20DEVILS

수학 II

CONTENTS

Theme 01

극한값의 계산

개념 01

01-1, 2, 3, 4, 5

1. 극한값의 기본 성질은 수렴하는 함수에서만 사용한다
→ 수렴·발산이 확실하지 않은 함수는 수렴·발산이 확실한 함수로 변형하여 해결한다

2. '다항함수 $f(x)$는 ~'와 $f(x)$를 포함하는 관계식이 주어진다면
「$f(x)=ax^n+\cdots$」로 설정하고 차수 또는 최고차항의 계수를 구하면 된다

3. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-k}{x-a}=\alpha$
① 분모 → 0 이므로 $\lim_{x \to a}\{f(x)-k\}=0$
$\therefore \lim_{x \to a} f(x)=k$
$f(x)$에 대한 단서 ($f(x)$는 연속함수 또는 $f(x)$는 다항함수 등)가 없다면
"극한값 = 함숫값"을 단정할 수 없다
② $f(x)$가 연속함수 (또는 다항함수)이면 $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)=k$
$\therefore f'(a)=\alpha$

01-1

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$이고, 모든 실수 x에 대하여

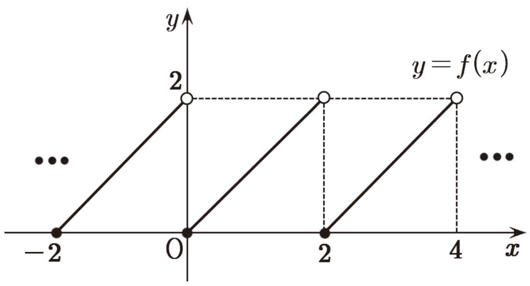
$$x\{f(x)-1\} = g(x)\{f(x)+1\}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)+x}{x^2 - g(x)}$의 값은?

① -5　② -3　③ -1
④ 1　⑤ 3

04-4

두 함수 $f(x)=x-2\left[\dfrac{x}{2}\right]$, $g(x)=x^2-4x$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)



〈 보기 〉

ㄱ. 함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $|f(x)+k|$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 상수 k가 존재한다.
ㄷ. 함수 $\{f(x)-1\}\{g(x)+4\}$는 $x=2$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20DEVILS

수학Ⅱ 해설

빠른 정답

01-1 ①
01-2 2
01-3 4
01-4 $3x^2+4x$, x^3+x^2+4x, x^4+x^2+4x
01-5 ⑤

02-1 ③
02-2 ①
02-3 ①
02-4 ③
02-5 ②

03-1 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
03-2 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$
03-3 $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$
03-4 ⑤
03-5 (1) $S(t)=\dfrac{3}{2}t^2-2t+2$ (2) 5

04-1 ①
04-2 ⑤
04-3 ④
04-4 ④
04-5 ④

05-1 ①
05-2 ②
05-3 ①
05-4 ④
05-5 ④

06-1 ①
06-2 ③
06-3 (1) 풀이참조 (2) $\dfrac{8}{3}$
06-4 -1
06-5 118

07-1 ④
07-2 2
07-3 $-1<a<1$
07-4 ⑤
07-5 ②

08-1 ⑤
08-2 ④
08-3 ①
08-4 ③
08-5 (1) 풀이참조 (2) $k=2$, $k=4$

09-1 ⑤
09-2 10
09-3 ②
09-4 ④
09-5 ④

10-1 ①
10-2 ③
10-3 4
10-4 $f(x)=-x^2(x-4)^2+2$, 극솟값 -14
10-5 42

11-1 ②
11-2 ②
11-3 ③
11-4 풀이참조
11-5 (1) 2 (2) $a=-\sqrt{3}$, $b=\sqrt{3}$

12-1 (1) $f(0)=1$ (2) $f'(x)=2x^2+1$ (3) $f(x)=\frac{2}{3}x^3+x+1$
12-2 ③
12-3 ③
12-4 32
12-5 32

13-1 $a=-\frac{1}{7}$, $b=-\frac{6}{7}$, $c=1$, $d_1=-3$, $d_2=0$, $d_3=15$
13-2 ①
13-3 ⑤
13-4 8
13-5 ①

14-1 ②
14-2 ①
14-3 10
14-4 ③
14-5 ④

15-1 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조
(3) $f(x)+x=\frac{32}{9}x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)+2x$ (4) 51
15-2 ②
15-3 243
15-4 110
15-5 -48

16-1 30
16-2 ②
16-3 ①
16-4 ①
16-5 ①

17-1 $\frac{6}{25}$
17-2 $\frac{11}{16}$
17-3 ⑤
17-4 ②
17-5 $a\le -2$ 일때, 최댓값 $\frac{256}{5}$

18-1 ⑤
18-2 ③
18-3 ③
18-4 ④
18-5 ②

19-1 ②
19-2 (1) 1 (2) 2
19-3 ①
19-4 ③
19-5 -24

20-1 ①
20-2 ④
20-3 ④
20-4 ④
20-5 ④

Theme 01 극한값의 계산

01-1 정답 ①

$x\{f(x)-1\}=g(x)\{f(x)+1\}$의 양변을 $x\{f(x)+1\}$로 나누면

$$\frac{g(x)}{x}=\frac{\{f(x)-1\}}{\{f(x)+1\}}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\frac{1}{3}\quad\left(\because \lim_{x\to 0}f(x)=2\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)+x}{x^2-g(x)}$$

분모와 분자를 각각 x로 나누면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\times\frac{g(x)}{x}+1}{x-\frac{g(x)}{x}}=\frac{2\times\frac{1}{3}+1}{0-\frac{1}{3}}=\frac{2+3}{-1}=-5$$

01-2 정답 2

$\left|x^2f\left(\frac{1}{x}\right)-2x\right|<1$에서 $-1<x^2f\left(\frac{1}{x}\right)-2x<1$이고

$$2x-1<x^2f\left(\frac{1}{x}\right)<2x+1$$

(i) $x>0$인 경우

양변을 x로 나누면

$\frac{2x-1}{x}<xf\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{2x+1}{x}$이고,

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x}=2,\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2$이므로 $\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)=2$이며,

$\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}$이므로

$$\therefore \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=2$$

(ii) $x<0$인 경우

양변을 x로 나누면

$\frac{2x+1}{x}<xf\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{2x-1}{x}$이고,

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x}=2,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x}=2$이므로 $\lim_{x\to-\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)=2$이며,

$\lim_{x\to-\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}$이므로

$$\therefore \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=2$$

(i)과 (ii)로부터

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$$

01-3 정답 4

조건 (가)로부터 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}$이 수렴하고 $\lim_{x\to1}\{x-1\}=0$으로 분모가 수렴하므로 분자도 수렴해야 한다.

$\therefore\ \lim_{x\to1}f(x)=2$

조건 (나)에서

$\lim_{x\to1}\{x^2f(x)-6xf(1)\}=0$

$\lim_{x\to1}x^2f(x)-\lim_{x\to1}6xf(1)=0$

$1^2\times2-6\times f(1)=0$

$\therefore\ f(1)=\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to1}\frac{x^2f(x)-6xf(1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x}{x+1}\times\frac{xf(x)-6f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x}{x+1}\times\lim_{x\to1}\frac{xf(x)-2x+2x-2}{x-1}$

$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to1}\left\{\frac{x(f(x)-2)}{x-1}+2\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\{6+2\}\ \left(\because\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=6\right)$

$=4$

참고

문제 조건에 함수 $f(x)$의 연속성에 대한 단서가 없으므로 조건 (가)만으로 $f(1)=2$라고 판단해서는 안 된다. 실제로 조건을 통해서 구해 본 함숫값은 $f(1)=\frac{1}{3}$이고 극한값은 $\lim_{x\to1}f(x)=2$으로 함숫값과 극한값이 다르므로 연속함수가 아니다.

01-4 정답 $3x^2+4x$, x^3+x^2+4x, x^4+x^2+4x

함수 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \cdots\ +a_1x+a_0$

조건 (나)에 대입하면 $a_0=0,\ a_1=4$임을 알 수 있다.

따라서 다항함수 $f(x)$의 일차항 계수는 4고 상수항은 0이다.

조건 (다)로부터 다항함수 $f(x)$의 차수가 4차 이하이기 때문에 다음과 같이 나누어 생각해 볼 수 있다.

(ⅰ) $f(x)$가 4차식인 경우

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+4x\ (a\neq0)$라 하자.

$x^2f(x)=ax^6+bx^5+cx^4+4x^3$

$\{f(x)\}^2=a^2x^8+2abx^7+(2ac+b^2)x^6+\ \cdots$

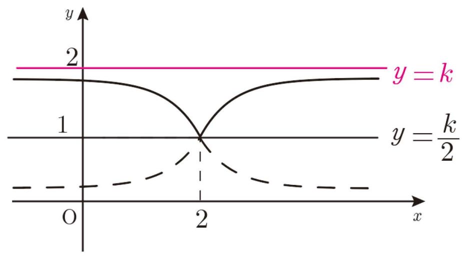
$f(x^2)=ax^8+bx^6+cx^4+4x^2$

분모는 6차이고 분자의 차수는 8차이므로 분자의 x^8의 계수와 x^7의 계수가 0이어야 한다.

$a^2-a=0$

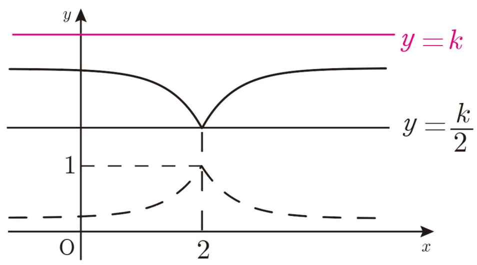
$\therefore\ a=1\ (\because\ a\neq0)$

(v) $\frac{k}{2}=1$, 즉 $k=2$



$\therefore\ h(k)=0$

(vi) $\frac{k}{2}>1$, 즉 $k>2$



$\therefore\ h(k)=0$

(i) ~ (vi)에서

$$h(k)=\begin{cases} 0 & (k\le 0,\ k>1) \\ 1 & (k=1) \\ 2 & (0<k<1) \end{cases}$$

$$p(k)=k(k-1)$$

$$\begin{aligned} y&=p(k-a)h(k) \\ &=(k-a)(k-a-1)h(k) \\ &=\begin{cases} 0 & (k\le 0,\ k>1) \\ (k-a)(k-a-1) & (k=1) \\ 2(k-a)(k-a-1) & (0<k<1) \end{cases} \end{aligned}$$

$a=1$일 때, $k=0$에서만 불연속

$a=-1$일 때 $k=1$에서만 불연속

모든 실수 a의 곱은 -1이다.

참고 $g(x)=\left|f(x)-\frac{k}{2}\right|+\frac{k}{2}$의 해석

함수 $y=f(x)-\frac{k}{2}$는 함수 $y=f(x)$를 y축으로 $-\frac{k}{2}$만큼 평행이동한 함수이다.

함수 $y=\left|f(x)-\frac{k}{2}\right|$는 함수 $y=f(x)-\frac{k}{2}$의 그래프의 x축 아랫부분을 접어올린 함수이다.

그리고 $g(x)=\left|f(x)-\frac{k}{2}\right|+\frac{k}{2}$은 $y=\left|f(x)-\frac{k}{2}\right|$의 그래프를 y축으로 $\frac{k}{2}$만큼 평행이동한 함수이다.

따라서 $g(x)=\left|f(x)-\frac{k}{2}\right|+\frac{k}{2}$은 $y=f(x)$의 함수를 $y=\frac{k}{2}$를 기준으로 접어올린 함수이다.

06-5 정답 118

$f(x)=\begin{cases} 2(x-2)^2+2 & (x\le 2) \\ -(x-2)^2+2 & (x>2) \end{cases}$이므로 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$의 좌표는 t의 값에 따라 다르다.