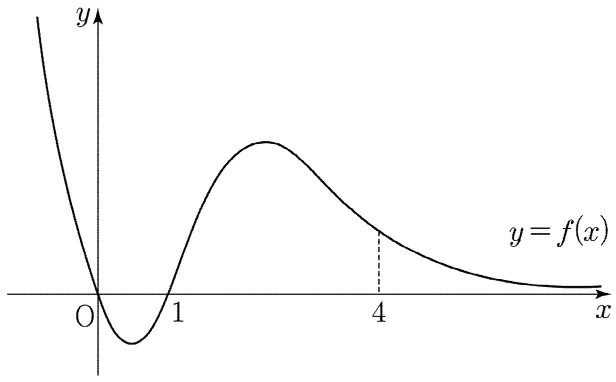
이므로 함수 $f(x)$는 서로 다른 2개의 극점을 갖는다.

이때 이계도함수 $f''(x)$를 구하면

$$f''(x)=e^{-x+1}\left(x^2-3x+1-2x+3\right)=e^{-x+1}\left(x^2-5x+4\right)$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1,\ x=4$에서 변곡점을 갖는다.

위의 내용을 바탕으로 함수 $f(x)$의 개형은 다음 그림과 같다.



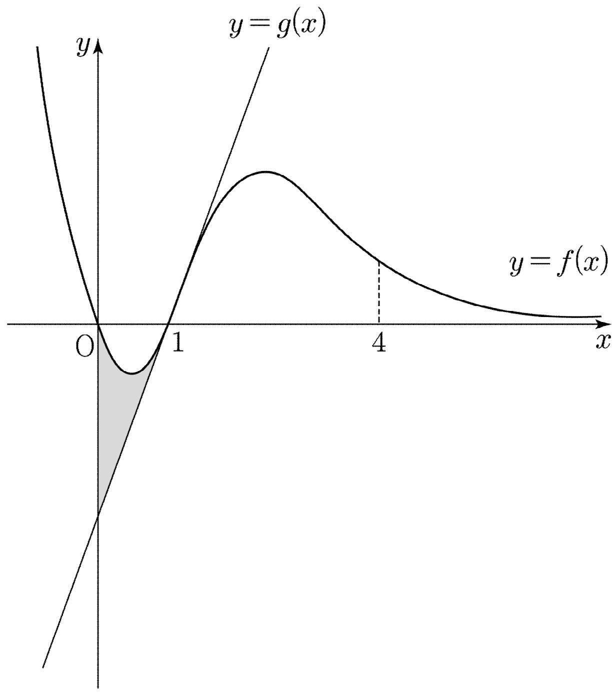
주어진 조건은 다음과 같이 해석된다.

$$\begin{cases} f(x)\ge g(x) & (x\le a) \\ f(x)\le g(x) & (x>a) \end{cases}$$

이를 만족하는 함수 $f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 변곡 접선이므로 $a=1$

$\therefore\ g(x)=x-1$

따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 직선 $x=0$으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



$$\int_0^1\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=\int_0^1\left\{e^{-x+1}\left(x^2-x\right)-(x-1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left\{e^{-x+1}\left(x^2-x\right)\right\}dx-\int_0^1(x-1)\,dx$$

$$\int_0^1\left\{e^{-x+1}\left(x^2-x\right)\right\}dx$$

$$=\left[\left(-e^{-x+1}\right)\left(x^2-x\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(-e^{-x+1}\right)(2x-1)\,dx$$

$$=\left[\left(-e^{-x+1}\right)\left(x^2-x\right)\right]_0^1-\left[\left(e^{-x+1}\right)(2x-1)\right]_0^1+2\int_0^1\left(e^{-x+1}\right)dx$$

$$=\left[\left(-e^{-x+1}\right)\left(x^2-x\right)\right]_0^1-\left[\left(e^{-x+1}\right)(2x-1)\right]_0^1+2\left[\left(-e^{-x+1}\right)\right]_0^1$$

$$=\left[\left(-e^{-x+1}\right)\left(x^2-x+2x-1+2\right)\right]_0^1$$

$$=\left[\left(-e^{-x+1}\right)\left(x^2+x+1\right)\right]_0^1=-3+e$$

$$\int_0^1(x-1)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \int_0^1\{f(x)-g(x)\}\,dx=e-\frac{5}{2}$$

27.

첫째항을 구하기 위해 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$임을 이용하여 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다.

이때 $\overline{\mathrm{R_1S_1}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{A_1S_1}}\times\tan\theta=a$

$\therefore\ \overline{\mathrm{A_1S_1}}=2a$

반원 $\mathrm{A_1B_1}$의 중심을 $\mathrm{O_1}$이라 하면 $\overline{\mathrm{O_1T_1}}=3a-5$

이때 선분 $\overline{\mathrm{O_1Q_1}}$는 반지름이므로

$\overline{\mathrm{O_1Q_1}}^2=\overline{\mathrm{O_1T_1}}^2+\overline{\mathrm{T_1Q_1}}^2$, $(3a-5)^2+a^2=5^2$, $10a^2-30a=0$

$\therefore\ a=3$, $\overline{\mathrm{R_1S_1}}=3$, $\overline{\mathrm{S_1Q_1}}=3\sqrt{2}$

반원 $\mathrm{S_1Q_1}$은 반지름의 길이가 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 넓이는 $\dfrac{9}{4}\pi$이고,

삼각형 $\mathrm{S_1Q_1R_1}$넓이는 $\dfrac{9}{2}$이므로 $R_1=\dfrac{9}{4}\pi-\dfrac{9}{2}$

한편, 삼각형 $\mathrm{S_1Q_1R_1}$에 내접하는 반원은 정사각형 $\mathrm{R_1S_1T_1Q_1}$에 내접하는 원의 일부분이다.

따라서 삼각형 $\mathrm{S_1Q_1R_1}$에 내접하는 반원의 지름의 길이는

$$\overline{\mathrm{A_2B_2}}=3$$

이때 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}:\overline{\mathrm{A_2B_2}}=10:3$이므로 공비는 길이비의 제곱의 비이므로

$$r=\frac{9}{100}$$

따라서 등비수열 $\{R_n\}$은 $R_1=\dfrac{9}{4}\pi-\dfrac{9}{2}$, $r=\dfrac{9}{100}$이므로

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\dfrac{9}{4}\pi-\dfrac{9}{2}}{1-\dfrac{9}{100}}=\frac{225}{91}(\pi-2)$$

$\therefore\ a=1$, $b=2$

$\therefore\ a+b=1+2=3$

28.

x값의 범위에 따라 함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $|2\sin x|>1$, $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<x<-\dfrac{\pi}{6}$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin x)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin x)^{2n+1}\to\infty$이므로 $f(x)=2\sin x$

(ⅱ) $|2\sin x|<1$, $-\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{6}$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin x)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin x)^{2n+1}=0$이므로 $f(x)=-3\sin^2x+2$

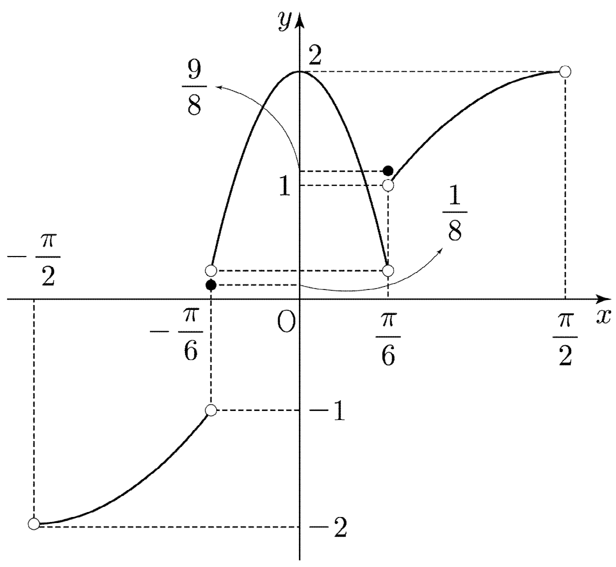
(ⅲ) $2\sin x=1$, $x=\dfrac{\pi}{6}$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin x)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin x)^{2n+1}=1$이므로 $f(x)=\dfrac{9}{8}$

(ⅵ) $2\sin x=-1$, $x=-\dfrac{\pi}{6}$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin x)^{2n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin x)^{2n+1}=-1$이므로 $f(x)=\dfrac{1}{8}$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{6}$, $x=-\dfrac{\pi}{6}$에서 불연속이고 미분불가능 하다

사차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 해당 구간 내에서 미분가능하기 위해서는 우선 연속함수가 되어야 한다.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}-}f(x)g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}+}f(x)g(x)$$

이어야 하므로 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

같은 방법으로로 $g\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

또한, 미분가능하기 위해서는

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}-}\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}+}\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}$$

이어야 하므로 $g'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

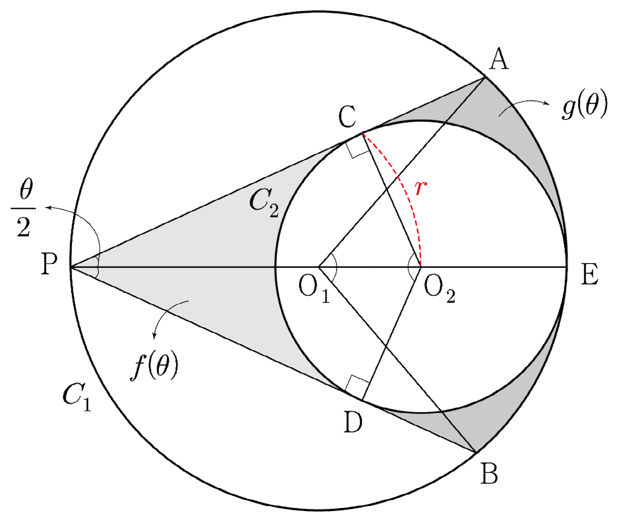
같은 방법으로 $g'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

따라서 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$는

$$g(x)=\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$\therefore\ h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)g\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi^4}{144}+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi^3$$

29.



두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$라 하고, 원 C_2의 반지름을 r라 하자.

두 삼각형 $\mathrm{AO_1P}$, $\mathrm{BO_1P}$의 넓이의 합은

$\dfrac{1}{2}\times1^2\times\sin(\angle\mathrm{AO_1P})\times2=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ …… ㉠

이고 부채꼴 $\mathrm{AO_1B}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1^2\times(\angle\mathrm{AO_1B})=\dfrac{2\theta}{2}=\theta$ …… ㉡

이므로

$f(\theta)+g(\theta)=$㉠$+$㉡$-$(원 C_2의 넓이)

$=\sin\theta+\theta-\pi r^2$

한편, $\angle \mathrm{CPO_2}=\dfrac{\theta}{2}$이므로 두 삼각형 $\mathrm{CO_2P}$, $\mathrm{DO_2P}$의 넓이의 합은

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CP}}\times r\times 2=r\times\frac{r}{\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{r^2}{\tan\frac{\theta}{2}} \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

이고 부채꼴 $\mathrm{CO_2D}$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times r^2\times\angle \mathrm{CO_2D}=\frac{r^2(\pi-\theta)}{2} \quad \cdots\cdots \text{㉣}$$

이므로

$$f(\theta)=\text{㉢}-\text{㉣}=\frac{r^2}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{r^2(\pi-\theta)}{2}$$

$$\therefore\ g(\theta)=\left(\sin\theta+\theta-\pi r^2\right)-\left(\frac{r^2}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{r^2(\pi-\theta)}{2}\right)$$

$$\therefore\ f(\theta)-g(\theta)=\frac{2r^2}{\tan\frac{\theta}{2}}-\sin\theta-\theta+\theta r^2$$

$$=r^2\times\left(\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}+\theta\right)-\sin\theta-\theta$$

이때 $\sin\left(\angle \mathrm{CPO_2}\right)=\dfrac{r}{2-r}$, $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{r}{2-r}$, $r=\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

이므로

$$f(\theta)-g(\theta)=\left(\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\left(\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}+\theta\right)-\sin\theta-\theta$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\left(\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}+\theta\right)-\sin\theta-\theta}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times\left(\frac{4}{\theta}+\theta\right)-\theta-\theta}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta+\theta^3}{\theta}$$

$=2$

30.

점 $(4,\ 0)$에서 곡선 $y=\ln(x-4)$에 그은 접선의 방정식을 구해보자.

접점의 좌표를 $(p,\ \ln(p-4))\ (p>4)$라 하면

$y'=\dfrac{1}{x-4}$에서 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{p-4}$

접선의 방정식은 $y-\ln(p-4)=\dfrac{1}{p-4}(x-p)$이고, 이 접선이 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$-\ln(p-4)=\dfrac{1}{p-4}\times(4-p)$에서 $\ln(p-4)=1$, $p=e+4$

따라서 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{e}x-\dfrac{4}{e}$

또한, 곡선 $y=e^{x-2}+k$가 직선 $y=\dfrac{1}{e}x-\dfrac{4}{e}$와 접할 때 k의 값을 구해보자.

접점의 좌표를 $\left(q,\ e^{x-2}+k\right)\ (q>0)$이라 하면 $y'=e^{x-2}$에서

접선의 기울기는 e^{q-2}이므로 $e^{q-2}=\dfrac{1}{e}=e^{-1}$, $q=1$

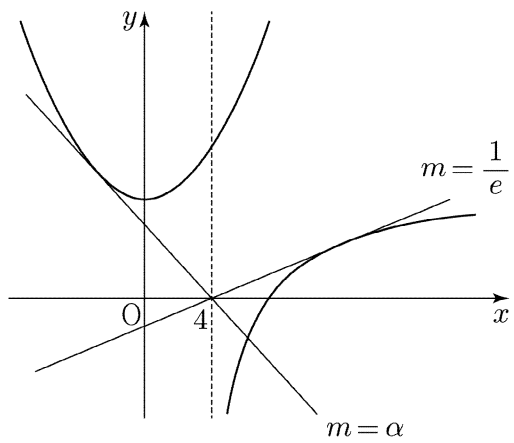
따라서 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{e}$이고 접점의 좌표는 $\left(1,\ \dfrac{1}{e}+k\right)$이므로

접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{e}x+k$이므로 $k=-\dfrac{4}{e}$

한편, $h(m)=f(m)+g(m)$이라 하면 k의 값의 범위에 따라 함수 $h(m)$은 다음과 같다.

(ⅰ) $k>-\dfrac{1}{e^2}$



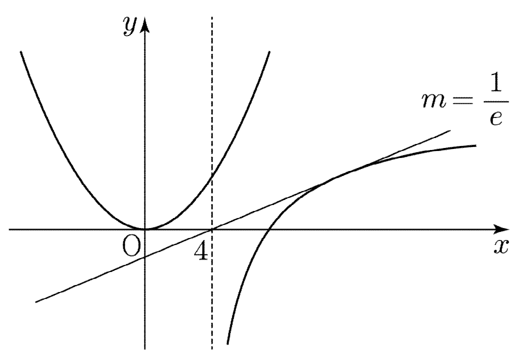
$m>\dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=0$, $m=\dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=1$,

$0<m<\dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=2$, $\alpha<m\le 0$이면 $h(m)=1$,

$m=\alpha$이면 $h(m)=2$, $m<\alpha$이면 $h(m)=3$

따라서 함수 $h(m)$은 $m=\alpha$, 0, $\dfrac{1}{e}$에서 불연속

(ⅱ) $k=-\dfrac{1}{e^2}$

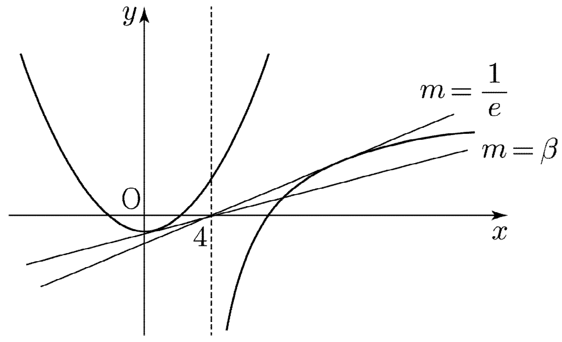


$m>\dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=0$, $m=\dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=1$,

$0\le m<\dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=2$, $m<0$이면 $h(m)=3$

따라서 함수 $h(m)$은 $m=0$, $\dfrac{1}{e}$에서 불연속

(ⅲ) $-\dfrac{4}{e}<k<-\dfrac{1}{e^2}$



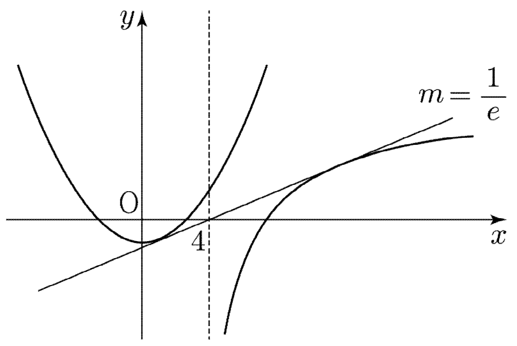
$m>\dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=0$, $m=\dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=1$,

$\beta < m < \dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=2$, $m=\beta$이면 $h(m)=3$,

$0 < m < \beta$이면 $h(m)=4$, $m \le 0$이면 $h(m)=3$

따라서 함수 $h(m)$은 $m=0$, β, $\dfrac{1}{e}$에서 불연속

(ⅳ) $k=-\dfrac{4}{e}$

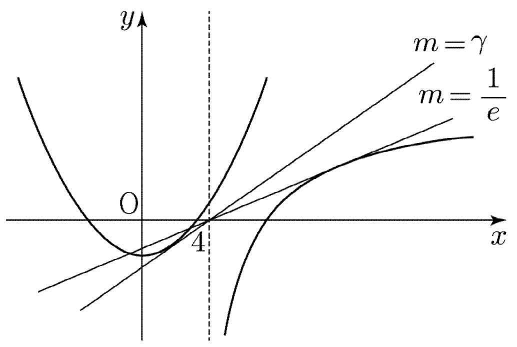


$m > \dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=0$, $m=\dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=2$,

$\beta < m < \dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=4$, $m \le 0$이면 $h(m)=3$

따라서 함수 $h(m)$은 $m=0$, $\dfrac{1}{e}$에서 불연속

(ⅴ) $-e^2 < k < -\dfrac{4}{e}$



$m > \gamma$이면 $h(m)=0$, $m=\gamma$이면 $h(m)=1$, $\dfrac{1}{e} < m < \gamma$이면

$h(m)=2$, $m=\dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=3$, $0 < m < \dfrac{1}{e}$이면 $h(m)=4$,

$m \le 0$이면 $h(m)=3$

따라서 함수 $h(m)$은 $m=0$, $\dfrac{1}{e}$, γ에서 불연속

(ⅰ)~(ⅴ)에 의해 함수 $h(m)$은 $m=\alpha$에서 불연속인 α의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값은

$-\dfrac{1}{e^2}$, $-\dfrac{4}{e}$이므로 곱은 $\dfrac{4}{e^3}$

따라서 $s=3$, $t=4$이므로 $s+t=7$

[THE7 기하 해설]

23.

포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=p$의 교점을 구하면

$p^2=4px$, $x=\dfrac{p}{4}$

이고 $\dfrac{p}{4}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ p=2(\because\ p>0)$

24.

두 점 $(1, a, 2)$, $(-1, 4, b)$를 각각 xz평면에 대하여 대칭이동한 두 점은 각각 $(1, -a, 2)$, $(-1, -4, b)$이다.

이 두 점의 중점은 $\left(0, \dfrac{-a-4}{2}, \dfrac{b+2}{2}\right)$이므로

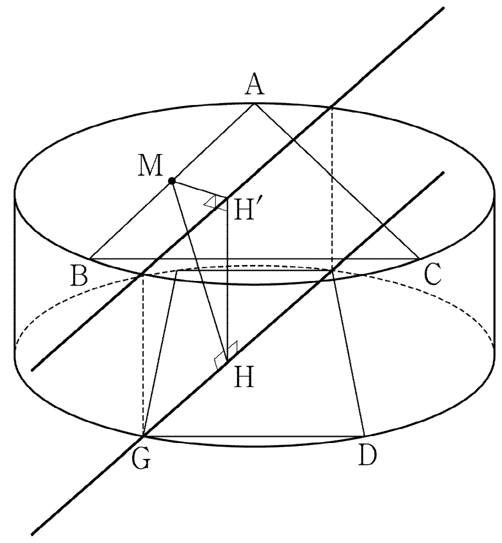
$\dfrac{-a-4}{2}=2$, $a=-8$

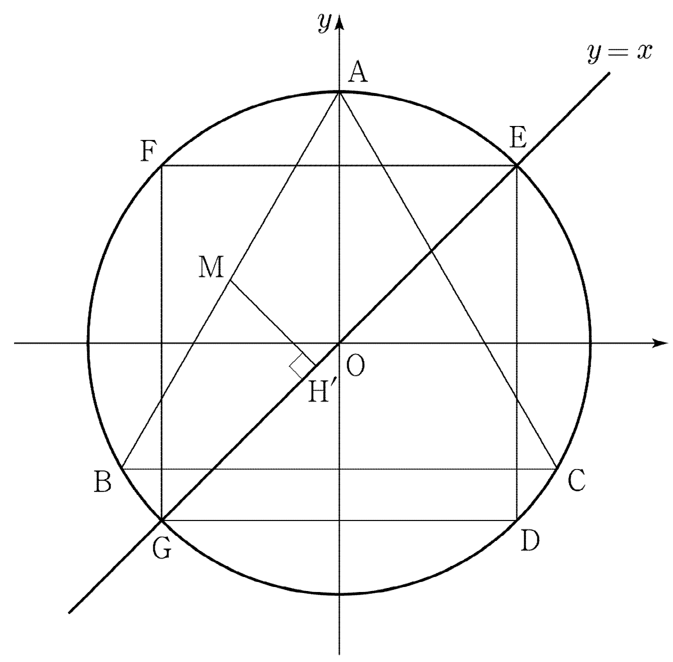
이고

$\dfrac{b+2}{2}=-3$, $b=-8$

$\therefore\ ab=64$

25.





먼저 그림과 같이 아랫면을 윗면에 평면화시킨 상황을 생각해보자.
이 원의 중심을 원점으로 일치시키고, 두 선분 BC와 DG를 x축과 평행하게 놓는다.
$\mathrm{A}(0, 2)$, $\mathrm{B}(-\sqrt{3}, -1)$이므로 선분 AB의 중점은

$$\mathrm{M}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

이때 평면화된 선분 EG의 방정식은 $y=x$이고 점 M에서 직선 $y=x$에 내신 수선의 발이 H′이라 하면 좌표공간에서 점 H′에서 밑면에 내린 수선의 발은 H이다.
따라서 삼수선의 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{MH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MH'}}^2+\overline{\mathrm{HH'}}^2}$$

이때 $\overline{\mathrm{M'H}}$의 길이는 점 $\mathrm{M}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$에서 직선 $y=x$까지의 거리와 같으므로 점과 직선 사이의 공식에 의해

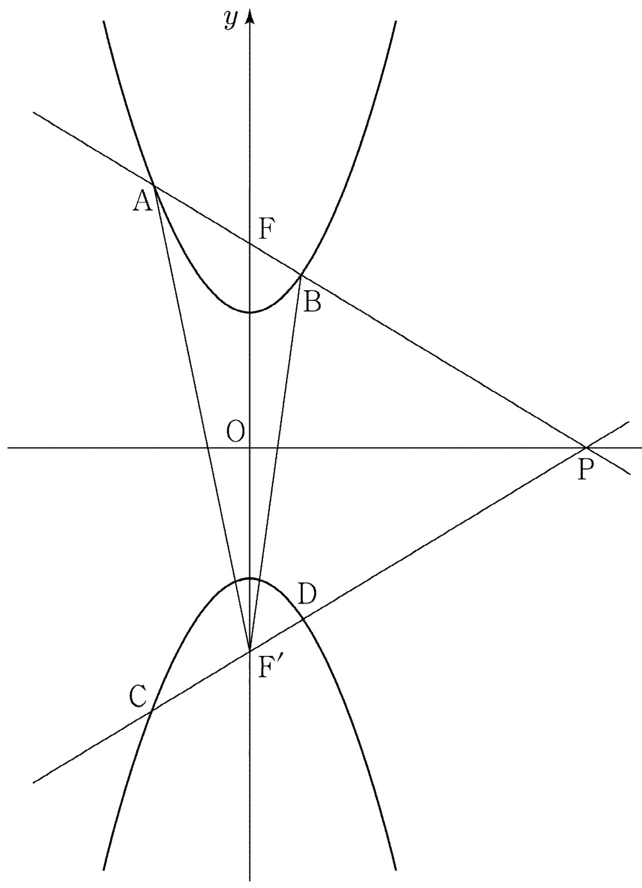
$$\overline{\mathrm{MH}}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \ \overline{\mathrm{MH}}^2 = \overline{\mathrm{MH'}}^2 + \overline{\mathrm{HH'}}^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 1^2 = \frac{6+\sqrt{3}}{4}$$

26.

x축 위의 점 P에서 그은 직선이 각각 초점 F, F′를 지날 때 만들어지는 삼각형 PFF′은 $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF'}}$인 이등변삼각형임을 알 수 있다.

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AF}}=\beta$, $\overline{\mathrm{BF}}=\alpha$로 두자. $(\alpha+\beta=6)$



이때 쌍곡선의 주축의 길이는 10이므로 쌍곡선 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}-\beta=10$, $\overline{\mathrm{BF'}}-\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BF'}}-\alpha=10$

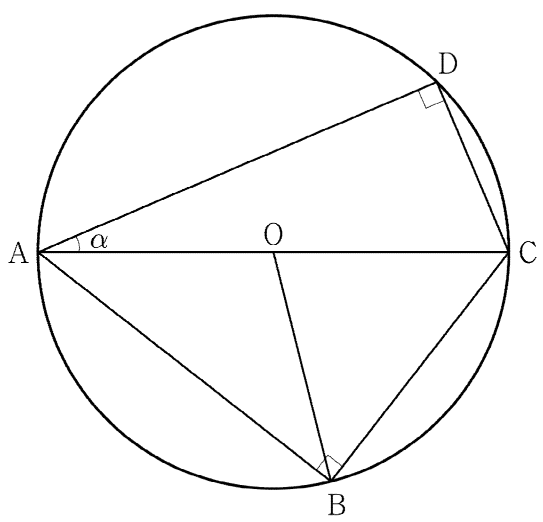
이고

$\overline{\mathrm{AF'}}=10+\beta$, $\overline{\mathrm{BF'}}=10+\alpha$

따라서 삼각형 ABF′의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{AB}} &= (10+\beta)+(10+\alpha)+(\alpha+\beta)\\ &= 20+2(\alpha+\beta)\\ &= 32\end{aligned}$$

27.



$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$가 수직임을 알 수 있다.

즉, 점 D는 선분 AC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

선분 AC의 중점을 O라 하자.

이때 조건 (나)에 의해

$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{4}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{8}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}}{4}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\therefore \ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=-4\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ …… ㉠

또한, 원주각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$임을 알 수 있고, 그림과 같이 두 점 O, B를 연결하면 $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2=\dfrac{25}{16}$

$$\therefore \ \frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}=\frac{100}{\frac{25}{16}}=64$$

28.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{64}=1$의 두 점근선은 $y=\pm 2x$

이때 점 $\mathrm{A}(0,\ -4\sqrt{5})$에서 쌍곡선에 그은 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx-4\sqrt{5}$ …… ㉠

이고

접선의 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx-\sqrt{16m^2-64}$ …… ㉡

이므로

㉠=㉡, $4\sqrt{5}=\sqrt{16m^2-64}$, $16m^2=144$, $m^2=9$

$\therefore \ m=\pm 3$

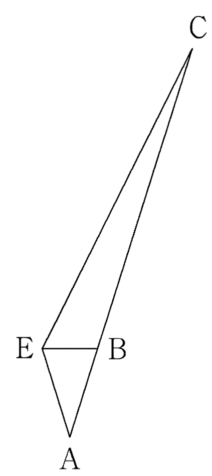
점 $\mathrm{A}(0,\ -4\sqrt{5})$에서 쌍곡선에 그은 기울기가 ±3인 접선의 방정식은

$y=\pm 3x-4\sqrt{5}$

이때 점근선의 방정식 $y=\pm 2x$와의 네 교점을 구하면

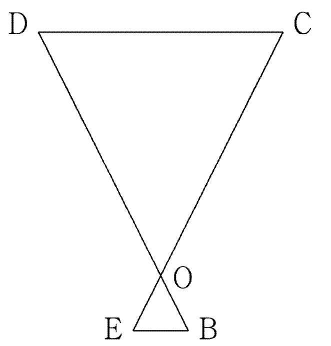
$\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{5}\sqrt{5},\ -\dfrac{8}{5}\sqrt{5}\right)$, $\mathrm{C}(4\sqrt{5},\ 8\sqrt{5})$, $\mathrm{D}(-4\sqrt{5},\ 8\sqrt{5})$,

$\mathrm{E}\left(-\dfrac{4}{5}\sqrt{5},\ -\dfrac{8}{5}\sqrt{5}\right)$



두 삼각형 BCE, ABE는 선분 BE를 공통인 밑변으로 하므로 넓이비는 두 점 B, C의 y좌표의 차와 두 점 A, B의 y좌표의 차의 비와 같다.

$$k_1=\frac{8\sqrt{5}-\left(-\frac{8}{5}\sqrt{5}\right)}{-\frac{8}{5}\sqrt{5}-(-4\sqrt{5})}=\frac{\frac{48}{5}}{\frac{12}{5}}=4$$



두 삼각형 OCD, BOE는 $\angle COD = \angle EOB$이고 $\overline{CD} /\!/ \overline{BE}$이므로 닮음이다.

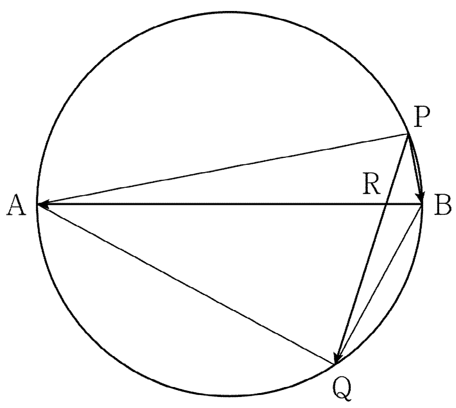
따라서 두 삼각형 OCD, BOE의 넓이비는 길이비의 제곱과 같다.

$\overline{BE} : \overline{CD} = \frac{8}{5}\sqrt{5} : 8\sqrt{5} = 1 : 5$

$\therefore\ k_2 = 5^2 = 25$

$\therefore\ k_1 + k_2 = 4 + 25 = 29$

29.



$\overrightarrow{PQ} = 3(t\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{PB})$에서 $\overrightarrow{PR'} = t\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{PB}$라 하면 $0 < t < 1$에서 점 R′은 선분 AB 위의 점이고, $\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{PR'}$에서 $\overrightarrow{PQ} /\!/ \overrightarrow{PR'}$이므로 점 R′은 점 R와 일치한다.

즉, $\overrightarrow{PR} = t\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{PB}$이고, $\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{PR}$

따라서 점 R는 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점이고,

$$\overline{PR} = \frac{1}{3}\overline{PQ} = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3},\ \overline{RQ} = \frac{2}{3}\overline{PQ} = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$$

이때 원주각의 성질에 의해

$\angle BPQ = \angle BAQ$, $\angle ABP = \angle AQP$이므로 두 삼각형 RAQ, RPB는 서로 닮은 도형이다.

$\therefore\ \overline{AR} : \overline{RQ} = \overline{PR} : \overline{RB}$

$\overline{AR} \times \overline{RB} = \overline{RQ} \times \overline{PR} = \frac{8}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{32}{9}$

이고

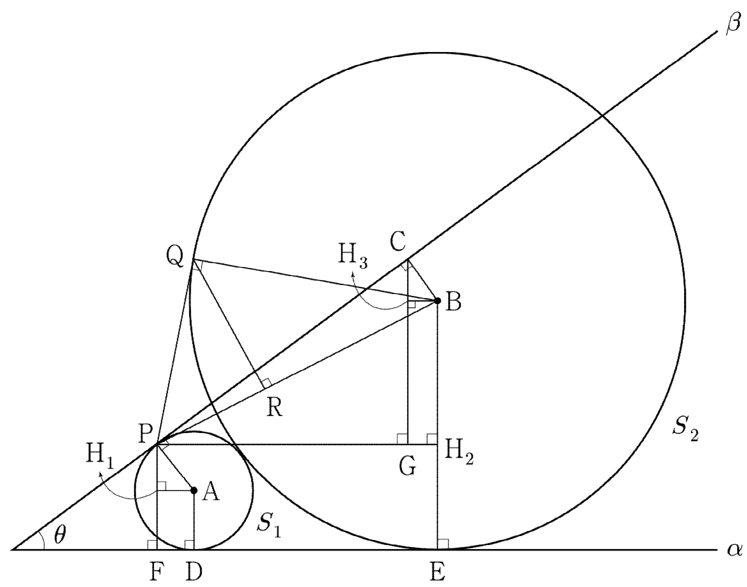
$\overline{AR} + \overline{RB} = \overline{AB} = 6$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{AR}^2 + \overline{RB}^2 &= (\overline{AR} + \overline{RB})^2 - 2 \times \overline{AR} \times \overline{RB} \\ &= 6^2 - 2 \times \frac{32}{9} \\ &= \frac{260}{9}\end{aligned}$$

따라서 $p = 9$, $q = 260$이므로 $p + q = 9 + 260 = 269$

30.



구 S_1의 중심을 A, 구 S_2의 중심을 B, 원 C의 중심을 C라 하자.

이때 주어진 조건에 의하여 점 Q가 나타내는 도형은 길이가 $\frac{40\sqrt{65}\pi}{13}$인 원이므로 점 Q에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 점 R이라 할 때,

$$\overline{QR} = \frac{20\sqrt{65}}{13}$$

두 삼각형 PQB, BRQ가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리와 삼각형의 닮음에 의하여

$$\overline{BR} = \frac{40}{13}\sqrt{26},\ \overline{BP} = 5\sqrt{26}$$

이다.

따라서 점 P는 $\overline{BP} = 5\sqrt{26}$을 만족시키는 구 S_1 위의 점이므로 점 P가 나타내는 도형은 원이다.

$\overline{BP} = 5\sqrt{26}$이므로 점 P에서 평면 α 사이의 거리가 최대일 때 점 P에서 구 S_1과 접하는 평면 β는 평면 α와 서로 평행하지 않다.

따라서 위의 그림과 같이 평면화하여 나타낼 수 있다.

세 점 A, B, P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하고 점 A에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H_1, 점 P에서 선분 BE에 내린 수선의 발을 H_2라 하자.

두 평면 α, β가 만나서 이루는 각을 θ라 할 때 $\angle APF = \theta$이므로

$$\overline{PF} = 5 + 5\cos\theta,\ \overline{AH_1} = 5\sin\theta,\ \overline{BH_2} = 15 - 5\cos\theta,\ \overline{DE} = 20$$

이므로 선분 EF의 길이는

$$\overline{EF} = 20 + 5\sin\theta$$

따라서 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2 &= (\overline{BH_2})^2 + (\overline{PH_2})^2 \\ &= (\overline{BH_2})^2 + (\overline{EF})^2\end{aligned}$$

$(15 - 5\cos\theta)^2 + (20 + 5\sin\theta)^2 = 650$, $4\sin\theta - 3\cos\theta = 0$

이때 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$이므로

$$\sin\theta = \frac{3}{5},\ \cos\theta = \frac{4}{5}$$

점 C에서 선분 PH_2에 내린 수선의 발을 G, 점 B에서 선분 CG에 내린 수선의 발을 H_3이라 할 때 $\overline{BC} = x$라 하자.

$\angle BCG = \angle CPG = \theta$이므로 $\overline{BH_3} = \frac{3}{5}x$, $\overline{CH_3} = \frac{4}{5}x$이다.

그러므로

$\overline{\mathrm{CG}}=11+\frac{4}{5}x$, $\overline{\mathrm{PG}}=23-\frac{3}{5}x$

$$\tan\theta=\frac{11+\frac{4}{5}x}{23-\frac{3}{5}x}=\frac{55+4x}{115-3x}$$

$\frac{3}{4}=\frac{55+4x}{115-3x}$, $345-9x=220+16x$, $25x=125$

$\therefore\ x=5$

따라서 원 C의 반지름의 길이를 r이라 하면

$$r=\sqrt{400-25}=5\sqrt{15}$$

이므로 원 C의 넓이는 375π이다. 두 평면 α, β가 이루는 각이 θ이므로 원 C에서 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$375\pi\times\cos\theta=300\pi$

$\therefore\ k=300$