# 20DEVILS

수학 Ⅰ

# CONTENTS

Theme 01

# 지수 성질의 응용

개념 01

## $a$의 제곱근과 $\sqrt[n]{a}$ ($n$제곱근$a$)의 관계 1-1, 2

i) $n$이 홀수일 경우 $a$가 실수일 때 $\sqrt[n]{a}$로 나타낸다 (실수 1개)

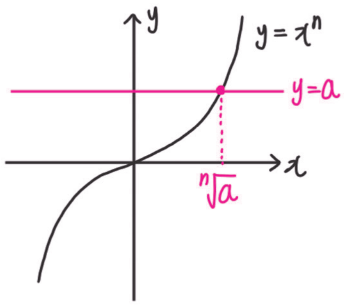
ii) $n$이 짝수일 경우 $a > 0$ 일 때 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ (실수 총 2개 (양수 1, 음수 1개))

$a = 0$ 일 때 $\sqrt[n]{0} = 0$ 이므로 "0" 하나다.

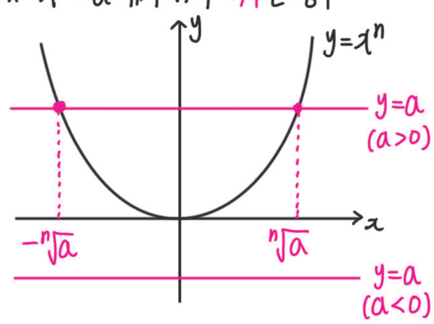
$a < 0$ 일 때 실수는 없다!

<참고>

* $x^n = a$ 에서 $n$이 홀수인 경우




* $x^n = a$ 에서 $n$이 짝수인 경우



개념 02

# 지수의 확장 1-3

→ $a \neq 0$, $n$이 양의 정수일때, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

→ $a > 0$, $m$은 정수, $n$은 2 이상 정수일 때

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

→ $a > 0$, $k > 0$, $x$는 0이 아닌 정수

$a^x = k \iff (a^x)^{\frac{1}{x}} = k^{\frac{1}{x}} \iff a = k^{\frac{1}{x}}$

* $a^x + a^{-x}$ 꼴의 식의 값 계산 ⇒ 곱셈공식 변형 이용!

→ $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$

→ $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$, $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

→ $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$, $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

✲출제 多 유형 中! ≫ $2^x = 3^y = 6$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = ?$

$2^x = 3^y = 6$, $2 = 6^{\frac{1}{x}}$, $3 = 6^{\frac{1}{y}}$

$6^{\frac{1}{x}} \times 6^{\frac{1}{y}} = 6^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 2 \times 3 = 6$

따라서 $\underline{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1}$ 지수계산!

✲응용 많이✲ ⊕ $\dfrac{a^{kx} + a^{kx}}{a^x + a^{-x}}$ 꼴! ⇒ 분모와 분자에 $a^x$ 곱해서 풀기!

개념
03

## 두 직선이 수직 관계(기울기)/선분의 길이 4-4

① 직선과 수직 ⇒ 기울기끼리 곱은 "$-1$" 이용

② $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ 일 때 $\overline{AB}=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$

---

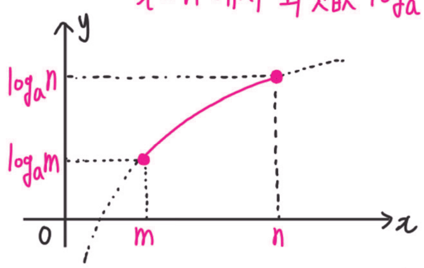
개념
04

## 로그함수의 최대 최소 4-5

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 정의역이 $\{x \mid m\le x\le n\}$일 때

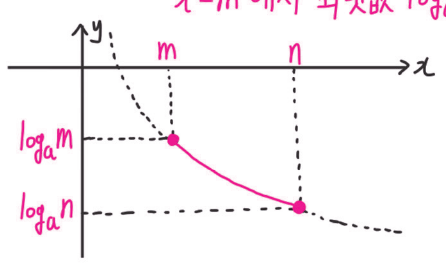
(1) $a>1$, $x=m$에서 최솟값 $\log_a m$

$x=n$에서 최댓값 $\log_a n$




(2) $0<a<1$ $x=n$에서 최솟값 $\log_a n$

$x=m$에서 최댓값 $\log_a m$



# 20DEVILS

수학 I

# 빠른 정답

01-1 ⑤
01-2 ③
01-3 ⑤
01-4 17
01-5 ③

02-1 ①
02-2 20
02-3 55
02-4 17 개
02-5 ⑤

03-1 ③
03-2 ②
03-3 ②
03-4 16
03-5 ⑤

04-1 ①
04-2 ③
04-3 ①
04-4 ②
04-5 ④

05-1 ①
05-2 ⑤
05-3 ⑤
05-4 ②
05-5 48

06-1 $x=\log_2 3$
06-2 1
06-3 ①
06-4 50
06-5 5

07-1 $4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$
07-2 ③
07-3 ②
07-4 ④
07-5 ⑤

08-1 ④
08-2 $x=\frac{\pi}{4}$ or $\frac{3}{4}\pi$일 때, 최솟값 $\frac{1}{4}$
08-3 ⑤
08-4 ④
08-5 ①

09-1 ③
09-2 ③
09-3 ④
09-4 ③
09-5 ⑤

10-1 ④
10-2 35
10-3 $x=0,\ \pi \le x \le 2\pi$
10-4 50
10-5 $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi,\ x=\frac{7}{4}\pi$

11-1 ⑤
11-2 ⑤
11-3 ③
11-4 ②
11-5 ①

12-1 ⑤
12-2 (1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
12-3 $\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$
12-4 (1) $\overline{\mathrm{EA}}=4\sqrt{3},\ \overline{\mathrm{EM}}=2\sqrt{7}$
(2) $\cos\theta=-\frac{\sqrt{21}}{14}$
12-5 $\frac{2}{3}\pi$

13-1 124
13-2 ⑤
13-3 (1) $18\sqrt{6}$ (2) $\frac{\sqrt{10}}{35}$
13-4 ④
13-5 8

14-1 81
14-2 $28(\sqrt{3}-1)$
14-3 ④
14-4 ③
14-5 $-600$

15-1 ①
15-2 ①
15-3 ③
15-4 ②
15-5 400

16-1 ①
16-2 38
16-3 ③
16-4 177
16-5 $\frac{687}{4}$

17-1 ③
17-2 ④
17-3 ②
17-4 425
17-5 190

18-1 ①
18-2 ④
18-3 1020
18-4 (1) $a_2 = -\frac{3}{2}$ (2) $b_{n+1} = b_n + 1$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 50$
18-5 ②

19-1 (1) 299 (2) 216
19-2 ④
19-3 ②
19-4 ①
19-5 ②

20-1 ⑤
20-2 ②
20-3 풀이참조
20-4 풀이참조
20-5 풀이참조

# Theme 01 지수성질의 응용

**01-1 정답 ⑤**

$f(11,\ 2)$는 $x^2=11$에서 실수 $x$의 개수 : 2개

$f(10,\ 3)$는 $x^3=10$에서 실수 $x$의 개수 : 1개

$f(9,\ 4)$는 $x^4=9$에서 실수 $x$의 개수 : 2개

$f(13-k,\ k)$는 $x^k=13-k$에서 실수 $x$의 개수이다.

i ) $k$가 홀수일 때, $f(13-k,\ k)=1$

ii ) $k$가 짝수이고 $k>13$일 때, $f(13-k,\ k)=0$

iii) $k$가 짝수이고 $k<13$일 때, $f(13-k,\ k)=2$

$f(11,\ 2)+\cdots+f(0,\ 13)=18$

여기에 $f(-1,\ 14)=0$, $f(-2,\ 15)=1$,

$f(-3,\ 16)=0$, $f(-4,\ 17)=1$이 반복되므로 총합이 23이 되게 하는 최대의 값은 $f(-11,\ 24)=0$까지의 합일 때이다.

$\therefore\ k=24$

주의

$a$의 $n$제곱근 중 실수인 것의 개수는 $a$의 부호, $n$이 홀수인지 짝수인지에 따라 달라진다.

다른 풀이

$f(11,\ 2)$는 11의 2제곱근 중 실수인 것의 개수

| | $n$은 짝수 (개수) | $n$은 홀수 (개수) |
|---|---|---|
| $a>0$ | 2 | 1 |
| $a=0$ | 1 | 1 |
| $a<0$ | 0 | 1 |

위의 표를 참고하여 아래에 나타내면

$f(11,\ 2)=2$, $f(10,\ 3)=1$, $f(9,\ 4)=2$, $f(8,\ 5)=1$, $f(7,\ 6)=2$, $f(6,\ 7)=1$, $f(5,\ 8)=2$,

$f(4,\ 9)=1$, $f(3,\ 10)=2$ ,$f(2,\ 11)=1$, $f(1,\ 12)=2$, $f(0,\ 13)=1$, $f(-1,\ 14)=0$,

$f(-2,\ 15)=1$, $f(-3,\ 16)=0$, $f(-4,\ 17)=1$, $f(-5,\ 18)=0$, $f(-6,\ 19)=1$, $f(-7,\ 20)=0$,

$f(-8,\ 21)=1$, $f(-9,\ 22)=0$, $f(-10,\ 23)=1$, $f(-11,\ 24)=0$ 까지의 합이 23이므로

$f(13-k, k)=f(-11, 24)$

따라서 $k=24$이다.

**01-2 정답 ③**

$x^n=a$를 만족하는 실수 $x$의 개수를 $f_n(a)$라 한다.

ㄱ. $f_5(-1)$은 $x^5=-1$을 만족하는 실수의 개수이므로 1개다. (참)

ㄴ. $f_{2n+1}(a)$는 $x^{2n+1}=a$를 만족하는 실수의 개수인데 $2n+1$이 홀수이므로 1개다.

$f_{2n}(a)$는 $x^{2n}=a$를 만족하는 실수의 개수인데 $2n$은 짝수이고, $a<0$이므로 실근은 존재하지 않는다. 따라서 $f_{2n+1}(a)-f_{2n}(a)=1-0=1$ (참)

ㄷ. $g(n)<g(n+1)$에서 $f_{n+1}(a)-f_n(a)<f_{n+2}(a)-f_{n+1}(a)$

$2f_{n+1}(a)<f_n(a)+f_{n+2}(a)$

(ⅰ) $n$이 짝수일 때, $f_{n+1}(a)=1$, $f_n(a)=2$, $f_{n+2}(a)=2$

따라서 $2\cdot1<2+2$이므로 참이다.

(ⅱ) $n$이 홀수일 때,

$f_{n+1}(a)=2$, $f_n(a)=1$, $f_{n+2}(a)=1$

따라서 $2\cdot2<1+1$은 거짓이다.

그러므로 ㄷ은 $a>0$일 때, $n$이 짝수여야 성립한다. (거짓)

## 01-3 정답 ⑤

$4^x=27^y=36^z=k$라 하면 $4=k^{\frac{1}{x}}$, $36=k^{\frac{1}{z}}$이므로 $k^{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}=144$

$3^\alpha=8^\beta=48^\gamma=p$라 하면 $3=p^{\frac{1}{\alpha}}$, $48=p^{\frac{1}{\gamma}}$이므로 $p^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}}=144$

이때 주어진 식 $\dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{3\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$에서 역수 취하면 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\gamma}\right)$이다.

$144=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}=p^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}}=p^{3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)}$

따라서 $k=p^3$이다.

$p=8^\beta=2^{3\beta}$이고 $k=27^y$, $k^{\frac{1}{3y}}=3$이므로

$2^{\frac{3\beta}{y}}=\left(2^{3\beta}\right)^{\frac{1}{y}}=p^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{3y}}=3$

**다른 풀이**

$4^x=27^y=36^z=k$

$x=\dfrac{\log k}{\log 4}$, $y=\dfrac{\log k}{\log 27}$, $z=\dfrac{\log k}{\log 36}$

$3^\alpha=8^\beta=48^\gamma=m$

$\alpha=\dfrac{\log m}{\log 3}$, $\beta=\dfrac{\log m}{\log 8}$, $\gamma=\dfrac{\log m}{\log 48}$

$$\frac{xz}{x+z}=\frac{\dfrac{\log k}{\log 4}\times\dfrac{\log k}{\log 36}}{\dfrac{\log k}{\log 4}+\dfrac{\log k}{\log 36}}=\frac{\log k}{\log 4+\log 36}$$

$$\frac{3\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}=\frac{\dfrac{\log m}{\log 3}\times\dfrac{\log m}{\log 48}}{\dfrac{\log m}{\log 3}+\dfrac{\log m}{\log 48}}=\frac{\log m}{\log 3+\log 48}$$

이때 $\dfrac{\log k}{\log 4+\log 36}=\dfrac{\log m}{\log 3+\log 48}$이므로

$k=m^3$이다.

$$\therefore\ 2^{\frac{3\beta}{y}}=2^{\frac{\frac{3\log m}{\log 8}}{\frac{\log k}{\log 27}}}=2^{\frac{9\log 3\log m}{3\log 2\log k}}=2^{\log_2 3}=3$$

## 01-4 정답 17

등식 $2^{\frac{10}{n}}=k\times6^{\frac{4}{m}}$에서 식을 정리하면,

**02-4 정답** 17 개

$n$은 100보다 작은 자연수이므로 $0 \le \log n < 2$

( i ) $0 \le \log n < 1$인 경우

$1 \le n < 10$이고 $[\log n] = 0$

(가)에서 $[\log 3n] = 1$이므로

$1 \le \log 3n < 2$

$10 \le 3n < 100$

$\frac{10}{3} \le n < \frac{100}{3}$ ...... ①

(나)에서 $\log n < \log 5$이므로

$n < 5$ ...... ②

①, ②에서 $\frac{10}{3} \le n < 5$이므로 $n = 4$

( ii ) $1 \le \log n < 2$인 경우

$10 \le n < 100$이고 $[\log n] = 1$

(가)에서 $[\log 3n] = 2$이므로

$2 \le \log 3n < 3$

$100 \le 3n < 1000$

$\frac{100}{3} \le n < \frac{1000}{3}$ ...... ③

(나)에서 $\log n - 1 < \log 5$이므로

$\log n < 1 + \log 5 = \log 50$

$n < 50$ ...... ④

③, ④에서 $\frac{100}{3} \le n < 50$이므로

$n = 34,\ 35,\ 36,\ \cdots,\ 49$

따라서 구하는 자연수 $n$의 개수는 $1 + 16 = 17$

[tip]

$[\log 3n] = [\log n] + 1$에서 $n$에 3을 곱하면 자릿수가 바뀐다.

$\log n - [\log n] < \log 5$에서 $\log n$의 소수부분$< \log 5$이면 $n$의 최고자리수 $n \le 4$이다.

**02-5 정답** ⑤

$\log_a b = x,\ \log_b c = y,\ \log_c a = z$라 하면

$xyz = \log_a b \times \log_b c \times \log_c a = \frac{\log b}{\log a} \times \frac{\log c}{\log b} \times \frac{\log a}{\log c} = 1$

$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{x},\ \log_c b = \frac{1}{\log_b c} = \frac{1}{y},\ \log_a c = \frac{1}{\log_c a} = \frac{1}{z}$이므로

(가)에서 $2x + 2y + 2z = 1 \quad \therefore\ x + y + z = \frac{1}{2}$

(나)에서 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = xy + yz + zx = -3$

따라서

$(\log_{\sqrt{a}} b)^2 + (\log_{\sqrt{b}} c)^2 + (\log_{\sqrt{c}} a)^2$

$= (2\log_a b)^2 + (2\log_b c)^2 + (2\log_c a)^2$