A. 로그함수의 그래프: 좌표평면(직선의 기울기)

두 개 이상의 직선의 기울기의 대소 관계에 관련된 문제들을 풀어보자.

예제 1

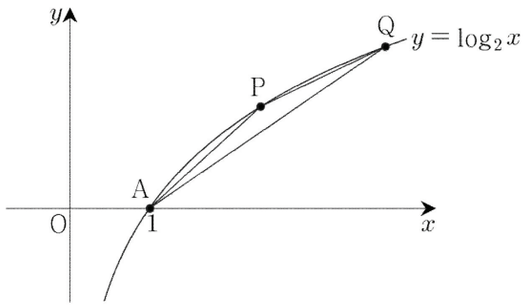
로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 $1<p<q$일 때, 세 수

$$\frac{\log_2 p}{p-1},\ \frac{\log_2 q}{q-1},\ \frac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}$$

의 대소 관계를 밝히시오.

풀이

곡선 $y=\log_2 x$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{P}(p,\ \log_2 p)$, $\mathrm{Q}(q,\ \log_2 q)$를 생각하자.



$\dfrac{\log_2 p}{p-1}$=(두 점 A, P를 잇는 직선의 기울기)

$\dfrac{\log_2 q}{q-1}$=(두 점 A, Q를 잇는 직선의 기울기)

$\dfrac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}$=(두 점 P, Q를 잇는 직선의 기울기)

위의 그림에서 아래의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}<\frac{\log_2 q}{q-1}<\frac{\log_2 p}{p-1}$$

답 풀이 참조

곡선 $y=\log_2 x$가 양의 실수 전체의 집합에서 위로 볼록이므로 위의 부등식이 성립하는 것이다.

지수함수와 로그함수의 참, 거짓 판단 문제는 부등식의 성질과 자주 내적 연계된다.

• 부등식의 성질

실수 a, b, c에 대하여

❶ $a>b$, $b>c$이면 $\quad a>c$

❷ $a>b$이면 $\quad a+c>b+c$, $a-c>b-c$

❸ $a>b$, $c>0$이면 $\quad ac>bc$, $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

❹ $a>b$, $c<0$이면 $\quad ac<bc$, $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

다음의 필요충분조건이 성립함을 알 수 있다.

양수 a, b, c, d에 대하여

$ab>cd \Leftrightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{d}{b}$ ($\because$ ❸) $\quad \cdots$㉠

양수 a, b, d와 음수 c에 대하여

$ab>cd \Leftrightarrow \dfrac{a}{c}<\dfrac{d}{b}$ ($\because$ ❹) $\quad \cdots$㉡

증명

㉠($\Rightarrow$):

양변을 $bc(>0)$로 나누면

$\dfrac{ab}{bc}>\dfrac{cd}{bc}$, 즉 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{d}{b}$

㉠($\Leftarrow$):

양변에 $bc(>0)$를 곱하면

$\dfrac{a}{c}bc>\dfrac{d}{b}bc$, 즉 $ab>cd$

㉡($\Rightarrow$):

양변을 $bc(<0)$로 나누면

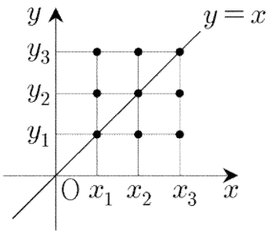
$\dfrac{ab}{bc}<\dfrac{cd}{bc}$, 즉 $\dfrac{a}{c}<\dfrac{d}{b}$

㉡($\Leftarrow$):

양변에 $bc(<0)$를 곱하면

$\dfrac{a}{c}bc>\dfrac{d}{b}bc$, 즉 $ab>cd$

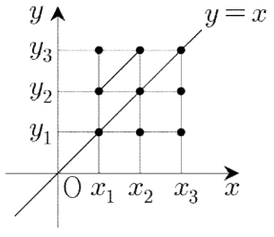
좌표평면 위에 아래 그림과 같이 9개의 점이 있다고 하자.



(단, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$)

다음과 같은 등식들이 성립한다.

• 평행:

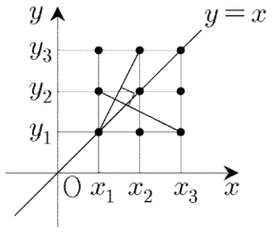


$$\frac{y_3-y_2}{x_2-x_1}=1$$

(두 점 $(x_1,\ y_2)$, $(x_2,\ y_3)$을 잇는 직선과 직선 $y=x$는 서로 평행하다.)

이때, 위의 등식과 등식 $y_3-y_2=x_2-x_1$(두 선분의 길이가 같다.)는 필요충분조건이다.

• 수직:



$$\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}\times\frac{y_3-y_1}{x_2-x_1}=-1$$

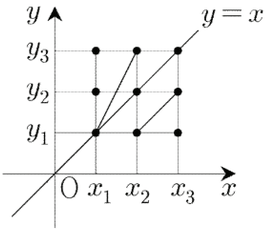
(두 점 $(x_1,\ y_2)$, $(x_3,\ y_1)$을 잇는 직선과 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_3)$을 잇는 직선은 서로 수직이다.)

다음의 부등식이 성립한다. (두 직선의 기울기가 모두 음수일 때, 대소 관계를 주의하자!)

• 두 직선의 기울기의 대소 관계: 기울기가 양수인 경우

$$\frac{y_3-y_1}{x_2-x_1}>\frac{y_2-y_1}{x_3-x_2}$$

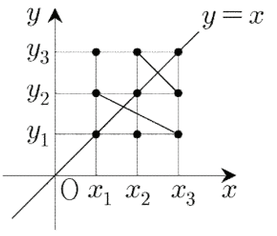
$$\Leftrightarrow (y_3-y_1)(x_3-x_2)>(y_2-y_1)(x_2-x_1)$$



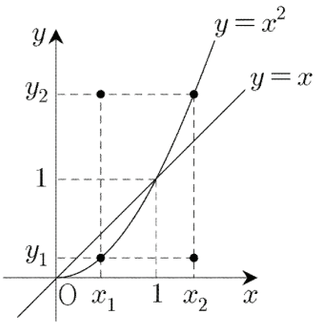
• 두 직선의 기울기의 대소 관계: 기울기가 음수인 경우

$$\frac{y_2-y_3}{x_3-x_2}<\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}$$

$$\Leftrightarrow (y_2-y_3)(x_3-x_1)<(y_1-y_2)(x_3-x_2)$$



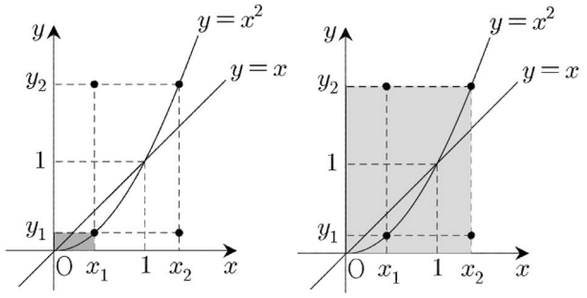
아래의 예를 생각해보자.



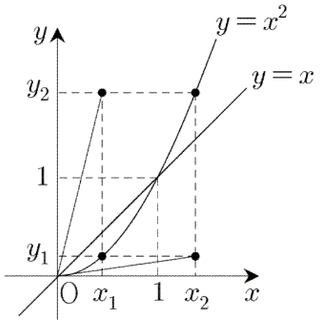
위의 그림에서 아래의 부등식이 성립한다.

$x_1y_1 < x_2y_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_2} < \dfrac{y_2}{x_1}$

(즉, 두 직사각형의 넓이의 대소 비교 ⇔ 두 직선의 기울기의 대소 비교)



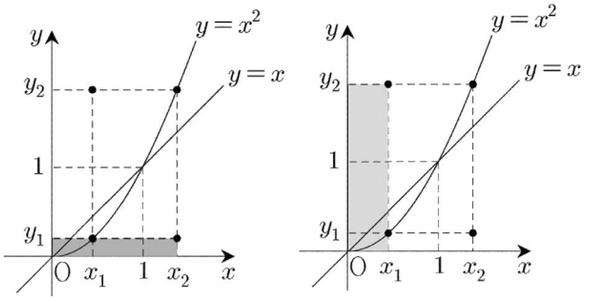
위의 두 직사각형의 넓이를 비교해보면 $x_1y_1 < x_2y_2$이다.



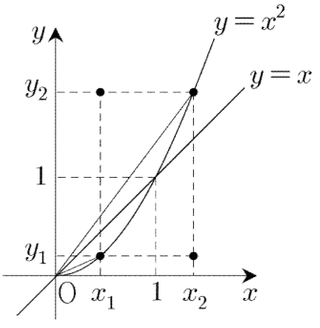
위의 두 직선의 기울기를 비교해보면 $\dfrac{y_1}{x_2} < \dfrac{y_2}{x_1}$이다.

$x_2y_1 < x_1y_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_1} < \dfrac{y_2}{x_2}$

(즉, 두 직사각형의 넓이의 대소 비교 ⇔ 두 직선의 기울기의 대소 비교)

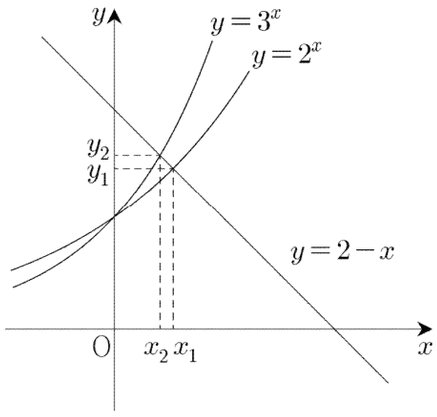


위의 두 직사각형의 넓이를 비교해보면 $x_2y_1 < x_1y_2$이다.



위의 두 직선의 기울기를 비교해보면 $\dfrac{y_1}{x_1} < \dfrac{y_2}{x_2}$이다.

직선 $y=2-x$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$과 만나는 두 교점의 좌표가 아래 그림과 같다고 하자.



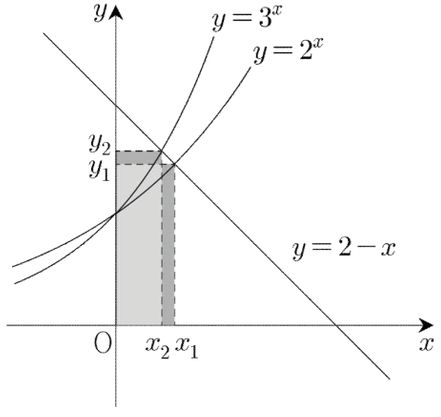
다음이 등식과 부등식이 성립한다.

교점: $0<x_2<x_1<2,\ 1<y_1<y_2<2$

기울기: $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1\ (\Leftrightarrow x_1-x_2=y_2-y_1)$

기울기 대소 비교: $\dfrac{y_1}{x_1}<\dfrac{y_2}{x_2}\ \Leftrightarrow x_2y_1<x_1y_2$

$x_1y_1>x_2y_2$(넓이) $\Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_2}>\dfrac{y_2}{x_1}$(기울기)



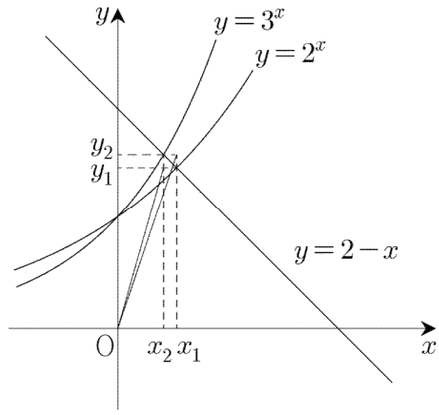
위의 그림에서 두 직사각형의 공통부분의 넓이를 제외한 나머지 두 직사각형의 넓이는 각각

$y_1(x_1-x_2),\ x_2(y_2-y_1)$

이다. 이때, $x_1-x_2=y_2-y_1$

이므로 $y_1(x_1-x_2)>x_2(y_2-y_1)$

그러므로 $x_1y_1>x_2y_2$



위의 그림에서 두 직선의 기울기를 비교하면

$\dfrac{y_1}{x_2}>\dfrac{y_2}{x_1}$

임을 알 수 있다.

이 문제의 경우 두 직사각형의 넓이의 대소관계가 두 직선의 기울기의 대소관계보다 명확하게 보인다.

• 두 직선의 평행 조건과 일치 조건

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이

(1) 평행하기 위한 필요충분조건은 $m=m'$, $n\neq n'$

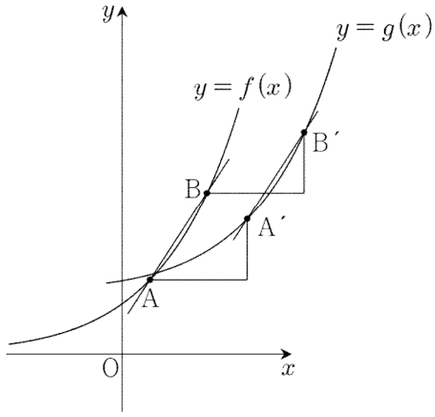
(2) 일치하기 위한 필요충분조건은 $m=m'$, $n=n'$

예제 2

지수함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면 함수 $g(x)$의 그래프와 일치하고, 이 평행이동에 의하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 A, B는 각각 두 점 A′, B′으로 이동된다. 두 직선 AB, A′B′은 서로 평행함을 증명하시오.

증명

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



두 점 A, B의 좌표를 각각

$A(p,\ 2^p)$, $B(q,\ 2^q)$

라고 하면 두 점 A′, B′의 좌표는 각각

$A'(p+m,\ 2^p+n)$, $B'(q+m,\ 2^q+n)$

$$(\text{직선 AB의 기울기})=\frac{2^q-2^p}{q-p}$$

$$(\text{직선 A'B'의 기울기})=\frac{(2^q+n)-(2^p+n)}{(q+m)-(p+m)}$$

$$=\frac{2^q-2^p}{q-p}$$

이므로 두 직선 AB, A′B′는 서로 평행하다.

답 풀이 참조

A094 ○

(2003(9)-인문12/예체능12/자연12)

함수 $y=\log_2(x+1)+1$의 그래프가 x축 및 y축과 만나는 두 점을 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① -2 ② -1 ③ 1

④ 2 ⑤ 4

A095 ○○○

(2006(6)-나형12)

두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ -m)$을 지나는 직선이 두 곡선 $y=2\log x$, $y=3\log x$와 각각 두 점에서 만날 때, $(1,\ 0)$이 아닌 교점을 각각 $(p,\ 2\log p)$, $(q,\ 3\log q)$라 하자.

〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

(단, $m>0$, $p>1$, $q>1$이다.) [4점]

ㄱ. $p>q$
ㄴ. $m=\dfrac{3\log q-2\log p}{q-p}$
ㄷ. $m>\dfrac{3\log q}{q}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A096

○○○
(2008-가형16/나형16)

직선 $y=2-x$가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $x_1 > y_2$
ㄴ. $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$
ㄷ. $x_1 y_1 > x_2 y_2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A. 로그함수의 그래프: 평행이동+대칭이동

예제 1

함수 $f(x)=\log_a(ax-2a)(a>0,\ a\neq 1)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 평행이동시켜서 함수 $f(x)$의 그래프와 일치시킬 수 있다.
ㄴ. $0<a<1$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=a^x$의 그래프는 서로 만난다.
ㄷ. $a>1$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_a x$의 그래프는 서로 만나지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

▸ ㄱ. (참)

로그의 성질에 의하여

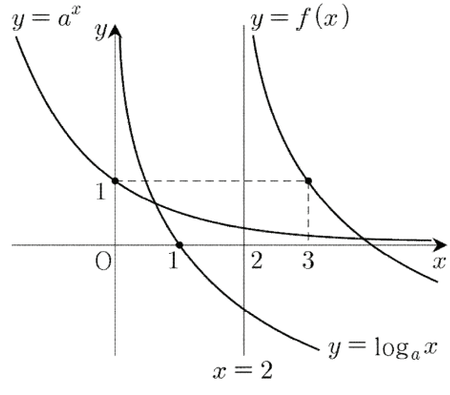
$\log_a(ax-2a)=\log_a a(x-2)=1+\log_a(x-2)$

이므로

$f(x)=1+\log_a(x-2)$

함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 함수 $f(x)$의 그래프와 일치한다.

▸ ㄴ. (참)



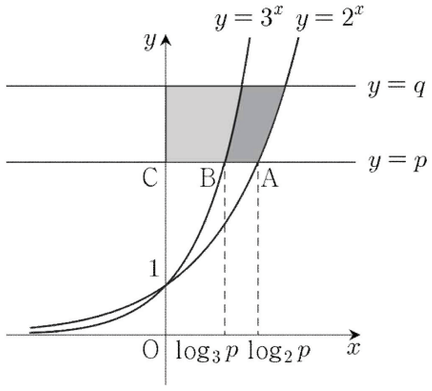
$0<a<1$일 때,

구간 $(2,\ \infty)$에서 함수 $y=a^x$는 양의 값을 가지면서 감소하고,

구간 $(2,\ \infty)$에서 함수 $y=f(x)$는 ∞에서 $-\infty$로 감소

A. 지수함수와 로그함수의 그래프: 비율 관계

• 지수함수의 확대축소 (비율관계)



위의 그림처럼 직선 $y=p$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$ 및 y축과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 하자.

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\log_3 p=(\log_3 2)(\log_2 p)$

이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=1:\log_3 2$ $(\overline{AC}:\overline{BC}=\log_2 3:1)$

따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

(곡선 $y=2^x$과 두 직선 $y=p$, $y=q$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이)

=(곡선 $y=3^x$과 두 직선 $y=p$, $y=q$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이)$\times\log_2 3$

(두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$과 두 직선 $y=p$, $y=q$로 둘러싸인 도형의 넓이)

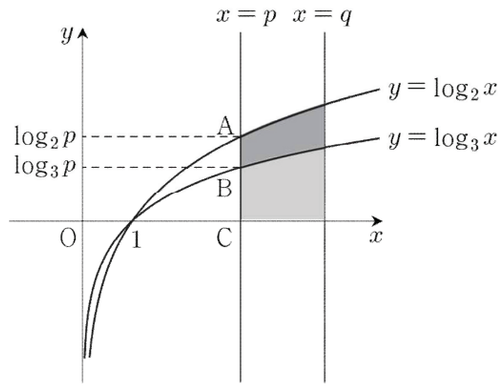
=(곡선 $y=3^x$과 두 직선 $y=p$, $y=q$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이)$\times\log_2\dfrac{3}{2}$

이때, $\log_2\dfrac{3}{2}=\dfrac{1-\log_3 2}{\log_3 2}$

즉, 곡선 $y=2^x$은 곡선 $y=3^x$을 x축에 대하여 $\log_2 3$ (>1) 만큼 확대한 것이다.

그리고 곡선 $y=3^x$은 곡선 $y=2^x$을 x축에 대하여 $\log_3 2$ (<1) 만큼 축소한 것이다.

• 로그함수의 확대축소 (비율관계)



위의 그림처럼 직선 $x=p$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$ 및 x축과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 하자.

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\log_3 p=(\log_3 2)(\log_2 p)$

이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=1:\log_3 2$ $(\overline{AC}:\overline{BC}=\log_2 3:1)$

따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

(곡선 $y=\log_2 x$과 두 직선 $x=p$, $x=q$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이)

=(곡선 $y=\log_3 x$과 두 직선 $x=p$, $x=q$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이)$\times\log_2 3$

(두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$과 두 직선 $x=p$, $x=q$로 둘러싸인 도형의 넓이)

=(곡선 $y=\log_3 x$과 두 직선 $x=p$, $x=q$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이)$\times\log_2\dfrac{3}{2}$

이때, $\log_2\dfrac{3}{2}=\dfrac{1-\log_3 2}{\log_3 2}$

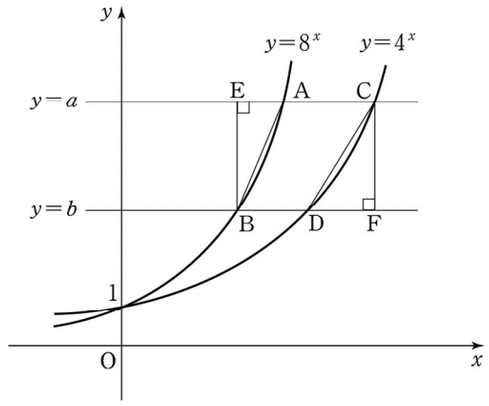
즉, 곡선 $y=\log_2 x$은 곡선 $y=\log_3 x$을 y축에 대하여 $\log_2 3(>1)$ 만큼 확대한 것이다.

그리고 곡선 $y=\log_3 x$은 곡선 $y=\log_2 x$을 y축에 대하여 $\log_3 2(<1)$ 만큼 축소한 것이다.

A102

○○○
(2008(6)-가형13/나형13)

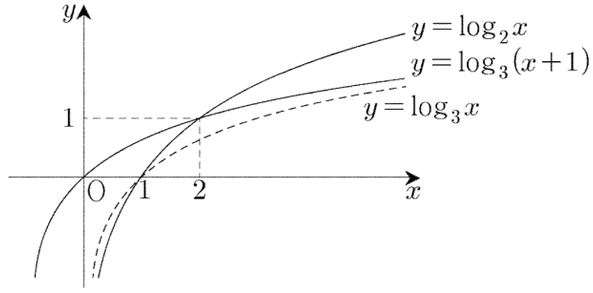
그림과 같이 함수 $y=8^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=4^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B에서 직선 $y=a$에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선 $y=b$에 내린 수선의 발을 F라 하자. 삼각형 AEB의 넓이가 20일 때, 삼각형 CDF의 넓이는?
(단, $a>b>1$이다.) [3점]



① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

A. 두 로그함수의 위치 관계

예를 들어 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3(x+1)$의 위치 관계를 따져보자.



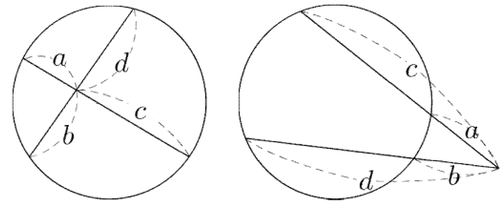
위의 그림에서 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 부등식
$\log_3(n+1) \le \log_2 n$
이 성립함을 알 수 있다. (단, 등호는 $n=2$일 때 성립한다.)

만약 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 $(n,\ \log_2 n)$와
곡선 $y=\log_3 x$ 위의 점 $(n+1,\ \log_3(n+1))$의
y좌표의 크기를 비교한다면 눈으로 명확하게 확인하기 힘들다.

수능에서는 이처럼 평행이동의 관점을 적용해야 풀리는 문제를 출제하는 경향이 있다.

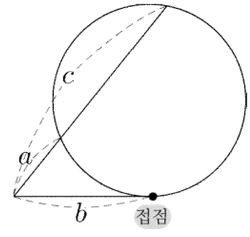
① $\frac{169}{27}$ ② $\frac{56}{9}$ ③ $\frac{167}{27}$
④ $\frac{166}{27}$ ⑤ $\frac{55}{9}$

B. 코사인법칙: 할선 정리



위의 두 그림에서 아래의 등식이 항상 성립한다.
$ac = bd$

특히 $b = d$인 경우는 다음과 같다.

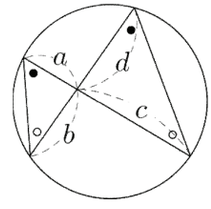


$ac = b^2$

위의 등식은 공식으로 기억해두면 쓸모가 많다.

맨 위의 왼쪽 그림만 증명해보자.

증명

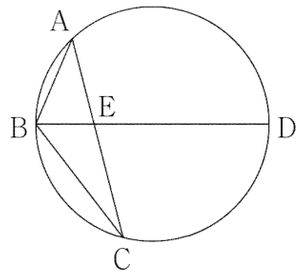


원주각의 성질에 의하여 위와 같이 네 개의 각의 크기가 결정된다.
이때, 왼쪽과 오른쪽의 두 삼각형은 서로 닮음이므로
$a : b = d : c$, 즉 $ac = bd$

할선 정리를 적용한 문제를 풀어보자.

예제 1

$\overline{BD}$가 지름인 원 위의 두 점 A, C에 대하여 두 선분 AC, BD가 만나는 점을 E라고 하자.

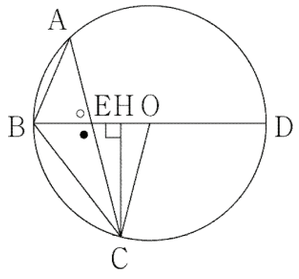


$\overline{BE}=2$, $\overline{ED}=6$, $\overline{AE}=3$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

풀이

원의 중심을 O, 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 $\angle BEC=\theta(=\bullet)$로 두자.

이때, $\angle AEB=\pi-\theta(=\circ)$이다.



할선 정리에 의하여

$3\times\overline{EC}=2\times6$, 즉 $\overline{EC}=4$

세 변의 길이가 각각 4, 4, 2인 이등변삼각형 ECO에서 높이를 구하면

$\overline{CH}=\sqrt{15}$

직각삼각형 BCH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{BC}=2\sqrt{6}$

삼각형 BCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{2^2+4^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times2\times4}=-\frac{1}{4}$$

삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos(\pi-\theta)=10$

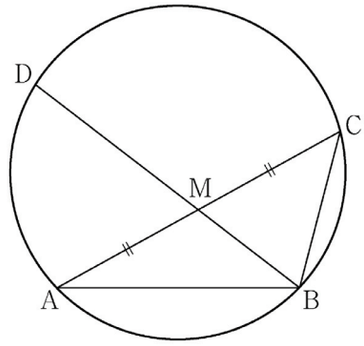
$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{10}$

답 $\sqrt{10}$

B062

●●● (2023(6)-확률과통계10/미적분10/기하10)

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

C034

★★★ (2009(6)-가형16/나형16)

공차가 d_1, d_2인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자.

$$S_nT_n = n^2(n^2-1)$$

일 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a_n = n$이면 $b_n = 4n-4$이다.
ㄴ. $d_1d_2 = 4$
ㄷ. $a_1 \neq 0$이면 $a_n = n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

C. 등차수열의 합: 이차함수(그래프)

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니면 수열 $\{S_n\}$은 이차함수이다. (이때, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$)

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(\neq 0)$이라고 하면

$$a_n = a_1 + (n-1)d = \boxed{dn} + a_1 - d, \quad \cdots ㉠$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \times n = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n$$

이때, S_n을 n에 대하여 미분하면

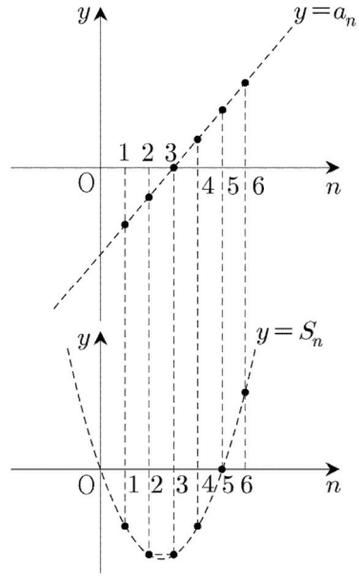
$$(S_n)' = \boxed{dn} + a_1 - \frac{d}{2} \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 a_n, $(S_n)'$ 모두 최고차항의 계수가 d인 일차함수임을 알 수 있다. (단, $d \neq 0$이면 상수항은 다르다.)

예를 들어 수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이면 $(S_n)'$의 최고차항의 계수가 2이므로 $S_n = n^2 + \cdots$이다. (이때, 부정적분을 한 것이다.)

그리고 아래와 같이 두 함수 a_n, S_n의 그래프를 함께 그리면 문제 풀이에 도움이 될 때가 많다.

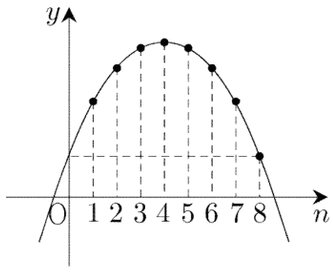
예를 들어 $a_n = 2n-6$이면 $S_n = n^2 - 5n$이고, 이 두 함수를 한 평면 위에 그리면 다음과 같다.



예제 1

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

다음은 수열 $\{S_n\}$을 좌표평면에 나타낸 것이다.



이때, 각각의 값을 구하시오.

(1) $a_k \le 0$인 k의 최솟값

(2) $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_8 < 0$인 m의 모든 값의 합

풀이

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \times n = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n$$

이므로 $d < 0$이다. 그리고 $a_1 = S_1 > 0$이다.

(1) $S_1 < S_2 < S_3 < S_4$이므로

a_1, a_2, a_3, a_4는 모두 양수이다.

($\because S_2 - S_1 = a_2 > 0$, $S_3 - S_2 = a_3 > 0$,

$S_4 - S_3 = a_4 > 0$)

$S_4 > S_5 > S_6 > S_7 > \cdots$이므로

a_5, a_6, a_7, $\cdots$는 모두 음수이다.

($\because S_5 - S_4 = a_5 < 0$, $\cdots$)

따라서 k의 최솟값은 5이다.

(2) $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_8$

$= S_8 - S_{m-1} < 0$, 즉 $S_8 < S_{m-1}$

$1 \le m-1 \le 7$, $2 \le m \le 8$

따라서 m의 모든 값의 합은 35이다.

답 (1) 5 (2) 35

예제 2

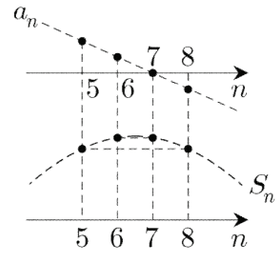
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자. $a_5 + a_7 + a_9 = 0$, $a_6 > a_8$일 때, 다음의 두 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $S_n \le S_{n+1}$

(나) $S_{n+1} \ge S_{n+2}$

풀이1

두 수열 $\{a_n\}$, $\{S_n\}$을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



위의 그림에서

$n+1 = 6$ 또는 7이다.

즉, $m = 5$ 또는 6이다.

따라서 구하는 값은 11이다.

답 11

풀이2

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

세 수 a_5, a_7, a_9는 이 순서대로 공차가 $2d$인 등차수열을 이룬다.

등차중항의 정의에 의하여

$2a_7 = a_5 + a_9$이므로

$a_5 + a_7 + a_9 = 3a_7 = 0$에서 $a_7 = 0$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$a_8 - a_6 = 2d < 0$ 즉, $d < 0$

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$-6d$, $-5d$, $-4d$, $-3d$, $-2d$, $-d$,

$0(=a_7)$, d, $2d$, $3d$, $4d$, $\cdots$

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$-6d$, $-11d$, $-15d$, $-18d$, $-20d$, $-21d$,

$-21d(=S_7)$, $-20d$, $-18d$, $\cdots$

d가 음수이므로 다음의 대소 관계를 얻는다.

$S_1 < S_2 < S_3 < S_4 < S_5 < S_6 = S_7$,

$S_7 > S_8 > S_9 > \cdots$

두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 n의 값은 5 또는 6이므로 구하는 값은 11이다.

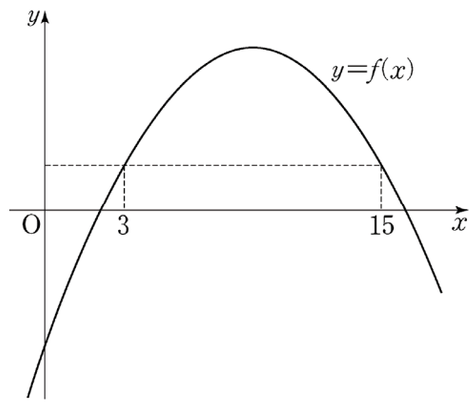
답 11

C035

○○○

(2010(6)-가형22/나형22)

함수 $y=f(x)$는 $f(3)=f(15)$를 만족하고, 그 그래프는 그림과 같다. 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} a_k$인 수열 $\{a_n\}$이 있다. m이 15보다 작은 자연수일 때, $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{15} < 0$을 만족시키는 m의 최솟값을 구하시오. [4점]



C036

○○○

(2020-나형15)

첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

C156

●●● (2022(예시문항)–공통15)

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

(가) $a_5 = 5$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

C. 수열의 귀납적 정의: 군수열(마디가 등비)(1)

예를 들어 모든 자연수는

$k \times 2^p$ (k는 음이 아닌 홀수, p는 음이 아닌 정수)

의 꼴로 표현이 가능하다.

$p=0$: 1, 3, 5, 7, 9, ⋯

$p=1$: 2, 6, 10, 14, 18, ⋯

$p=2$: 4, 12, 20, 28, 36, ⋯

⋮

예를 들어 수열 $\{a_n\}$의 규칙성이

$a_1, a_2, a_4, a_8, a_{16}, \cdots, a_{2^{n-1}}, \cdots$

을 기준으로 나타나는 경우도 있다.

위의 경우에는

$(\boxed{a_{2^0}}), (\boxed{a_{2^1}}, a_{2^1+1}), (\boxed{a_{2^2}}, a_{2^2+1}, \cdots, a_{2^3-1}), (\boxed{a_{2^3}}, a_{2^3+1}, \cdots, a_{2^4-1}), \cdots$

와 같은 군수열을 만들고, □ 안의 수열

$a_{2^0}, a_{2^1}, a_{2^2}, a_{2^3}, \cdots, a_{2^{n-1}}, \cdots$

즉, $a_1, a_2, a_4, a_8, \cdots, a_{2^{n-1}}, \cdots$

의 규칙성을 먼저 파악한다. 그리고 나머지 항들의 값을 구하면 된다.

※ 군수열은 몇 개의 임의의 항을 차례로 묶어 군으로 나눈 수열을 말한다. 예를 들어

$(a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_5, a_6, a_7), (a_8, a_9, \cdots, a_{15}), \cdots$

는 군수열이다.

예제 1

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}=1+a_n,\ a_{2n+1}=\frac{1}{a_{2n}}$$

을 만족시킨다. $a_k=\frac{1}{7}$일 때, 자연수 k의 값을 구하시오. [4점]

풀이

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_1=1$

$a_2=1+a_1=2$

$a_4=1+a_2=3$

$a_8=1+a_4=4$

$a_{16}=1+a_8=5$

$a_{32}=1+a_{16}=6$

$a_{64}=1+a_{32}=7$

그런데

$$a_{65}=\frac{1}{a_{64}}=\frac{1}{7}$$

이므로

$\therefore\ k=65$

답 65

※ $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots$을 모두 나열해서 규칙을 찾는 문제가 아니다.

$a_{2^0},\ a_{2^1},\ a_{2^2},\ a_{2^3},\ \cdots$

을 나열하여 규칙성을 찾고 나서 나머지 항들의 값을 구하면 된다.

예제 2

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$

(나) $a_{2n+1}=a_n+1$

$a_7=3$일 때, $\sum_{n=1}^{31}a_n$의 값을 구하시오.

풀이1

$a_7=a_3+1=3(\because$ (나)$),\ a_3=2$

$a_3=a_1+1=2(\because$ (나)$),\ a_1=1$

$a_2=a_1-1=0(\because$ (가)$)$

마찬가지의 방법으로 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$1(a_1),$

⇦ 합이 1 (항의 개수는 2^0)

$0(a_2),\ 2,$

⇦ 합이 2 (항의 개수는 2^1)

$-1(a_4),\ 1,\ 1,\ 3,$

⇦ 합이 4 (항의 개수는 2^2)

$-2(a_8),\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 4,$

⇦ 합이 8 (항의 개수는 2^3)

$-3(a_{16}),\ -1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 3,\ -1,\ 1,\ 1,\ 3,$

$1,\ 3,\ 3,\ 5(a_{31})$

⇦ 합이 16 (항의 개수는 2^4)

$\vdots$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{31}a_n=1+2+4+8+16=31$$

답 31

풀이2

$a_7=a_3+1=3(\because$ (나)$),\ a_3=2$

$a_3=a_1+1=2(\because$ (나)$),\ a_1=1$

$a_2=a_1-1=0(\because$ (가)$)$

(가)+(나): $a_{2n}+a_{2n+1}=2a_n$

$a_2+a_3=2a_1,$ ⋯㉠

$a_4+a_5=2a_2,$ ⋯㉡

$a_6+a_7=2a_3,$ ⋯㉢

㉡+㉢: $a_4+a_5+a_6+a_7=2(a_2+a_3)=2^2a_1\ (\because$ ㉠$)$

다음과 같이 추론할 수 있다.

$a_1=a_1,$

$a_1+(a_2+a_3)=a_1+2a_1$,

$a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)=a_1+2a_1+2^2a_1$,

$\vdots$

$a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+(a_8+\cdots+a_{15})$

$+(a_{16}+\cdots+a_{31})$

$=a_1+2a_1+2^2a_1+2^3a_1+2^4a_1$

$=1+2+4+8+16=31$

답 31

C157

○○○ (2021(6)–나형14)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1}=2a_n+1 \\ a_{3n}=-a_n+2 \\ a_{3n+1}=a_n+1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

C158

●●● (2020–나형21)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$
(나) $a_{2n+1}=2a_n+1$

$a_{20}=1$일 때, $\sum_{n=1}^{63}a_n$의 값은? [4점]

① 704 ② 712 ③ 720
④ 728 ⑤ 736

C159

●●● (2021-가형21/나형21)

수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91 ② 92 ③ 93
④ 94 ⑤ 95

C. 수열의 귀납적 정의: 군수열(마디가 등비)(2)

C160

○○○ (2005(예비)-나형24)

2 이상의 자연수 n에 대하여 분모는 2^n꼴이고, 분자는 분모보다 작은 홀수인 모든 분수로 이루어진 다음 수열에서 첫째항부터 제126항까지의 합을 구하시오. [4점]

$\dfrac{1}{2^2}, \dfrac{3}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, \dfrac{3}{2^3}, \dfrac{5}{2^3}, \dfrac{7}{2^3}, \dfrac{1}{2^4}, \dfrac{3}{2^4}, \cdots$

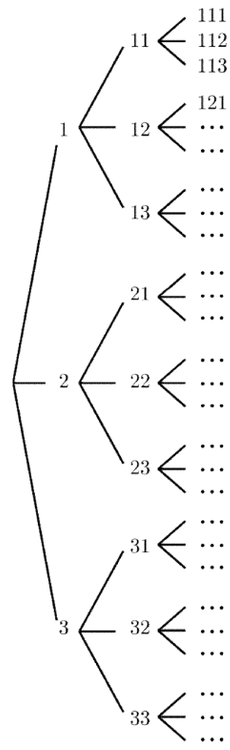
C161

○○○ (1994(2차)-공통11)

오른쪽 그림에 나타나는 수를 크기순으로 나열하여 다음과 같은 수열을 만들었다.

1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, 111, 112, 113, 121, …

이 수열의 제200항은? [4점]



① 13323 ② 13332 ③ 21111
④ 21113 ⑤ 21122

C. 수열의 귀납적 정의: 주기성

예를 들어 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+3}=a_n$

이면 다음이 성립한다.

$a_1=a_4=a_7=\cdots=a_{3k-2}$

$a_2=a_5=a_8=\cdots=a_{3k-1}$

$a_3=a_6=a_9=\cdots=a_{3k}$

(단, k는 자연수)

즉, 수열 $\{a_n\}$을 나열하면 세 수 a_1, a_2, a_3이 반복된다.

이때, 이 수열의 주기는 3이다.

예제 1

모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 짝수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다. 각각의 경우에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 나열해보자.

(1) $a_1=0$, $a_2=1$

(2) $a_1=1$, $a_2=5$

(3) $a_4=4$ (단, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수)

풀이

(1) $a_1=0$, $a_2=1$인 경우

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

0, 1, 1, (2, 1, 3, 4), (2, 1, 3, 4), ⋯

위와 같이 2, 1, 3, 4(짝, 홀, 홀, 짝)이 반복된다.

(2) $a_1=1$, $a_2=5$인 경우

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

1, 5, (6, 3, 9, 12), (6, 3, 9, 12), ⋯

위와 같이 6, 3, 9, 12(짝, 홀, 홀, 짝)이 반복된다.

(3) $a_4=4$인 경우 (단, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수)

- a_3이 짝수: $a_3=2a_4=8$

만약 a_2가 짝수이면 $a_2=2a_3=16$이고,

a_2가 홀수이면 $a_1+a_2=8$에서

$(a_1, a_2)=(1, 7), (3, 5), (5, 3), (7, 1)$

수열 $\{a_n\}$을 나열해보면

a_1, 16, 8, (4, 2, 1, 3), 4, ⋯

1, 7, 8, (4, 2, 1, 3), 4, ⋯

3, 5, 8, (4, 2, 1, 3), 4, ⋯

5, 3, 8, (4, 2, 1, 3), 4, ⋯

7, 1, 8, (4, 2, 1, 3), 4, ⋯

- a_3이 홀수: $a_2+a_3=4$에서

$(a_2, a_3)=(1, 3)$ 또는 $(3, 1)$

수열 $\{a_n\}$을 나열해보면

a_1, 1, 3, (4, 2, 1, 3), 4, ⋯

a_1, 3, 1, (4, 2, 1, 3), 4, ⋯

답 풀이 참조

C179 ○○

(1998–인문예체능15/자연15)

수열 $\{a_n\}$은 처음 6개 항 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6이 서로 다르고, $a_{n+6}=a_n (n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족시킨다.

다음과 같이 정의된 수열 $\{b_n\}$ 중 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6의 값이 모두 나타나는 것은? [3점]

① $b_n=a_{2n+1}$ ② $b_n=a_{3n+1}$ ③ $b_n=a_{4n+1}$

④ $b_n=a_{5n+1}$ ⑤ $b_n=a_{6n+1}$

C180 ○○

(2022(6)–확률과통계9/미적분9/기하9)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이고 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$

④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

C181 ○○

(2019–나형13)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2-3a_n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 1+a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{40}a_n$의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40

④ 45 ⑤ 50

C182 ○○

(2022–확률과통계5/미적분5/기하5)

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (a_n<7)\\ a_n-7 & (a_n\geq 7)\end{cases}$$

일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34

④ 36 ⑤ 38

C183 ○○

(2021(6)–가형24)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=9$, $a_2=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. $|a_k|=3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

C184 ○○

(2009–가형26이산수학)

수열 $\{a_n\}$이

$a_1=1$, $a_2=2$

$a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=6 \ (n=1, 2, 3, \cdots)$

을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{11}a_k$의 값은? [3점]

① 15 ② 18 ③ 21

④ 24 ⑤ 27

C185

○○ (2007(6)-나형26)

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$, $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n \geq 2)\\ \sqrt[3]{2}\,a_n & (a_n<2)\end{cases}$를 만족시킬 때, a_{112}의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt[3]{4}$ ⑤ 2

C186

○○○ (2014(6)-A형28)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=7$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2}=a_n-4$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$이다.

$\sum_{k=1}^{50} a_k=258$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

C187

○○○ (2006-나형29)

$p \geq 2$인 자연수 p에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=0$
(나) $a_{k+1}=a_k+1 (1 \leq k \leq p-1)$
(다) $a_{k+p}=a_k (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a_{2k}=2a_k$
ㄴ. $a_1+a_2+\cdots+a_p=\frac{p(p-1)}{2}$
ㄷ. $a_p+a_{2p}+\cdots+a_{kp}=k(p-1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

C188

○○○ (2005(9)-나형30)

방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 하자. 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 ω^n의 실수 부분으로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{999}\left\{f(k)+\frac{1}{3}\right\}$의 값을 구하시오. [3점]

C189

○○○ (2006(6)-나형29)

음이 아닌 정수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$이라 하자.

(ㄱ) $a_0=1,\ b_0=0$

(ㄴ) 점 $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ b_{n+1})$은 점 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$에서 원 $x^2+y^2=1$의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{18}$ 만큼 이동한 점이다.

이때, $a_n=b_n$을 만족시키는 n은 (가). 그리고 $c_k=a_{18k}(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$라 하면, 수열 $\{c_k\}$는 공비가 (나)인 등비수열이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)
①	존재하지 않는다.	$-\frac{1}{2}$
②	존재하지 않는다.	-1
③	존재한다.	$-\frac{1}{2}$
④	존재한다.	-1
⑤	존재한다.	$\frac{1}{2}$

C190

○○○ (2007(6)-나형11)

자연수 n에 대하여 점 P_n이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다. (단, 점 P_n은 좌표축 위의 점이 아니다.)

(가) 점 P_n이 제1사분면 위의 점이면, 점 P_{n+1}은 점 P_n을 원 위의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 이동시킨 점이다.

(나) 점 P_n이 제2사분면 또는 제4사분면 위의 점이면, 점 P_{n+1}은 점 P_n을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점이다.

(다) 점 P_n이 제3사분면 위의 점이면, 점 P_{n+1}은 점 P_n을 y축에 대하여 대칭이동시킨 점이다.

점 P_1의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$일 때, 점 P_{2007}의 좌표는? [3점]

① $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ② $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

③ $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ④ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C191

○○○ (2009(9)–나형28)

수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=3+(-1)^n$일 때, 좌표평면 위의 점 P_n을 $\mathrm{P}_n\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{3},\ a_n\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$라 하자.

점 P_{2009}와 같은 점은? [3점]

① P_1 ② P_2 ③ P_3
④ P_4 ⑤ P_5

C192

○○○ (2015(6)–A형28)

자연수 n에 대하여 순서쌍 $(x_n,\ y_n)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $(x_1,\ y_1)=(1,\ 1)$
(나) n이 홀수이면 $(x_{n+1},\ y_{n+1})=(x_n,\ (y_n-3)^2)$
n이 짝수이면 $(x_{n+1},\ y_{n+1})=((x_n-3)^2,\ y_n)$이다.

순서쌍 $(x_{2015},\ y_{2015})$에서 $x_{2015}+y_{2015}$의 값을 구하시오. [4점]

C193

★★★ (2023–확률과통계15/미적분15/기하15)

모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_7=40$
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우})\end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220
④ 222 ⑤ 224

C194

★★★ (2023(6)–확률과통계15/미적분15/기하15)

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1=0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n\le 0)\\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n>0)\end{cases}$$

이다.

$a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

A093 | 답 33

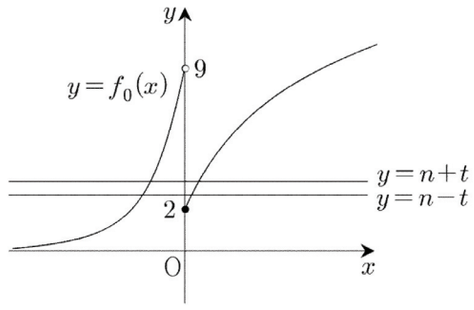
[풀이]

$f(x)=t \Leftrightarrow$

$3^{x+2}=n\pm t(x<0)$ 또는

$\log_2(x+4)=n\pm t(x\geq 0)$

$f_0(x)=\begin{cases}3^{x+2} & (x<0)\\ \log_2(x+4) & (x\geq 0)\end{cases}$으로 두자.



예를 들어 $n=3$일 때, 곡선 $y=f_0(x)$와 두 직선 $y=n\pm t$의 교점의 개수의 최댓값은 4이다. 즉, $g(t)\leq 4$

마찬가지 방법으로 $n=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$일 때, 함수 $g(t)$의 최댓값은 4이다.

(참고로 $n=1$일 때 $g(t)\leq 2$, $n\geq 9$일 때, $g(t)\leq 3$)

따라서 구하는 값은

$3+4+5+6+7+8=33$

답 33

A094 | 답 ④

[풀이]

주어진 함수에 $y=0$을 대입하면

$0=\log_2(x+1)+1$

로그의 정의에 의하여 $x=-\frac{1}{2}$

주어진 함수의 그래프가 x축과 만나는 점은

$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$

주어진 함수에 $x=0$을 대입하면

$y=\log_2(0+1)+1$에서 $y=1$

주어진 함수의 그래프가 y축과 만나는 점은

$(0,\ 1)$

두 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, $(0,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기를 m이라고 하면

$\therefore\ m=\frac{1-0}{0-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2$

답 ④

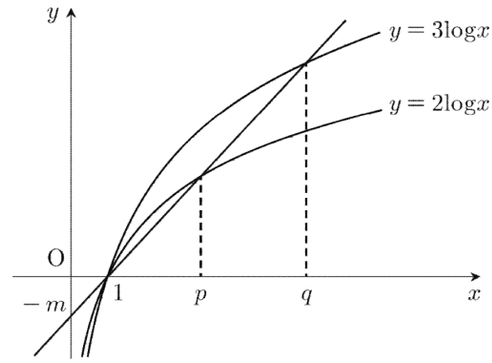
A095 | 답 ④

[풀이] ★

▸ ㄱ. (거짓)

문제에서 주어진 조건대로 두 곡선 $y=2\log x$, $y=3\log x$와

직선 $y=m(x-1)$을 그리면 다음과 같다.



위의 그림에서 $p<q$이다.

▸ ㄴ. (참)

(두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ -m)$을 잇는 직선의 기울기)

$=m$

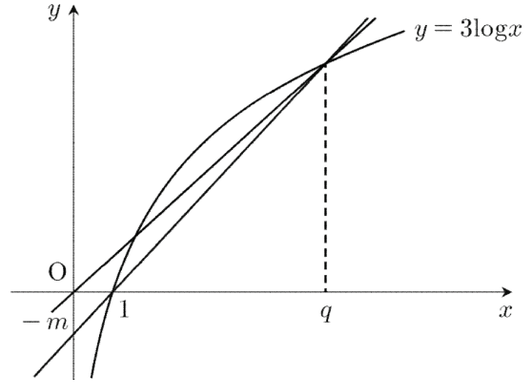
(두 점 $(p,\ 2\log p)$, $(q,\ 3\log q)$를 잇는 직선의 기울기)

$=\frac{3\log q-2\log p}{q-p}$

네 점 $(0,\ -m)$, $(1,\ 0)$, $(p,\ 2\log p)$, $(q,\ 3\log q)$는 한 직선 위에 있으므로

$m=\frac{3\log q-2\log p}{q-p}$

▸ ㄷ. (참)



(두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ -m)$을 잇는 직선의 기울기)$=m$

(두 점 $(0,\ 0)$, $(q,\ 3\log q)$를 지나는 직선의 기울기)

$=\frac{3\log q}{q}$

위의 그림에서 $m>\frac{3\log q}{q}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

[참고]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 산술적으로 보일 수도 있다.

▸ ㄴ. (참)

두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ -m)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=mx-m$

곡선 $y=2\log x$와 직선 $y=mx-m$의 교점의

x좌표는 p이므로

$2\log p=mp-m$ … ㉠

곡선 $y=3\log x$와 직선 $y=mx-m$의 교점의

x좌표는 q이므로

$3\log q=mq-m$ … ㉡

㉡−㉠을 하면

$3\log q-2\log p=m(q-p)$

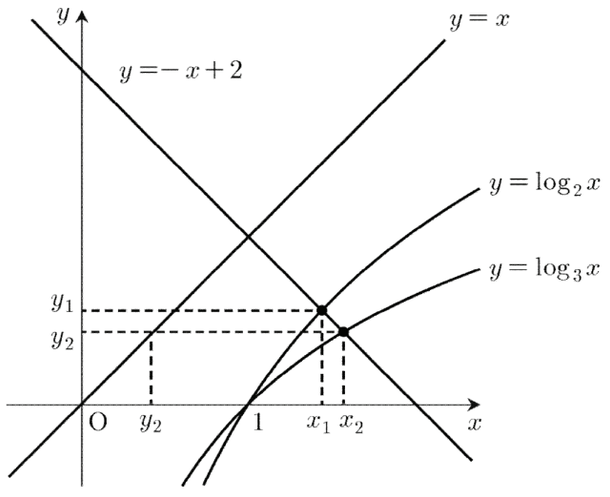
양변을 $q-p(\neq 0)$로 나누면

$\dfrac{3\log q-2\log p}{q-p}=m$

A096 | 답 ⑤

[풀이] ★

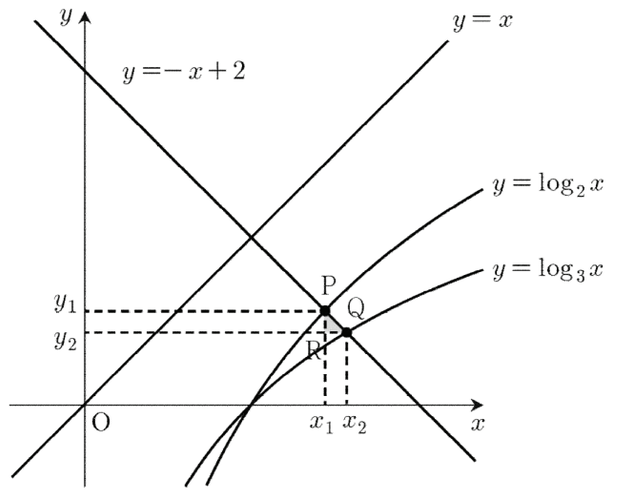
▸ ㄱ. (참)



위의 그림에서 $x_1>y_2$이다.

▸ ㄴ. (참)

두 곡선 $y=\log_2 x$와 $y=\log_3 x$가 직선 $y=2-x$와 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. 그리고 점 $(x_1,\ y_2)$를 점 R이라고 하자.



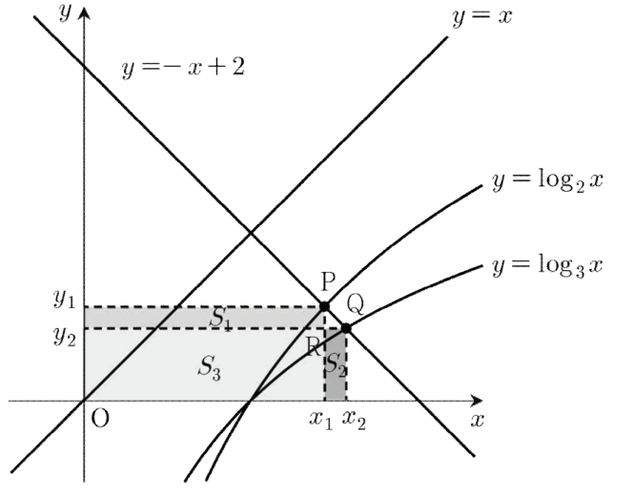
두 점 P, Q는 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로

$x_1+y_1=2$, $x_2+y_2=2$

$x_1+y_1=x_2+y_2(=2)$

$\therefore\ x_2-x_1=y_1-y_2$

▸ ㄷ. (참)



위의 그림에서 어둡게 색칠된 3개의 직사각형 중에서 선분 PR을 한 변으로 하는 직사각형의 넓이를 S_1, 선분 QR을 한 변으로 하는 직사각형의 넓이를 S_2, 선분 OR을 대각선으로 하는 직사각형의 넓이를 S_3이라고 하자.

$S_1=x_1\times\overline{\mathrm{PR}}$, $S_2=y_2\times\overline{\mathrm{QR}}$

이 두 식을 변변히 빼면

$S_1-S_2=x_1\times\overline{\mathrm{PR}}-y_2\times\overline{\mathrm{QR}}$

$=(x_1-y_2)\times\overline{\mathrm{PR}}\ (\because$ 보기 ㄴ에서 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}})$

$>0\ (\because$ 보기 ㄱ에서 $x_1>y_2)$

이므로

$x_1y_1-x_2y_2=(S_1+S_3)-(S_2+S_3)$

$=S_1-S_2>0$

$\therefore\ x_1y_1>x_2y_2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

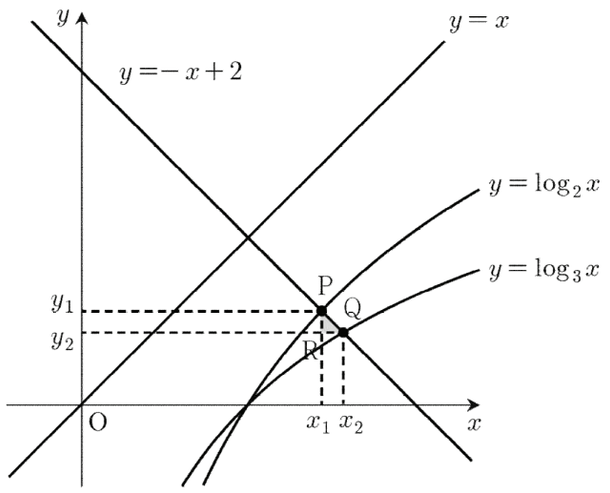
답 ⑤

[참고1]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 보여도 좋다.

▸ ㄴ. (참)

두 곡선 $y=\log_2 x$와 $y=\log_3 x$가 직선 $y=2-x$와 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. 그리고 점 $(x_1,\ y_2)$를 점 R이라고 하자.



$\angle \mathrm{PQR}=45^\circ$, $\angle \mathrm{QRP}=90^\circ$이므로

$\triangle \mathrm{PQR}$은 $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{RP}}$인 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{QR}}=x_2-x_1$, $\overline{\mathrm{RP}}=y_1-y_2$이므로

$\therefore\ x_2-x_1=y_1-y_2$

혹은 다음과 같이 주어진 명제가 참임을 증명해도 좋다.

직선 PQ의 기울기는 -1이므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$$

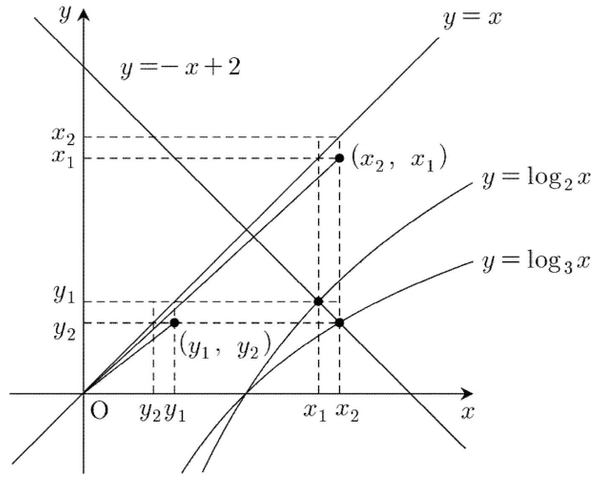
양변에 $x_2-x_1(>0)$을 곱하여 정리하면

$\therefore\ x_2-x_1=y_1-y_2$

[참고2]

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 보여도 좋다.

▸ ㄷ. (참)



위의 그림에서 두 점 $(0,\ 0)$, $(x_2,\ x_1)$을 잇는 직선의 기울기가 두 점 $(0,\ 0)$, $(y_1,\ y_2)$를 잇는 직선의 기울기보다 크다. 이를 수식으로 표현하면

$$\frac{x_1}{x_2}>\frac{y_2}{y_1}$$

양변에 양수 x_2y_1을 곱하면

$\therefore\ x_1y_1>x_2y_2$

[참고3]

▸ ㄷ. (참)

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 보여도 좋다.

보기 ㄴ에 의하여

$x_2-x_1=y_1-y_2=k$(단, k는 양의 상수)

로 둘 수 있다.

$$\frac{x_1}{x_2}-\frac{y_2}{y_1}=\frac{x_1y_1-x_2y_2}{x_2y_1}$$

$$=\frac{x_1y_1-(x_1+k)(y_1-k)}{x_2y_1}$$

$$=\frac{k^2+(x_1-y_1)k}{x_2y_1}>0$$

$(\because\ k>0,\ x_1>y_1,\ x_2y_1>0)$

이므로

$$\frac{x_1}{x_2}>\frac{y_2}{y_1}$$

양변에 양수 x_2y_1을 곱하면

$\therefore\ x_1y_1>x_2y_2$

A101 | 답 ③

[풀이1]

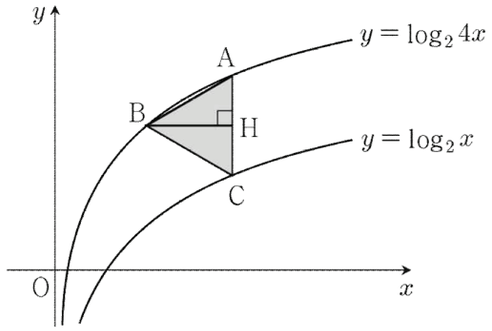
로그의 성질에 의하여

$\log_2 4x = 2 + \log_2 x$

이므로 함수 $y = \log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 함수 $y = \log_2 4x$의 그래프와 일치한다.

그러므로 점 C를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 점 A와 일치한다.

점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 2이므로

$\overline{BH} = \sqrt{3}$

점 B를 x축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 점 A와 일치하므로

$A(p+\sqrt{3},\ q+1)$

두 점 A, B는 곡선 $y = \log_2 4x$ 위에 있으므로

$q = \log_2 4p$ …㉠

$q+1 = \log_2 4(p+\sqrt{3})$ …㉡

㉡−㉠을 하면 로그의 성질에 의하여

$1 = \log_2 \dfrac{p+\sqrt{3}}{p}$

로그의 정의에 의하여

$\dfrac{p+\sqrt{3}}{p} = 2$ 풀면 $p = \sqrt{3}$

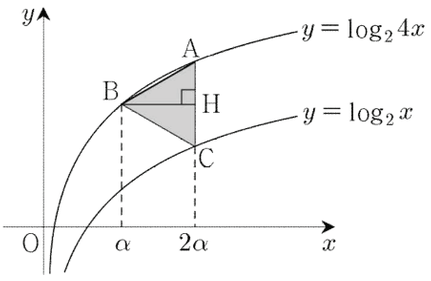
이를 ㉠에 대입하면 $q = \log_2 4\sqrt{3}$

로그의 정의에 의하여 $2^q = 4\sqrt{3}$

∴ $p^2 \times 2^q = 3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

답 ③

[풀이2] 시험장



곡선 $y = \log_2 x$를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 곡선 $y = \log_2 4x (= 2 + \log_2 x)$와 일치한다. 즉, $\overline{AC} = 2$

$\overline{AH} = 1$에서 두 점 A, B의 y좌표의 차가 1이므로 두 점 A(C), B의 x좌표를 각각 2α, α로 둘 수 있다.

$\overline{BH} = 2\alpha - \alpha = \alpha = \sqrt{3}$

점 B의 좌표는

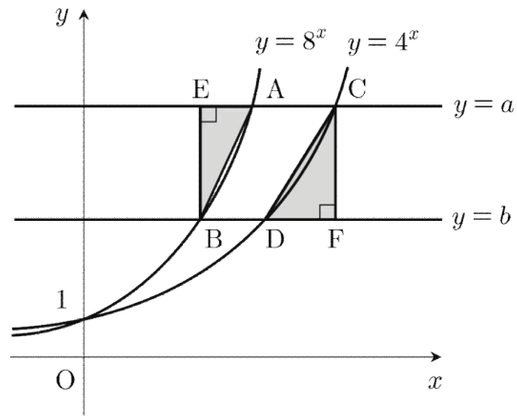
$(\sqrt{3},\ \log_2 4\sqrt{3})$

∴ $p^2 \times 2^q = 3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

답 ③

A102 | 답 ③

[풀이1]



함수 $y = 8^x$의 방정식과 직선 $y = a$의 방정식을 연립하면

$8^x = a$

로그의 정의에 의하여

$x = \log_8 a$

점 A의 좌표는

$A(\log_8 a,\ a)$

마찬가지의 방법으로 점 B의 좌표를 구하면

$B(\log_8 b,\ b)$

함수 $y = 4^x$의 방정식과 직선 $y = a$의 방정식을 연립하면

$4^x = a$

로그의 정의에 의하여

$x = \log_4 a$

점 C의 좌표는

$C(\log_4 a,\ a)$

마찬가지의 방법으로 점 D의 좌표를 구하면

$D(\log_4 b,\ b)$

두 점 E, F의 좌표는 각각

$E(\log_8 b,\ a)$, $F(\log_4 a,\ b)$

로그의 성질에 의하여

$\overline{AE}$=(점 A의 x좌표)−(점 E의 x좌표)

$=\log_8 a-\log_8 b=\log_8 \frac{a}{b}$

$\overline{DF}$=(점 F의 x좌표)−(점 D의 x좌표)

$=\log_4 a-\log_4 b=\log_4 \frac{a}{b}$

두 삼각형 AEB, CDF의 넓이를 각각 S, T라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{EB}$, $T=\frac{1}{2}\times\overline{DF}\times\overline{FC}$

그런데 두 선분 EB, FC의 길이가 같으므로

$$\therefore\ T=S\times\frac{\overline{DF}}{\overline{AE}}=20\times\frac{\log_4\frac{a}{b}}{\log_8\frac{a}{b}}=20\times\frac{\frac{\log_2\frac{a}{b}}{\log_2 4}}{\frac{\log_2\frac{a}{b}}{\log_2 8}}$$

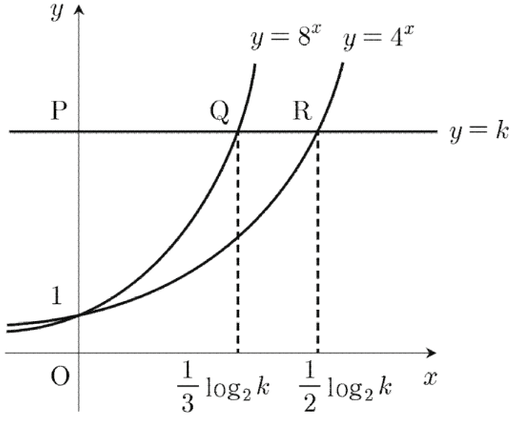
(∵ 로그의 밑의 변환 공식)

$$=20\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=20\times\frac{3}{2}=30$$

답 ③

[풀이2] 시험장 ★

직선 $y=k$가 두 곡선 $y=8^x$, $y=4^x$과 만나는 점을 각각 Q, R, 직선 $y=k$가 y축과 만나는 점을 P라고 하자. (단, $k>1$)



함수 $y=8^x$의 방정식과 직선 $y=k$의 방정식을 연립하면

$8^x=k$

로그의 정의에 의하여

$x=\log_8 k$

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$$x=\frac{\log_2 k}{\log_2 8}=\frac{1}{3}\log_2 k$$

점 Q의 좌표는 $Q\left(\frac{1}{3}\log_2 k,\ k\right)$

마찬가지의 방법으로 점 R의 좌표는 $R\left(\frac{1}{2}\log_2 k,\ k\right)$

$\overline{PQ}$=(점 Q의 x좌표)$=\frac{1}{3}\log_2 k$

$\overline{PR}$=(점 R의 x좌표)$=\frac{1}{2}\log_2 k$

$k(>1)$의 값에 관계없이

$\overline{PQ}:\overline{PR}=2:3$

이므로

$\overline{AE}$=(점 A의 x좌표)−(점 B의 x좌표)

$\overline{DF}$=(점 C의 x좌표)−(점 D의 x좌표)

에서

$\overline{AE}:\overline{DF}=2:3$

(←좀 더 자세히 설명하면 다음과 같다.

(점 A의 x좌표)$=\frac{2}{3}\times$(점 C의 x좌표)

(점 B의 x좌표)$=\frac{2}{3}\times$(점 D의 x좌표)

이므로 위의 두 등식을 변변히 빼면 $\overline{AE}=\frac{2}{3}\overline{DF}$이다.)

두 삼각형 AEB, CDF의 넓이를 각각 S, T라고 하면

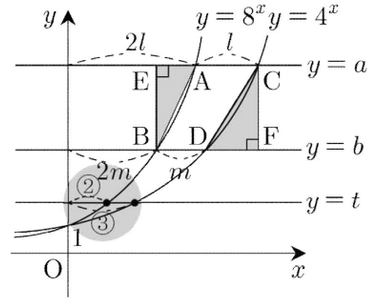
$S=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{EB}$, $T=\frac{1}{2}\times\overline{DF}\times\overline{FC}$

그런데 두 선분 EB, FC의 길이가 같으므로

$$\therefore\ T=S\times\frac{\overline{DF}}{\overline{AE}}=20\times\frac{3}{2}=30$$

답 ③

[풀이3] 시험장



두 지수함수의 밑에 대하여

$4=2^{\boxed{2}}$, $8=2^{\boxed{3}}$

이므로 위의 그림처럼 $2:3$ 비율관계가 성립한다.

(△AEB의 넓이):(△CDF의 넓이)

$=\overline{EA}:\overline{DF}=2(l-m):3(l-m)=2:3$

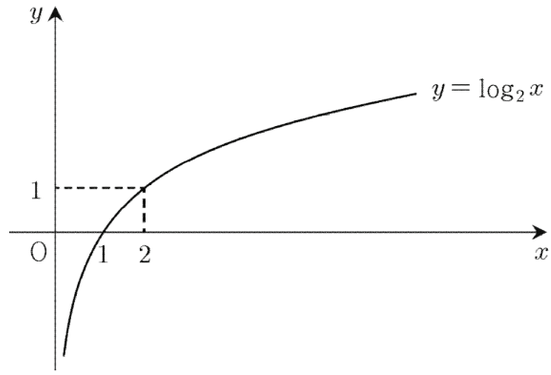
$\therefore$ (△CDF의 넓이)$=30$

답 ③

A103 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)



집합 A에 대하여 $n=1$일 때

$\log_2 x \le 1=\log_2 2$

밑이 1보다 크므로

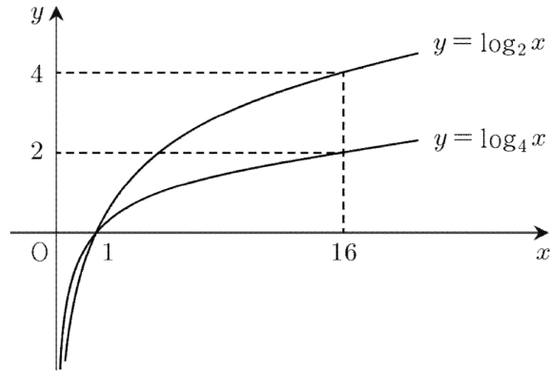
$x \le 2$

진수의 조건에서 $x>0$이므로

$0<x\le 2$

집합 $A(1)$은 $A(1)=\{x \mid 0<x\le 2\}$

▸ ㄴ. (참)



집합 A에 대하여 $n=4$일 때

$\log_2 x \le 4=\log_2 16$

밑이 1보다 크므로

$x \le 16$

진수의 조건에 의하여 $x>0$이므로

$0<x\le 16$

집합 $A(4)$는 $A(4)=\{x \mid 0<x\le 16\}$

집합 B에 대하여 $n=2$일 때

$\log_4 x \le 2=\log_4 16$

밑이 1보다 크므로

$x \le 16$

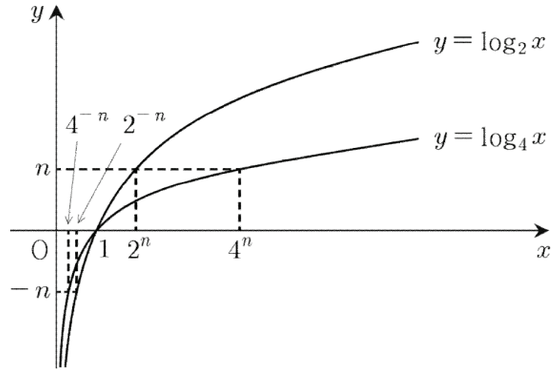
진수의 조건에 의하여 $x>0$이므로

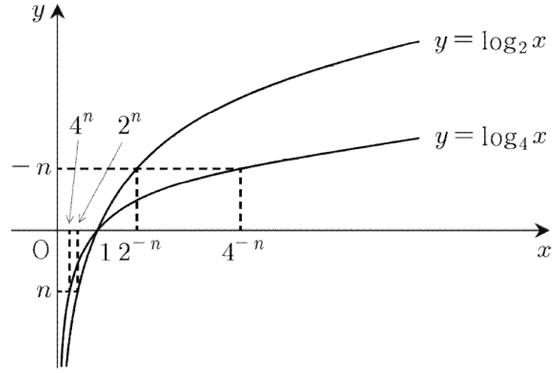
$0<x\le 16$

집합 $B(2)$는 $B(2)=\{x \mid 0<x\le 16\}$

따라서 두 집합 $A(4)$와 $B(2)$는 서로 같다.

▸ ㄷ. (참)





부등식 $\log_2 x \le n$을 풀면 $0<x\le 2^n$이므로

$A(n)=\{x \mid 0<x\le 2^n\}$

부등식 $\log_4 x \le n$을 풀면 $0<x\le 4^n$이므로

$B(n)=\{x \mid 0<x\le 4^n\}$

주어진 조건에 의하여 $A(n)\subset B(n)$이므로

$2^n \le 4^n$ …㉠

부등식 $\log_2 x \le -n$을 풀면 $0<x\le 2^{-n}$이므로

$A(-n)=\{x \mid 0<x\le 2^{-n}\}$

부등식 $\log_4 x \le -n$을 풀면 $0<x\le 4^{-n}$이므로

$B(-n)=\{x \mid 0<x\le 4^{-n}\}$

㉠에서 $4^{-n}\le 2^{-n}$이므로 $B(-n)\subset A(-n)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

중심각과 원주각의 관계에 의하여

$\angle AOC=2\alpha$, $\angle AO'C=2\beta$

이등변삼각형의 성질에 의하여

$\angle AOO'=\alpha$, $\angle AO'O=\beta$

삼각형 AOO'에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\pi-\alpha-\beta)=\frac{r_1^2+\left(\frac{2}{3}r_1\right)^2-1^2}{2\times r_1\times\frac{2}{3}r_1}=-\frac{1}{3}$$

($\because \cos(\pi-\alpha-\beta)=-\cos(\alpha+\beta)$)

풀면

$$r_1^2=\frac{9}{17}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\frac{9}{17}\pi$$

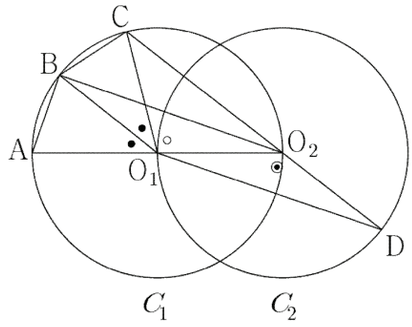
이다.

$\therefore\ p+q=17+9=26$

답 26

B061 | 답 ②

[풀이]



(단, ●$=\theta$, ○$=\theta_2$, ◉$=\theta_3$)

$\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$

즉, $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_2}{2}+\theta_3=\pi$이므로 $\theta_3=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_2}{2}$이고

($\because$ $\triangle O_1O_2C$는 $\overline{CO_1}=\overline{O_1O_2}$인 이등변삼각형)

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로

($\because \theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_2}{2}$)

$\angle CO_1B=\theta_1$이다.

($\because \theta_1+\angle BO_1C+\theta_2=\pi$)

이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로

삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.

($\because$ ASA 합동)

$\overline{AB}=k$라 할 때

$\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로

($\because$ $\triangle O_1O_2B\equiv\triangle O_2O_1D$)

$\overline{AO_2}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BO_2}^2}=\boxed{3k}$이고,

$\angle BO_2A=\frac{1}{2}\angle BO_1A=\frac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\frac{\theta_1}{2}=\boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$이다.

삼각형 O_2BC에서

$\overline{BC}=k$, ($\because \angle AO_1B=\angle BO_1C$)

$\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\frac{1}{2}\angle CO_1B=\frac{\theta_1}{2}$이므로

코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{\frac{7}{3}k}$이다.

($\because$ $\overline{O_2C}=x$로 두면

$k^2=8k^2+x^2-2\times2\sqrt{2}k\times x\cos\frac{\theta_2}{2}$,

$k^2=8k^2+x^2-\frac{16}{3}kx$, $3x^2-16kx+21k^2=0$,

$(3x-7k)(x-3k)=0$, $x=\frac{7k}{3}$)

$\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로

$\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\frac{\boxed{3k}}{2}+\boxed{\frac{7k}{3}}\right)$이다.

(가): $f(k)=3k$

(나): $p=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(다): $g(k)=\frac{7}{3}k$

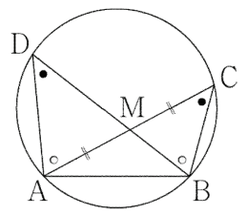
$\therefore\ f(p)\times g(p)=2\sqrt{2}\times\frac{14\sqrt{2}}{9}=\frac{56}{9}$

답 ②

B062 | 답 ③

[풀이]

$\overline{AC}=p$, $\overline{BM}=q$로 두자.



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$2^2=p^2+3^2-2\times p\times3\times\cos(\angle BAC)$,

$4p^2-21p+20=0$, $(4p-5)(p-4)=0$,

$p=4$ ($\because p>3$)

삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$q^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos(\angle BAC)$

풀면 $q=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

원주각의 성질에 의하여

$\angle ACB=\angle BDA=\bullet$,

$\angle CAD=\angle DBC=\circ$

이므로 두 삼각형 AMD, BMC는 서로 닮음이다.

$\overline{AM}:\overline{MD}=\overline{BM}:\overline{MC}$, 즉 $\overline{AM}\times\overline{MC}=\overline{DM}\times\overline{MB}$

(이 등식은 공식으로 암기해도 좋다.)

$2\times2=\overline{DM}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \overline{DM}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

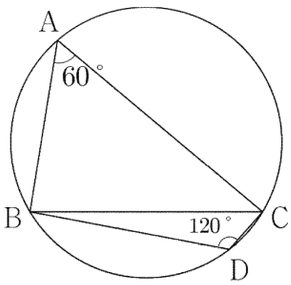
답 ③

B063 | 답 ②

[풀이]

사각형 ABDC가 원에 내접하므로

$\angle BDC=180^\circ-\angle CAB=120^\circ$



사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin60^\circ}=2R$, $\overline{BC}=2\sqrt{21}$

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=2R$, $\overline{BD}=8$

이제 $\overline{CD}=x$로 두자.

삼각형 BDC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos120^\circ=\dfrac{8^2+x^2-(2\sqrt{21})^2}{2\times8\times x}$, $x=2$

$\therefore\ \overline{BD}+\overline{CD}=8+2=10$

답 ②

$n=1$이면 $m=50$, $n=2$이면 $m=\frac{49}{2}$

$n=4$이면 $m=11$, $n=5$이면 $m=8$ (○)

$n=10$이면 $m=\frac{1}{2}$, $n=20$이면 $m=-7$

⋮

이상에서 $m=8$, $n=5$

$\therefore\ m+n=13$

답 ①

[풀이2] 시험장

$50=5\times10$

$=8+9+10+11+12$

이므로 $m=8$이고, $n=5$이다.

$\therefore\ m+n=13$

답 ①

C032 | 답 ①

[풀이]

$$\sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$$

$=(a_{n-m+1}+a_{n-m+2})+(a_{n-m+3}+a_{n-m+4})$

$+\ \cdots\ +(a_{n+m-3}+a_{n+m-2})+(a_{n+m-1}+a_{n+m})$

$=(n-m+1)+(n-m+3)$

$+\ \cdots\ +(n+m-3)+(\boxed{n+m-1})$

수열

$n-m+1$, $n-m+3$, $\cdots$, $n+m-3$, $n+m-1$

은 첫째항이 $n-m+1$이고 공차가 2인 등차수열이다.

여기서 $n+m-1=n-m+1+2(m-1)$이므로,

이 등차수열의 항의 개수는 m이다.

등차수열의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$$

$$=\frac{(n-m+1)+(\boxed{n+m-1})}{2}\times\boxed{m}=\boxed{mn}$$

(가): $n+m-1$ (나): m (다): mn

답 ①

C033 | 답 ③

[풀이1] 시험장

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

지수법칙에 의하여

$b_{2k-1}b_{2k}=2^{(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\ \cdots\ +(a_{2k}-a_{2k-1})}=2^{dk}$

이므로

$b_1\times b_2\times\ \cdots\ \times b_{10}$

$=(b_1\times b_2)\times\ \cdots\ \times(b_9\times b_{10})$

$=2^d\times2^{2d}\times\ \cdots\ \times2^{5d}$

$=2^{d+2d+3d+4d+5d}=2^{15d}=2^3=8$

$15d=3$

$\therefore\ d=\frac{1}{5}$

답 ③

[풀이2]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n+1}-a_{2n-1}=2d$

이므로, 등차수열의 정의에 의하여

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.

등차수열의 합의 공식에 의하여

$$a_1+a_3+\ \cdots\ +a_{2k-1}=\frac{2a_1+2(k-1)d}{2}\times k$$

마찬가지의 방법으로

$$a_2+a_4+\ \cdots\ +a_{2k}=\frac{2a_1+2kd}{2}\times k$$

지수법칙에 의하여

$$b_{2k-1}b_{2k}=2^{-\frac{2a_1+2(k-1)d}{2}\times k}\times2^{\frac{2a_1+2kd}{2}\times k}=2^{dk}$$

지수법칙에 의하여

$b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_{10}$

$=(b_1b_2)\times(b_3b_4)\times\ \cdots\ \times(b_9b_{10})$

$=2^d2^{2d}2^{3d}2^{4d}2^{5d}=2^{15d}=2^3=8$

이므로 $15d=3$

$\therefore\ d=\frac{1}{5}$

답 ③

C034 | 답 ③

[풀이1]

▸ ㄱ. (참)

$a_1=1$, $a_{n+1}-a_n=1$이므로

등차수열의 정의에 의하여

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차는 각각 1이다.

등차수열의 합의 공식에 의하여

$S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

이를 주어진 등식에 대입하면

$\dfrac{n(n+1)}{2} \times T_n = n^2(n^2-1)$

정리하면

$T_n = 2n(n-1)$

수열의 합과 일반항의 관계에 의하여

$b_1 = T_1 = 0$

$b_n = T_n - T_{n-1} = 4n-4 \ (n \geq 2)$

일반항 b_n은

$b_n = 4n-4 \ (n \geq 1)$

▸ ㄴ. (참)

등차수열의 합의 공식에 의하여

$S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d_1}{2} \times n$

$T_n = \dfrac{2b_1 + (n-1)d_2}{2} \times n$

이므로

$S_n T_n = \dfrac{d_1 d_2}{4} n^4 + \dfrac{2a_1 d_2 + 2b_1 d_1 - 2d_1 d_2}{4} n^3$

$+ \dfrac{4a_1 b_1 - 2a_1 d_2 - 2b_1 d_1 + d_1 d_2}{4} n^2$

$= n^2(n^2-1)$ … (*)

항등식의 필요충분조건에 의하여

$\dfrac{d_1 d_2}{4} = 1$

$\therefore \ d_1 d_2 = 4$

▸ ㄷ. (거짓)

보기 ㄴ의 (*)에서

항등식의 필요충분조건에 의하여

$d_1 d_2 = 4$ … ㉠

$a_1 d_2 + b_1 d_1 - d_1 d_2 = 0$ … ㉡

$4a_1 b_1 - 2a_1 d_2 - 2b_1 d_1 + d_1 d_2 = -4$ … ㉢

㉠을 ㉡에 대입하면

$a_1 d_2 + b_1 d_1 = 4$ … ㉣

㉠과 ㉣을 ㉢에 대입하면

$a_1 b_1 = 0$

이므로

$a_1 \neq 0$이면 $b_1 = 0$

일반항 b_n은

$b_n = d_2(n-1)$

이므로, 등차수열의 합의 공식에 의하여

$T_n = \dfrac{n(n-1)d_2}{2}$

만약 $d_2 = 0$이면 $T_n = 0$이므로 문제에서 주어진 등식을 만족시키지 않는다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $d_2 \neq 0$이다.

$S_n \times \dfrac{n(n-1)d_2}{2} = n^2(n^2-1)$

정리하면

$S_n = \dfrac{2n(n+1)}{d_2}$

수열의 합과 일반항의 관계에 의하여

일반항 a_n은

$a_n = \dfrac{4}{d_2} n = d_1 n \ (\because$ ㄴ)

$a_1 \neq 0$이라고 하면 수열 a_n의 일반항은 항상 $a_n = n$인 것은 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

[참고]

문제에서 주어진 등식을 변형하면

$S_n T_n = \dfrac{4}{d_1 d_2} \times \dfrac{d_1(n-1)n}{2} \times \dfrac{d_2 n(n+1)}{2}$

보기 ㄴ에서 $d_1 d_2 = 4$이므로

$S_n T_n = \dfrac{d_1(n-1)n}{2} \times \dfrac{d_2 n(n+1)}{2}$

또는

$S_n T_n = \dfrac{d_1 n(n+1)}{2} \times \dfrac{d_2(n-1)n}{2}$

• $S_n = \dfrac{d_1(n-1)n}{2}$, $T_n = \dfrac{d_2 n(n+1)}{2}$인 경우

수열의 합과 일반항의 관계에 의하여

$a_n = d_1(n-1)$, $b_n = d_2 n$

• $S_n = \dfrac{d_1 n(n+1)}{2}$, $T_n = \dfrac{d_2(n-1)n}{2}$인 경우

수열의 합과 일반항의 관계에 의하여

$a_n = d_1 n$, $b_n = d_2(n-1)$

[풀이2] 시험장

문제에서 주어진 등식을 변형하면

$S_n T_n = 4 \times \dfrac{(n-1)n}{2} \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{4}{d_1 d_2} \times \underbrace{d_1\{0+1+2+ \cdots +(n-1)\}}_{S_n}$

$\times \underbrace{d_2(1+2+3+ \cdots +n)}_{T_n}$ … ㉠

$= \dfrac{4}{d_1 d_2} \times \underbrace{d_2\{0+1+2+ \cdots +(n-1)\}}_{T_n}$

$\times \underbrace{d_1(1+2+3+\cdots+n)}_{S_n}$ …㉡

이때, $\frac{4}{d_1 d_2}=1$, 즉 $d_1 d_2=4$

▸ ㄱ. (참)

$a_n=n$이면 ㉡의 경우에 해당한다.

$d_1=1$, $d_2=4$이므로

$b_n=4n-4$

▸ ㄴ. (참)

㉠, ㉡ 모두 $d_1 d_2=4$

▸ ㄷ. (거짓)

$a_1 \neq 0$이면 ㉡의 경우에 해당한다.

$a_n=d_1 n(d_1 \neq 0)$

에서 항상 $d_1=1$인 것은 아니므로

일반항 a_n이 항상 $a_n=n$인 것은 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

C035 | 답 5

[풀이1]

시그마의 정의에 의하여

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}$

$=\sum_{k=1}^{15} a_k-\sum_{k=1}^{m-1} a_k$

$=f(15)-f(m-1)$

주어진 조건에서

$f(15)-f(m-1)<0$

즉, $f(15)<f(m-1)$

$f(3)=f(15)$이므로

$4 \le m-1 \le 14$ 즉, $5 \le m \le 15$

따라서 m의 최솟값은 5이다.

답 5

[풀이2]

※ $f(x)$가 이차함수라고 가정하고 문제를 풀자.

주어진 조건에서 $f(3)=f(15)$이므로

함수 $f(x)$의 대칭축은 $x=\frac{3+15}{2}=9$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x-9)^2+b$

(단, $a<0$, $b>0$)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=a(n-9)^2+b$

이므로

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}$

$=S_{15}-S_{m-1}$

$=-a(m-4)(m-16)<0$

$4<m<16$

따라서 자연수 m의 최솟값은 5이다.

답 5

C036 | 답 ④

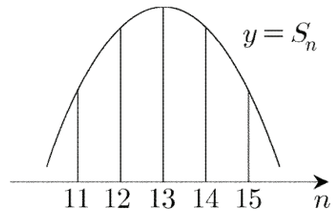
[풀이]

등차수열의 합의 공식에 의하여

$S_n=\frac{100+(n-1)(-4)}{2}n$

$=-2n^2+52n$

$=-2(n-13)^2+338$



곡선 $y=S_n$는 직선 $n=13$에 대칭이고 위로 볼록이므로

$\sum_{k=m}^{m+4} S_k=S_m+S_{m+1}+S_{m+2}+S_{m+3}+S_{m+4}$

의 값은 $m+2=13$, 즉 $m=11$일 때 최대이다.

∴ $m=11$

답 ④

[참고1]

m의 값이 11임을 산술적으로 보이자.

$\sum_{k=m}^{m+4} S_k$

$=-2(m-13)^2-2(m-12)^2-2(m-11)^2$

$-2(m-10)^2-2(m-9)^2+5\times 338$

$=-10m^2+4(9+10+11+12+13)m+(\text{상수})$

$=-10m^2+220m+(\text{상수})$

$=-10(m-11)^2+(\text{상수})$

$\sum_{k=m}^{m+4} S_k$는 $m=11$일 때 최댓값을 갖는다.

[참고2]

m의 값이 11임을 산술적으로 보이자. (도함수 이용)

$\sum_{k=m}^{m+4} S_k = f(m)$으로 두면

$f(m) = -2(m-13)^2 - 2(m-12)^2 - 2(m-11)^2$

$-2(m-10)^2 - 2(m-9)^2 + 5 \times 338$

$f'(m) = -4(5m - 9 - 10 - 11 - 12 - 13)$

$= -20(m-11)$

방정식 $f'(m) = 0$을 풀면 $m = 11$

$m = 11$의 좌우에서 $f'(m)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(m)$는 $m = 11$에서 최댓값을 갖는다.

C037 | 답 ②

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_{10} = a_1 + 9d = 6 + 9d = -12$에서 $d = -2$

일반항 a_n은 $a_n = -2n + 8 (n \geq 1)$

$n \leq 4$이면 $a_n \geq 0$, $n > 5$이면 $a_n < 0$

등차수열의 합의 공식에 의하여

$\therefore \ |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$

$= (6 + 4 + 2 + 0) + (2 + 4 + \cdots + 32)$

$= 12 + \frac{2 + 32}{2} \times 16 = 284$

답 ②

C038 | 답 25

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 두자.(단, d는 정수)

등차중항의 정의에 의하여

$a_3 + a_5 = 2a_4 = 0$, 즉 $a_4 = 0$

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$-3d(= a_1), \ -2d, \ -d, \ 0, \ d, \ 2d, \ \cdots$

• (1) $d \geq 0$인 경우

$\sum_{k=1}^{6} (|a_k| + a_k)$

$= (3d + 2d + d + 0 + d + 2d)$

$+ (-3d - 2d - d + 0 + d + 2d)$

$= 6d = 30, \ d = 5$

• (2) $d < 0$인 경우

$\sum_{k=1}^{6} (|a_k| + a_k)$

$= (-3d - 2d - d + 0 - d - 2d)$

$+ (-3d - 2d - d + 0 + d + 2d)$

$= -12d = 30, \ d = -\frac{5}{2} (\neq \text{정수})$

(1), (2)에서 $d = 5$이므로

$\therefore \ a_9 = -3d + 8 \times d = 5d = 25$

답 25

C039 | 답 ③

[풀이]

조건 (가)에서 $a_5 < 0$, $a_7 > 0$ ($\because$ 공차가 양수이다.)

이므로 $a_i < 0$, $a_j > 0$ (단, $i \leq 5$, $j \geq 7$)

조건 (나):

$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}|$

$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$

정리하면

$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$

$= 6 - a_2 - a_4 + |a_6| + a_8 + a_{10} + a_{12}$,

$a_2 + a_4 + a_7 + a_9 + a_{11} - 6 = |a_6|$,

$5a_1 + (1 + 3 + 6 + 8 + 10) \times 3 - 6$

$= |a_1 + 5 \times 3|$,

$5a_1 + 78 = |a_1 + 15|$

$a_1 \geq -15 \ (\Leftrightarrow a_6 \geq 0)$: $a_1 = -\frac{63}{4} (< -15) \ (\times)$

$a_1 < -15 \ (\Leftrightarrow a_6 < 0)$: $a_1 = -\frac{31}{2} \ (\bigcirc)$

$\therefore \ a_{10} = a_1 + 9 \times 3 = \frac{23}{2}$

답 ③

C040 | 답 ②

[풀이]

수열의 합과 일반항의 관계에서

$a_4 = S_4 - S_3 = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$

답 ②

C041 | 답 ①

[풀이]

일반항과 합 사이의 관계에 의하여

$S_8 - S_6 = a_7 + a_8$

주어진 등식에 대입하면

C157 | 답 ③

[풀이1]

문제에서 주어진 세 등식을 변변히 모두 합하면

$a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}=2a_n+4$

이 등식에 $n=4$를 대입하면

$a_{11}+a_{12}+a_{13}=2a_4+4$

그런데 문제에서 주어진 세 번째 등식에서

$a_4=a_{3\times1+1}=a_1+1=2$, 즉 $a_4=2$

이므로

$\therefore\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=2a_4+4=2\times2+4=8$

답 ③

[풀이2]

문제에서 주어진 귀납적 정의를 이용하여 수열 $\{a_n\}$을 나열해 보자.

문제에서 주어진 세 등식에 $n=1$을 대입하면

$a_2=2a_1+1=3$, $a_3=-a_1+2=1$,

$a_4=a_1+1=2$

문제에서 주어진 세 등식에 $n=2$를 대입하면

$a_5=2a_2+1=7$, $a_6=-a_2+2=-1$,

$a_7=a_2+1=4$

$\vdots$

마찬가지의 방법으로

$1(a_1)$, 3, 1, 2, 7, -1, 4, 3, 1, 2,

$5(a_{11})$, $0(a_{12})$, $3(a_{13})$, $\cdots$

$\therefore\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$

답 ③

C158 | 답 ④

[풀이1]

$a_1=a$로 두자.

$n=1$을 (가), (나)에 대입하면

$a_2=a_1-1=a-1$, $a_3=2a_1+1=2a+1$

$n=2$를 (가), (나)에 대입하면

$a_4=a_2-1=a-2$, $a_5=2a_2+1=2a-1$

$\vdots$

마찬가지의 방법으로 a_6, a_7, a_8, $\cdots$ 을 구할 수 있다.

a_1을 쓰면

$:\ a$

a_2, a_3을 쓰면

$:\ a-1$, $2a+1$

a_4, a_5, a_6, a_7을 쓰면

$:\ a-2$, $2a-1$, $2a$, $4a+3$

a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}를 쓰면

$:\ a-3$, $2a-3$, $2a-2$, $4a-1$, $2a-1$,

$4a+1$, $4a+2$, $8a+7$

$\vdots$

다음을 추론할 수 있다.

$a_1=a$, $a_2+a_3=3a$,

$\underbrace{a_4+a_5+a_6+a_7}_{4개}=3^2a$,

$\underbrace{a_8+a_9+\cdots+a_{15}}_{8개}=3^3a$,

$\underbrace{a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{31}}_{16개}=3^4a$,

$\underbrace{a_{32}+a_{33}+\cdots+a_{63}}_{32개}=3^5a$

이제 a의 값을 구하자.

조건 (가), (나)에 의하여

$a_{20}=a_{10}-1=a_5-2=2a-3=1$

풀면

$a=2$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{63}a_n=2(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)$

$=2\times\dfrac{3^6-1}{3-1}=728$

답 ④

[풀이2] 시험장

$a_1=a$로 두자.

조건 (가), (나)에서 주어진 두 등식을 변변히 더하면

$a_{2n}+a_{2n+1}=3a_n\ (n\geq1)$

위의 등식에 $n=1$, 2, 3을 대입하면

$a_2+a_3=3a$,

$a_4+a_5=3a_2$, $a_6+a_7=3a_3$

이상에서 다음을 알 수 있다.

$a_1=a$, $a_2+a_3=3a$,

$a_4+a_5+a_6+a_7=3(a_2+a_3)=3^2a$

$n=4$, 5, 6, 7을 대입하면

$a_8+a_9=3a_4$, $a_{10}+a_{11}=3a_5$,

$a_{12}+a_{13}=3a_6$, $a_{14}+a_{15}=3a_7$

이상에서 다음을 알 수 있다.

$a_8+a_9+\cdots+a_{15}=3(a_4+a_5+a_6+a_7)$

$=3^3a$

다음을 추론할 수 있다.

$a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{31}=3^4a$,

$a_{32}+a_{33}+\cdots+a_{63}=3^5a$

이제 a의 값을 구하자.

조건 (가), (나)에 의하여

$a_{20}=a_{10}-1=a_5-2=(2a_2+1)-2$

$=2(a-1)-1=1$

풀면

$a=2$

$\therefore \sum_{n=1}^{63}a_n=2(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)$

$=2\times\frac{3^6-1}{3-1}=728$

답 ④

C159 | 답 ②

[풀이]

조건 (가)에서

$a_8=a_2a_4+1=a_2(a_2a_2+1)+1$

$=(a_2)^3+a_2+1$

조건 (나)에서

$a_{15}=a_2a_7-2=a_2(a_2a_3-2)-2$

$=a_2(a_2(a_2a_1-2)-2)-2$

$=a_1(a_2)^3-2(a_2)^2-2a_2-2$

그러므로

a_8-a_{15}

$=(a_2)^3+a_2+1-a_1(a_2)^3+2(a_2)^2+2a_2+2$

$=(1-a_1)(a_2)^3+2(a_2)^2+3a_2+3$

$=3(a_2)^2+3a_2+3$

($\because$ 조건 (가)에서 $a_2=a_2a_1+1$, 즉

$1-a_1=\frac{1}{a_2}$)

$=63$

정리하면

$(a_2)^2+a_2-20=0$, $(a_2+5)(a_2-4)=0$

$a_2=4$ ($\because a_2=\frac{1}{1-a_1}>1$)

그리고 $a_1=\frac{3}{4}$

조건 (가)에서

$a_8=a_2a_4+1=a_2((a_2)^2+1)+1=69$

$\therefore \frac{a_8}{a_1}=69\times\frac{4}{3}=92$

답 ②

[참고]

위의 문제는 '가형21번' 이고, '나형 21번' 은 다음을 묻고 있다.

$a_7=2$일 때, a_{25}의 값은? (나머지 조건은 모두 같다.)

이제 나형 21번을 풀어보자.

조건 (나)에 의하여

$a_7=a_2a_3-2=a_2(a_2a_1-2)-2=2$

정리하면

$(a_1a_2)a_2-2a_2-4=0$

$(a_2-1)a_2-2a_2-4=0$

($\because$ 조건 (가)에서 $a_2=a_2a_1+1$)

$(a_2)^2-3a_2-4=0$, $(a_2-4)(a_2+1)=0$,

$a_2=4$ ($\because a_2=\frac{1}{1-a_1}>1$)

그리고 $a_1=\frac{3}{4}$

조건 (가), (나)에 의하여

$\therefore a_{25}=a_2a_{12}-2=4(a_2a_6+1)-2$

$=16(a_2a_3+1)+2$

$=64(a_2a_1-2)+18$

$=64+18=82$

C160 | 답 63

[풀이]

첫째항부터 제2항까지의 합은

$\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^2}=\frac{4}{2^2}=1$

제3항부터 제6항까지의 합을 구하자.

등차수열의 합의 공식에 의하여

$\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^3}$

$=\frac{1+(2^3-1)}{2}\times\frac{2^2}{2^3}=2$

제7항부터 제14항까지의 합을 구하자.

등차수열의 합의 공식에 의하여

$\frac{1}{2^4}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^4}+\frac{7}{2^4}+\frac{9}{2^4}+\frac{11}{2^4}+\frac{13}{2^4}+\frac{15}{2^4}$

-2만큼 평행이동한 점이다.

조건 (가), (나)에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$x_2=1+2,\ y_2=1-2$

$x_3=1+2+3,\ y_3=1-2+3$

점 P_3은 점 P_2를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점이다.

조건 (가), (나)에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$x_3=1+2+3,\ y_3=1-2+3$

$x_4=1+2+3+4,\ y_4=1-2+3-4$

점 P_4는 점 P_3을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점이다.

⋮

주어진 조건에서 점 Q는 한 번에 $\sqrt{2}$만큼 이동하므로, 한 번 이동할 때마다 점 Q는 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1 또는 -1만큼 이동하게 된다.

그러므로 원점에서 출발하여 55번 이동한 점 Q의 x좌표는 $55(=1\times55)$이다.

$55=1+2+3+\ \cdots\ +10$이므로

점 Q는 점 P_{10} 위에 놓인다.

점 P_{10}의 y좌표는

$\therefore\ y_{10}=1-2+3-\ \cdots\ -10$

$=(1-2)+(3-4)+\ \cdots\ +(9-10)=5\times(-1)=-5$

답 ①

C178 | 답 64

[풀이]

• 우선 m을 결정하자.

자연수 i에 대하여 원 O_i 위에 적히는 수를 가장 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$8i-7,\ 8i-6,\ \cdots,\ 8i-1,\ 8i$

$475=8\times60-5$이므로

원 O_{60} 위에 적히는 수를 가장 작은 수부터 크기순으로 나열하면

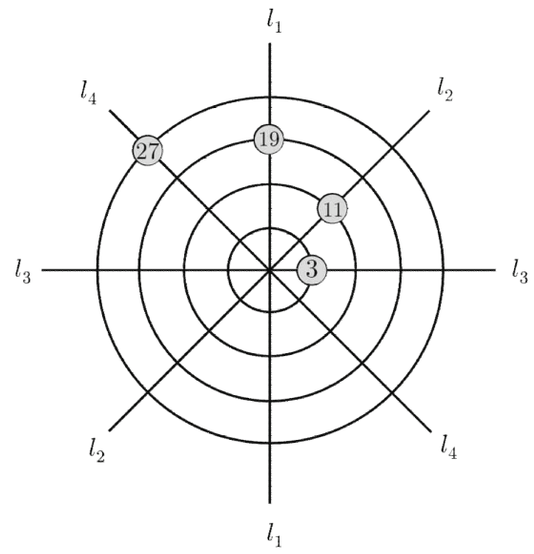
$473,\ 474,\ \boxed{475},\ 476,\ 477,\ 478,\ 479,\ 480$

$\therefore\ m=60$

• 이제 n을 결정하자.

자연수 j에 대하여 원 O_j 위에 적히는 수 중 8로 나누어 나머지가 3이 되는 수가 놓인 직선은 다음과 같다.

수	3	11	19	27	35	43	51	59	…
원	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	…
직선	l_3	l_2	l_1	l_4	l_3	l_2	l_1	l_4	…



$60=4\times15+0$이므로

수	…	451	459	467	475	…
원	…	O_{57}	O_{58}	O_{59}	O_{60}	…
직선	…	l_3	l_2	l_1	l_4	…

$\therefore\ n=4$

$\therefore\ m+n=64$

답 64

C179 | 답 ④

[풀이]

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$이므로

$a_1=a_7=a_{13}=a_{19}=a_{25}=\ \cdots$

$a_2=a_8=a_{14}=a_{20}=a_{26}=\ \cdots$

$a_3=a_9=a_{15}=a_{21}=a_{27}=\ \cdots$

$a_4=a_{10}=a_{16}=a_{22}=a_{28}=\ \cdots$

$a_5=a_{11}=a_{17}=a_{23}=a_{29}=\ \cdots$

$a_6=a_{12}=a_{18}=a_{24}=a_{30}=\ \cdots$

① $b_n=a_{2n+1}$인 경우

수열 $\{b_n\}$은

$a_3,\ a_5,\ a_7,\ a_9,\ a_{11},\ a_{13},\ \cdots$

다시 쓰면

$a_3,\ a_5,\ a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_1,\ \cdots$

수열 $\{b_n\}$은 $a_3,\ a_5,\ a_1$이 번갈아가면서 나타난다.

② $b_n=a_{3n+1}$인 경우

수열 $\{b_n\}$은

$a_4,\ a_7,\ a_{10},\ a_{13},\ a_{16},\ a_{19},\ \cdots$

다시 쓰면

$a_4,\ a_1,\ a_4,\ a_1,\ a_4,\ a_1,\ \cdots$

수열 $\{b_n\}$은 $a_4,\ a_1$이 번갈아가면서 나타난다.

③ $b_n=a_{4n+1}$인 경우

수열 $\{b_n\}$은

$a_5,\ a_9,\ a_{13},\ a_{17},\ a_{21},\ a_{25},\ \cdots$

다시 쓰면

$a_5,\ a_3,\ a_1,\ a_5,\ a_3,\ a_1,\ \cdots$

수열 $\{b_n\}$은 $a_5,\ a_3,\ a_1$이 번갈아가면서 나타난다.

④ $b_n=a_{5n+1}$인 경우

수열 $\{b_n\}$은

$a_6,\ a_{11},\ a_{16},\ a_{21},\ a_{26},\ a_{31},\ \cdots$

다시 쓰면

$a_6,\ a_5,\ a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ \cdots$

수열 $\{b_n\}$은 $a_6,\ a_5,\ a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1$이 번갈아가면서 나타난다.

⑤ $b_n=a_{6n+1}$인 경우

수열 $\{b_n\}$은

$a_7,\ a_{13},\ a_{19},\ a_{25},\ a_{31},\ a_{37},\ \cdots$

다시 쓰면

$a_1,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ \cdots$

수열 $\{b_n\}$은 a_1이 번갈아가면서 나타난다.

이상에서 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$이 모두 나타나는 수열은 ④ 뿐이다.

답 ④

[참고]

모든 자연수 k에 대하여

① $b_n=a_{2n+1}$인 경우

$n=3k-2$일 때, $b_{3k-2}=a_{6k-3}=a_3$

$n=3k-1$일 때, $b_{3k-1}=a_{6k-1}=a_5$

$n=3k$일 때, $b_{3k}=a_{6k+1}=a_1$

② $b_n=a_{3n+1}$인 경우

$n=2k-1$일 때, $b_{2k-1}=a_{6k-2}=a_4$

$n=2k$일 때, $b_{2k}=a_{6k+1}=a_1$

③ $b_n=a_{4n+1}$인 경우

$n=3k-2$일 때, $b_{3k-2}=a_{12k-7}=a_5$

$n=3k-1$일 때, $b_{3k-1}=a_{12k-3}=a_3$

$n=3k$일 때, $b_{3k}=a_{12k+1}=a_1$

④ $b_n=a_{5n+1}$인 경우

$n=6k-5$일 때, $b_{6k-5}=a_{30k-24}=a_6$

$n=6k-4$일 때, $b_{6k-4}=a_{30k-19}=a_5$

$n=6k-3$일 때, $b_{6k-3}=a_{30k-14}=a_4$

$n=6k-2$일 때, $b_{6k-2}=a_{30k-9}=a_3$

$n=6k-1$일 때, $b_{6k-1}=a_{30k-4}=a_2$

$n=6k$일 때, $b_{6k}=a_{30k+1}=a_1$

⑤ $b_n=a_{6n+1}$인 경우

$b_n=a_{6n+1}=a_1$

C180 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_{12}=\dfrac{1}{a_{11}}=\dfrac{1}{2}$에서 $a_{11}=2$

$a_{11}=8a_{10}=2$에서 $a_{10}=\dfrac{1}{4}$

$a_{10}=\dfrac{1}{a_9}=\dfrac{1}{4}$에서 $a_9=4$

$a_9=8a_8=4$에서 $a_8=\dfrac{1}{2}(=a_{12})$

$\vdots$

다시 쓰면

$\cdots,\ \dfrac{1}{2}(=a_8),\ 4(=a_9),\ \dfrac{1}{4}(=a_{10}),\ 2(=a_{11}),\ \dfrac{1}{2}(=a_{12}),\ \cdots$

수열 $\{a_n\}$은 $4,\ \dfrac{1}{4},\ 2,\ \dfrac{1}{2}$이 반복된다.

$\therefore\ a_1+a_4=a_9+a_8=\dfrac{9}{2}$

답 ⑤

C181 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의를 이용하여 $a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots$의 값을 구하자.

$n=1$인 홀수이므로

$a_2=\dfrac{a_1}{2-3a_1}=-\dfrac{1}{2}$

$n=2$는 짝수이므로

$a_3=1+a_2=\dfrac{1}{2}$

$n=3$은 홀수이므로

$a_4=\dfrac{a_3}{2-3a_3}=1$

$n=4$는 짝수이므로

$a_5=1+a_4=2(=a_1)$

⋮

이상에서 다음을 추론할 수 있다.

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$을 나열하면 $2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1$가 반복되어 나타난다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{40} a_n = 10\left(2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right) = 30$

답 ①

C182 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_1 = 1 < 7$이므로 $a_2 = 2a_1 = 2$

$a_2 = 2 < 7$이므로 $a_3 = 2a_2 = 4$

$a_3 = 4 < 7$이므로 $a_4 = 2a_3 = 8$

$a_4 = 8 \geq 7$이므로 $a_5 = a_4 - 7 = 1 (= a_1)$

마찬가지의 방법으로

$a_6 = 2,\ a_7 = 4,\ a_8 = 8$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{8} a_k = 2(1+2+4+8) = 30$

답 ①

C183 | 답 33

[풀이]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_3 = a_2 - a_1 = 3 - 9 = -6,$

$a_4 = a_3 - a_2 = -6 - 3 = -9,$

⋮

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$9(a_1),\ 3,\ -6,\ -9,\ -3,\ 6,\ 9(a_7),\ 3,\ \cdots$

즉, $9,\ 3,\ -6,\ -9,\ -3,\ 6$가 반복적으로 나타난다.

$|a_k| = 3 \Leftrightarrow a_k = 3$ 또는 $a_k = -3$

$a_k = 3$: $k = 2,\ 8,\ 14,\ \cdots,\ 98 (= 6\times 16 + 2)$

$a_k = -3$: $k = 5,\ 11,\ 17,\ \cdots,\ 95 (= 6\times 15 + 5)$

따라서 자연수 k의 개수는 $17 + 16 = 33$이다.

답 33

C184 | 답 ③

[풀이]

주어진 귀납적 정의에서

$a_3 = 3,\ a_4 = 1,\ a_5 = 2,\ a_6 = 3,\ a_7 = 1,\ \cdots$

수열 $\{a_n\}$을 나열하면 $1,\ 2,\ 3$이 반복해서 나타난다.

시그마의 정의에 의하여

$\therefore\ \sum_{k=1}^{11} a_k = \sum_{k=1}^{12} a_k - a_{12} = 4(1+2+3) - 3 = 21$

답 ③

C185 | 답 ⑤

[풀이]

주어진 귀납적 정의와 거듭제곱근의 성질에 의하여

$a_1 = 1 < 2$이므로 $a_2 = \sqrt[3]{2}\,a_1 = \sqrt[3]{2}$

$a_2 < 2$이므로 $a_3 = \sqrt[3]{2}\,a_2 = \sqrt[3]{4}$

$a_3 < 2$이므로 $a_4 = \sqrt[3]{2}\,a_3 = 2$

$a_4 \geq 2$이므로 $a_5 = \frac{1}{2}a_4 = 1$

⋮

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4},\ 2,\ 1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4},\ 2,\ \cdots$

그런데 $112 = 4\times 27 + 4$이므로

$\therefore\ a_{112} = a_4 = 2$

답 ⑤

[참고]

일반항 a_n은

$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 4k-3) \\ \sqrt[3]{2} & (n = 4k-2) \\ \sqrt[3]{4} & (n = 4k-1) \\ 2 & (n = 4k) \end{cases}$ (단, k는 자연수)

C186 | 답 11

[풀이]

조건 (가)에서

$a_3 = a_1 - 4 = 3$

$a_4 = a_2 - 4$

$a_5 = a_3 - 4 = -1$

$a_6 = a_4 - 4 = a_2 - 8$

조건 (나)에서

$a_{6k-5}=a_1=7$

$a_{6k-4}=a_2$

$a_{6k-3}=a_3=3$

$a_{6k-2}=a_4=a_2-4$

$a_{6k-1}=a_5=-1$

$a_{6k}=a_6=a_2-8$

(단, k는 자연수)

시그마의 정의에 의하여

$$\sum_{k=1}^{50}a_k=\sum_{k=1}^{48}a_k+a_{49}+a_{50}$$

$$=8\sum_{k=1}^{6}a_k+a_1+a_2$$

$$=8(3a_2-3)+7+a_2=258$$

풀면

$\therefore\ a_2=11$

답 11

C187 | 답 ④

※ 수열의 귀납적 정의에서는 일반항을 유도하지 않지만 등차수열, 등비수열, (발견적 추론으로) 규칙이 명확한 수열의 경우 수열의 귀납적 정의에서 일반항을 유도하는 것이 가능합니다.

[풀이]

두 조건 (가), (나)에서

a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{p-1}	a_p
0	1	2	$\cdots$	$p-2$	$p-1$

조건 (다)에서

$a_1=a_{p+1}=a_{2p+1}=\cdots$

$a_2=a_{p+2}=a_{2p+2}=\cdots$

$\vdots$

$a_p=a_{2p}=a_{3p}=\cdots$

이므로

a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{p-1}	a_p
0	1	2	$\cdots$	$p-2$	$p-1$
a_{p+1}	a_{p+2}	a_{p+3}	$\cdots$	a_{2p-1}	a_{2p}
0	1	2	$\cdots$	$p-2$	$p-1$
a_{2p+1}	a_{2p+2}	a_{2p+3}	$\cdots$	a_{3p-1}	a_{3p}
0	1	2	$\cdots$	$p-2$	$p-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

$k=1$일 때, $a_2=1\neq 0=2a_1$이므로 $a_{2k}\neq 2a_k$

▸ ㄴ. (참)

등차수열의 합의 공식에 의하여

$$a_1+a_2+\cdots+a_p=0+1+\cdots+(p-1)=\frac{p(p-1)}{2}$$

▸ ㄷ. (참)

$a_p=a_{2p}=\cdots=a_{kp}=p-1$이므로

$a_p+a_{2p}+\cdots+a_{kp}=k(p-1)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

C188 | 답 332

[풀이]

주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x=-1$ 또는 $x^2-x+1=0$

주어진 방정식의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$$\omega=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

ω의 거듭제곱을 구하면

$$\omega^2=\omega-1=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$\omega^3=-1$

$$\omega^4=\omega^3\omega=-\omega=\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}$$

$$\omega^5=\omega^4\omega=-\omega^2=\frac{1\mp\sqrt{3}i}{2}$$

$\omega^6=\omega^5\omega=-\omega^3=1$

수열 $\{f(n)\}$은

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ \cdots$$

일반항 $f(n)$은

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (n=6k-5,\ n=6k-1)\\ -\dfrac{1}{2} & (n=6k-4,\ n=6k-2)\\ -1 & (n=6k-3)\\ 1 & (n=6k)\end{cases}$$

(단, k는 자연수)

$$\sum_{k=1}^{6}f(k)=\sum_{k=7}^{12}f(k)=\cdots=\sum_{k=991}^{996}f(k)=0$$

이므로, 시그마의 정의에 의하여

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{999}\left\{f(k)+\frac{1}{3}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{996} f(k) + \sum_{k=997}^{999} f(k) + 999 \times \frac{1}{3}$$

$$= 0 \times 166 + \sum_{k=1}^{3} f(k) + 333$$

$$= 0 - 1 + 333 = 332$$

답 332

C189 | 답 ②

[풀이]

점 P_n은 점 P_0에서 원 $x^2+y^2=1$의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{n}{18}\pi$ 만큼 (회전)이동한 점이다. (단, n은 음이 아닌 정수)

$a_n = b_n$을 만족시키기 위해서는 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=x$의 교점 위에 점 P_n이 와야 한다.

즉, P_n은 점 P_0에서 원 $x^2+y^2=1$의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $k\pi+\frac{\pi}{4}$ 만큼 (회전)이동한 점이어야 한다. (단, k는 음이 아닌 정수)

$$\frac{n}{18}\pi = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

정리하면

$$2(n-18k) = 9 \qquad \cdots (*)$$

(*)의 좌변은 짝수, 우변은 홀수이므로 (*)를 만족시키는 음이 아닌 정수 n과 k는 존재하지 않는다.

따라서 $a_n = b_n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 n은

존재하지 않는다.

a_{18k}는 점 P_0에서 원 $x^2+y^2=1$의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $k\pi$만큼 (회전)이동한 점의 x좌표이다.

$a_{18} = -1$, $a_{36} = 1$, $a_{54} = -1$, $a_{72} = 1$, $\cdots$

수열 $\{c_k\}$는 첫째항이 -1이고 공비가 -1인 등비수열이다.

(가): 존재하지 않는다.

(나): -1

답 ②

C190 | 답 ①

[풀이]

점 $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$은 제1사분면 위의 점이므로

규칙 (가)에 의하여 점 P_2의 좌표는

$P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

점 $P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$은 제2사분면 위의 점이므로

규칙 (나)에 의하여 점 P_3의 좌표는

$P_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

점 $P_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$은 제3사분면 위의 점이므로

규칙 (다)에 의하여 점 P_4의 좌표는

$P_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

점 $P_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$은 제4사분면 위의 점이므로

규칙 (나)에 의하여 점 P_5의 좌표는

$P_5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

점 $P_5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$은 제1사분면 위의 점이므로

규칙 (가)에 의하여 점 P_6의 좌표는

$P_6\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

점 $P_6\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$은 제2사분면 위의 점이므로

규칙 (나)에 의하여 점 P_7의 좌표는

$P_7\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

점 $P_7\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$은 제3사분면 위의 점이므로

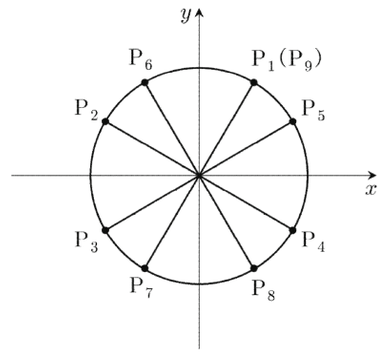
규칙 (다)에 의하여 점 P_8의 좌표는

$P_8\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

점 $P_8\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$은 제4사분면 위의 점이므로

규칙 (나)에 의하여 점 P_9의 좌표는

$P_9\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



두 점 P_1, P_9의 좌표가 같으므로

모든 자연수 n에 대하여

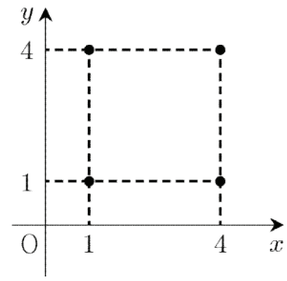
두 점 P_n, P_{n+8}의 좌표는 같다.
그런데 $2007=8\times250+7$이므로
두 점 P_7, P_{2007}의 좌표는 같다.
따라서 점 P_{2007}의 좌표는
$\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
답 ①

C191 | 답 ⑤

[풀이]
수열 $\{a_n\}$은
$2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ \cdots$
수열 $\left\{\cos\frac{2n\pi}{3}\right\}$는
$-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ \cdots$
수열 $\left\{\sin\frac{2n\pi}{3}\right\}$는
$\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \cdots$
점 P_n의 좌표는
$P_1(-1,\ \sqrt{3})$
$P_2(-2,\ -2\sqrt{3})$
$P_3(2,\ 0)$
$P_4(-2,\ 2\sqrt{3})$
$P_5(-1,\ -\sqrt{3})$
$P_6(4,\ 0)$
$P_7(-1,\ \sqrt{3})$
⋮
모든 자연수 n에 대하여
$P_{n+6}=P_n$
$2009=334\times6+5$이므로
$\therefore\ P_{2009}=P_5$
답 ⑤

C192 | 답 8

※ 수열의 귀납적 정의에서는 일반항을 유도하지 않지만 등차수열, 등비수열, (발견적 추론으로) 규칙이 명확한 수열의 경우 수열의 귀납적 정의에서 일반항을 유도하는 것이 가능합니다.
[풀이]
규칙 (가), (나)에서 $n=1$이면
$(x_2,\ y_2)=(x_1,\ (y_1-3)^2)=(1,\ 4)$
규칙 (나)에서 $n=2$이면
$(x_3,\ y_3)=((x_2-3)^2,\ y_2)=(4,\ 4)$
규칙 (나)에서 $n=3$이면
$(x_4,\ y_4)=(x_3,\ (y_3-3)^2)=(4,\ 1)$
규칙 (나)에서 $n=4$이면
$(x_5,\ y_5)=((x_4-3)^2,\ y_4)=(1,\ 1)$
⋮



모든 자연수 k에 대하여
$(x_{4k-3},\ y_{4k-3})=(1,\ 1)$
$(x_{4k-2},\ y_{4k-2})=(1,\ 4)$
$(x_{4k-1},\ y_{4k-1})=(4,\ 4)$
$(x_{4k},\ y_{4k})=(4,\ 1)$
$2015=4\times504-1$이므로
$(x_{2015},\ y_{2015})$은 $(4,\ 4)$이다.
따라서 구하는 값은 8이다.
답 8

C193 | 답 ⑤

[풀이]
$a_1=1$, $a_2=2$이고 조건 (나)를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$을 쓰면
$1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5,\ (9,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5),\ (9,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5),\ \cdots$
9, 3, 1, 4, 5가 반복됨을 알 수 있다.
$a_1=1$, $a_2=3$이고 조건 (나)를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$을 쓰면
$1,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5,\ (9,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5),\ (9,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5),\ \cdots$
9, 3, 1, 4, 5가 반복됨을 알 수 있다.
⋮
이상에서 수열 $\{a_n\}$은 5개의 수가 반복됨을 알 수 있다.
이때, 5개의 수는 순서대로 Ⓐ, Ⓐ, Ⓑ, Ⓑ, Ⓒ에 속한다.
(단, Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ는 각각 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 자연수이다.)

(1) a_6이 Ⓐ에 속하는 경우 $(a_6 = 3k)$

$a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10},\ a_{11},\ \cdots$

$3k$(Ⓐ), 40(Ⓑ), $3k+40$(Ⓑ), $3k+80$(Ⓒ), $6k+120$(Ⓐ), $2k+40$(Ⓐ), $\cdots$

$a_6 = a_{11}$이므로 $3k = 2k+40,\ k = 40$,

$\therefore\ a_9 = 200$

(2) a_6이 Ⓑ에 속하는 경우 $(a_6 = 3k-2)$

$a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10},\ a_{11},\ \cdots$

$3k-2$(Ⓑ), 40(Ⓑ), $3k+38$(Ⓒ), $3k+78$(Ⓐ), $k+26$(Ⓐ), $\frac{k+26}{3}$(Ⓑ), $\cdots$

$a_6 = a_{11}$이므로 $3k-2 = \frac{k+26}{3},\ k = 4$,

$\therefore\ a_9 = 90$

(3) a_6이 Ⓒ에 속하는 경우 $(a_6 = 3k-1)$

$a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ \cdots$

$6k-42$(Ⓐ), $41-3k$(Ⓒ), $3k-1$(Ⓒ), 40(Ⓑ), $3k+39$(Ⓐ), $k+13$(?), $\cdots$

$a_5 = \frac{a_4}{3}$ 즉, $41-3k = \frac{6k-42}{3},\ k = 11$

$\therefore\ a_9 = 24$

따라서 구하는 값은

$200+24 = 224$

답 ⑤

C194 | 답 ②

[풀이]

k의 값에 따른 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

• $k = 1$인 경우 (○) : 주기가 3이다.

문제에서 주어진 귀납적 정의는

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{2} & (a_n \le 0) \\ a_n - 1 & (a_n > 0) \end{cases}$$

$a_1 \le 0$이므로 $a_2 = \frac{1}{2}$,

$a_2 > 0$이므로 $a_3 = -\frac{1}{2}$,

$a_3 \le 0$이므로 $a_4 = 0$,

⋮

수열 $\{a_n\}$은

$0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \cdots$

이때, $a_{22} = 0$

• $k = 2$인 경우 (×) : 주기가 5이다.

문제에서 주어진 귀납적 정의는

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{3} & (a_n \le 0) \\ a_n - \frac{1}{2} & (a_n > 0) \end{cases}$$

수열 $\{a_n\}$은

$0,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{3},\ 0,\ \cdots$

이때, $a_{22} \ne 0$

• $k = 3$인 경우 (○) : 주기가 7이다.

문제에서 주어진 귀납적 정의는

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{4} & (a_n \le 0) \\ a_n - \frac{1}{3} & (a_n > 0) \end{cases}$$

수열 $\{a_n\}$은

$0,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{12},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ -\frac{1}{4},\ 0,\ \cdots$

이때, $a_{22} = 0$

• $k = 4$인 경우 (×) : 주기가 9이다.

문제에서 주어진 귀납적 정의는

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{5} & (a_n \le 0) \\ a_n - \frac{1}{4} & (a_n > 0) \end{cases}$$

$0,\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{20},\ \frac{3}{20},\ -\frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ -\frac{3}{20},\ \frac{1}{20},\ -\frac{1}{5},$

$0,\ \cdots$

이때, $a_{22} \ne 0$

⋮

이상에서 다음을 추론할 수 있다.

모든 자연수 k에 대하여

$a_{n+(2k+1)} = a_n$

그런데

$a_1 = 0,\ a_2 \ne 0,\ \cdots,\ a_{n+2k} \ne 0$

이므로

$1+(2k+1)l = 22$ (단, l은 자연수)

즉, $(2k+1)l = 21$

을 만족시키는 순서쌍 $(k,\ l)$을 찾으면 된다.

$(k,\ l) = (1,\ 7),\ (3,\ 3),\ (10,\ 1)$

따라서 구하는 값은

$1+3+10 = 14$

답 ②

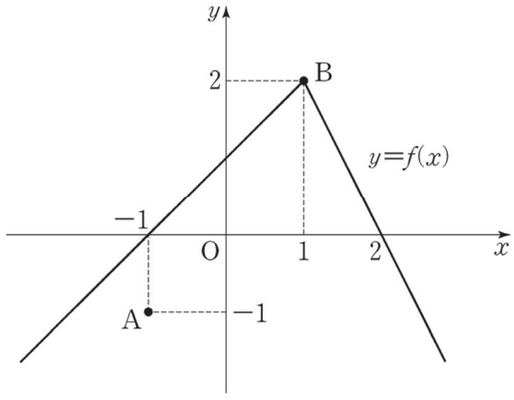
E035

●●● (2017(6)-나형29)

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x<1)\\ -2x+4 & (x\geq 1)\end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x,\ f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오. [4점]



E. 미분 가능성 계산: 곱해서 만든 함수

미분가능성과 연속성의 관계에 대한 교과서 본문의 명제를 정리하면 다음과 같다.

❶ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. (참)
❷ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다. (거짓)
❸ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다. (참)

❷는 ❶의 역이고, ❸은 ❶의 대우이다.

• 2개 이상의 함수의 사칙연산으로 정의된 함수의 미분가능성

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때,
❶ 함수 $y=cf(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다. (단, c는 상수)
❷ 함수 $y=f(x)\pm g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.
❸ 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

위의 세 명제가 모두 참임을 증명하자.

증명

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로
미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$

가 존재한다.
(1) 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{cf(x)-cf(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot c=cf'(a)$$

따라서 함수 $cf(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.
(2) 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)\pm g(x)-\{f(a)\pm g(a)\}}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\pm\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$=f'(a)\pm g'(a)$$
따라서 함수 $f(x)\pm g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(3) 미분계수의 정의에 의하여
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)-f(a)\}g(x)+\{g(x)-g(a)\}f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)-f(a)\}}{x-a}\cdot g(x)$$
$$+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot f(a)$$
$$=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$
따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

다음과 같이 생각할 수도 있다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로
$f(a)$, $g(a)$, $f'(a)$, $g'(a)$ …㉠
가 모두 존재한다.

네 함수
$y=cf(x)$, $y=f(x)\pm g(x)$, $y=f(x)g(x)$,
의 도함수는 각각
$y=cf'(x)$, $y=f'(x)\pm g'(x)$,
$y=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
이므로 이 네 함수의 $x=a$에서의 미분계수는 각각
$cf'(a)$, $f'(a)\pm g'(a)$,
$f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

㉠에 의하여 ㉡의 세 수는 모두 존재한다.
따라서 위의 세 명제가 모두 참임을 알 수 있다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음의 표가 성립한다.

f가 $x=a$에서	g가 $x=a$에서	cf가 $x=a$에서 (단, c는 상수)	$f\pm g$가 $x=a$에서	$f\times g$가 $x=a$에서
미분○	미분○	미분○	미분○	미분○
미분○	미분×		미분×	?
미분×	미분○	?		
미분×	미분×		?	

(?=미분가능할 수도 있고, 가능하지 않을 수도 있다.)

위의 표와 관련하여 몇 개의 예를 생각해보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)\pm g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않아야 한다. 만약 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)\pm g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다. 따라서 귀류법에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않아야 한다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=0$에서 미분가능하지 않지만 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 미분가능한 경우를 생각해보자.

예를 들어
$$f(x)=\begin{cases}2x & (x\geq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}-3x & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$
일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
하지만 함수 $f(x)+g(x)=-x$는 $x=0$에서 미분가능하다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=0$에서 미분가능하지 않지만 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능한 경우를 생각해보자.

예를 들어 $f(x)=|x|$, $g(x)=2|x|$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
하지만 함수 $f(x)g(x)=2x^2$은 $x=0$에서 미분가능하다.

예제 1

다음 명제의 참, 거짓을 판단하시오. 그리고 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 찾으시오.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면
$\{f(x)\}^2$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(2) 함수 $\{f(x)\}^2$가 $x=a$에서 미분가능하면
$f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(3) 함수 $\{f(x)\}^2$가 $x=a$에서 미분가능하지 않으면
$f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

풀이

(1) (참)

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재한다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\{f(x)+f(a)\}$$

$$=f'(a)\times 2f(a)=2f(a)f'(a)$$

미분계수의 정의에 의하여

함수 $\{f(x)\}^2$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(2) (거짓)

(반례)

함수 $f(x)$의 방정식을

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

으로 두면, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

함수 $\{f(x)\}^2$의 방정식은

$\{f(x)\}^2=1$

상수함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로,

함수 $\{f(x)\}^2$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

(3) (1)의 대우명제이므로 참이다.

답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참

• 곱으로 정의된 함수의 미분가능성 (함숫값이 0)

아래의 정리를 증명해보자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 좌미분계수와 우미분계수가 모두 존재하지만 같지 않아서 미분불가능하고, 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 필요충분조건은 $g(a)=0$이다.

증명

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우미분계수와 좌미분계수를 각각 p, q라고 하자.

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)\{f(x)-f(a)\}+f(a)\{g(x)-g(a)\}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}\left(g(x)\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$$

$$=g(a)\times p+f(a)g'(a) \quad \cdots ㉠$$

마찬가지의 방법으로

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=g(a)\times q+f(a)g'(a) \quad \cdots ㉡$$

미분계수의 정의에서

㉠=㉡: $g(a)\times p+f(a)g'(a)=g(a)\times q+f(a)g'(a)$

즉, $g(a)\times p=g(a)\times q$

그런데 $p\neq q$이므로 $\therefore\ g(a)=0$

위의 결과를 다음과 같이 기억해두면 된다.

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\lim_{x\to a+}\{f(x)g(x)\}'=g(a)\times p+f(a)g'(a)$,

$\lim_{x\to a-}\{f(x)g(x)\}'=g(a)\times q+f(a)g'(a)$

에서 $g(a)\times p+f(a)g'(a)=g(a)\times q+f(a)g'(a)$

즉, $g(a)\times p=g(a)\times q$

그런데 $p\neq q$이므로 $\therefore\ g(a)=0$

예제 2

두 함수 $f(x)=|x-1|$, $g(x)=x^2-x$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$의 미분가능성을 판단하시오.

풀이

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$x\to1+$일 때, $\{f(x)g(x)\}'\to1\times0+0\times1=0$

$x\to1-$일 때, $\{f(x)g(x)\}'\to-1\times0+0\times1=0$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

답 풀이 참조

예제 3

함수

$$f(x)=\begin{cases}ax+1 & (x\geq0)\\ bx+1 & (x<0)\end{cases}$$

에 대하여 다음의 보기 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수) [3점]

> ㄱ. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하기 위한 필요충분조건은 $a=b$이다.
> ㄴ. $ab<0$이면 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.
> ㄷ. 함수 $y=xf(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

ㄱ. (참)

($\Longrightarrow$)

함수 $f(x)$는 두 열린구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}a & (x>0)\\ b & (x<0)\end{cases}$$

$a=b$이면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

물론 다음과 같이 미분계수의 정의를 이용하여 $a=b$임을 유도해도 좋다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{ax}{x}=a$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{bx}{x}=b$$

미분계수의 정의에 의하여

$a=b$이면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

($\Longleftarrow$)

$a=b$이면 $f(x)=ax+1$이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

ㄴ. (거짓)

(반례) 예를 들어 $a=-1$, $b=1$이면

함수 $f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\geq0)\\ x+1 & (x<0)\end{cases}$은 $x=0$에서 극댓값 1을 갖는다.

ㄷ. (참)

$g(x)=xf(x)$로 두면

$$g(x)=\begin{cases}ax^2+x & (x\geq0)\\ bx^2+x & (x<0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=\begin{cases}2ax+1 & (x>0)\\ 2bx+1 & (x<0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0+}g'(x)=\lim_{x\to0+}(2ax+1)=1$$

$$\lim_{x\to0-}g'(x)=\lim_{x\to0-}(2bx+1)=1$$

$$\lim_{x\to0+}g'(x)=\lim_{x\to0-}g'(x)$$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

물론 다음과 같이 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명해도 좋다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{ax^2+x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{bx^2+x}{x}=1$$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

참고

ㄷ. (참)

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$

$x=0$에서 $f(x)$는 연속이지만 $f'(x)$는 불연속일 수 있다.

그런데 $xf'(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $\{xf(x)\}'$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

예제 4

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

함수 $h(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq 0)\\ g(x) & (x<0)\end{cases}$가 $x=0$에서 불연속이라고 하자.

함수 $x^n h(x)$가 미분가능하게 되는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

풀이1

모든 자연수 n에 대하여 함수

$x^n h(x)=\begin{cases}x^n f(x) & (x\geq 0)\\ x^n g(x) & (x<0)\end{cases}$

는 두 열린구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이다.

또

$\lim_{x\to 0+} x^n h(x)=\lim_{x\to 0+} x^n f(x)=0$

$\lim_{x\to 0-} x^n h(x)=\lim_{x\to 0-} x^n g(x)=0$

$0^n h(0)=0\cdot f(0)=0$

에서 $\lim_{x\to 0} x^n h(x)=0^n h(0)$이므로 함수의 연속에 대한 정의에 의하여 함수 $x^n h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 함수 $x^n h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 자연수 n에 대하여 함수

$x^n h(x)=\begin{cases}x^n f(x) & (x\geq 0)\\ x^n g(x) & (x<0)\end{cases}$

는 두 열린구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 미분가능하다.

이제 함수 $x^n h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하게 되는 자연수 n의 최솟값을 구하자.

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^n h(x)-0^n h(0)}{x-0}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^n h(x)}{x}=\lim_{x\to 0} x^{n-1}h(x)$ $\cdots(*)$

만약 $n=1$이면 $(*)=\lim_{x\to 0} h(x)$는 발산한다. 왜냐하면 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이기 때문이다. (좀 더 자세하게 설명하면 다음과 같다.

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로

$f(0)\neq \lim_{x\to 0-} g(x)$ 즉, $f(0)\neq g(0)$

그런데 $(*)=\lim_{x\to 0} h(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)\\ \lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)\end{cases}$

이므로 $(*)$는 발산한다.)

만약 $n\geq 2$이면 $(*)$은 0에 수렴한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^n h(x)-0^n h(0)}{x-0}=0$

미분계수의 정의에 의하여 n이 2 이상의 자연수이면 함수 $x^n h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 2이다.

답 2

풀이2

모든 자연수 n에 대하여 함수

$x^n h(x)=\begin{cases}x^n f(x) & (x\geq 0)\\ x^n g(x) & (x<0)\end{cases}$

는 두 열린구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이다.

또

$\lim_{x\to 0+} x^n h(x)=\lim_{x\to 0+} x^n f(x)=0$

$\lim_{x\to 0-} x^n h(x)=\lim_{x\to 0-} x^n g(x)=0$

$0^n h(0)=0\cdot f(0)=0$

에서 $\lim_{x\to 0} x^n h(x)=0^n h(0)$이므로 함수의 연속에 대한 정의에 의하여 함수 $x^n h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 함수 $x^n h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 자연수 n에 대하여 함수

$x^n h(x)=\begin{cases}x^n f(x) & (x\geq 0)\\ x^n g(x) & (x<0)\end{cases}$

는 두 열린구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 미분가능하다.

이제 함수 $x^n h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하게 되는 자연수 n의 최솟값을 구하자.

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로

$f(0)\neq \lim_{x\to 0-} g(x)$ 즉, $f(0)\neq g(0)$

$n=1$일 때, 함수 $x^n h(x)$의 도함수는

$(xh(x))'=h(x)+xh'(x)$

$\lim_{x\to 0+}(xh(x))'=\lim_{x\to 0+}\{f(x)+xf'(x)\}=f(0)$

$\lim_{x\to 0-}(xh(x))'=\lim_{x\to 0-}\{g(x)+xg'(x)\}=g(0)$

$\lim_{x\to 0+}(xh(x))' \neq \lim_{x\to 0-}(xh(x))'$

따라서 $n=1$일 때, 함수 $x^n h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$n\geq 2$일 때, 함수 $x^n h(x)$의 도함수는

$(x^n h(x))' = nx^{n-1}h(x)+x^n h'(x)$

$\lim_{x\to 0+}(x^n h(x))' = \lim_{x\to 0+}\{nx^{n-1}f(x)+x^n f'(x)\}=0$

$\lim_{x\to 0-}(x^n h(x))' = \lim_{x\to 0-}\{nx^{n-1}f(x)+x^n f'(x)\}=0$

$\lim_{x\to 0+}(x^n h(x))' = \lim_{x\to 0-}(x^n h(x))'$

따라서 $n\geq 2$일 때, 함수 $x^n h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 2이다.

답 2

참고

[풀이2]를 요약해보자.

함수 $x^n h(x)$의 도함수는

$\{x^n h(x)\}' = nx^{n-1}h(x)+x^n h'(x)$

$n=1$일 때, $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이고, $xh'(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $\{xh(x)\}'$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 함수 $xh(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$n\geq 2$일 때, $nx^{n-1}h(x)$, $x^n h'(x)$는 모두 $x=0$에서 연속이므로 $\{x^n h(x)\}'$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 함수 $x^n h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

예제 5

다음 명제의 참, 거짓을 판단하시오. 그리고 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 찾으시오.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면
$|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(2) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하면
$f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

(3) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않으면
$f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

풀이

(1) (거짓)

(반례)

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^2-x$

로 두자. 다항함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

함수 $|f(x)|$의 방정식은

$|f(x)|=|x^2-x|$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 0+}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x-x^2}{x}$

$=\lim_{x\to 0+}(1-x)=1,$

$\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2-x}{x}$

$=\lim_{x\to 0-}(x-1)=-1$

$\lim_{x\to 0+}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}$

$\neq \lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}$

이므로, 미분계수의 정의에 의하여

함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(2) (거짓)

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$

으로 두자.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로,

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

함수 $|f(x)|$의 방정식은

$|f(x)|=1$

상수함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로,

함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

답 (1) 거짓 (2) 거짓 (3) 거짓

E036

○○○ (2007-가형7)

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}1-x & (x<0)\\ x^2-1 & (0\le x<1)\\ \dfrac{2}{3}(x^3-1) & (x\ge 1)\end{cases}$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄴ. $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $x^k f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수 k는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

E037

●●● (2020–나형20)

함수

$$f(x)=\begin{cases}-x & (x\le 0)\\ x-1 & (0<x\le 2)\\ 2x-3 & (x>2)\end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.
ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.
ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

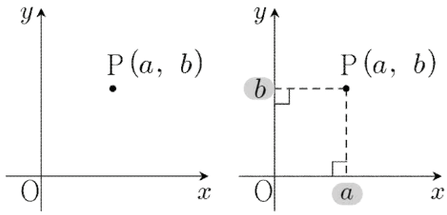
E. 접선: 곡선 위의 점

접선의 방정식을 시작하기 전에 아래를 숙지하자.

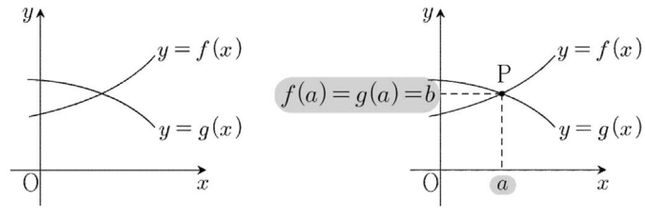
• 좌표평면 위의 점(교점)을 결정하는 법

좌표평면에서 점이 주어졌을 때, 반드시 그어야 하는 보조선을 알아보자.

❶ 좌표평면 위의 점 P가 주어지면 점 P에서 x축과 y축에 각각 수선의 발을 내려야 한다. 왜냐하면 교과서에서는 점 P의 좌표를 두 축에 내린 두 수선의 발로 정의하기 때문이다.



❷ 좌표평면에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나면 교점이 생긴다. 이 교점에서 x축과 y축에 각각 수선의 발을 내리고 x좌표와 y좌표를 문자(a, b, t, …)로 둔다.

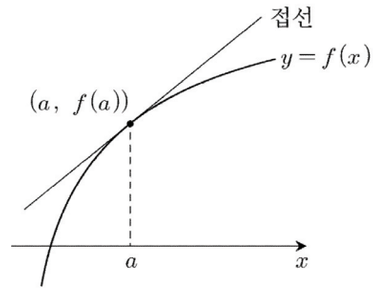


실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하다고 하자.

• 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$



E. 절댓값을 포함한 함수의 그래프

• 절댓값을 포함한 함수의 그래프

함수 $f(x)$의 그래프가 주어졌을 때, 다음의 함수들의 그래프 개형을 그려보자.

$y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $|y|=f(x)$, $|y|=f(|x|)$,
$y=|f(|x|)|$, $|y|=|f(x)|$, $|y|=|f(|x|)|$

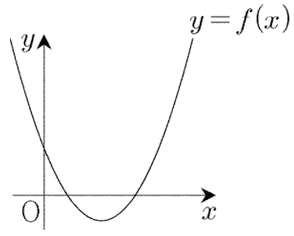
수능에서는 주로

$y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=|f(|x|)|$

의 그래프의 개형을 그리게 하는 문제들이 출제되며,
$|y|$가 포함된 도형은 $|x|+|y|=1$ 정도만이 출제된다.

예제 1

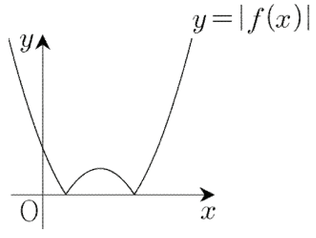
함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 함수의 그래프를 그리시오.



(1) $y=|f(x)|$
(2) $y=f(|x|)$
(3) $|y|=f(x)$
(4) $|y|=f(|x|)$
(5) $y=|f(|x|)|$
(6) $|y|=|f(x)|$
(7) $|y|=|f(|x|)|$

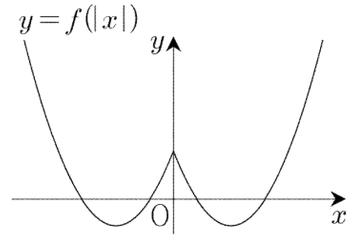
풀이

(1) $y=|f(x)|$



$$y=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

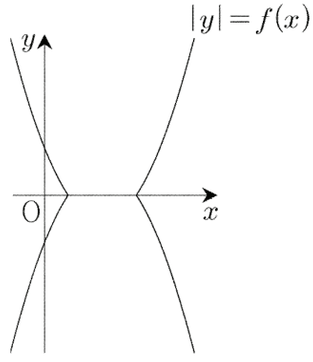
(2) $y=f(|x|)$



$$y=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

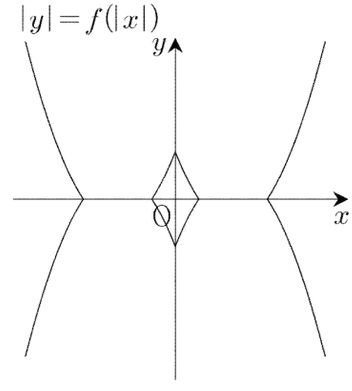
$f(|-x|)=f(|x|)$이므로 곡선 $y=f(|x|)$가 제1(4)사분면의 점 $(x,\ y)$를 지나면 제2(3)사분면의 점 $(-x,\ y)$를 지난다.

(3) $|y|=f(x)$



$y\geq 0$이면 $y=f(x)$
$y\leq 0$이면 $y=-f(x)$

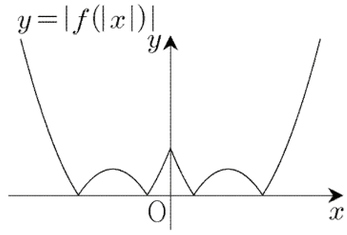
(4) $|y|=f(|x|)$



$y\geq 0$이면 $y=f(|x|)$
$y<0$이면 $y=-f(|x|)$
또는 다음의 방법을 따라도 좋다.
$x\geq 0,\ y\geq 0$: $y=f(x)$ (제1사분면)
$x\leq 0,\ y\geq 0$: $y=f(-x)$ (제2사분면)
$x\leq 0,\ y\leq 0$: $y=-f(-x)$ (제3사분면)

$x \geq 0,\ y \leq 0$: $y = -f(x)$ (제4사분면)

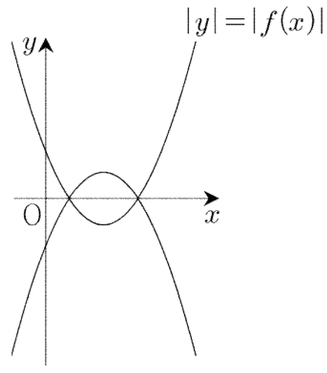
(5) $y = |f(|x|)|$



$$y = \begin{cases} f(|x|) & (f(|x|) \geq 0) \\ -f(|x|) & (f(|x|) < 0) \end{cases}$$

즉, 함수 $f(|x|)$의 그래프를 먼저 그리고 함수 $|f(|x|)|$의 그래프를 그린다.

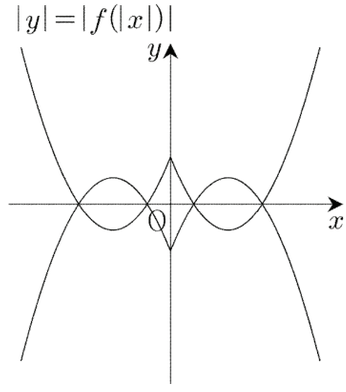
(6) $|y| = |f(x)|$



$y \geq 0$이면 $y = |f(x)|$

$y < 0$이면 $y = -|f(x)|$

(7) $|y| = |f(|x|)|$



$y \geq 0$이면 $y = |f(|x|)|$

$y < 0$이면 $y = -|f(|x|)|$

또는 다음의 방법을 따라도 좋다.

$x \geq 0,\ y \geq 0$: $y = |f(x)|$ (제1사분면)

$x \leq 0,\ y \geq 0$: $y = |f(-x)|$ (제2사분면)

$x \leq 0,\ y \leq 0$: $y = -|f(-x)|$ (제3사분면)

$x \geq 0,\ y \leq 0$: $y = -|f(x)|$ (제4사분면)

답 풀이 참조

E. 삼차함수의 그래프: 미분 가능성(절댓값)

• 절댓값이 포함된 다항함수의 미분가능성

❶ 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$이고,
$|f(x)|$이 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=0$이다. (참)
❷ 다항함수 $f(x)$에 대하여
$f(a)=0$, $f'(a)=0$이면 $|f(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. (참)

이때, ❷는 ❶의 역명제이다.

증명

❶ (참)
$f(a)=0$이므로 인수정리에 의하여
$f(x)=(x-a)Q(x)$
문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{|(x-a)Q(x)|}{x-a}$$

가 존재한다.

$$\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)Q(x)|}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}\left|\frac{(x-a)Q(x)}{x-a}\right|=\lim_{x\to a+}|Q(x)|=|Q(a)|$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)Q(x)|}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a-}-\left|\frac{(x-a)Q(x)}{x-a}\right|=\lim_{x\to a-}-|Q(x)|$$

$$=-|Q(a)|$$

$|Q(a)|=-|Q(a)|$에서 $|Q(a)|=0$이므로 $Q(a)=0$
인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=(x-a)^2Q_0(x)$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=2(x-a)Q_0(x)+(x-a)^2Q_0'(x)$
$\therefore$ $f'(a)=0$ (그리고 $x=a$에서의 $|f(x)|$의 미분계수도 0이다.) ■

❷ (참)
$f(a)=f'(a)=0$이므로 인수정리에 의하여
$f(x)=(x-a)^2Q_0(x)$

$$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{\left|(x-a)^2Q_0(x)\right|}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}\left|(x-a)Q_0(x)\right|=0$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{\left|(x-a)^2Q_0(x)\right|}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}-\left|(x-a)Q_0(x)\right|=0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=0$$이므로
함수 $|f(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. 이때, 미분계수는 0이다. ■

따라서 다음의 필요충분조건이 성립한다.

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$일 때,
함수 $|f(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다.
$\Leftrightarrow$
$f'(a)=0$

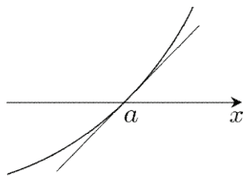
기하적 해석은 다음과 같다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선이 x축이면
함수 $y=|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.
이때, 곡선 $y=|f(x)|$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선은 x축이다.

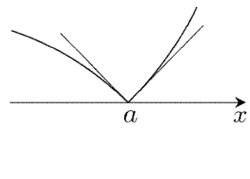
이를 그래프의 개형에서 확인해보자.

❶ $f'(a)>0$인 경우

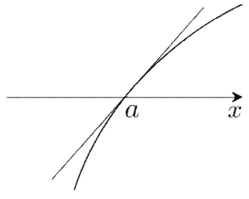
$y=f(x)$



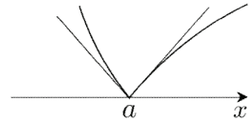
$y=|f(x)|$



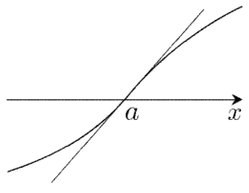
$y=f(x)$



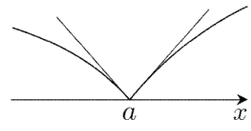
$y=|f(x)|$



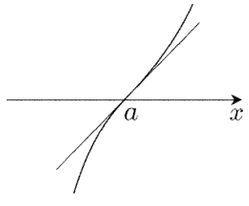
$y=f(x)$



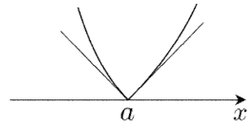
$y=|f(x)|$



$y=f(x)$



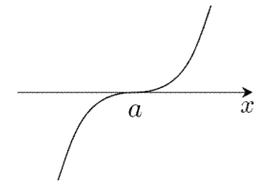
$y=|f(x)|$



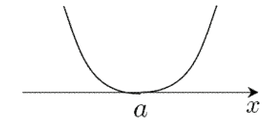
위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않음을 확인할 수 있다.

❷ $f'(a)=0$인 경우

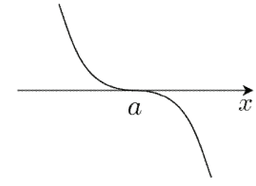
$y=f(x)$



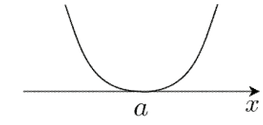
$y=|f(x)|$



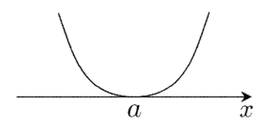
$y=f(x)$



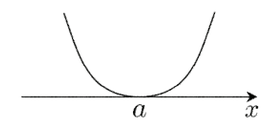
$y=|f(x)|$



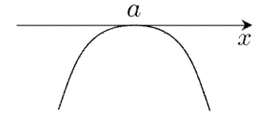
$y=f(x)$



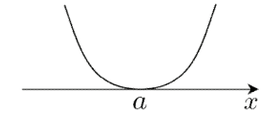
$y=|f(x)|$



$y=f(x)$

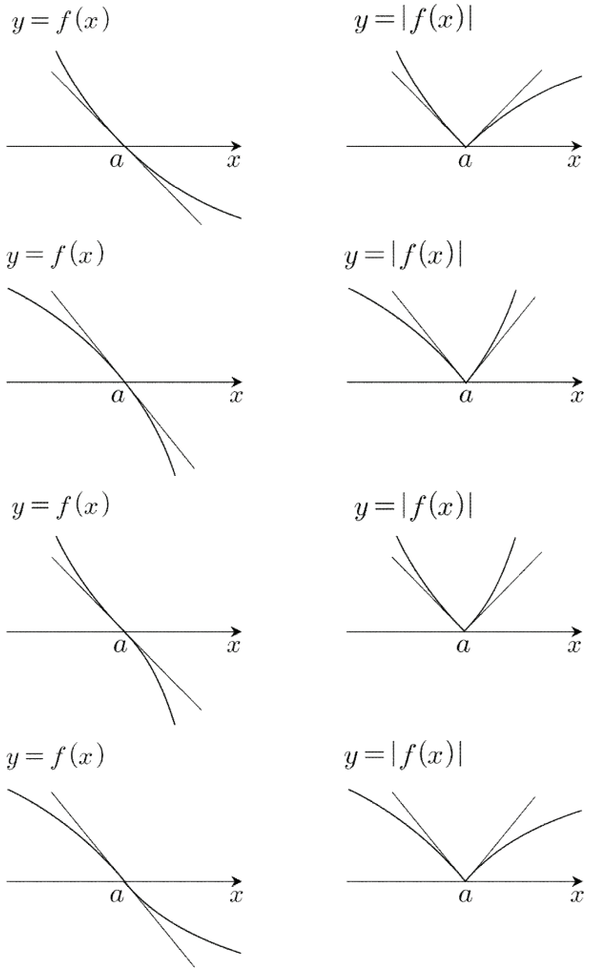


$y=|f(x)|$



위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능함을 확인할 수 있다.

❸ $f'(a)<0$인 경우



위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않음을 확인할 수 있다.

예제 1

다음 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점을 모두 찾으시오.

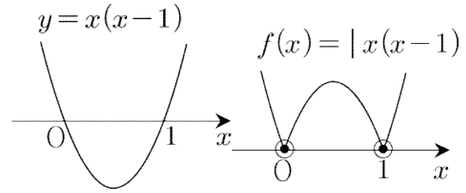
(1) $f(x)=|x(x-1)|$ (2) $f(x)=|x^2(x-1)|$

(3) $f(x)=|x^3(x-1)|$

이 문제를 풀면서 ❶ 미분계수의 정의 ❷ 도함수의 극한 ❸ 그래프의 개형 중에서 어떤 방법이 실전적일지를 생각해보아라.

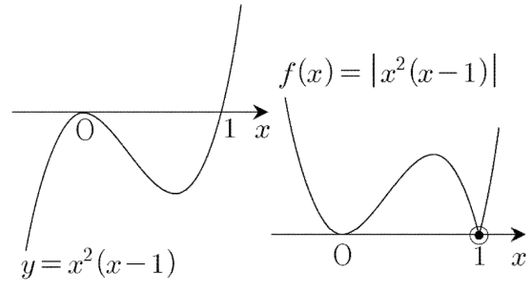
풀이

(1)



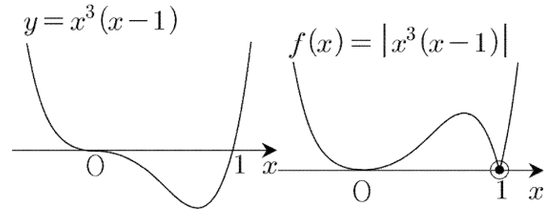
위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(2)



위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(3)



위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

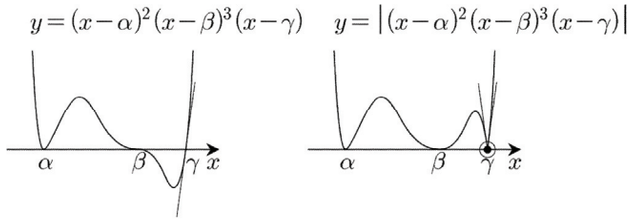
답 풀이 참조

예를 들어 함수

$y=|(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)|$ $\cdots(*)$

(단, 세 수 α, β, γ는 모두 다르다.)

은 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 미분가능하지만, $x=\gamma$에서는 미분가능하지 않다.



(위의 그림처럼 곡선이 꺾이면 접선도 함께 꺾인다!)

❶ 곡선 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)$가 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 x축이 접하므로 함수 (*)는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 미분가능하다. 이때, 곡선 (*)는 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 x축이 접한다.

❷ 곡선 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)$ 위의 점 $(\gamma,\ 0)$에서의 접선이 x축이 아니므로 함수 (*)는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다. 이때, 곡선 (*)는 점 $(\gamma,\ 0)$에서 x축에 접하지 않는다.

• 두 함수의 차로 정의된 함수의 미분가능성

❶ 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$이고, $|f(x)-g(x)|$이 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=g'(a)$이다. (참)

❷ 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$이면 $|f(x)-g(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. (참)

이때, ❷는 ❶의 역명제이다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두고 앞선 정리를 적용하면 참임을 증명할 수 있다. (증명은 생략한다.)

따라서 다음의 필요충분조건이 성립한다.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$일 때,

함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.

$\Leftrightarrow$

$f'(a)=g'(a)$

함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.

$\Leftrightarrow$

함수 $y=\begin{cases}f(x) & (x\geq a)\\ g(x) & (x<a)\end{cases}$는 $x=a$에서 미분가능하다.

❷의 기하적 해석은 다음과 같다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a,\ b)$에서 서로 접할 때,

함수 $y=|f(x)-g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.

이때, 곡선 $y=|f(x)-g(x)|$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선은 x축이다.

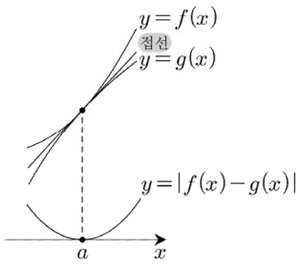
❸ 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선을 $y=g(x)$라고 할 때,

함수 $|f(x)-g(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. (참)

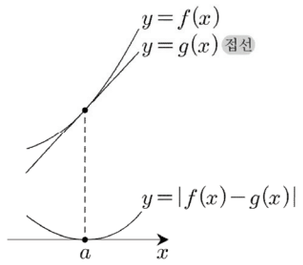
❸은 ❷의 특수한 경우이다.

위의 세 정리는 아래의 그림과 함께 기억하면 절대 잊지 않는다.

❶&❷

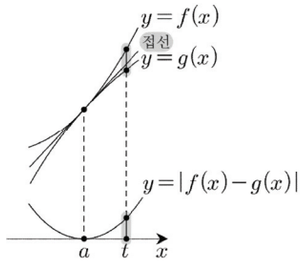


❸

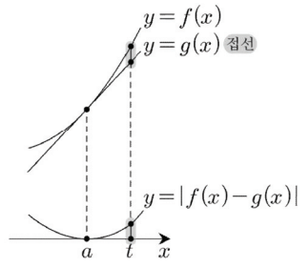


다음과 같은 관찰을 해보자.

❶&❷



❸



각각의 그림에서 두 선분의 길이는 서로 같다.

$t \to a$일 때,

(1) 두 선분의 길이는 모두 0에 수렴한다.

(2) 곡선(직선) $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$에 한없이 가까워진다. 그리고 $t=a$에서 곡선(직선) $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다.

(3) 곡선 $y=|f(x)-g(x)|$는 x축에 한없이 가까워진다. 그리고 $t=a$에서 곡선 $y=|f(x)-g(x)|$는 x축에 접한다.

예제 2

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$는 세 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$을 지난다.
(나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서 그은 접선은 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.

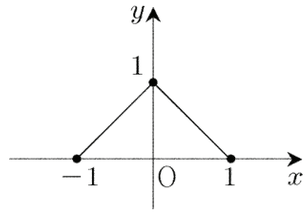
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f'(0)=1$
ㄴ. $f'(c)=-1$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에서 존재한다.
ㄷ. 곡선 $y=|f(x)-x-1|$이 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

조건 (가)에서 주어진 세 점을 좌표평면 위에 나타내자.



ㄱ. (참)

조건 (나)에서

$f'(0)=$(두 점 $(0,\ 1)$, $(-1,\ 0)$의 평균변화율)

$=\dfrac{1-0}{0-(-1)}=1$

ㄴ. (참)

함수 $f(x)$가

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=-1=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나 이상 존재한다.

ㄷ. (참)

보기 ㄴ과 마찬가지의 방법으로

$f'(d)=1$인 d가 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 존재한다.

요컨대

$-1<d<0<c<1$

인 두 상수 c, d에 대하여

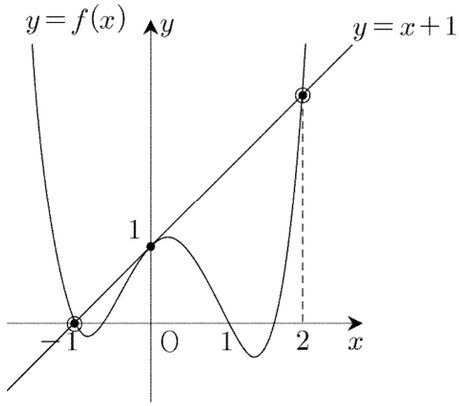
$f'(c)=-1<0$, $f'(d)=1>0$

이므로 다음이 성립한다.

구간 $(-1,\ 0)$에 속하는 어떤 열린구간에서 함수 $f(x)$는 증가하고,

구간 $(0,\ 1)$에 속하는 어떤 열린구간에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

그런데 $x\to\pm\infty$일 때, 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산하므로 곡선 $y=f(x)$는 아래 그림(↘↗↘↗)처럼 그려질 수밖에 없다.



(단, ◉는 함수 $|f(x)-x-1|$가 미분가능하지 않은 점)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선이 $y=x+1$이므로 곡선 $y=|f(x)-x-1|$은

$x=0$에서 미분가능하다. 그런데 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$을 지나므로 구간

$(-1,\ 1)$에서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x+1$의 아래쪽에 놓일 수밖에 없다.

위의 그림에서 함수 $|f(x)-x-1|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

다음과 같이 함수 $f(x)$의 방정식을 유도하여 보기 ㄷ의 참, 거짓을 판단할 수 있다.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

으로 두자.

조건(가)에서

$f(0)=d=1$

$f(1)=a+b+c+2=0$

$f(-1)=-a+b-c+2=0$

연립방정식을 풀면

$b=-2$, $c=-a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$

조건 (나)에 의하여

$f'(0)=-a=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=1$이므로 $a=-1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1$

ㄷ. (참)

방정식 $f(x)=x+1$을 정리하면

$x^4-x^3-2x^2=0$

좌변을 인수분해하면

$x^2(x-2)(x+1)=0$

$|f(x)-x-1|=|x^2(x-2)(x+1)|$

이므로 함수 $|f(x)-x-1|$는 $x=-1$, $x=2$에서 미분가능하지 않다.

E114

●●● (2016-A형21)

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은? [4점]

(가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$ ② $\dfrac{1}{10}$ ③ $\dfrac{2}{15}$
④ $\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

E115

○○○ (2014(6)-B형16)

실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(t,\ t^3)$과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $g(t)$는 0이 아닌 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

E116 ●●●

(2014-A형21)

좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 점 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 21 ② 24 ③ 27
④ 30 ⑤ 33

E117 ●●●

(2022(6)-확률과통계14/미적분14/기하14)

두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

E118

★★★ (2021-나형30)

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

E119

★★★ (2022(9)-확률과통계22/미적분22/기하22)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

E120

●●● (2021(9)-나형30)

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$
(나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

E. 삼차함수의 그래프: 변곡접선

예제 1

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=x^3-3x$에 그을 수 있는 접선의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$가 불연속이 되는 모든 실수 t의 값의 합을 구하시오.

풀이1 대수적

접점의 x좌표를 s로 두자.

접선의 방정식은

$y=(3s^2-3)(x-s)+s^3-3s$

이 직선이 점 $(t,\ 2)$를 지나므로

$2=(3s^2-3)(t-s)+s^3-3s$

정리하면

$(s+1)\{2s^2-(3t+2)s+3t+2\}=0 \cdots (*1)$

$\Leftrightarrow s=-1$ 또는

$2s^2-(3t+2)s+3t+2=0 \quad \cdots (*2)$

(*2)에 $s=-1$을 대입하면 $t=-1$

$t=-1$을 (*2)에 대입하면

$2s^2+s-1=0,\ (2s-1)(s+1)=0$

풀면 $s=\dfrac{1}{2}$ 또는 $s=-1$

즉, $t=-1$이면 삼차방정식 (*1)의 해집합은

$\left\{-1,\ \dfrac{1}{2}\right\}$이다. 이때, -1은 중근이다.

이차방정식 (*2)의 판별식을 D라고 하자.

$D=(3t+2)^2-4\times 2\times(3t+2)=3(3t+2)(t-2)$

(1) $D>0$인 경우 $\left(t<-\dfrac{2}{3}\right.$ 또는 $\left.t>2\right)$

$t<-1$ 또는 $-1<t<-\dfrac{2}{3}$ 또는 $t>2$이면

이차방정식 (*2)의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로

삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$t=-1$이면

삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $D=0$인 경우 $\left(t=-\dfrac{2}{3}\right.$ 또는 $\left.t=2\right)$

이차방정식 (*2)의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로

삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

F. 정적분으로 주어진 함수: 그래프의 개형 결정

교과서 본문에서는 미분과 적분의 관계를 다음과 같이 정의하고 있다.

• 미분과 적분의 관계

〈미분과 적분의 관계〉
함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (\text{단, } a<x<b)$$

위의 정의에서 알 수 있듯이 구간 $(a,\ b)$에서 x에 대한 함수

$\int_a^x f(t)dt$는 미분가능하다.

이때, 이 함수의 도함수는 $f(x)$이다.

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$로 두고 다음을 정리하자. (단, 함수 $f(x)$는 연속함수이다.)

❶ 함수 $g(x)$는 미분가능한 함수이고, 이 함수의 도함수는 $f(x)$이다.

❷ $g(a)=0$이므로 곡선 $y=g(x)$는 점 $(a,\ 0)$을 지난다.

❸ $g(x)=\int_a^x f(t)dt$

$\Rightarrow g'(x)=f(x),\ g(a)=0$ (이는 함수 $g(x)$의 결정조건이다!)

예제 1

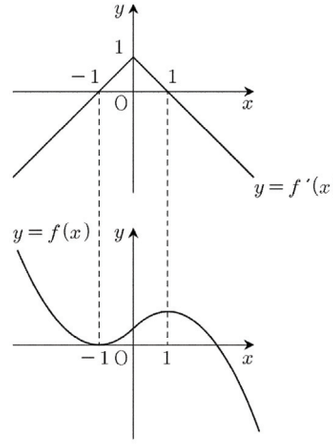
$f(x)=\int_{-1}^x (1-|t|)dt$의 그래프의 개형을 그리시오.

풀이

❶ 미분과 적분의 관계를 이용하여 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 방정식을 유도한다.
함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=1-|x|$
(✪ $|t|=\begin{cases} t & (t\geq 0) \\ -t & (t<0) \end{cases}$로 두면 x가 갖는 값의 범위도 구분해야 하므로 계산양이 많아진다. 따라서 미분과 적분의 관계를 이용하여 바로 $f'(x)$의 방정식을 구하는 것이 현명하다.)
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.
$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.
❷ 정적분의 정의를 이용하여 곡선 $y=f(x)$가 지나는 점을 찾는다.
$f(-1)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 x축 위의 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.
❸ 함수 $f(x)$의 방정식을 결정하고, 그래프를 그린다.
함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2} & (x\leq 0) \\ -\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2} & (x>0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는



답 풀이 참조

F027

○○○ (2013-나형21)

삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

F028

●●● (2009(9)-가형10)

함수 $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<1)\\ -x+2 & (x\geq 1)\end{cases}$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{-1}^x (t-1)f(t)dt$라 하자.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $g(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 증가한다.
ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

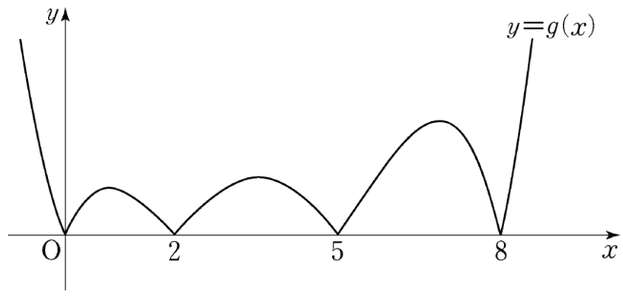
F029

●●● (2013-가형19)

삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)dt\right|$$

라 할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.
ㄴ. $f'(0)<0$
ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)dx>0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

F030

●●● (2023(6)-확률과통계14/미적분14/기하14)

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}-\int_0^x f(t)dt & (x<0)\\ \int_0^x f(t)dt & (x\geq 0)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때,
방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

F. 정적분 계산

교과서 본문에서는 정적분의 정의를 다음과 같이 정의하고 있다.

• 정적분의 정의

〈정적분의 정의〉
구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

한 가지 예를 들어보자.

예제 1

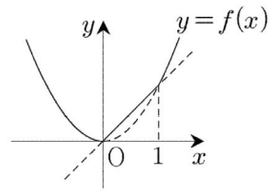
실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)\geq g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+x$
(다) $f(x)g(x)=x^3$

$\int_0^2 f(x)dx$의 값을 구하시오.

풀이
두 조건 (나), (다)에서
$\{f(x),\ g(x)\}=\{x^2,\ x\}$
조건 (가)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x<0,\ x>1)\\ x & (0\leq x\leq 1)\end{cases}$$



$$\therefore\ \int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\times 1^2+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{17}{6}$$

답 $\frac{17}{6}$

F031

○○ (2012(9)-나형13)

모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\int_0^3 f(x)dx=3\int_0^1 f(x)dx$
ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^1 f(x)dx$
ㄷ. $\int_0^1 \{f(x)\}^2dx=\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

F032

○ (2008(9)-가형5)

$\int_0^2 |x^2(x-1)|\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

F033

○○○ (2010-가형24)

삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 t $(t\geq -1)$에 대하여 $-1\leq x\leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_{-1}^{1} g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

F034

○○○ (2021(9)-나형20)

실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)\geq g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$
④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

F. 정적분 계산: 대칭성

• 정적분과 함수의 대칭성(선대칭, 점대칭)

예제 1

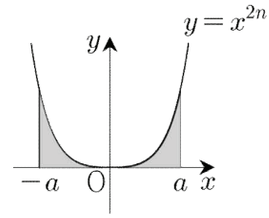
n이 자연수일 때, 다음 등식이 성립함을 증명하여라. (대수적으로 증명하지 말고, 그래프의 개형을 이용하여 증명해보라.)

(1) $\int_{-a}^{a} x^{2n}dx=2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$

(2) $\int_{-a}^{a} x^{2n-1}dx=0$

풀이

(1) $2n$은 짝수이므로 함수 $y=x^{2n}$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉, 우함수이다.



위의 그림에서

$\int_{-a}^{0} x^{2n}dx=\int_{0}^{a} x^{2n}dx$

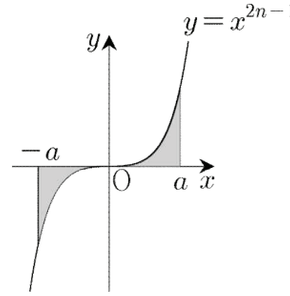
이므로

$\int_{-a}^{a} x^{2n}dx=\int_{-a}^{0} x^{2n}dx+\int_{0}^{a} x^{2n}dx$

$=\int_{0}^{a} x^{2n}dx+\int_{0}^{a} x^{2n}dx=2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$

$\therefore \int_{-a}^{a} x^{2n}dx=2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$

(2) $2n-1$은 홀수이므로 함수 $y=x^{2n-1}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, 기함수이다.



위의 그림에서

$$\int_{-a}^{0} x^{2n}dx=-\int_{0}^{a} x^{2n}dx$$

이므로

$$\int_{-a}^{a} x^{2n}dx=\int_{-a}^{0} x^{2n}dx+\int_{0}^{a} x^{2n}dx$$

$$=-\int_{0}^{a} x^{2n}dx+\int_{0}^{a} x^{2n}dx=0$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} x^{2n-1}dx=0$$

답 풀이 참조

예제 2

다음 명제들이 참임을 그래프를 이용하여 확인하시오. (단, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.)

(1) $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$이다.

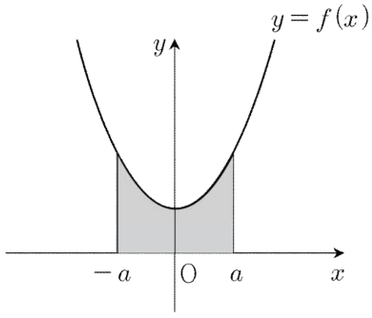
(2) $f(x)$가 우함수이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx$이다.

(3) $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$이다.

(4) $f(x)$가 기함수이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx=-\int_{-b}^{-a} f(x)dx$이다.

풀이

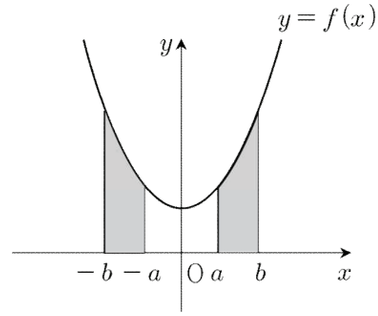
(1) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

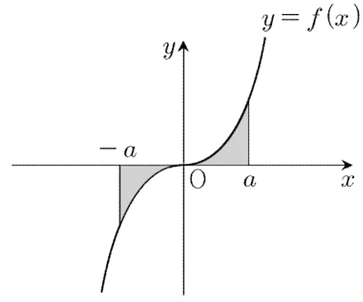
(2) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx$$

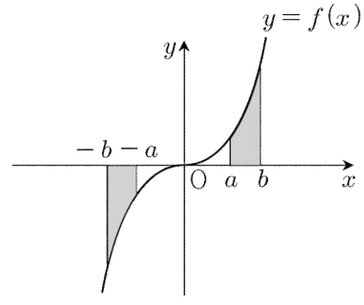
(3) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

(4) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_{a}^{b} f(x)dx=-\int_{-b}^{-a} f(x)dx$$

답 풀이 참조

예제 3

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때,

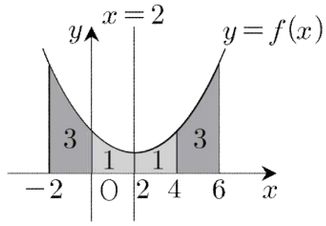
$\int_2^4 f(x)dx$의 값을 구하여라.

(가) 곡선 $y=f(x)$는 $x=2$에 대하여 대칭이다.
(나) $\int_{-2}^{0} f(x)dx=3$, $\int_0^6 f(x)dx=5$

풀이

$\int_2^4 f(x)dx=a$로 두자. (단, a는 상수)

문제에서 주어진 두 조건을 모두 만족시키는 무수히 많은 함수 $f(x)$의 그래프 중에서 가장 간단한 것을 그려보자.



조건 (가), (나)에 의하여

$\int_{-2}^{0} f(x)dx=\int_4^6 f(x)dx=3$

$\int_0^6 f(x)dx$

$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx$

$=a+a+3=2a+3=5$에서 $a=1$

$(\because \int_0^2 f(x)dx=a)$

$\therefore \int_2^4 f(x)dx=1$

답 1

예제 4

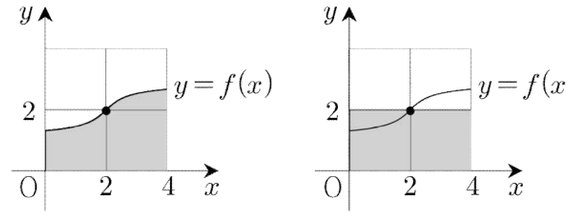
연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때,

$\int_2^4 f(x)dx$의 값을 구하시오.

(가) 곡선 $y=f(x)$는 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.
(나) $\int_0^2 f(x)dx=3$

풀이

문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$는 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이므로

위의 그림에서 어둡게 색칠된 두 영역의 넓이는 서로 같다.

즉, $\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx=2\times4=8$

$\therefore \int_2^4 f(x)dx=8-\int_0^2 f(x)dx=5$

답 5

F035

○ (2014(예비)-A형4)

$\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+5)dx$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

F036

○○ (2014-A형23)

실수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)dx=\frac{1}{4}$일 때, $50a$의 값을 구하시오. [3점]

F037

○○ (2013-나형11)

함수 $f(x)=x+1$에 대하여

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)^2$$

일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

F. 정적분의 계산: 대칭성+사칙연산

F038

●●● (2016-A형20)

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

F. 정적분의 계산: 이차함수(대칭축) +적분의 평균값 정리

• 정적분의 평균값 정리

〈정적분의 평균값 정리〉
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나 존재한다.

증명

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수이면 주어진 명제는 명백하다.
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수가 아닌 경우를 생각하자.
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이므로 최대최소의 정리에 의하여 최댓값과 최솟값이 존재한다. 닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 하면

$m \le f(x) \le M$에서 $\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$

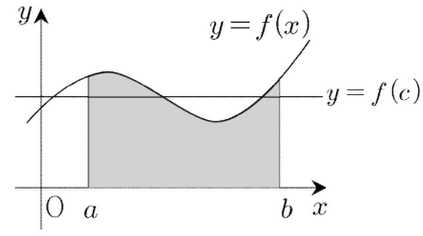
즉, $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

이때, $\int_a^b f(x)dx = K(b-a)$로 두면 $m \le K \le M$이고,
사이값 정리에 의하여 $f(c) = K$인 c가 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나 존재한다.
다시 말하면

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나 존재한다. ■

위의 정리에 대한 기하적 해석은 다음과 같다.
예를 들어 아래 그림과 같이 구간 $[a, b]$에서 $f(x) \ge 0$이라고 하자.



위의 그림과 같이 정적분

$\int_a^b f(x)dx$의 값(어둡게 색칠된 도형의 넓이)

과 직사각형 $(b-a)f(c)$의 넓이가 같아지는
상수 $f(c)$는 반드시 존재한다.

예제 1

실수 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n에 대하여

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

일 때, 방정식

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

은 열린구간 $(0, 1)$에서 실근을 가짐을 증명하시오.

증명

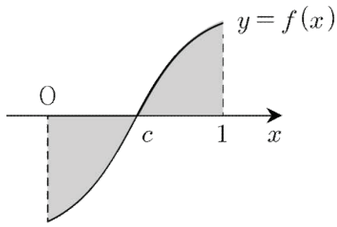
$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 (a_n \ne 0)$으로 두자.

$$\int_0^1 f(x)dx = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

이므로, 정적분의 평균값 정리에 의하여

$$\int_0^1 f(x)dx = f(c)$$

인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 문제에서 주어진 방정식은 열린구간 $(0, 1)$에서 실근을 갖는다.
아래 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0, 1)$에서 x축과 만날 수밖에 없다.



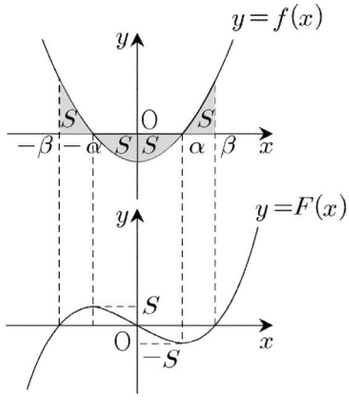
답 풀이 참조

참고

기하적인 관점에서 위의 그림을 재해석 하자. (귀류법)

구간 $[0,\ 1]$에서 연속함수 $f(x)$의 정적분 값은 0이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 x축의 아래에만 있거나, x축의 위에만 있을 수 없다.(전자의 경우에 정적분의 값은 음(−)이고, 후자의 경우에 정적분의 값은 양(+)이다.) 따라서 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 x축과 적어도 하나 이상의 점에서 만나야 한다. 이 관점이 녹아든 문제는 수능에서도 빈번하게 출제되고 있으므로, 위의 상황을 반드시 눈과 손에 익혀 두도록 하자.

y축이 대칭축인 이차함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다고 하자. (단, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$)



(단, $f(\alpha)=0,\ \beta=\sqrt{3}\alpha$)

위의 그림에서 다음의 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_{-\beta}^{\beta} f(x)dx=0,\ \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0,$$

$$\int_{-\beta}^{0} f(x)dx=0,\ \int_{0}^{\beta} f(x)dx=0$$

$$\int_{-\beta}^{\alpha} f(x)dx=-S,\ \int_{-\alpha}^{\beta} f(x)dx=-S$$

F039

○○○ (2012−나형19)

이차함수 $f(x)$는 $f(0)=-1$이고,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx$$

를 만족시킨다. $f(2)$의 값은? [4점]

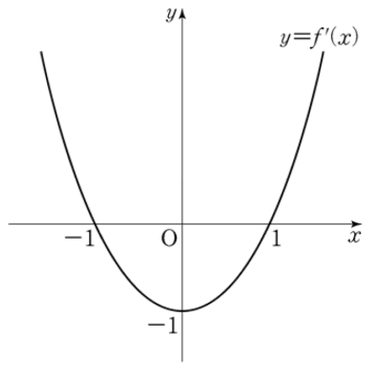
① 11 ② 10 ③ 9
④ 8 ⑤ 7

F. 정적분의 계산: 삼차함수(점대칭)

F040

○○
(2016(9)-A형14)

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $f'(x)=x^2-1$이다.



$f(0)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{11}{8}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{13}{8}$

F. 정적분의 계산: 영역+절댓값

다음의 성질을 함께 증명해보자.

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$는 연속함수이다.
모든 실수 x에 대하여
$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$
임을 이용하여, 부등식
$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$
가 성립함을 증명하시오.

이때, 등호가 성립할 조건은 다음과 같다.
$f(x) \ge 0$ $(\Leftrightarrow |f(x)|=f(x))$
또는 $f(x) \le 0$ $(\Leftrightarrow |f(x)|=-f(x))$

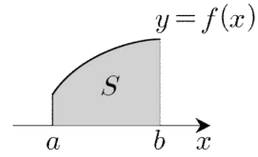
증명

모든 실수 x에 대하여
$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$
이므로
$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$
$\therefore \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$
($\because$ 두 실수 A, B에 대하여
$-B \le A \le B$이면 $|A| \le B$이다.) ■

위의 성질을 그래프의 개형을 이용하여 재해석하자.

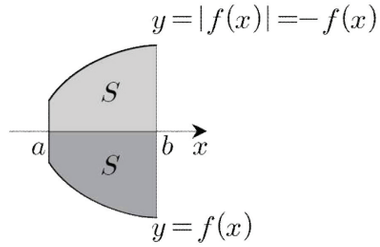
함수 $f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이다.

❶ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \ge 0$인 경우



위의 그림에서
$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$ $(\because |S|=S)$

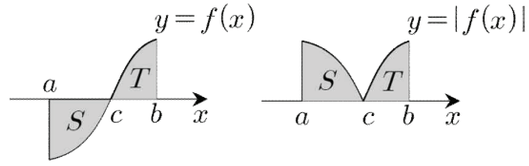
❷ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \le 0$인 경우



위의 그림에서

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx \ (\because |-S| = S)$$

❸ 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x) \le 0$이고,
구간 $[c,\ b]$에서 $f(x) \ge 0$인 경우
(단, $a < c < b$)



위의 그림에서

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |T-S|$$

$$\int_a^b |f(x)|dx = S+T$$

$S \ge T$이면 $|T-S| = S-T$이므로

$S+T-|T-S| = 2T \ge 0$

$S < T$이면 $|T-S| = T-S$이므로

$S+T-|T-S| = 2S \ge 0$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

❶, ❷, ❸에 의하여 다음의 부등식이 항상 성립한다.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

F041

●●● (2016-A형29)

이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 |f(x)|dx = -\int_0^2 f(x)dx = 4$

(나) $\int_2^3 |f(x)|dx = \int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$$\lim_{x\to-\frac{3}{10}-}\frac{g(x)-g\left(-\frac{3}{10}\right)}{x+\frac{3}{10}}=\lim_{x\to-\frac{3}{10}-}\left(2x+\frac{27}{5}\right)=\frac{24}{5}$$

$$\lim_{x\to-\frac{3}{10}+}\frac{g(x)-g\left(-\frac{3}{10}\right)}{x+\frac{3}{10}}=\lim_{x\to-\frac{3}{10}+}\left(2x-\frac{23}{5}\right)=-\frac{26}{5}$$

$$\lim_{x\to-\frac{3}{10}-}\frac{g(x)-g\left(-\frac{3}{10}\right)}{x+\frac{3}{10}}\neq\lim_{x\to-\frac{3}{10}+}\frac{g(x)-g\left(-\frac{3}{10}\right)}{x+\frac{3}{10}}$$

이므로 미분가능성의 정의에 의하여

함수 $g(x)$는 $x=-\frac{3}{10}$에서 미분가능하지 않다.

• (2) 함수 $g(x)$의 $x=1$에서의 미분가능성

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}2(x-1)=0$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}5(x-1)=0$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

이므로 미분가능성의 정의에 의하여

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

• (3) 함수 $g(x)$의 $x=\frac{21}{8}$에서의 미분가능성

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\frac{21}{8}-}\frac{g(x)-g\left(\frac{21}{8}\right)}{x-\frac{21}{8}}=\lim_{x\to\frac{21}{8}-}\left(5x+\frac{25}{8}\right)=\frac{65}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{21}{8}+}\frac{g(x)-g\left(\frac{21}{8}\right)}{x-\frac{21}{8}}=\lim_{x\to\frac{21}{8}+}\left(5x-\frac{39}{8}\right)=\frac{33}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{21}{8}-}\frac{g(x)-g\left(\frac{21}{8}\right)}{x-\frac{21}{8}}\neq\lim_{x\to\frac{21}{8}+}\frac{g(x)-g\left(\frac{21}{8}\right)}{x-\frac{21}{8}}$$

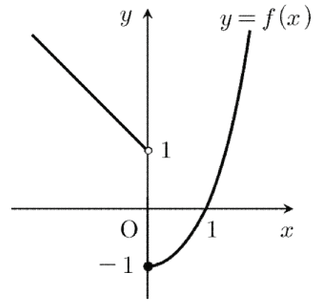
이므로 미분가능성의 정의에 의하여

함수 $g(x)$는 $x=\frac{21}{8}$에서 미분가능하지 않다.

E036 | 답 ③

[풀이1] ★

함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)

위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{\frac{2}{3}(x^3-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{2}{3}(x^2+x+1)=2$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-}(x+1)=2$$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$이므로

미분계수의 정의에서

$f'(1)=2$

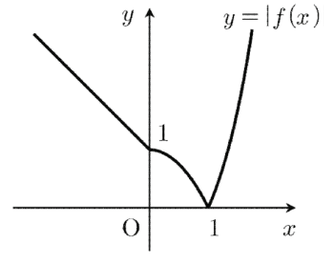
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

▸ ㄴ. (거짓)

함수 $|f(x)|$의 방정식은

$$|f(x)|=\begin{cases}1-x & (x<0)\\ 1-x^2 & (0\le x<1)\\ \frac{2}{3}(x^3-1) & (x\ge1)\end{cases}$$

함수 $|f(x)|$의 그래프는



위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만,

$x=0$에서 미분가능하지 않다.

이를 수식을 이용하여 증명하자.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0+}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{1-x^2-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}(-x)=0$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{1-x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}\neq\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}$$

이므로, 미분계수의 정의에 의하여

함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

▸ ㄷ. (참)

$k=1$일 때, 함수 $x^kf(x)$의 방정식은

$$xf(x)=\begin{cases}x-x^2 & (x<0)\\ x^3-x & (0\le x<1)\\ \frac{2}{3}(x^4-x) & (x\ge 1)\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}xf(x)=0=0f(0)$이므로

함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{xf(x)-0f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x(x^2-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}(x^2-1)=-1$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0-}\frac{xf(x)-0f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x(1-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}(1-x)=1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{xf(x)-0f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0-}\frac{xf(x)-0f(0)}{x-0}$$

이므로, 미분계수의 정의에 의하여

함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$k=2$일 때, 함수 $x^kf(x)$의 방정식은

$$x^2f(x)=\begin{cases}x^2-x^3 & (x<0)\\ x^4-x^2 & (0\le x<1)\\ \frac{2}{3}(x^5-x^2) & (x\ge 1)\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}x^2f(x)=0=0^2f(0)$이므로

함수 $x^2f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2f(x)-0f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x(x^3-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}(x^3-x)=0$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x^2f(x)-0f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x(x-x^2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}(x-x^2)=0$$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-0f(0)}{x-0}=0$이므로

미분계수의 정의에서

함수 $x^2f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

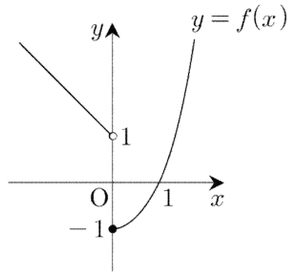
따라서 k의 최솟값은 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[풀이2] 시험장 ★

함수 $f(x)$의 그래프는



구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 2x & (0<x<1)\\ 2x^2 & (x>1)\end{cases}$$

▸ ㄱ. (참)

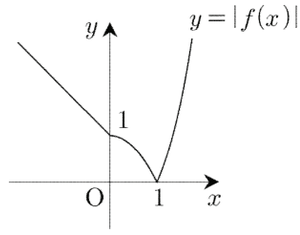
함수 $y=x^2-1$의 $x=1$에서의 미분계수는 2,

함수 $y=\frac{2}{3}(x^3-1)$의 $x=1$에서의 미분계수는 2이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

▸ ㄴ. (거짓)

함수 $|f(x)|$의 그래프는



곡선 $y=|f(x)|$는 $x=0$일 때 뾰족하므로 미분가능하지 않음을 기하학적으로 판정할 수 있다.

그리고 다음과 같이 산술적으로도 이를 보일 수 있다.

함수 $y=1-x$의 $x=0$에서의 미분계수는 -1,

함수 $y=1-x^2$의 $x=0$에서의 미분계수는 0이므로

함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

▸ ㄷ. (참)

• (1) $k=1$인 경우

구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서

함수 $xf(x)$의 도함수는

$(xf(x))'$

$$=\begin{cases}1-2x & (x<0)\\ 3x^2-1 & (0<x<1)\\ \frac{8}{3}x^3-\frac{2}{3} & (x>1)\end{cases}$$

함수 $y=x-x^2$의 $x=0$에서의 미분계수는 1,

함수 $y=x^3-x$의 $x=0$에서의 미분계수는 -1이므로

함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

• (2) $k=2$인 경우

구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서

함수 $x^2f(x)$의 도함수는

$(x^2f(x))'$

$$=\begin{cases}2x-3x^2 & (x<0)\\ 4x^3-2x & (0<x<1)\\ \frac{10}{3}x^4-\frac{4}{3}x & (x>1)\end{cases}$$

함수 $y=x^2-x^3$의 $x=0$에서의 미분계수는 0,

함수 $y=x^4-x^2$의 $x=0$에서의 미분계수는 0이므로

함수 $x^2f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[참고]

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 보일 수 있다.

▸ ㄷ. (참)

함수 $y=x^kf(x)$의 도함수는

$y'=kx^{k-1}f(x)+x^kf'(x)$

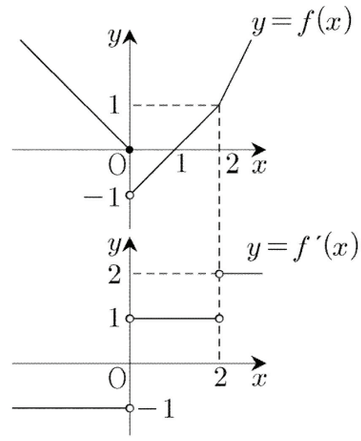
k의 값에 관계없이 $x\to0\pm$일 때, $x^kf'(x)$의 값은 항상 0이다. 그런데 $x=0$에서 y'의 좌우극한값이 같아야 하므로 $k=2$이어야 한다. 그래야 $kx^{k-1}f(x)$의 값이 (0으로) 수렴한다.

$\therefore\ k=2$

E037 | 답 ②

[풀이1] 시험장

두 함수 $f(x)$, $f'(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 좌극한값, 우극한값, 함숫값을 갖지만 불연속이다.

따라서 함수 $p(x)f(x)$가 $x=0$에서 연속이기 위해서는

$p(0)=0$이어야 한다.

▸ ㄴ. (참)

함수 $p(x)f(x)$의 도함수는

$\{p(x)f(x)\}'=p'(x)f(x)+p(x)f'(x)$

$x\to2+$일 때,

$\{p(x)f(x)\}'\to p'(2)\times1+p(2)\times2$

$x\to2-$일 때,

$\{p(x)f(x)\}'\to p'(2)\times1+p(2)\times1$

함수 $p(x)f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$p'(2)+2p(2)=p'(2)+p(2)$, 즉 $p(2)=0$

▸ ㄷ. (거짓)

함수 $\{f(x)\}^2$의 $x=0$에서의 좌극한값, 우극한값, 함숫값은 각각 0, 1, 0이다.

따라서 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$가 $x=0$에서 연속이기 위해서는

$p(0)=0$이어야 한다.

함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 도함수는

$\left[p(x)\{f(x)\}^2\right]'=p'(x)\{f(x)\}^2+2p(x)f(x)f'(x)$

(이때, $\{f(x)\}^2=f(x)f(x)$로 두고 미분한 것이다.)

ㄴ과 마찬가지의 방법으로

$x=0$에서의

좌미분계수: 0

우미분계수: $p'(0)-2p(0)=p'(0)$

$x=2$에서의

좌미분계수: $p'(2)+2p(2)$

우미분계수: $p'(2)+4p(2)$

함수 $p(x)\{f(x)\}^2$가 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능할 조건은

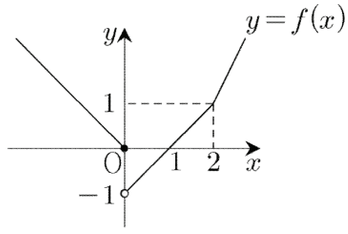
$p'(0)=0$, $p'(2)+2p(2)=p'(2)+4p(2)$

즉, $p'(0)=0$, $p(2)=0$

인수정리에 의하여

$p(x)$는 $x^2(x-2)$를 인수로 갖지만, $x^2(x-2)^2$을 반드시 인수로 갖는 것은 아니다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ②

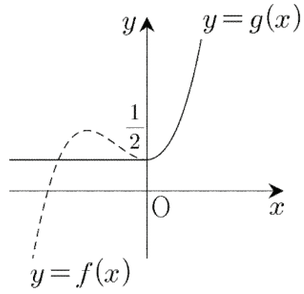
[풀이2]
함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)
함수 $p(x)f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로
$\lim_{x\to 0+} p(x)f(x) = -p(0)$,
$\lim_{x\to 0-} p(x)f(x) = 0$,
$p(0)f(0)=0$
에서 $-p(0)=0$, 즉 $p(0)=0$
▸ ㄴ. (참)
함수 $p(x)f(x)$의 방정식은
$$p(x)f(x)=\begin{cases} -xp(x) & (x\le 0) \\ (x-1)p(x) & (0<x\le 2) \\ (2x-3)p(x) & (x>2) \end{cases}$$
$x=2$에서의 함수 $p(x)f(x)$의 좌미분계수는
$$\lim_{x\to 2-}\frac{(x-1)p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\left\{\frac{(x-2)p(x)}{x-2}+\frac{p(x)-p(2)}{x-2}\right\}$$
$=p(2)+p'(2)$
$x=2$에서의 함수 $p(x)f(x)$의 우미분계수는
$$\lim_{x\to 2+}\frac{(2x-3)p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\left\{\frac{2(x-2)p(x)}{x-2}+\frac{p(x)-p(2)}{x-2}\right\}$$
$=2p(2)+p'(2)$
함수 $p(x)f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로
미분계수의 정의에 의하여
$p(2)+p'(2)=2p(2)+p'(2)$
$\therefore\ p(2)=0$
▸ ㄷ. (거짓)
함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 방정식은
$$p(x)\{f(x)\}^2=\begin{cases} x^2p(x) & (x\le 0) \\ (x-1)^2p(x) & (0<x\le 2) \\ (2x-3)^2p(x) & (x>2) \end{cases}$$
• (1) $x=0$에서의 미분가능성
$x=0$에서의 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 좌미분계수는
$$\lim_{x\to 0-}\frac{x^2p(x)}{x}=0$$
$x=0$에서의 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 우미분계수는
$$\lim_{x\to 0+}\frac{(x-1)^2p(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{(x-1)^2xq(x)}{x}$$
(이때, $p(x)=xq(x)$이다. 왜냐하면 $p(0)=0$이어야 위의 극한값이 존재하기 때문이다.)
$$=\lim_{x\to 0+}(x-1)^2q(x)=q(0)$$
함수 $p(x)\{f(x)\}^2$는 $x=0$에서 미분가능하므로
미분계수의 정의에 의하여
$q(0)=0$
따라서 $p(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.
• (2) $x=2$에서의 미분가능성
$x=2$에서의 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 좌미분계수는
$$\lim_{x\to 2-}\frac{(x-1)^2p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\left\{xp(x)+\frac{p(x)-p(2)}{x-2}\right\}$$
$=2p(2)+p'(2)$
$x=2$에서의 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 우미분계수는
$$\lim_{x\to 2+}\frac{(2x-3)^2p(x)-p(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\left\{4(x-1)p(x)+\frac{p(x)-p(2)}{x-2}\right\}$$
$=4p(2)+p'(2)$
함수 $p(x)\{f(x)\}^2$는 $x=2$에서 미분가능하므로
미분계수의 정의에 의하여
$2p(2)+p'(2)=4p(2)+p'(2)$, 즉 $p(2)=0$
따라서 $p(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.
이때, $p(x)$가 $(x-2)^2$을 반드시 인수로 갖는 것은 아니다.
(1), (2)에서 $p(x)$는 $x^2(x-2)$를 인수로 갖지만,
$x^2(x-2)^2$을 반드시 인수로 갖는 것은 아니다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ②

E038 | 답 28

[풀이]
주어진 곡선이 점 $P(a,\ -6)$을 지나므로
$a^3+2=-6$
a는 실수이므로



함수 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 (경우2)만이 가능하다.

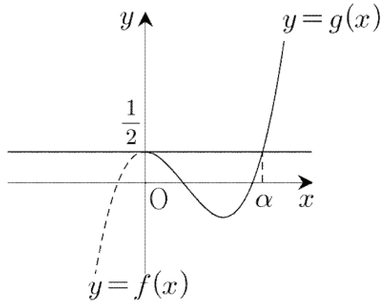
$\therefore\ g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

▸ ㄴ. (참)

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

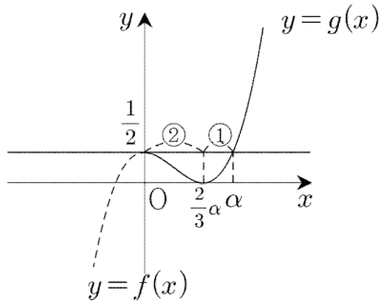
$f(x)-\frac{1}{2}=x^2(x-\alpha)$ (단, $\alpha>0$)

즉, $f(x)=x^3-\alpha x^2+\frac{1}{2}$



$g(1)=f(1)=\frac{3}{2}-\alpha<\frac{3}{2}(\because\ \alpha>0)$

▸ ㄷ. (참)



위의 그림처럼 함수 $g(x)$는 $x=\frac{2}{3}\alpha$에서 최솟값을 갖는다.

$g\left(\frac{2}{3}\alpha\right)=f\left(\frac{2}{3}\alpha\right)=-\frac{4}{27}\alpha^3+\frac{1}{2}=0$

풀면

$\alpha=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x<0)\\ x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2} & (x\geq 0)\end{cases}$

$\therefore\ g(2)=\frac{5}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

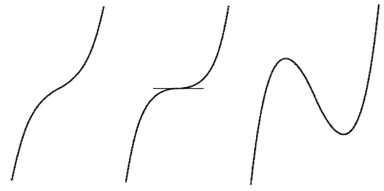
답 ⑤

E114 | 답 ⑤

[풀이1] 시험장 ★

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우만을 생각해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다.



조건 (가)에서 $f(-1)=0,\ f'(-1)\neq 0$이다.

조건 (나)에서 $f(\alpha)=0$라고 하자. (단, $3\leq\alpha\leq 5$)

그런데 조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능해야 하므로 $f'(\alpha)=0$이다.

이상을 정리하면

$f(-1)=0,\ f'(-1)\neq 0,$

$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0$

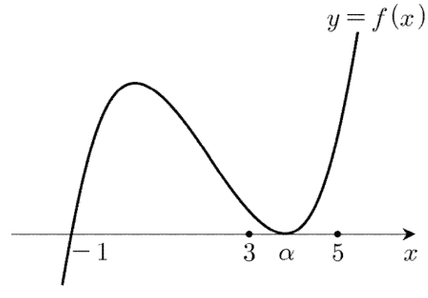
함수 $f(x)$의 그래프는

두 점 $(-1,\ 0),\ (\alpha,\ 0)$을 지나고,

점 $(-1,\ 0)$에서 x축에 접하지 않지만

점 $(\alpha,\ 0)$에서 x축에 접해야 한다.

이를 모두 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



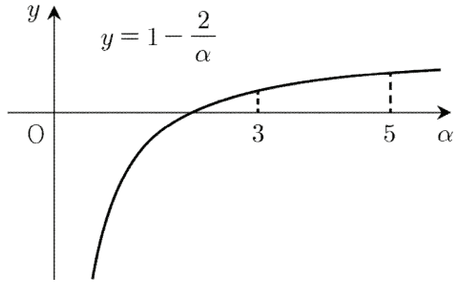
함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x+1)(x-\alpha)^2$ (단, $a>0,\ 3\leq\alpha\leq 5$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=a(x-\alpha)^2+2a(x+1)(x-\alpha)$

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{a\alpha^2-2a\alpha}{a\alpha^2}=1-\frac{2}{\alpha}$$



구간 $[3,\ 5]$에서 α에 대한 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 증가하므로

$\alpha=3$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $m=\frac{1}{3}$을 갖고,

$\alpha=5$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $M=\frac{3}{5}$을 갖는다.

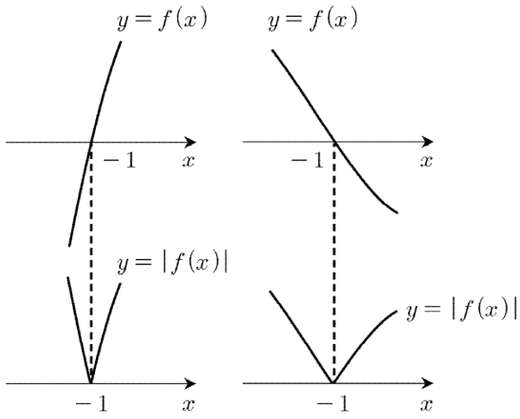
$\therefore\ Mm=\frac{1}{5}$

답 ⑤

[풀이2]

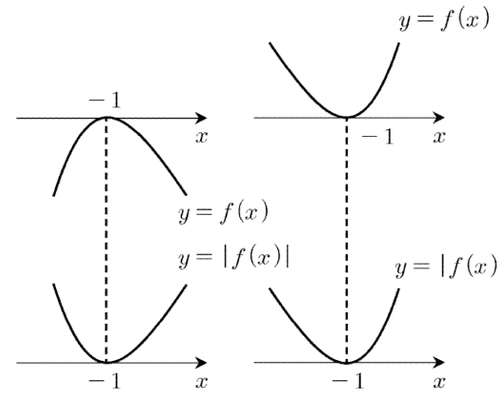
$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우를 생각하자.

• $f(x)$가 $x+1$을 인수로 갖고 $(x+1)^2$ 또는 $(x+1)^3$을 인수로 갖지 않는 경우



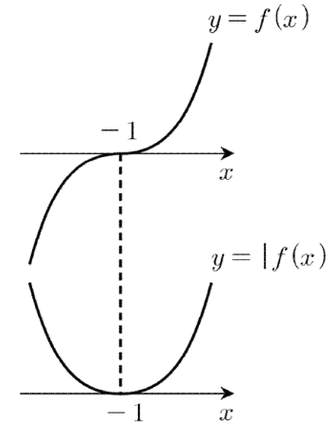
위의 그림처럼 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

• $f(x)$가 $(x+1)^2$을 인수로 갖고 $(x+1)^3$을 인수로 갖지 않는 경우



위의 그림처럼 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

• $f(x)$가 $(x+1)^3$을 인수로 갖는 경우



위의 그림처럼 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

따라서 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖고 $(x+1)^2$ 또는 $(x+1)^3$을 인수로 가질 수 없다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)(a>0)$

조건 (나)에 의하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖거나, 중근을 가져야 한다.

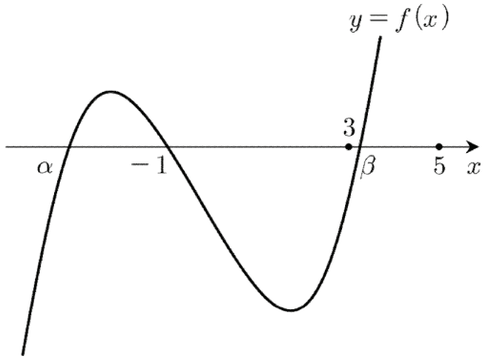
• 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

이 두 실근을 각각 α, β라고 하자.

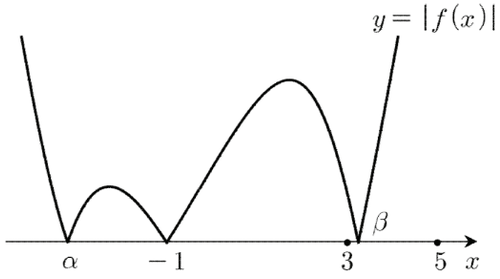
(단, $\alpha\neq\beta$, $\alpha\neq-1$, $3\leq\beta\leq5$)

$\alpha<-1<\beta$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



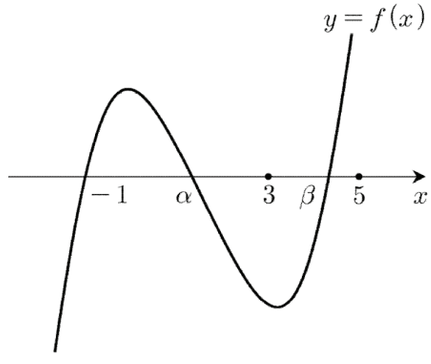
함수 $|f(x)|$의 그래프는



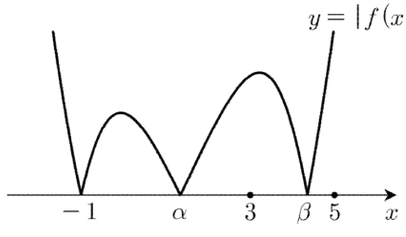
위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$-1<\alpha<\beta$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



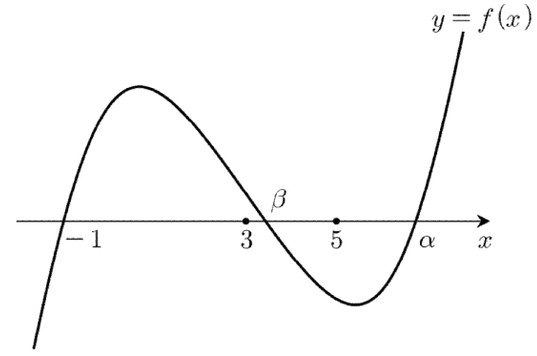
함수 $|f(x)|$의 그래프는



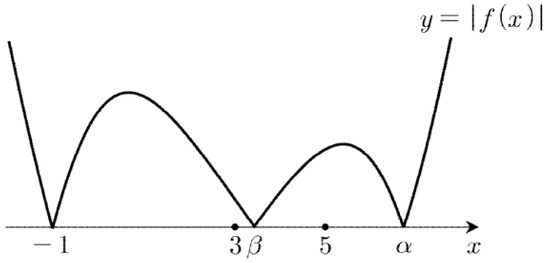
위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$-1<\beta<\alpha$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 그래프는

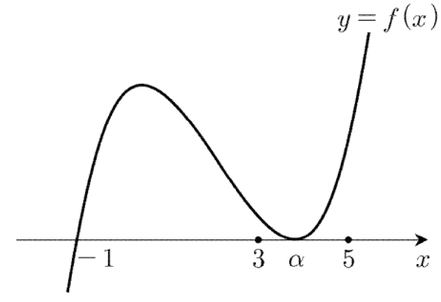


위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$, $x=\beta$, $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

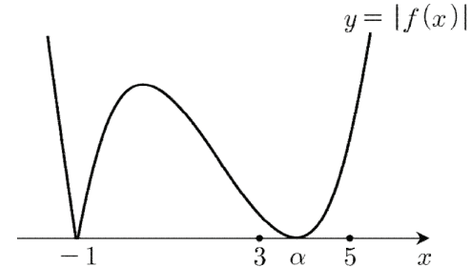
• 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는 경우

중근을 α라고 하자. (단, $3\le\alpha\le5$)

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 그래프는



위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다. 즉, 조건 (가)를 만족시킨다.

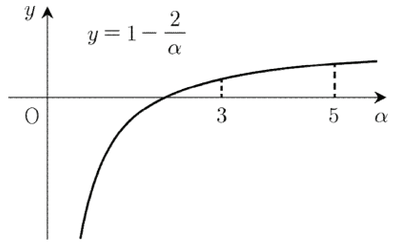
함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x+1)(x-\alpha)^2$ (단, $a>0$, $3\le\alpha\le5$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=a(x-\alpha)^2+2a(x+1)(x-\alpha)$

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{a\alpha^2-2a\alpha}{a\alpha^2}=1-\frac{2}{\alpha}$$



구간 $[3,\ 5]$에서 α에 대한 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 증가하므로

$\alpha=3$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $m=\frac{1}{3}$을 갖고,

$\alpha=5$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $M=\frac{3}{5}$을 갖는다.

$\therefore\ Mm=\frac{1}{5}$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우에도 동일한 결과를 얻는다.

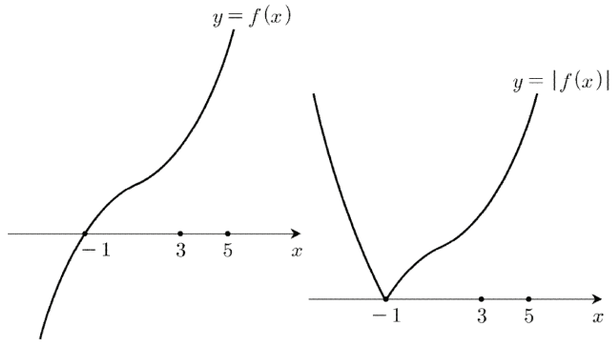
답 ⑤

[풀이3]

$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우를 생각하자.

• 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 갖지 않는 경우

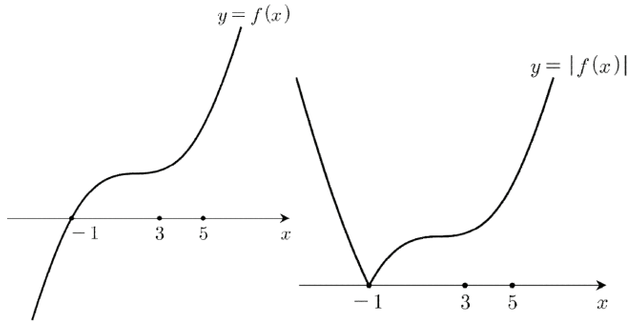
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

• 방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖는 경우

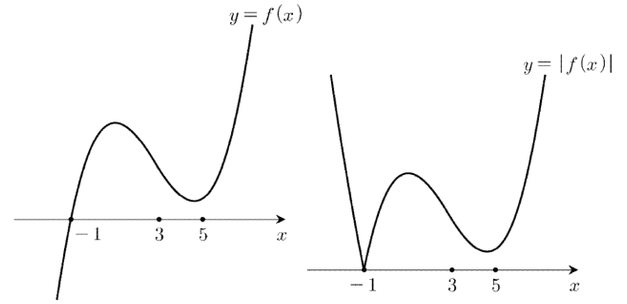
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

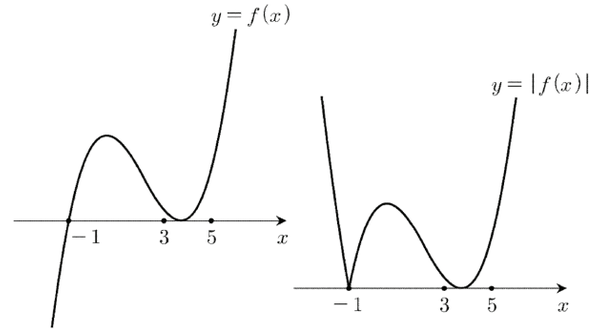
• 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



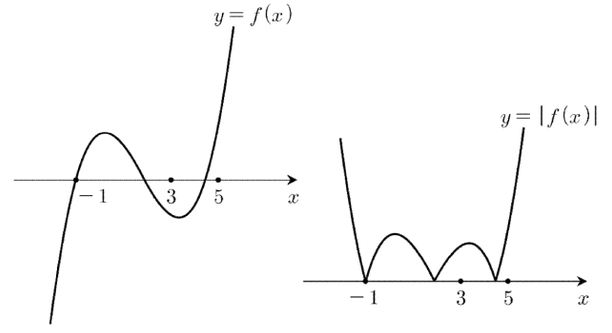
함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



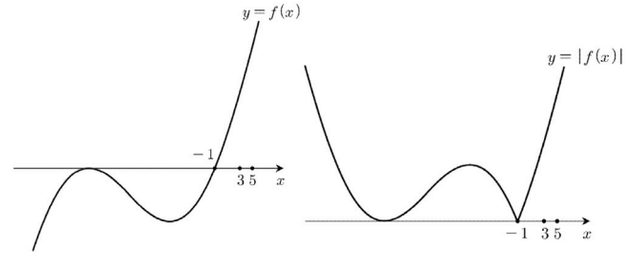
함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



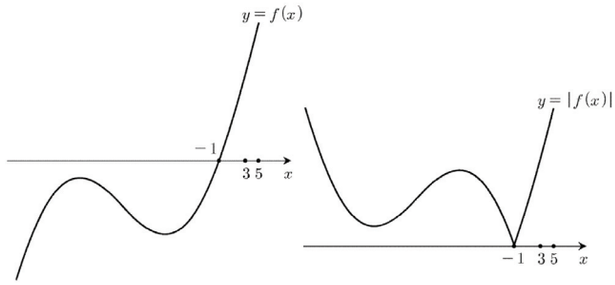
함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



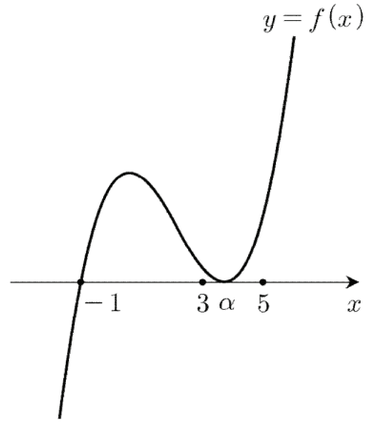
함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

이상에서 가능한 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 각각 -1, α라고 하자.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x+1)(x-\alpha)^2$

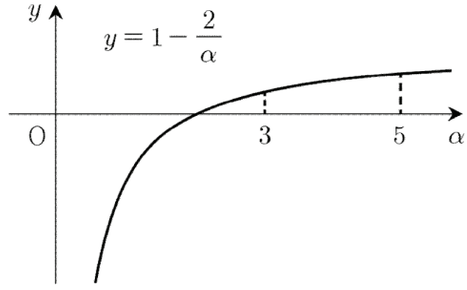
(단, $a>0$, $3\le\alpha\le5$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=a(x-\alpha)^2+2a(x+1)(x-\alpha)$

이므로

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{a\alpha^2-2a\alpha}{a\alpha^2}=1-\frac{2}{\alpha}$$



구간 $[3,\ 5]$에서 α에 대한 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 증가하므로

$\alpha=3$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $m=\frac{1}{3}$을 갖고,

$\alpha=5$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $M=\frac{3}{5}$을 갖는다.

$\therefore\ Mm=\frac{1}{5}$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우에도 동일한 결과를 얻는다.

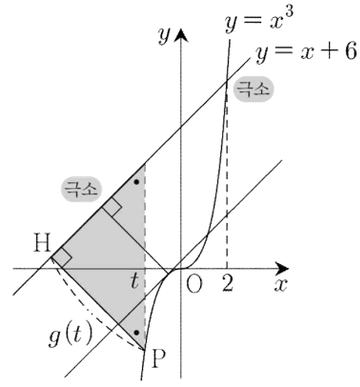
답 ⑤

E115 | 답 ③

[풀이1]

점 $(t,\ f(t))$를 P로 두고, 점 P에서 직선 $y=x+6$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$g(t)=\overline{\mathrm{PH}}$



(단, ●$=45^\circ$)

▸ ㄱ. (참)

t의 값을 $-\infty$에서 ∞까지 변화시키면서 $g(t)(=\overline{\mathrm{PH}})$의 값의 변화를 관찰하면 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속임을 알 수 있다.

▸ ㄴ. (참)

위의 그림처럼 선분 PH의 길이가 짧아졌다가 다시 길어지는 t의 값이 존재한다. 이때, 선분 PH의 길이는 0이 아니다. 따라서 함수 $g(t)$는 0이 아닌 극솟값을 갖는다.

▸ ㄷ. (거짓)

위의 그림의 어둡게 색칠된 직각이등변삼각형에서 삼각비의 정의에 의하여

$$g(t)=\overline{\mathrm{PH}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|(t+6)-t^3\right|$$

함수 $|(t+6)-t^3|$은 $t=2$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $g(t)$도 $t=2$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

[풀이2]

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$$g(t)=\frac{\left|t-t^3+6\right|}{\sqrt{2}}$$

$t^3-t-6=(t-2)(t^2+2t+3)$에서

$t^2+2t+3=(t+1)^2+2\geq 2$이므로

$t\geq 2$이면 $t^3-t-6\geq 0$

$t<2$이면 $t^3-t-6<0$

함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{t^3-t-6}{\sqrt{2}} & (t\geq 2)\\ \dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}} & (t<2)\end{cases}$$

구간 $[2,\ \infty)$에서 함수 $y=\dfrac{t^3-t-6}{\sqrt{2}}$의 그래프를 그리자.

도함수는

$$y'=\frac{3t^2-1}{\sqrt{2}}$$

구간 $[2,\ \infty)$에서 $y'>0$이므로

함수 $y=\dfrac{t^3-t-6}{\sqrt{2}}$은 구간 $[2,\ \infty)$에서 증가한다.

구간 $(-\infty,\ 2)$에서 함수 $y=\dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}}$의 그래프를 그리자.

도함수는

$$y'=\frac{-3t^2+1}{\sqrt{2}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$y'=0$에서

$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

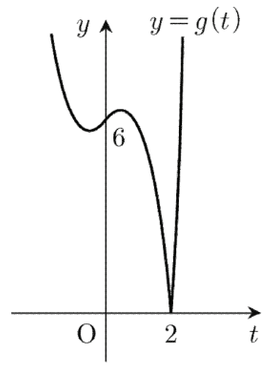
$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 좌우에서 y'의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로

함수 $y=\dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}}$은 $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 좌우에서 y'의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로

함수 $y=\dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}}$은 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

함수 $g(t)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)

위의 그림에서 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

▸ ㄴ. (참)

위의 그림에서 함수 $g(t)$는 $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 0이 아닌 극솟값을 갖는다.

▸ ㄷ. (거짓)

위의 그림에서 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

E116 답 ④

[풀이]

조건 (가)에서

$f(1)=1+a+b=2$ 즉, $a+b=1$ …㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

접선의 방정식은

$y=(3t^2+2at+b)(x-t)+t^3+at^2+bt$

$x=0$을 대입하면

$y=-2t^3-at^2$

함수 $g(t)$의 방정식은 $g(t)=\left|-2t^3-at^2\right|$

• (1) $a>0$인 경우

함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프를 그리자.

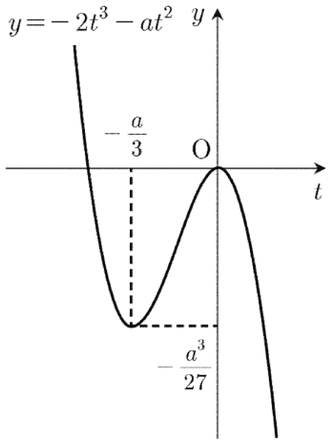
도함수는

$y'=-6t^2-2at=-2t(3t+a)$

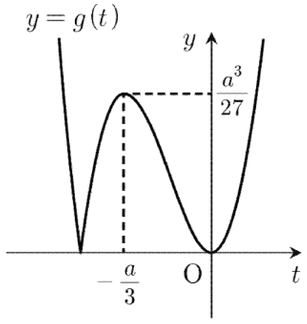
$y'=0$에서 $t=-\dfrac{a}{3}$ 또는 $t=0$

t	…	$-\frac{a}{3}$	…	0	…
y'	−	0	+	0	−
y	↘	$-\frac{a^3}{27}$	↗	0	↘

함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프는



함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 1이다.

• (2) $a=0$인 경우

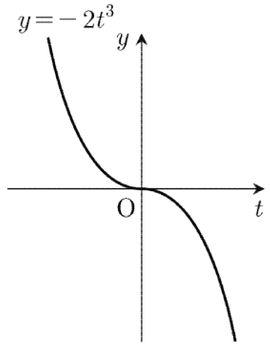
함수 $y=-2t^3$의 그래프를 그리자.

도함수는 $y'=-6t^2$

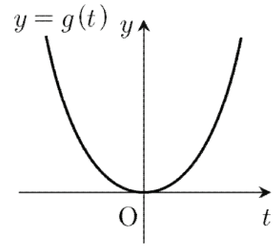
$y'=0$에서 $t=0$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	↘	0	↘

함수 $y=-2t^3$의 그래프는



함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

• (3) $a<0$인 경우

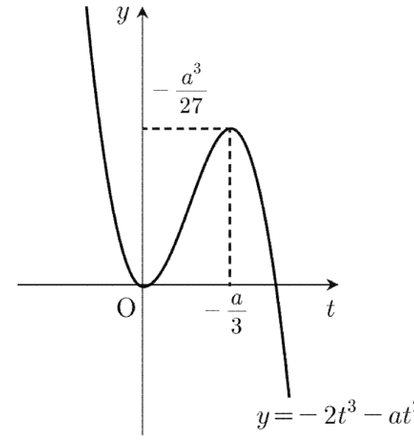
함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프를 그리자.

도함수는 $y'=-6t^2-2at=-2t(3t+a)$

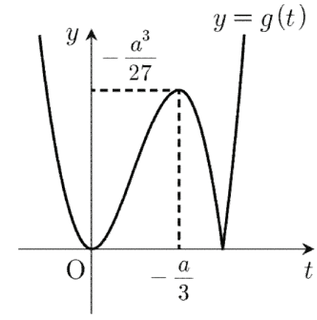
$y'=0$에서 $t=0$ 또는 $t=-\frac{a}{3}$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	$-\frac{a^3}{27}$	↘

함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프는



함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 1이다.

조건 (나)를 만족시키는 경우는 (2)이다.

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x^3+x$

$\therefore\ f(3)=30$

답 ④

E117 | 답 ③

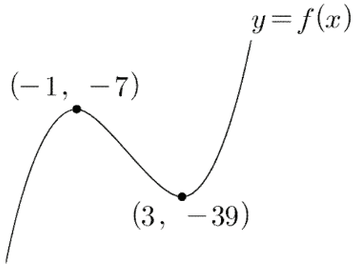
[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 그래프는



조건 (가)에서 주어진 등식을 정리하자.

$xg(x)=|x||f(x-p)+q|$

$=\begin{cases} x|f(x-p)+q| & (x>0) \\ -x|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$

이므로

$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x>0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$

그런데 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)$

즉, $|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

$|f(-p)+q|=0,\ g(0)=0$

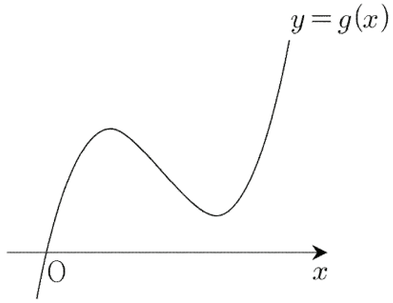
함수 $g(x)$의 방정식을 다시 쓰면

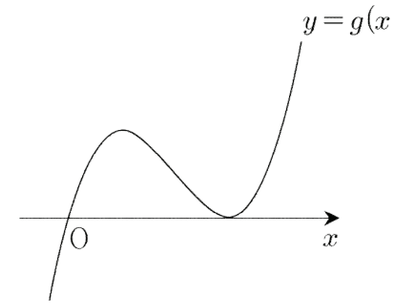
$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x\geq 0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$

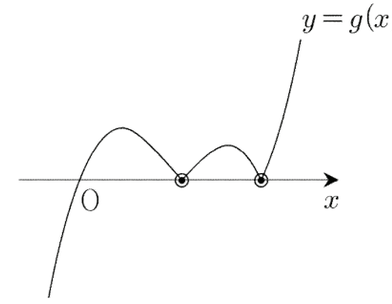
이때, 곡선 $y=g(x)$는 원점을 지난다.

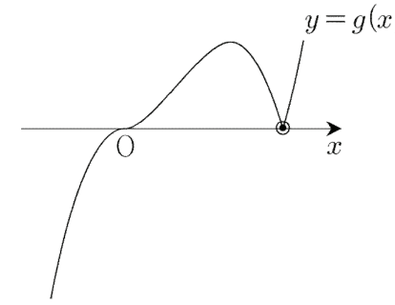
함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다.

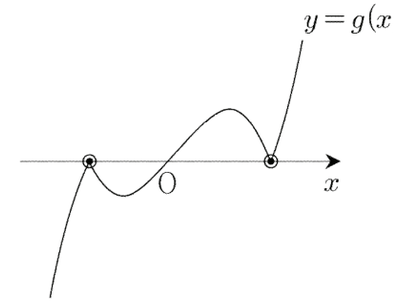
(단, ◉는 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점이다.)

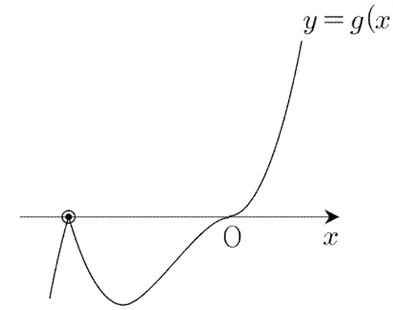


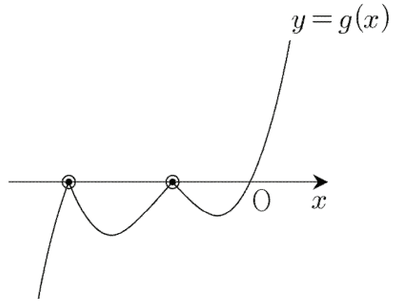


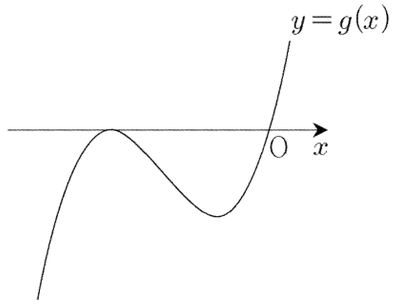


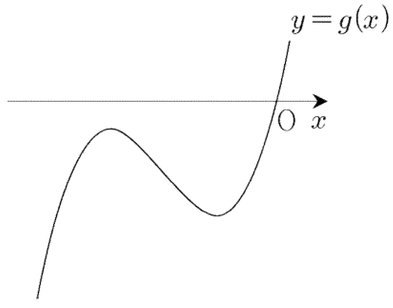






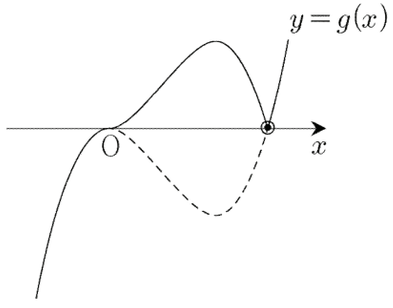






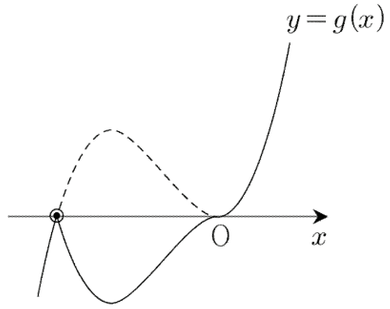
조건 (나)를 만족시키는 두 경우만 다시 그리자.

(경우1) ○



$p=1$, $q=7$이므로 p, q가 모두 양수라는 조건을 만족시킨다.

(경우2) ×



$p=-3$, $q=39$이므로 p가 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ p+q=8$

답 ③

E118 | 답 39

[풀이]

우선 '함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다.' 라는 조건을 이용하자.

$x<1$일 때, $f(x)\geq g(x)$라고 하면

$$h(x)=\begin{cases} f(x)-g(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases},$$

$$h'(x)=\begin{cases} f'(x)-g'(x) & (x<1) \\ f'(x)+g'(x) & (x>1) \end{cases}$$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

연속성: $f(1)-g(1)=f(1)+g(1)$, 즉

$g(1)=0$

미분가능성: $f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$, 즉

$g'(1)=0$

위의 두 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$는 존재하지 않는다.

왜냐하면 $g(x)$는 상수함수이기 때문이다.

귀류법에 의하여 $x<1$일 때, $f(x)<g(x)$이다.

$$h(x)=\begin{cases} g(x)-f(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases},$$

$$h'(x)=\begin{cases} g'(x)-f'(x) & (x<1) \\ f'(x)+g'(x) & (x>1) \end{cases}$$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

연속성: $g(1)-f(1)=f(1)+g(1)$, 즉

$f(1)=0$

미분가능성: $g'(1)-f'(1)=f'(1)+g'(1)$, 즉

$f'(1)=0$

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)$

한편

$h(0)=0 \Leftrightarrow |f(0)-g(0)| \Leftrightarrow f(0)=g(0)$

즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$는 점 $(0,\ f(0))$에서 만난다. 이때, 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서 접해야만 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

즉, 직선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선이다. 이때, $f(0)=-\alpha$

$f'(x)=2(x-1)(x-\alpha)+(x-1)^2$

에서 $f'(0)=2\alpha+1$이므로

$g(x)=(2\alpha+1)x-\alpha$

이제 α의 값을 결정하자.

$h(2)=f(2)+g(2)=2\alpha+4=5$에서 $\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ h(4)=f(4)+g(4)$

$=9\times\dfrac{7}{2}+2\times4-\dfrac{1}{2}=39$

답 39

E119 | 답 108

[풀이]

$$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|-|f(x-h)|+|f(x)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\left\{\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h}+\frac{|f(x-h)|-|f(x)|}{-h}\right\}$$

=(함수 $|f(x)|$의 $x=x$에서의 우미분계수)

+(함수 $|f(x)|$의 $x=x$에서의 좌미분계수)

$=p(x)$(로 두자.)

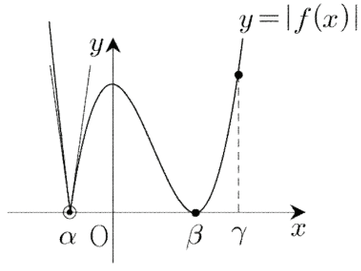
만약 함수 $|f(x)|$가 $x=x$에서 미분가능하면

$p(x)=2\times$(함수 $|f(x)|$의 $x=x$에서의 미분계수)

만약 함수 $|f(x)|$가 $x=x$에서 미분가능하지 않으면

$p(x)=0$

예를 들어보자.



(단, ◉는 함수 $|f(x)|$가 미분가능하지 않음 점, ●는 함수 $|f(x)|$가 미분가능한 점)

$x=\alpha$에서 함수 $|f(x)|$의 좌미분계수와 우미분계수는 절댓값이 같고 부호가 다르므로

$p(x)=0$

$x=\beta$에서 함수 $|f(x)|$의 좌미분계수와 우미분계수는 0으로 같으므로

$p(x)=2\times0=0(=2f'(\beta))$

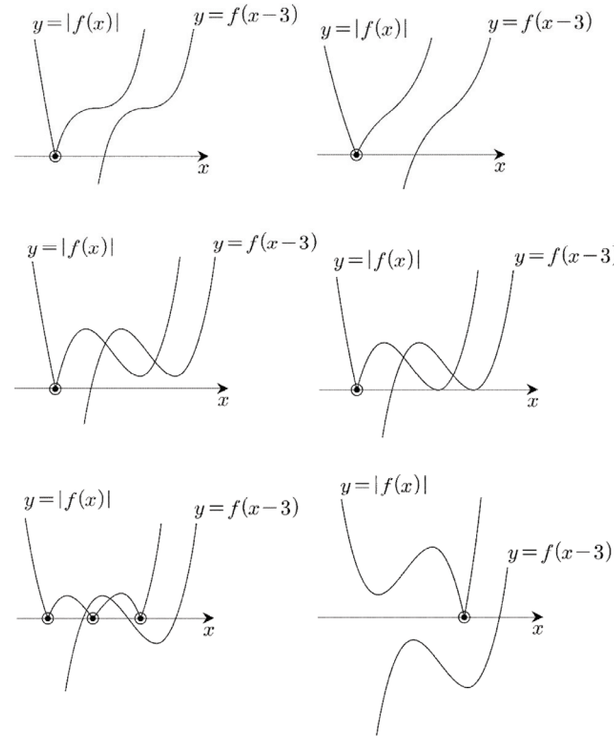
$x=\gamma$에서 함수 $|f(x)|$의 좌미분계수와 우미분계수는 $f'(\gamma)$으로 같으므로

$p(x)=2f'(\gamma)$

이때, 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않고, $x=\beta$, $x=\gamma$에서 미분가능하다.

이제 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 결정하자.

조건 (가)를 만족시키지 않는 경우를 모두 그려보면 다음과 같다.



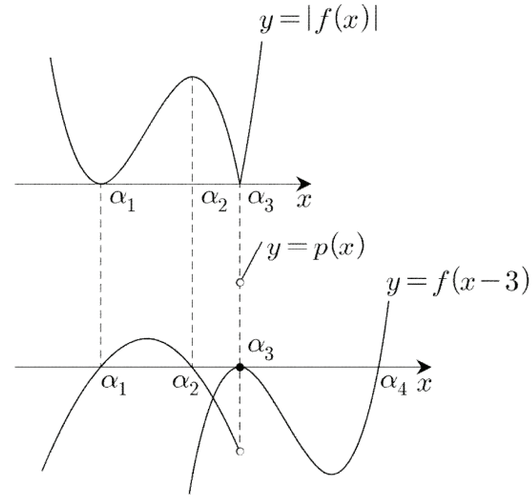
(단, ◉는 함수 $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 점이다. 즉, 함수 $p(x)$가 연속이 아닌 점이다.)

점 ◉의 x좌표를 α라고 할 때, $p(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이고 $f(\alpha-3)\neq0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다.

조건 (나)에서 주어진 방정식을 풀면

$g(x)=0\ \Leftrightarrow\ f(x-3)=0$ 또는 $p(x)=0$

두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 함수 $|f(x)|$의 그래프 개형은 다음과 같다.



(단, $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4$이다.)

$x=\alpha_3$에서 함수 $p(x)$는 불연속이지만 $f(\alpha_3-3)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha_3$에서 연속이다. (조건(가)○)

위의 그림에서

$\alpha_3-\alpha_1=3$, 즉 $\alpha_3=\alpha_1+3$ (평행이동)

$\alpha_2=\alpha_1+2$ (삼차함수의 비율관계)

$\alpha_4=\alpha_3+3=\alpha_1+6$ (평행이동)

이를 조건 (나)에서 주어진 등식에 대입하면

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=4\alpha_1+11=7$,

$\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=2$, $\alpha_4=5$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x+1)^2(x-2)$

$\therefore\ f(5)=36\times3=108$

답 108

[참고]

삼차함수의 비율관계를 이용하지 않아도

$\alpha_2=\alpha_1+2$

임을 유도할 수 있다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_3)$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)+(x-\alpha_1)^2$

그런데 $f'(\alpha_2)=0$이므로

$f'(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)(3\alpha_2-\alpha_1-2\alpha_3)=0$

$\alpha_1\neq\alpha_2$이므로

$\therefore\ \alpha_2=\dfrac{\alpha_1+2\alpha_3}{3}=\dfrac{\alpha_1+2(\alpha_1+3)}{3}=\alpha_1+2$

E120 | 답 105

[풀이] ★

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 양수로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. (즉, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때에도 동일한 결과를 얻는다.)

우선 조건 (가)를 생각하자.

$f(1)=f(3)=0$이고,

함수 $f(x)$가

닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고

열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하므로

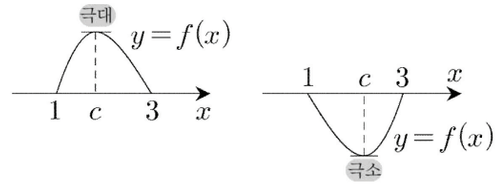
롤의 정리에 의하여

$f'(c)=0$

인 c가 구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 조건 (나)에 의하여 c는 유일하다.

요컨대 롤의 정리에 의해 함수 $f(x)$는 구간 $(1,\ 3)$에서 극값을 갖는다. (아래 그림)

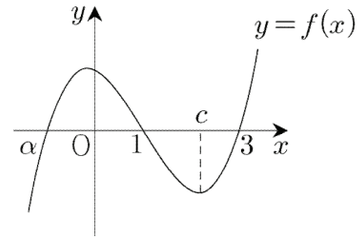


조건 (나)에 의하여

$1\le x<c$, $c<x$일 때, $f'(x)\neq0$

이고, $f'(c)=0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



(단, $f(\alpha)=0$, $\alpha<1$)

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=k(x-\alpha)(x-1)(x-3)$ (단, $k>0$)

함수 $f(a-x)$의 방정식은

$f(a-x)=k(a-\alpha-x)(a-1-x)(a-3-x)$

두 방정식 $f(x)=0$, $f(a-x)=0$의 해집합을 각각 A, B라고 하면

$A=\{\alpha,\ 1,\ 3\}$,

$B=\{a-\alpha,\ a-1,\ a-3\}$

(이때, $a-\alpha>a-1>a-3$)

다음의 필요충분조건이 성립한다.

'$A=B$ ⇔ 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.'

왜냐하면 $A=B$이면

$g(x)=|k^2(x-\alpha)^2(x-1)^2(x-3)^2|$

$=k^2(x-\alpha)^2(x-1)^2(x-3)^2$

이기 때문이다. (이 역도 성립한다.)

이제 $A=B$인 상수 a의 값을 구하자.

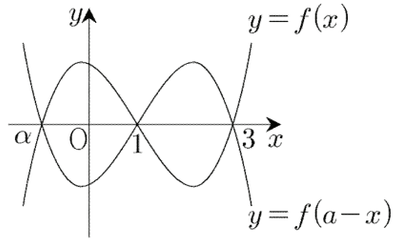
$\alpha=a-3$, $1=a-1$, $3=a-\alpha$

을 연립하면

$a=2$, $\alpha=-1$

이때, $A=B=\{-1,\ 1,\ 3\}$

두 함수 $f(x)$, $f(a-x)$의 그래프는



(단, $\alpha=-1$)

두 함수 $f(x)$, $f(a-x)$의 방정식은

$f(x)=k(x+1)(x-1)(x-3)$,

$f(a-x)=-k(x+1)(x-1)(x-3)=-f(x)$

$\therefore \ \dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}=\dfrac{(f(8))^2}{f(0)\times f(8)}$

$=\dfrac{k\times 9\times 7\times 5}{3k}=105$

답 105

[참고1]

α의 값을 다음과 같이 빠르게 구할 수 있다.

다음의 필요충분조건을 생각할 수 있다.

$A=B$

$\Leftrightarrow$

두 삼차함수 $f(x)$, $f(a-x)$의 그래프는 x축 위의 서로 다른 세 점에서 만난다.

$\Leftrightarrow$

삼차함수 $f(x)$의 변곡점이 x축 위에 있다. $\cdots(*)$

$\Leftrightarrow$

삼차함수 $f(a-x)$의 변곡점이 x축 위에 있다.

(*)에 의하여

$\dfrac{\alpha+3}{2}=1$

$\therefore \ \alpha=-1$

[참고2]

미분계수의 정의를 이용하여 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 조건을 따져보자.

• 함수 $g(x)$의 $x=1$에서의 미분가능성

$\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1+}\left|\dfrac{k(x-1)Q(x)f(a-x)}{x-1}\right|$

(이때, $Q(x)=(x+\alpha)(x-3)$)

$=\lim\limits_{x\to 1+}|kQ(x)f(a-x)|$

$=|kQ(1)f(a-1)|$

마찬가지의 방법으로

$\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=-|kQ(1)f(a-1)|$

미분계수의 정의에 의하여

$|kQ(1)f(a-1)|=-|kQ(1)f(a-1)|$

즉, $kQ(1)f(a-1)=0$에서

$f(a-1)=0$ ($\because k\neq 0$, $Q(1)\neq 0$)

• 함수 $g(x)$의 $x=\alpha$, $x=3$에서의 미분가능성

위와 마찬가지의 방법으로

$f(a-\alpha)=0$, $f(a-3)=0$

이상에서

$\{\alpha,\ 1,\ 3\}=\{a-\alpha,\ a-1,\ a-3\}$

이고, $a=2$, $\alpha=-1$을 얻는다.

E121 | 답 13

[풀이1]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$x=0$을 대입하여 $g(t)$의 방정식을 구하면

$g(t)=f(t)-tf'(t)=-2t^3+(a+2)t^2$

함수 $g(t)$의 도함수는

$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t$

$g'(t)=0$에서 $t=0$, $t=\dfrac{a+2}{3}$

• (1) $a\le -2$인 경우

구간 $(0,\ 5)$에서 $g'(t)<0$이므로

구간 $(0,\ 5)$에서 함수 $g(t)$는 감소한다.

• (2) $-2<a<13$인 경우

구간 $\left(0,\ \dfrac{a+2}{3}\right)$에서 $g'(t)>0$이므로

구간 $\left(0,\ \dfrac{a+2}{3}\right)$에서 함수 $g(t)$는 증가한다.

구간 $\left(\dfrac{a+2}{3},\ 5\right)$에서 $g'(t)<0$이므로

구간 $\left(\dfrac{a+2}{3},\ 5\right)$에서 함수 $g(t)$는 감소한다.

• (3) $a\ge 13$인 경우

구간 $(0,\ 5)$에서 $g'(t)>0$이므로

구간 $(0,\ 5)$에서 함수 $g(t)$는 증가한다.

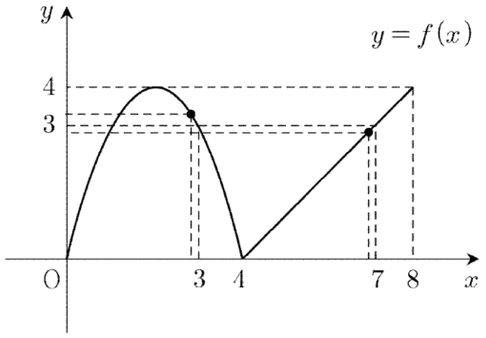
(1), (2), (3)에서

$\therefore \ a\ge 13$

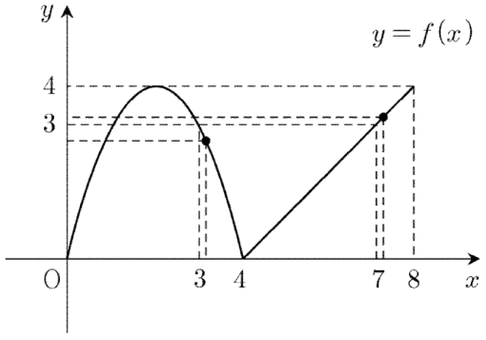
답 13

[풀이2] 시험장

h가 충분히 작은 양수라고 하자.



구간 $(3-h,\ 3)$에 속하는 a에 대하여
$f(a+4)-f(a)<0$이다.



구간 $(3,\ 3+h)$에 속하는 a에 대하여
$f(a+4)-f(a)>0$이다.
$a=3$의 좌우에서 $g'(a)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $g(a)$는 $a=3$에서 극솟값을 갖는다.
정적분의 성질과 정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$g(3)=\int_3^7 f(x)dx=\int_3^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$$

$$=\int_3^4(-x^2+4x)dx+\int_4^7(x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_3^4+\frac{1}{2}\times 3\times 3$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{9}{2}=\frac{37}{6}$$

그리고

$$g(0)=\int_0^4 f(x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

$$g(4)=\int_4^8 f(x)dx=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$$

이므로 구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $g(a)$의 최솟값은 $\frac{37}{6}$이다.

$p=6,\ q=37$
$\therefore\ p+q=43$
답 43

[참고1] ★
정적분의 성질에 의하여

$$\int_a^{a+4} f(x)dx=\int_0^{a+4} f(x)dx-\int_0^a f(x)dx$$

적분과 미분의 관계에 의하여
$g'(a)=f(a+4)-f(a)$

[참고2]
정적분의 성질과 정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$g(a)=\int_a^{a+4} f(x)dx=\int_a^4 f(x)dx+\int_4^{a+4} f(x)dx$$

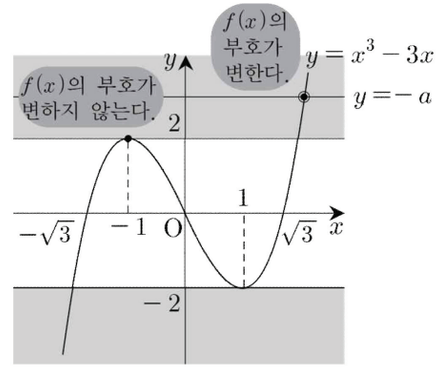
$$=\int_a^4(-x^2+4x)dx+\int_4^{a+4}(x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_a^4+\frac{1}{2}\times a\times a$$

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$$

F027 | 답 ②

[풀이1] 시험장
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$F'(x)=f(x)$
함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로, $f(x)$의 부호로 $F(x)$의 증감을 따지면 된다.
삼차함수의 비율관계$(1:\sqrt{3})$를 이용하여
함수 $y=x^3-3x$의 그래프를 빠르게 그리자.



위의 그림처럼 직선 $y=-a$가 어둡게 색칠된 영역에 포함되면 함수 $F(x)$는 극값을 오직 하나만 가진다. 왜냐하면 $f(x)$의 부호가 바뀌는 곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=-a$의 교점은 오직 하나이기 때문이다. 따라서 a의 범위는
$a\le -2$ 또는 $a\ge 2$
양수 a의 최솟값은 2이다.
답 ②

[풀이2] ★
적분과 미분의 관계에 의하여

$F'(x)=f(x)$

방정식 $F'(x)=0$은 $x^3-3x=-a$

$g(x)=x^3-3x$로 두고, 함수 $g(x)$의 그래프와

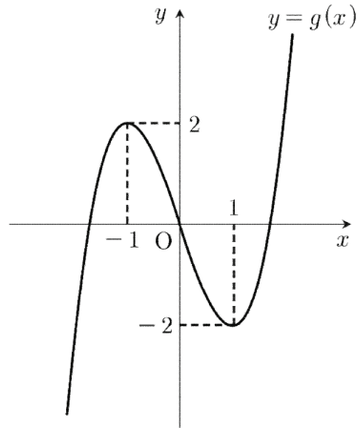
직선 $y=-a$의 위치관계를 생각하자.

함수 $g(x)$의 도함수는 $g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	2	↘	-2	↗

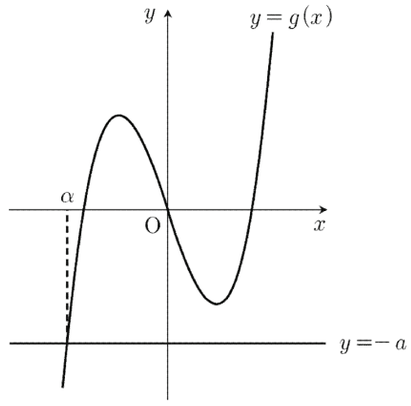
함수 $g(x)$의 그래프는



• (1) $a>2$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$는 한 점에서 만난다.

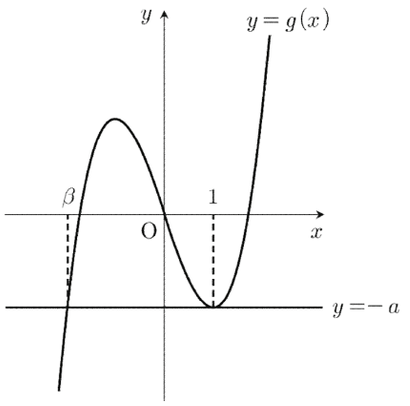
이 교점의 x좌표를 α라고 하자.



$x=\alpha$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호는 음(−)에서 양(+)으로 변하므로 함수 $F(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다.

• (2) $a=2$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 교점 중 한 점의 x좌표는 1이고, 나머지 한 점의 x좌표를 β라고 하자.

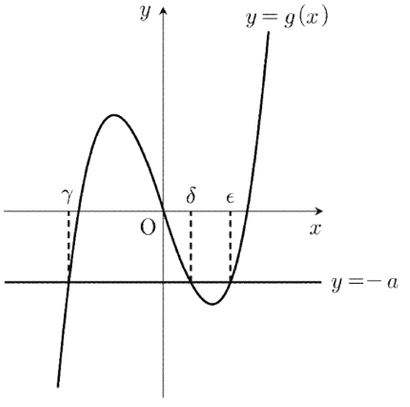


$x=1$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호는 양수이므로 함수 $F(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않는다.

$x=\beta$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호는 음(−)에서 양(+)으로 변하므로 함수 $F(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다.

• (3) $0<a<2$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$는 서로 다른 세 점에서 만난다. 이 세 교점의 x좌표를 각각 γ, δ, ϵ이라고 하자. (단, $\gamma<\delta<\epsilon$)



$x=\gamma$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호는 음(−)에서 양(+)으로 변하므로 함수 $F(x)$는 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다.

$x=\delta$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호는 양(+)에서 음(−)으로 변하므로 함수 $F(x)$는 $x=\delta$에서 극댓값을 갖는다.

$x=\epsilon$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호는 음(−)에서 양(+)으로 변하므로 함수 $F(x)$는 $x=\epsilon$에서 극솟값을 갖는다.

(1), (2), (3)에서 양수 a에 대하여

$a\geq 2$이면 함수 $F(x)$의 극값의 개수는 1이다.

답 ②

F028 | 답 ③

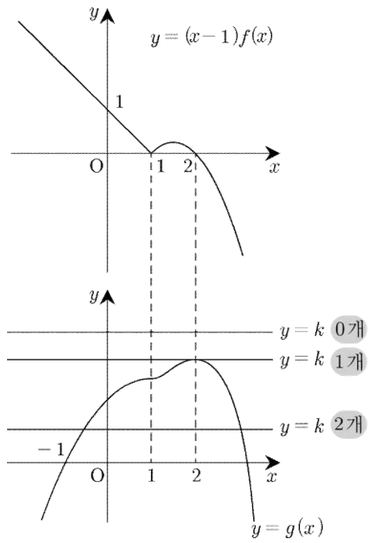
[풀이1] 시험장

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=(x-1)f(x)$

$=\begin{cases}1-x & (x<1)\\ -(x-1)(x-2) & (x\geq 1)\end{cases}$

두 함수 $g'(x)(=(x-1)f(x))$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



(단, $g(-1)=0$)

▸ ㄱ. (참)

▸ ㄴ. (참)

왜냐하면 $g'(1)=0$이기 때문이다.

▸ ㄷ. (거짓)

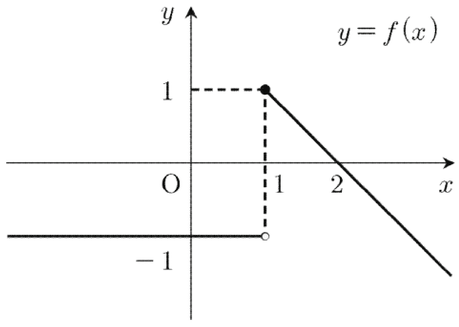
곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수는 2 이하이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

[풀이2] ★

함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)

적분과 미분의 관계에 의하여

$g'(x)=(x-1)f(x)$

구간 $(1,\ 2)$에서 $x-1>0$, $f(x)>0$

이므로 $g'(x)>0$이다.

구간 $(1,\ 2)$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.

▸ ㄴ. (참)

$g'(1)=(1-1)f(1)=0\times 1=0$

함수 $g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는 0이다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

▸ ㄷ. (거짓)

$g'(x)=(x-1)f(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

정적분의 성질에 의하여

$$g(1)=\int_{-1}^{1}(t-1)f(t)dt=\int_{-1}^{1}(1-t)dt$$

$$=\int_{-1}^{1}1dt=\left[t\right]_{-1}^{1}=2$$

$$g(2)=\int_{-1}^{2}(t-1)f(t)dt$$

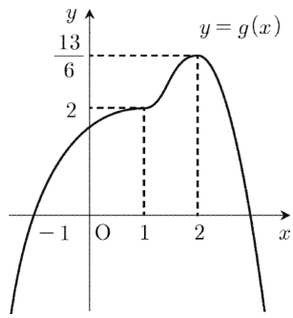
$$=\int_{-1}^{1}(t-1)f(t)dt+\int_{1}^{2}(t-1)f(t)dt$$

$$=2+\int_{1}^{2}(t-1)(2-t)dt$$

$$=2+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_{1}^{2}=\frac{13}{6}$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	+	0	−
$g(x)$	↗	2	↗	$\frac{13}{6}$	↘

함수 $g(x)$의 그래프는



곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수의 최댓값은 2이다. 따라서 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k는 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

[참고]

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이지만, 함수 $y=x-1$이 연속이고, 이 직선이 x축 위의 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

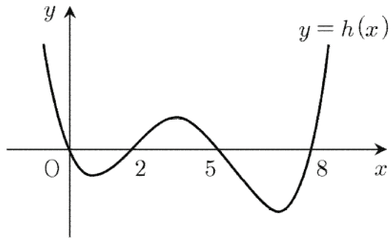
함수 $(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 함수 $g(x)$를 정의할 수 있다.

F029 | 답 ⑤

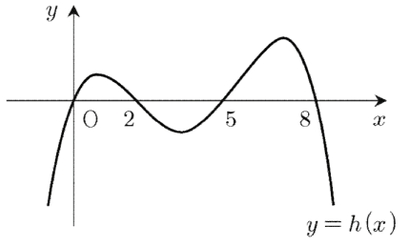
[풀이] ★

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$로 두자.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때, 함수 $h(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때, 함수 $h(x)$의 그래프는



적분과 미분의 관계에 의하여

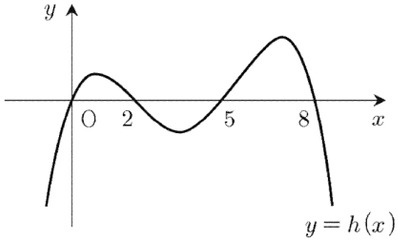
$h'(x)=f(x)$

주어진 조건에 의하여

$h'(0)=f(0)>0$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 증가한다.

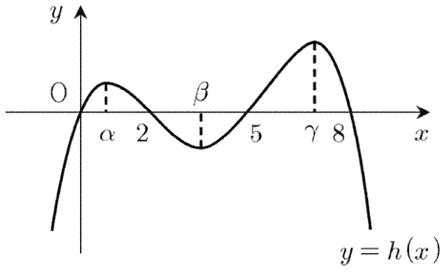
따라서 함수 $h(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)

함수 $h(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\gamma$에서 극댓값을 갖고, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

(단, $\alpha<\beta<\gamma$)



$h(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로

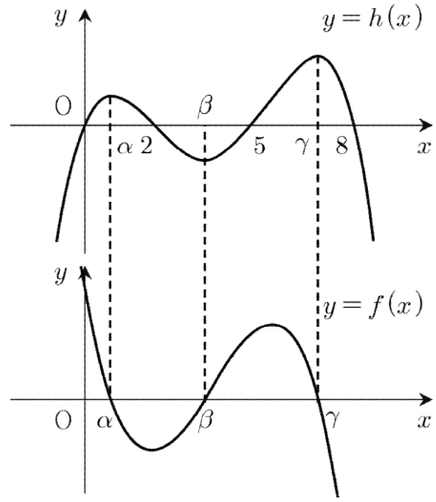
방정식 $f(x)=0$의 해집합은

$\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$

따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

▸ ㄴ. (참)

두 함수 $h(x)$, $f(x)(=h'(x))$의 그래프는 다음과 같다.



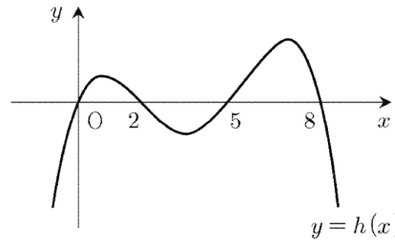
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 감소하므로

$\therefore\ f'(0)<0$

▸ ㄷ. (참)

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$\int_m^{m+2} f(x)dx=h(m+2)-h(m)$



위의 그림에서

$m=1$일 때, $h(3)-h(1)<0$

$m=2$일 때, $h(4)-h(2)<0$

$m=3$일 때, $h(5)-h(3)>0$

$m=4$일 때, $h(6)-h(4)>0$

$m=5$일 때, $h(7)-h(5)>0$

$m=6$일 때, $h(8)-h(6)<0$

⋮

주어진 부등식을 만족시키는 자연수 m은 3, 4, 5 뿐이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

F030 | 답 ④

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x>0)\end{cases}$ ($g'(x)$는 이차함수)

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0-} g'(x)=\lim_{x\to 0+} g'(x)$, 즉 $-f(0)=f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

▸ ㄴ. (거짓)

함수 $g'(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

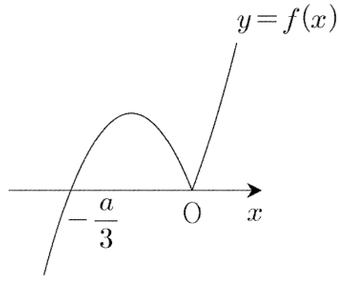
$g'(x)=3x^2+ax$ ($\because g'(0)=0$(ㄱ))

함수 $f(x)$의 방정식은

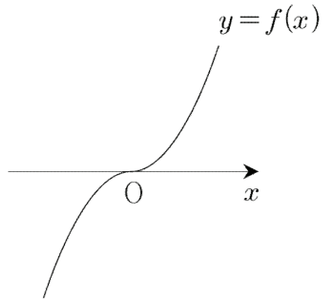
$f(x)=\begin{cases}-3x^2-ax & (x<0)\\ 3x^2+ax & (x\geq 0)\end{cases}$

함수 $f(x)$의 그래프는

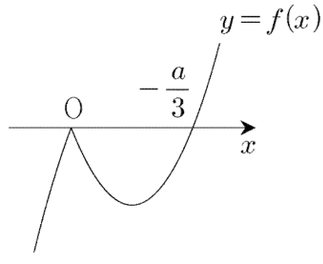
• $a>0$인 경우 (극댓값을 갖는다.)



• $a=0$인 경우 (극값을 갖지 않는다.)



• $a<0$인 경우 (극댓값을 갖는다.)



따라서 주어진 명제는 거짓이다.

▸ ㄷ. (참)

$2<f(1)=3+a<4$, 즉, $-1<a<1$

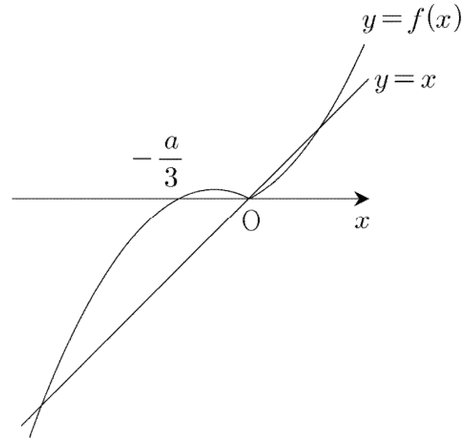
이므로 다음이 성립한다.

$-1<$(곡선 $y=f(x)$ 위의 원점 O에서의 우미분계수의 크기)<1,

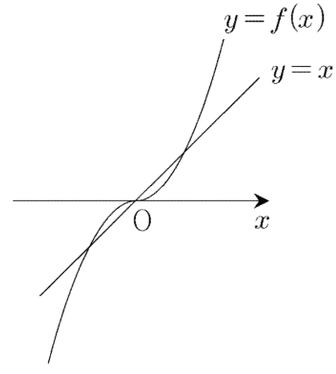
$-1<$(곡선 $y=f(x)$ 위의 원점 O에서의 좌미분계수의 크기)<1

방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 각각

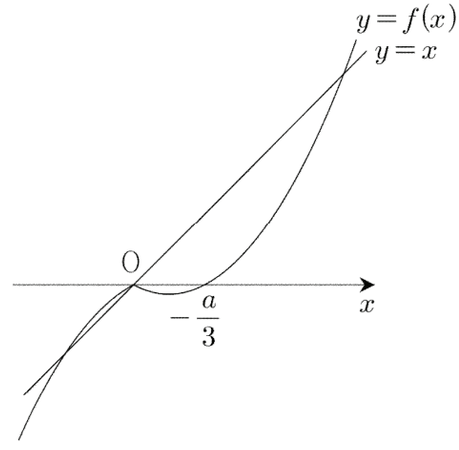
• $a>0$의 경우 (3개)



• $a=0$의 경우 (3개)



• $a<0$의 경우 (3개)



따라서 주어진 명제는 참이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

F031 | 답 ①

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

$f(x)=x$으로 두면

$(\text{좌변})=\int_0^3 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$

$(\text{우변})=3\int_0^1 x\,dx=3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$

$\int_0^3 f(x)dx\neq 3\int_0^1 f(x)dx$

▸ ㄴ. (참)

정적분의 성질에 의하여

$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$

양변에서 $\int_1^2 f(x)dx$을 빼면

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$

그런데 $\int_2^1 f(x)dx=-\int_1^2 f(x)dx$이므로

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^1 f(x)dx$

따라서 주어진 등식은 항상 성립한다.

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

$f(x)=x$으로 두면

$(\text{좌변})=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

$(\text{우변})=\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2=\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right\}^2=\frac{1}{4}$

$\int_0^1 \{f(x)\}^2dx\neq\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ①

F032 | 답 ①

[풀이]

구간 $[0,\ 1]$에서 $x^2(x-1)\le 0$

구간 $[1,\ 2]$에서 $x^2(x-1)\ge 0$

정적분의 성질에 의하여

$\int_0^2 |x^2(x-1)|\,dx$

$=\int_0^1 (x^2-x^3)dx+\int_1^2 (x^3-x^2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$

$=\frac{1}{12}+\frac{17}{12}=\frac{3}{2}$

답 ①

F033 | 답 17

[풀이]

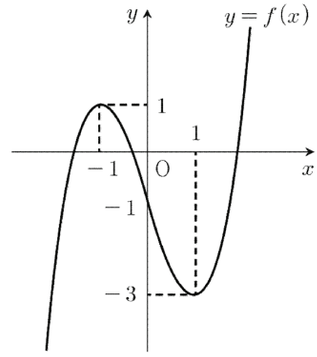
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

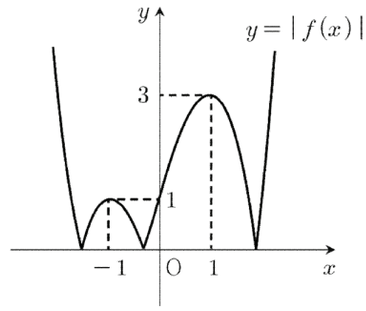
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

함수 $f(x)$의 그래프는



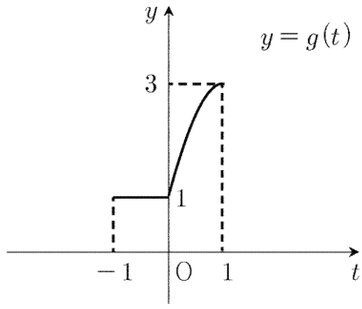
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는



구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $g(t)$의 방정식은

$g(t)=\begin{cases}1 & (-1\le t\le 0)\\ -t^3+3t+1 & (0<t\le 1)\end{cases}$

구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $g(t)$의 그래프는



정적분의 성질에 의하여

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \int_{-1}^{0} dt + \int_{0}^{1} (-t^3+3t+1)dt$$

$$= [t]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+t\right]_{0}^{1} = \frac{13}{4}$$

$\therefore\ p+q=17$

답 17

F034 | 답 ③

[풀이]

두 조건 (나), (다)에서 주어진 두 등식을 다시 쓰면

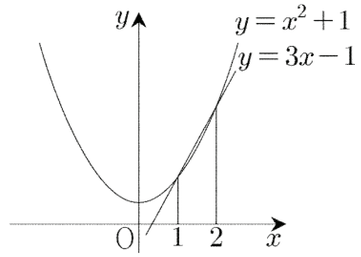
$f(x)+g(x)=(x^2+1)+(3x-1)$, (두 수의 합)

$f(x)\times g(x)=(x^2+1)\times(3x-1)$ (두 수의 곱)

이므로

$\{f(x),\ g(x)\}=\{x^2+1,\ 3x-1\}$

곡선 $y=x^2+1$과 직선 $y=3x-1$의 두 교점의 x좌표는 1, 2이므로, 이 두 함수의 그래프는 다음과 같다.

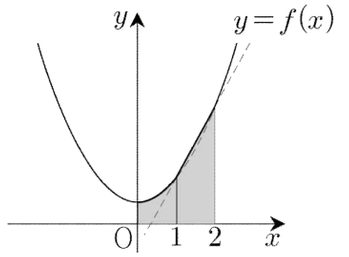


조건 (가)에 의하여

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\le 1,\ x\ge 2) \\ 3x-1 & (1<x<2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는



정적분의 성질에 의하여

$$\therefore\ \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1} + \frac{2+5}{2}\times 1$$

$$= \frac{4}{3}+\frac{7}{2} = \frac{29}{6}$$

답 ③

[참고]

곱셈공식이나 이차방정식의 근과 계수와의 관계, 이차방정식의 근의 공식을 이용해도

$\{f(x),\ g(x)\}=\{x^2+1,\ 3x-1\}$

임을 보일 수 있다. 하지만 계산 분량이 늘어나므로 이 문제에서는 권장되는 풀이가 아니다.

F035 | 답 ②

[풀이]

정적분의 성질과 정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_{-1}^{1} (x^3+3x^2+5)dx = 2\int_{0}^{1} (3x^2+5)dx$$

$$= 2[x^3+5x]_{0}^{1} = 12$$

답 ②

F036 | 답 25

[풀이]

정적분의 성질과 정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_{-a}^{a} (3x^2+2x)dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} 3x^2dx = 2[x^3]_{0}^{a} = 2a^3 = \frac{1}{4}$$

$a^3=\frac{1}{8}$ 풀면 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 50a=25$

답 25

F037 | 답 ④

[풀이]

정적분의 성질과 정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}dx=2[x]_0^1=2$$

주어진 등식에 대입하면

$$\frac{8}{3}=k\times 2^2$$

$$\therefore\ k=\frac{2}{3}$$

답 ④

F038 | 답 ①

[풀이1]

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다항함수이므로 함수 $h(x)$는 다항함수이다.

모든 실수 x에 대하여

$h(-x)=f(-x)g(-x)$

$=-f(x)g(x)=-h(x)$ …(*)

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n-3}x^{2n-3}+\cdots+a_1x$

(단, $a_{2n-1}\neq 0$)

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+(2n-3)a_{2n-3}x^{2n-4}$

$+\cdots+3a_3x^2+a_1$

함수 $xh'(x)$의 방정식은

$xh'(x)=(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-1}+(2n-3)a_{2n-3}x^{2n-3}$

$+\cdots+3a_3x^3+a_1x$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx$$

$$=\int_{-3}^{3}xh'(x)dx+5\int_{-3}^{3}h'(x)dx$$

$$=\left[\frac{2n-1}{2n}a_{2n-1}x^{2n}+\cdots+\frac{1}{2}a_1x^2\right]_{-3}^{3}+5[h(x)]_{-3}^{3}$$

$$=\frac{2n-1}{2n}a_{2n-1}3^{2n}+\cdots+\frac{1}{2}a_13^2$$

$$-\frac{2n-1}{2n}a_{2n-1}(-3)^{2n}-\cdots-\frac{1}{2}a_1(-3)^2$$

$+5h(3)-5h(-3)$

$=0+10h(3)(\because$ (*))

$=10$

풀면

$\therefore\ h(3)=1$

답 ①

[풀이2] ★

모든 실수 x에 대하여

$h(-x)=f(-x)g(-x)$

$=-f(x)g(x)=-h(x)$ …㉠

함수 $h(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n-3}x^{2n-3}+\cdots+a_1x$

(단, $a_{2n-1}\neq 0$)

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+(2n-3)a_{2n-3}x^{2n-4}$

$+\cdots+3a_3x^2+a_1$

모든 실수 x에 대하여

$h'(-x)=h'(x)$

함수 $h'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다. …㉡

모든 실수 x에 대하여

$-xh'(-x)=-xh'(x)$

함수 $xh'(x)$는 원점에 대하여 대칭이다. …㉢

정적분의 성질에 의하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx$$

$$=\int_{-3}^{3}xh'(x)dx+5\int_{-3}^{3}h'(x)dx$$

$$=0+10\int_{0}^{3}h'(x)dx(\because$$ ㉡, ㉢)

$$=10[h(x)]_0^3=10h(3)-10h(0)$$

$=10h(3)-0$

($\because$ ㉠에 $x=0$을 대입하면 $h(0)=-h(0)$에서 $h(0)=0$)

$=10$

풀면

$\therefore\ h(3)=1$

답 ①

[풀이3] 시험장

$f(x)$: 원점대칭 (기함수)

$g(x)$: y축대칭 (우함수)

$h(x)=f(x)g(x)$: 기함수 (기×우=기)

$h'(x)$: 우함수 ((기)′=우)

$xh'(x)$: 기함수 (기×우=기)

$\therefore \int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx$

$=\int_{-3}^{3}\underbrace{xh'(x)}_{\text{기함수}}dx+5\int_{-3}^{3}\underbrace{h'(x)}_{\text{우함수}}dx$

$=0+10\int_{0}^{3}h'(x)dx$

$=10[h(x)]_0^3$

$=10h(3)-10h(0)$

($\because h(x)$는 기함수이므로 $h(0)=0$이다.)

$=10h(3)=10,\ h(3)=1$

답 ①

F039 | 답 ①

[풀이1]

정적분의 성질에 의하여

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

문제에서 주어진 등식에서

$\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx$

정리하면

$\int_{-1}^{0}f(x)dx=0$

문제에서 주어진 등식에서 마찬가지의 방법으로

$\int_{0}^{1}f(x)dx=0$

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

주어진 조건에서

$f(0)=c=-1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^2+bx-1$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{-1}^{0}=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-1=0$

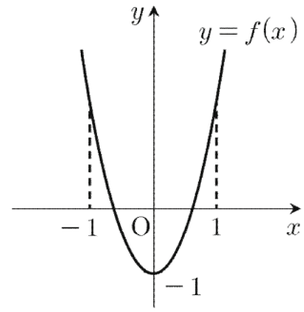
$\int_{0}^{1}f(x)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{0}^{1}=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-1=0$

연립일차방정식을 풀면

$a=3,\ b=0$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=3x^2-1$



$\therefore\ f(2)=11$

답 ①

[풀이2] 시험장

정적분의 성질에서

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

$\int_{-1}^{0}f(x)dx=p,\ \int_{0}^{1}f(x)dx=q$로 두고

문제에서 주어진 등식을 다시 쓰면

$p+q=q=p$ 풀면 $p+q=p=q=0$

$f(0)=-1<0$이므로

구간 $[-1,\ 0]$에서 $f(x)\geq 0$ 일 수 없다.

구간 $[-1,\ 0]$에서 $f(x)\leq 0$이면 $p<0$이므로 모순이다.

귀류법에 의하여 구간 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$는 x축과 만난다. 이때, 교점의 x좌표를 α라고 하면 구간 $(-1,\ \alpha)$에서 $f(x)\geq 0$이고,

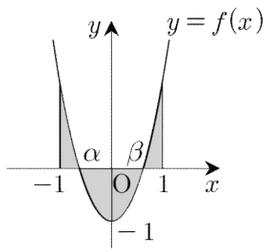
구간 $(\alpha,\ 0)$에서 $f(x)\leq 0$이다.

마찬가지의 방법으로 구간 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=f(x)$는 x축과 만난다. 이때, 교점의 x좌표를 β라고 하면 구간 $(0,\ \beta)$에서 $f(x)\leq 0$이고, 구간 $(\beta,\ 1)$에서 $f(x)\geq 0$이다.

그런데 $p+q=0$이므로 이차함수 $f(x)$의 대칭축은 y축이 되어야 함을 알 수 있다.

(✪ 필요충분조건 '이차함수 $f(x)$의 대칭축이 y축이다. $\Leftrightarrow$ $p+q=0$이다.' 에서 $\Rightarrow$ 방향을 풀이에 적용한 것이다. $\Leftarrow$ 방향은 위의 [풀이1]처럼 대수적으로 증명해야 한다. 이 문제의 경우 시험장에서 $\Leftarrow$ 방향의 증명까지 할 필요는 없다.)

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(단, $\beta=-\alpha$)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=kx^2-1$(단, $k>0$)

함수 $f(x)$의 방정식을 유도할 때, $p+q=0$을 이용하였으므로 상수 k의 값을 구할 때에는 $p=0$ 또는 $q=0$을 이용해야 한다.

$$q=\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{k}{3}x^3-x\right]_0^1=\frac{k}{3}-1=0$$

$\therefore\ k=3$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=3x^2-1$

$\therefore\ f(2)=11$

답 ①

[풀이3] 교육과정 외 (이과생을 위한 설명) 시험장

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하자.

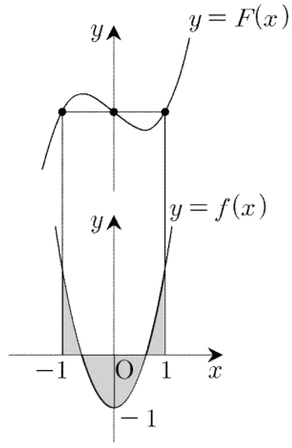
문제에서 주어진 등식을 다시 쓰면

$F(1)-F(-1)=F(1)-F(0)=F(0)-F(-1)$

정리하면

$$F(-1)=F(0)=F(1),\ \frac{F(1)+F(-1)}{2}=F(0)$$

위를 만족시키도록 함수 $F(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다. 그리고 그 아래에 함수 $f(x)$의 그래프도 그리자.



위의 그림처럼 곡선 $y=F(x)$는 점 $(0,\ F(0))$에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=f(x)$는 y축에 대칭이다.

이제 함수 $F(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$F(x)=ax(x+1)(x-1)-F(0)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3ax^2-a$

그런데 $f(0)=-a=-1$, 즉 $a=1$이므로

$f(x)=3x^2-1$

$\therefore\ f(2)=11$

답 ①

F040 | 답 ④

[풀이]

부정적분의 정의에 의하여

$$f(x)=\int f'(x)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$$

(단, C는 적분상수)

주어진 조건에서 $f(0)=0$이므로

$f(0)=C=0$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$$

$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

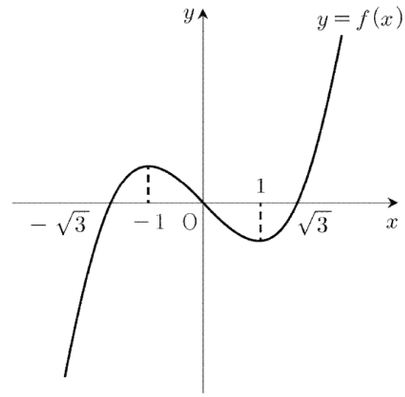
$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

이므로 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

삼차함수 $f(x)$의 그래프는



구하는 넓이를 S라고 하자.

곡선과 x축 사이의 넓이를 구하는 정적분의 공식에 의하여

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}|f(x)|dx$$

$$=2\int_{-\sqrt{3}}^{0}f(x)dx\ (\because f(x)\text{는 원점대칭})$$

$$=2\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-\sqrt{3}}^{0}=\frac{3}{2}$$

답 ④

F041 | 답 45

[풀이1] ★

조건 (가), (나)에서 정적분의 성질에 의하여

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2023 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2023 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통 〉

- 공통 12 – 피적분함수에 '구간에 따라 정의된 함수' 가 들어갈 수 있다.
- 공통 13 - 정수이면 되니, 부호는 무시한다.
- 공통 14 - 1994학년도 공통 11번 재출제. 초기 수능 기출은 반드시 공부해야 한다.
- 공통 15 - 수열+ '나머지가 같은 수' 에 대한 전형적인 문제. 마디가 있을 것이라는 생각을 풀이 전에 할 수 있어야 한다.
- 공통 21 – 의외로 식의 변형에 대한 문제. |A|=B를 어떻게 처리할 것인가?
- 공통 22 – 평균변화율 = 순간변화율에서 계산보다는 그래프 해석이 우선할 것임을 알아야 한다.
  수학2에서도 삼차함수의 변곡점에 대한 성질을 알아야 한다.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 30 - 중복조합의 수를 적용하면 오히려 더 어렵기 때문에 표를 그려서 다 쓰는 편이 낫다.
  (직선을 이용한 빠른 풀이도 가능하다. 이미 평가원에서 출제된 적이 있음.)

〈 미적분 〉

- 미적분 28 - 평면도형 문제는 각과 길이를 다 쓰면 자연스럽게 해결된다.
- 미적분 30 - 이와 유사한 문제는 평가원, 교사경에서 자주 출제된 바 있음.

〈 기하 〉

- 기하 28 - 쌍곡선의 정의가 아닌 쌍곡선의 방정식을 가지고 문제를 해결한다. (시행착오 필요)
- 기하 29 - 삼각 좌표계에 대한 문제. 단, 성질까지 적용해서 푸는 문제는 아님.
- 기하 30 – $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$이 떠올라야 하고, 이 두 숫자가 드러나게 단면을 잘라야 한다.
  한동안 정사면체의 단면에 대한 문제가 출제되지 않았으므로 심하게 어려운 문제는 아닐 것임을 미리 알아야 한다.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

구성

▸ **‘이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 수학Ⅰ+수학Ⅱ’** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 876개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2022년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2023학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2023학년도 (학년도 기준)

▸ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▸ 문항 정렬은 유형별, 난이도순을 따랐습니다.
유형별 문항 구성은 출제 의도를 뚜렷하게 보여줄 것이며,
난이도순은 학습의 효율성을 높일 것입니다.

▸ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념'과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론'과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정'을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목 차

수학 I

1. 지수함수와 로그함수 8
2. 삼각함수 72
3. 수열 116

수학 II

1. 함수의 극한과 연속 194
2. 미분 215
3. 적분 266

단원별 알파벳구성

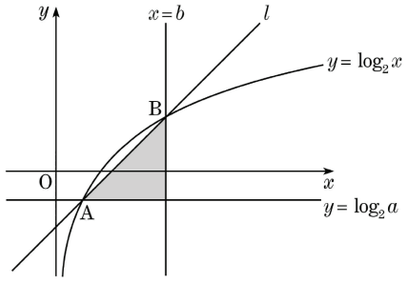
과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 I	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 II	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A. 로그함수: 직선

A110

○○
(2013(3)고3-A형14)

그림과 같이 기울기가 1인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 x$와 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a,\ \log_2 a)$, $\mathrm{B}(b,\ \log_2 b)$에서 만난다. 직선 l과 두 직선 $x=b$, $y=\log_2 a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 2일 때, $a+b$의 값은? (단, $0<a<b$이다.) [4점]



① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$

④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

A111

○○
(2018(7)고3-가형15)

점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x+1}+1$과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

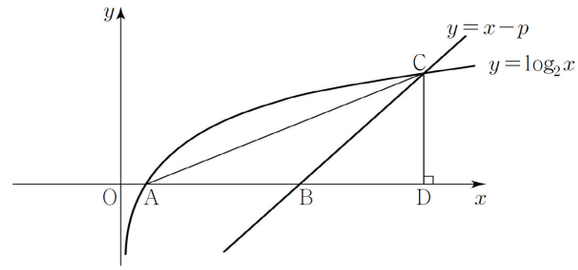
① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4

④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

A112

○○
(2013(9)고2-A형26)

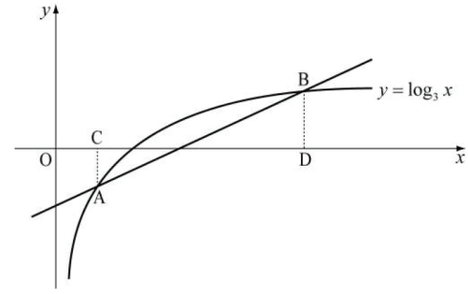
그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=x-p$가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=x-p$가 제1사분면에서 만나는 점을 C라 하고 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\triangle$BDC의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, $\triangle$ABC의 넓이를 구하시오. (단, $p>1$) [4점]



A113

○○
(2011(9)고2-가형25/나형25)

그림과 같이 곡선 $y=\log_3 x$와 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이 두 점 A, B에서 만나고 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{OC}}:\overline{\mathrm{OD}}=1:9$일 때, 선분 CD의 길이를 구하시오. [3점]

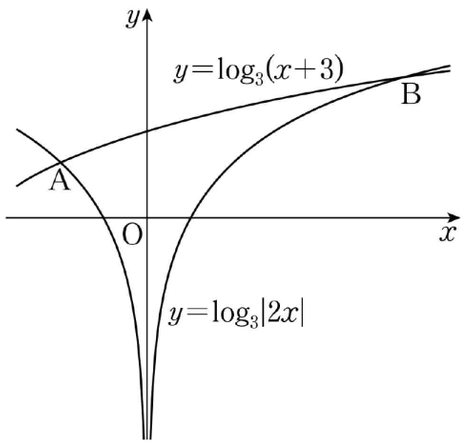


A114

○○

(2020(3)고3-가형14)

함수 $y=\log_3|2x|$의 그래프와 함수 $y=\log_3(x+3)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$

④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

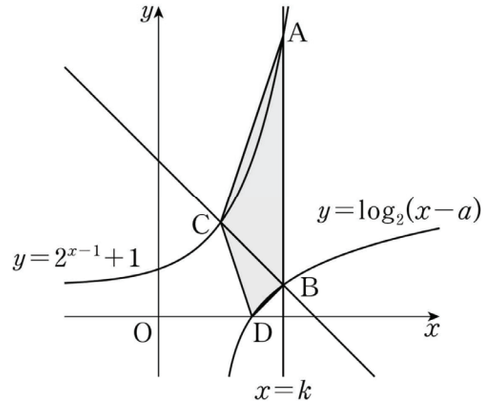
A115

○○

(2022(3)고3-확률과통계11/미적분11/기하11)

그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0<a<k$) [4점]



① 14 ② 13 ③ 12

④ 11 ⑤ 10

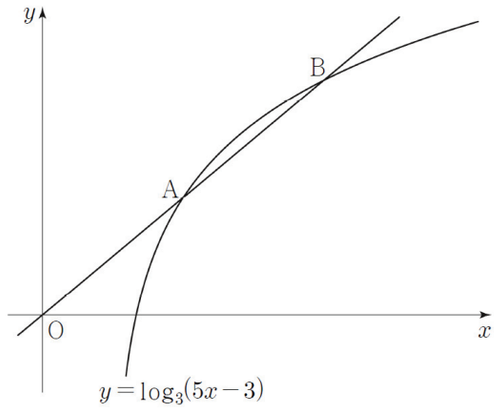
A116

○○

(2019(9)고2-가형27)

곡선 $y=\log_3(5x-3)$ 위의 서로 다른 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있다.
(나) $\overline{OA}:\overline{OB}=1:2$



직선 AB의 기울기가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

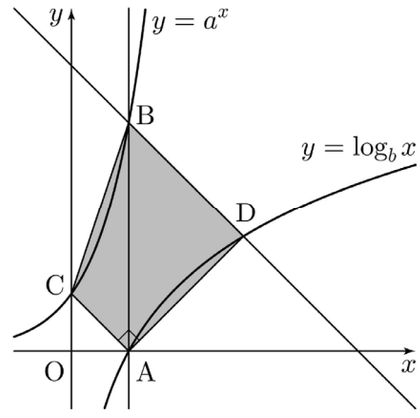
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

A117

○○○

(2020사관(1차)-가형16)

그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 점 A$(1,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 B라 하고, 점 C$(0,\ 1)$에 대하여 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AC}\perp\overline{AD}$이고, 사각형 ADBC의 넓이가 6일 때, $a\times b$의 값은? [4점]



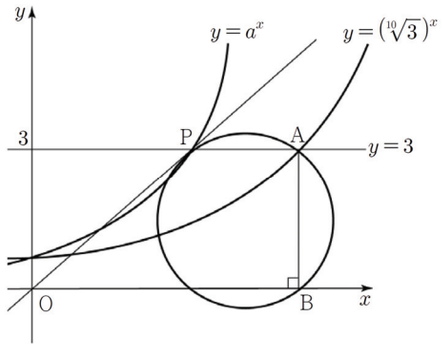
① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 8

④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

A118

○○○
(2012(9)고2-A형21)

그림과 같이 지수함수 $y=(\sqrt[10]{3})^x$의 그래프가 직선 $y=3$과 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 두 점 A, B를 지나는 원이 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=3$의 교점 P에서 직선 OP에 접하도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? (단, $a>\sqrt[10]{3}$) [4점]

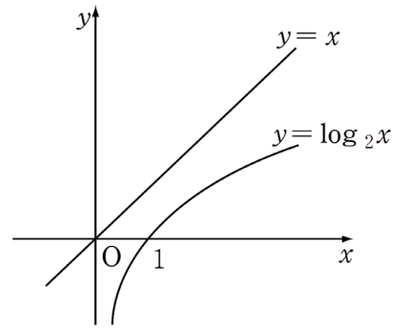


① $3^{\frac{8}{9}}$ ② $3^{\frac{10}{9}}$ ③ $3^{\frac{13}{9}}$
④ $3^{\frac{16}{9}}$ ⑤ $3^{\frac{20}{9}}$

A119

○○○
(2005(4)고3-가형9)

두 함수 $y=x$와 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



ㄱ. $\dfrac{\log_2 x}{x}<1$

ㄴ. $\dfrac{\log_2 x}{x-1}<1\ (x\neq 1)$

ㄷ. $\dfrac{\log_2 (x+1)}{x}<1\ (x\neq 0)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A120

○○○
(2012사관(1차)-문과23)

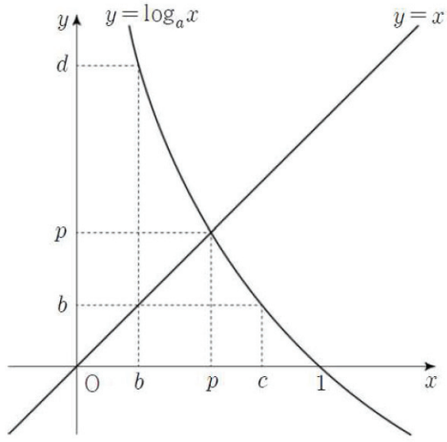
$0<a<b<1$일 때, 직선 $y=1$이 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_b x$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고 직선 $y=-1$이 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_b x$의 그래프와 만나는 점을 R, S라 하자. 네 직선 PS, PR, QS, QR의 기울기를 각각 α, β, γ, δ라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [4점]

① $\delta<\alpha<\beta<\gamma$ ② $\gamma<\alpha<\delta<\beta$
③ $\gamma<\alpha<\beta<\delta$ ④ $\gamma<\alpha=\delta<\beta$
⑤ $\alpha=\delta<\beta<\gamma$

A121

○○○ 교육청 기출

그림과 같이 $0<a<1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$가 두 점 $(b,\ d)$, $(c,\ b)$를 지나고, 직선 $y=x$와 점 $(p,\ p)$에서 만날 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0<b<p<c<1$) [4점]



ㄱ. $p=\dfrac{1}{2}$이면 $a=\dfrac{1}{4}$이다.

ㄴ. $a^{b+d}=bc$

ㄷ. $\dfrac{p-b}{p-a^c}<\dfrac{c-b}{c-a^c}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

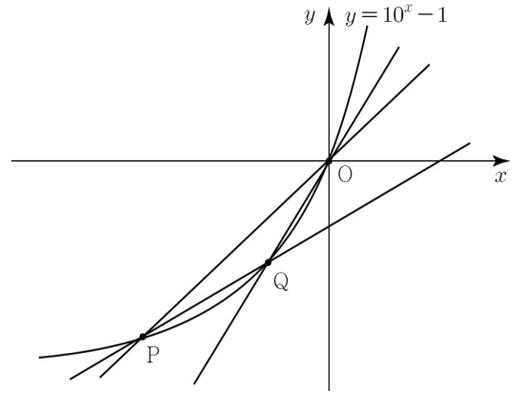
A122

○○○ (2013(9)고2-A형21)

$-1<a<b<0$인 두 실수 a, b에 대하여 함수 $y=10^x-1$의 그래프 위에 두 점 $\mathrm{P}(\log(a+1),\ a)$, $\mathrm{Q}(\log(b+1),\ b)$가 있다. 세 직선 PO, QO, PQ를 이용하여 세 실수

$$A=(a+1)^{\frac{1}{a}},\ B=(b+1)^{\frac{1}{b}},\ C=\left(\frac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

의 대소를 비교할 때, A, B, C의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

A123

○○○ (2013(9)고2-B형30)

2보다 큰 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 m 중 최솟값을 $f(n)$이라 하자.

(가) $m \geq 2$

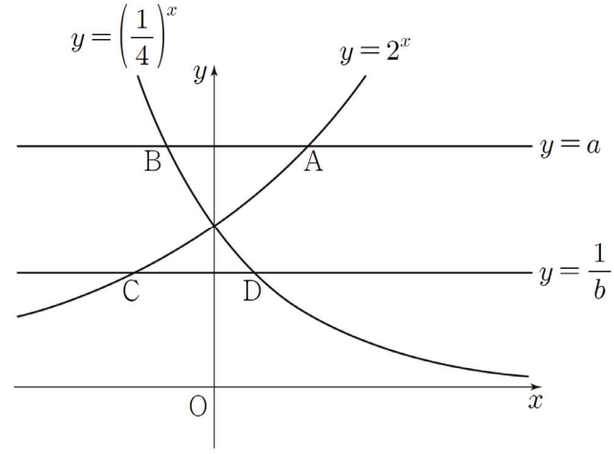
(나) 두 점 $(m,\ \log_n m)$, $(m+1,\ \log_n (m+1))$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$보다 작다.

이때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

A124

●●● (2021(11)고2-공통20)

그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여 직선 $y=a$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=\frac{1}{b}$이 두 곡선 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $a=b$이면 $\overline{AB}=\overline{CD}$이다.

ㄴ. 직선 AC의 기울기를 m_1,
직선 BD의 기울기를 m_2라 하면 $2m_1+m_2=0$이다.

ㄷ. 직선 AC와 직선 BD가 서로 수직이고 직선 AD의 기울기가 $2\sqrt{2}$이면 사각형 ABCD는 마름모이다.

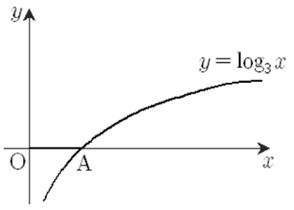
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A. 로그함수: 평행이동, 대칭이동

A125 ○○

(2006(4)고3-가형6)

함수 $y=\log_3 x$의 그래프가 x축과 만나는 점을 A라 하자. $y=\log_3(x+a)$의 그래프가 선분 OA를 x축의 양의 방향으로 3만큼, y축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동한 선분과 만날 때, a의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, O은 원점이다.) [3점]



① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

A126 ○○

(2006(6)고2-가형18)

집합 $A=\{(x,\ y)|y=\log_3 x,\ x$는 양수$\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

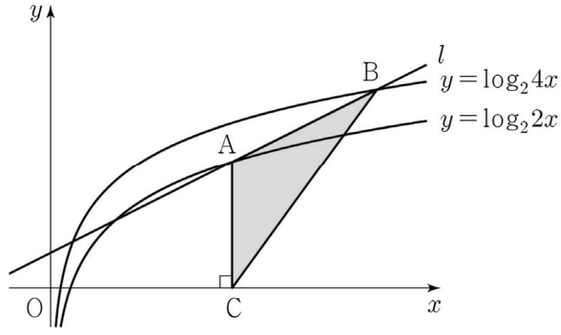
ㄱ. $(a,\ b)\in A$이면 $(3a,\ b+1)\in A$이다.
ㄴ. $\left(\frac{a}{3},\ b\right)\in A$이면 $(a,\ b-1)\in A$이다.
ㄷ. $(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in A$이면 $(ac,\ b+d)\in A$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A127 ○○

(2022(7)고3-확률과통계11/미적분11/기하11)

기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 2x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 A라 하고, 직선 l이 곡선 $y=\log_2 4x$와 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 B라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{5}$일 때, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 C에 대하여 삼각형 ACB의 넓이는? [4점]

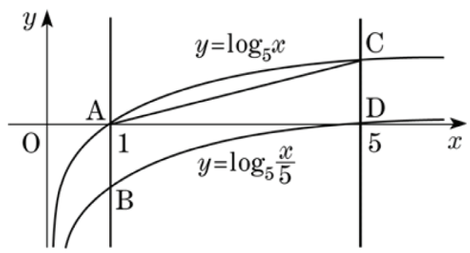


① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$
④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6

A128 ○○

(2012(6)고2-B형16)

그림과 같이 두 곡선 $y=\log_5 x$, $y=\log_5 \frac{x}{5}$가 직선 $x=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 또, 두 곡선이 직선 $x=5$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 곡선 $y=\log_5 x$와 두 선분 AD, DC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S, 곡선 $y=\log_5 \frac{x}{5}$와 세 선분 BA, AC, CD로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 할 때 $S+T$의 값은? [4점]



① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

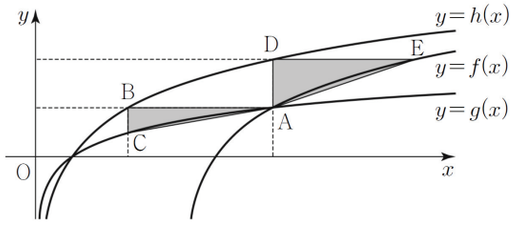
A129

○○○ (2013(11)고2-A형19)

그림과 같이 두 함수 $f(x)=\log_2(x-4)$, $g(x)=\log_4 x$의 그래프가 만나는 점을 A, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $h(x)=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자.

또한, 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는 점을 D, 점 D를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 E라 하자.

두 삼각형 ABC, AED의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $\dfrac{S_1}{S_2}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{5}{12}$ ③ $\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{7}{12}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

A130

○○ (2023사관(1차)-확률과통계9/미적분9/기하9)

곡선 $y=\left|\log_2(-x)\right|$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=\left|\log_2(-x+8)\right|$이 세 점에서 만나고 세 교점의 x좌표의 합이 18일 때, k의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

A131

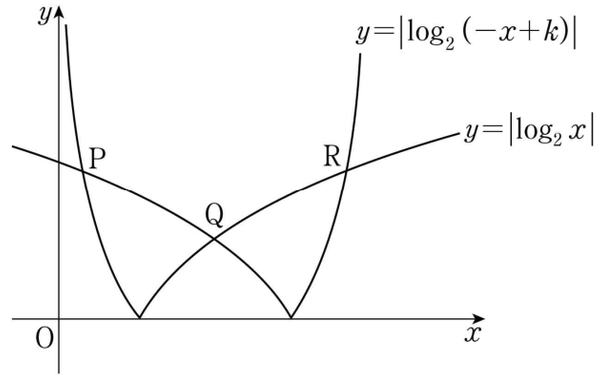
○○○ (2021(10)고3-확률과통계8/미적분8/기하8)

2보다 큰 상수 k에 대하여

두 곡선 $y=\left|\log_2(-x+k)\right|$, $y=\left|\log_2 x\right|$가 만나는 세 점 P, Q, R의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하자.

$x_3-x_1=2\sqrt{3}$일 때, x_1+x_3의 값은?

(단, $x_1<x_2<x_3$) [3점]



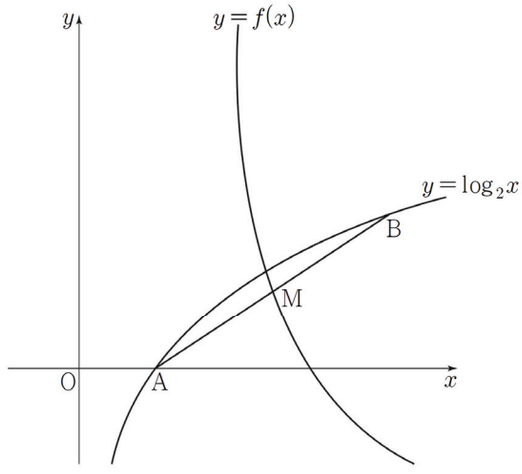
① $\dfrac{7}{2}$ ② $\dfrac{15}{4}$ ③ 4

④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

A132

○○
(2014(11)고2-B형10)

좌표평면에서 곡선 $y=\log_2 x$를 x축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축 방향으로 2만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 점 $A(1,\ 0)$과 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 B에 대하여 선분 AB의 중점 M이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이 되도록 하는 점 B의 x좌표는? [3점]



① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{15}{4}$

④ 4 ⑤ $\frac{17}{4}$

A133

○○
(2022(10)고3-확률과통계10/미적분10/기하10)

$a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선

$y=-\log_2(-x)$, $y=\log_2(x+2a)$

가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있을 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2

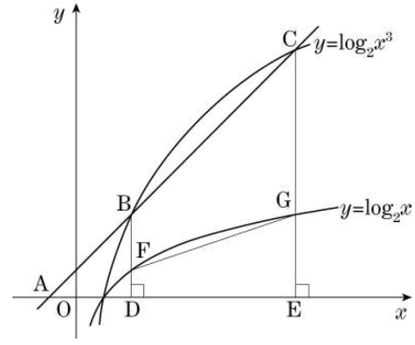
④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

A. 로그함수: 비율관계

A134

○○○
(2012(3)고3-가형29/나형29)

그림과 같이 x축 위의 한 점 A를 지나는 직선이 곡선 $y=\log_2 x^3$과 서로 다른 두 점 B, C에서 만나고 있다. 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 두 선분 BD, CE가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 F, G라 하자. $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$이고, 삼각형 ADB의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 사각형 BFGC의 넓이를 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 0보다 작다.) [4점]



A135

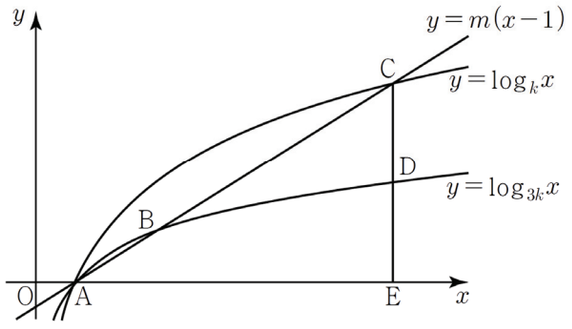
●●● (2020(7)고3–가형27)

$k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$가 만나는 점을 A라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=m(x-1)$이 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{3k}x$, x축과 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다.

(나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

$\frac{k}{m}$의 값을 구하시오. [4점]



A. 로그함수: 위치 관계

A136

○○ (2007(7)고3–가형10)

함수 $f(x)=\log_a x$, $g(x)=\log_b x$가 $0<x<1$에서 $f(x)>g(x)$이 성립하기 위한 조건으로 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

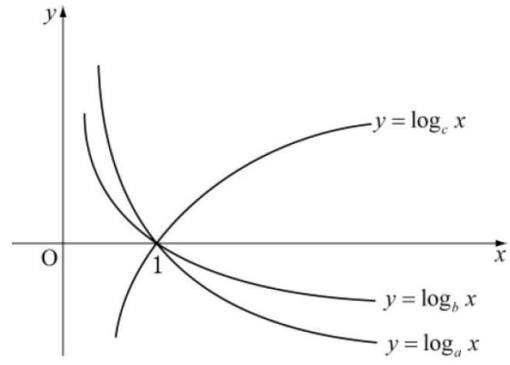
ㄱ. $1<b<a$
ㄴ. $0<a<b<1$
ㄷ. $0<a<1<b$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A137

○○ (2011(9)고2–가형9)

그림은 세 양수 a, b, c를 밑으로 하는 로그함수의 그래프이다.



$a^{x_1}=b^{x_2}=c^{x_3}>1$일 때, x_1, x_2, x_3의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]

① $x_1>x_2>x_3$ ② $x_2>x_1>x_3$ ③ $x_2>x_3>x_1$
④ $x_3>x_1>x_2$ ⑤ $x_3>x_2>x_1$

A138

○○○
(2010(11)고2–가형6)

$\left(\frac{1}{3}\right)^a=\log_2 a$, $\left(\frac{1}{2}\right)^b=\log_3 b$, $\left(\frac{1}{3}\right)^c=\log_3 c$일 때, 양수 a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]

① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$
④ $c<a<b$ ⑤ $c<b<a$

A. 로그함수: 교점

A139

○○○
(2020(10)고3–나형21)

두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

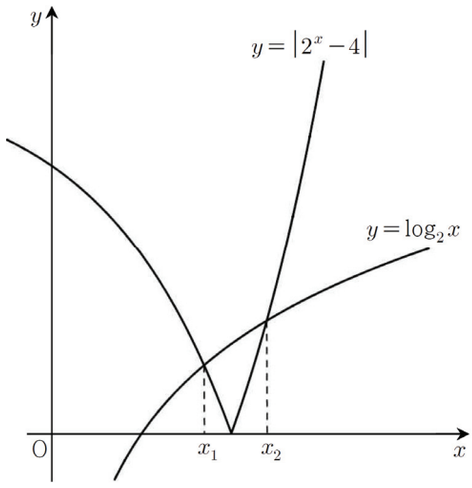
ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$
ㄴ. $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$
ㄷ. $y_1-y_2<\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A140

●●● (2021사관(1차)-나형21)

두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, $x_2(x_1<x_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A141

●●● (2022(5)고2-공통20)

$1<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프가 만나는 점을 $\mathrm{A}(p,\ q)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $pq=1$

ㄴ. $a=2$일 때, $p>\sqrt{2}$이다.

ㄷ. 원점 O와 점 $\mathrm{B}(p+q,\ 0)$에 대하여 삼각형 AOB의 넓이를 $S(p)$라 할 때, $S(p)<\frac{a+1}{2a}$이다.

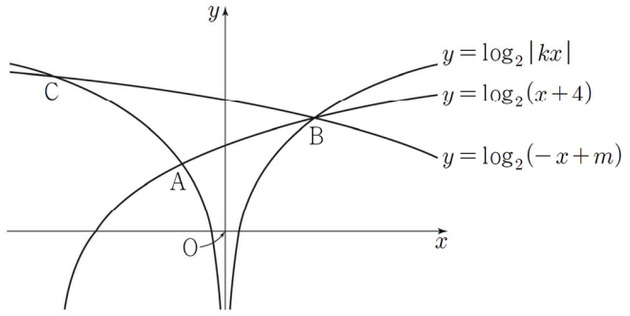
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A142 ●●●

(2021(4)고3–확률과통계15/미적분15/기하15)

그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$이고, m은 실수이다.) [4점]



ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. $x_2^2=x_1x_3$

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

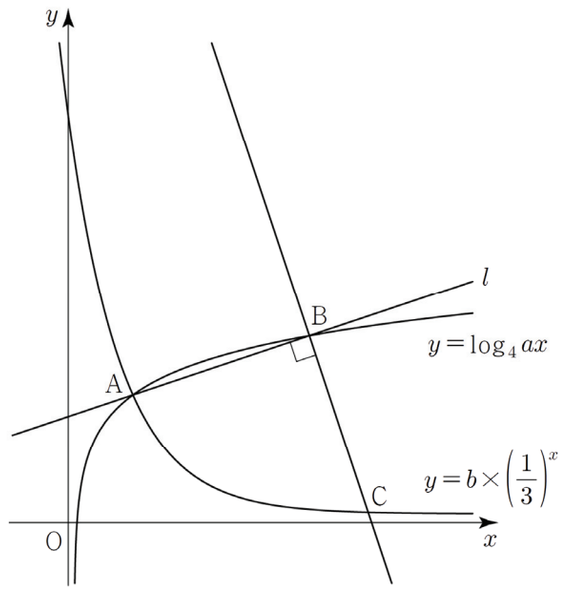
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A143 ●●●

(2021(9)고2–공통20)

그림과 같이 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선 l이 곡선 $y=\log_4 ax$와 서로 다른 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에서 만나고, 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$이 점 A를 지난다. 점 B를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$과 만나는 점을 $C(x_3,\ y_3)$이라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{10}$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 양수이고, $x_1<x_2<x_3$이다.) [4점]



ㄱ. $x_2-x_1=3$

ㄴ. $x_3-x_1=2(y_1-y_3)$

ㄷ. $a^2=4^b$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A110 | 답 ⑤

[풀이]

직선 l의 기울기가 1이므로 어둡게 색칠된 삼각형은 직각이등변삼각형이다. 그런데 이 삼각형의 넓이가 2이므로 빗변의 길이와 높이는 각각 $2\sqrt{2}$, 2이다.

(삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}(b-a)(\log_2 b-\log_2 a)=2$

그런데 $b-a=2$이므로 $\log_2\frac{b}{a}=2$, 즉 $b=4a$

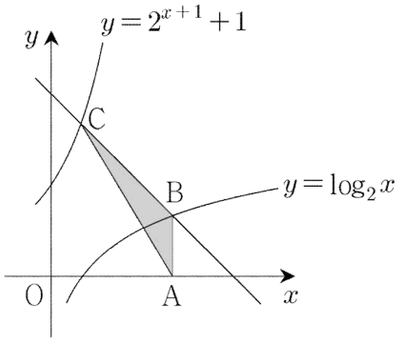
$a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{8}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{10}{3}$

답 ⑤

A111 | 답 ①

[풀이]



A(4, 0)이므로 B(4, 2)이다.

직선 BC의 방정식은

$y=-(x-4)+2$, 즉 $y=-x+6$

점 (1, 5)는 곡선 $y=2^{x+1}+1$와 직선 $y=-x+6$ 위에 동시에 있으므로

C(1, 5)

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$

답 ①

A112 | 답 6

[풀이]

두 점 A, B의 좌표는 각각 A(1, 0), B(p, 0)

(△BDC의 넓이)$=\frac{1}{2}\overline{BD}^2=\frac{9}{2}$

($\because$ △BDC는 직각이등변삼각형)

풀면 $\overline{BD}=3(=\overline{CD})$, C(8, 3), $p=5$

(△ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(5-1)\times 3=6$

답 6

A113 | 답 4

[풀이]

점 C의 좌표를 (k, 0)으로 두면

$\overline{OC}:\overline{OD}=1:9$이므로

점 D의 좌표는 ($9k$, 0)이다.

두 점 A, B의 좌표는 각각

A(k, $\log_3 k$), B($9k$, $\log_3 9k$)

(직선 AB의 기울기)

$=\frac{\log_3 9k-\log_3 k}{9k-k}=\frac{2+\log_3 k-\log_3 k}{8k}$

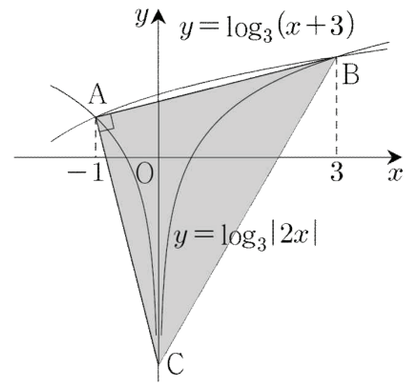
$=\frac{1}{4k}=\frac{1}{2}$에서 $k=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \overline{CD}=8k=4$

답 4

A114 | 답 ⑤

[풀이]



두 곡선 $y=\log_3(x+3)$, $y=\log_3 2x$의 방정식을 연립하면

$\log_3(x+3)=\log_3 2x$, $x+3=2x$, $x=3$

이므로 B(3, $\log_3 6$)

두 곡선 $y=\log_3(x+3)$, $y=\log_3(-2x)$의 방정식을 연립하면

$\log_3(x+3)=\log_3(-2x)$, $x+3=-2x$, $x=-1$

이므로 $A(-1,\ \log_3 2)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{4}$이므로

직선 AC의 방정식은

$y=-4(x+1)+\log_3 2$

이 직선의 y절편은 $-4+\log_3 2$이므로

$C(0,\ -4+\log_3 2)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{17}$

이므로

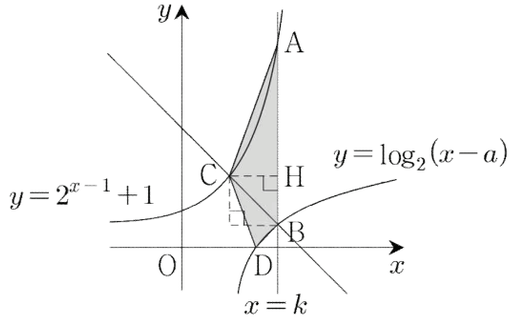
$(\triangle ABC\text{의 넓이})=\frac{17}{2}$

답 ⑤

A115 | 답 ⑤

[풀이]

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



선분 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형의 밑변의 길이는 2이므로

$C(k-2,\ 2^{k-3}+1)$

$\overline{AH}=\overline{AB}-2=6=2^{k-1}+1-(2^{k-3}+1)$

$\frac{3}{8}\times 2^k=6$, $k=4$, $A(4,\ 9)$, $B(4,\ 1)$

점 B는 곡선 $y=\log_2(x-a)$ 위에 있으므로

$1=\log_2(4-a)$, $a=2$, $D(3,\ 0)$

∴ (□ACDB의 넓이)

=(△ACB의 넓이)+(△CDB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times 8\times 2+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

$=8+2=10$

답 ⑤

A116 | 답 11

[풀이]

두 조건 (가), (나)에 의하여

점 A의 y좌표를 α로 두면

점 B의 y좌표는 2α이다.

즉, $A\left(\frac{3^{\alpha}+3}{5},\ \alpha\right)$, $B\left(\frac{3^{2\alpha}+3}{5},\ 2\alpha\right)$

(점 B의 x좌표)=2×(점 A의 x좌표)

즉, $\frac{3^{2\alpha}+3}{5}=2\times\frac{3^{\alpha}+3}{5}$

$3^{2\alpha}-2\cdot 3^{\alpha}-3=0$, $(3^{\alpha}-3)(3^{\alpha}+1)=0$

$3^{\alpha}=3$, $\alpha=1$

$A\left(\frac{6}{5},\ 1\right)$, $B\left(\frac{12}{5},\ 2\right)$

이므로

$(\text{직선 AB의 기울기})=\frac{5}{6}$

∴ $p+q=11$

답 11

A117 | 답 ②

[풀이]

직선 CA의 기울기가 -1이므로 직선 AD의 기울기는 1이다.

이때, 직선 AD가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 45°이므로 $\angle BAD=45^\circ$이다.

$\overline{CA}\,//\,\overline{BD}$에서 $\overline{AD}\perp\overline{DB}$이므로 삼각형 ADB는 직각이등변삼각형이다.

(□ADBC의 넓이)

=(△BCA의 넓이)+(△ADB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times a\times 1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}=6$

$a^2+2a-24=0$, $(a+6)(a-4)=0$

∴ $a=4\ (\because a>0)$

점 D의 좌표가 $(1+2,\ 2)$이므로

$2=\log_b 3$, $b=\sqrt{3}$

∴ $ab=4\sqrt{3}$

답 ②

A118 | 답 ②

[풀이]

두 점 P, B의 좌표를 구하면

$P(\log_a 3,\ 3)$, $B(\log_{\sqrt[10]{3}} 3,\ 0)(B(10,\ 0))$

한편 $\angle PAB = 90^\circ$ 이므로 $\overline{PB}$는 원의 지름이다.

직선 OP가 점 P에서 원에 접하므로

$\overline{OP} \perp \overline{PB}$

(직선 OP의 기울기)×(직선 PB의 기울기)

$= \dfrac{3}{\log_a 3} \times \dfrac{-3}{10-\log_a 3} = -1$

$t = \log_a 3$으로 두고 정리하면

$t^2 - 10t + 9 = 0,\ (t-1)(t-9) = 0$

$t = 1$ 또는 $t = 9$

$\log_a 3 = 1$: $a = 3$

$\log_a 3 = 9$: $a = 3^{\frac{1}{9}}$

따라서 구하는 값은

$3 \times 3^{\frac{1}{9}} = 3^{\frac{10}{9}}$

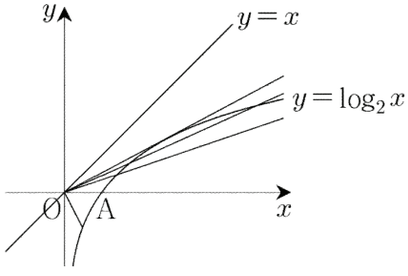
답 ②

A119 | 답 ①

[풀이]

$A(1,\ 0)$, $P(x,\ \log_2 x)$, $Q(x,\ \log_2(x+1))$으로 두자.

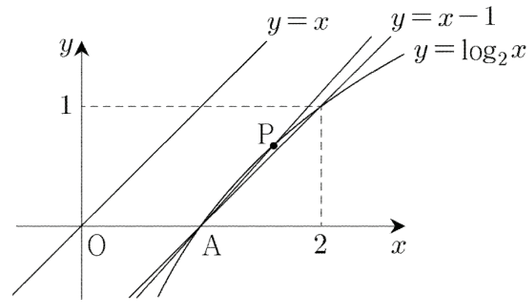
▸ ㄱ. (참)



위의 그림에서 곡선 $y = \log_2 x$ 위의 임의의 점 P에 대하여 직선 OP의 기울기는 1보다 작다.

즉, $\dfrac{\log_2 x - 0}{x - 0} < 1$, $\dfrac{\log_2 x}{x} < 1$

▸ ㄴ. (거짓)



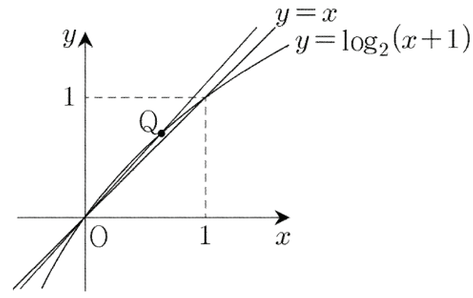
위의 그림처럼 점 P의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작으면 직선 AP의 기울기가 1보다 크다.

즉, $1 < x < 2$이면 $\dfrac{\log_2 x - 0}{x - 1} > 1$, $\dfrac{\log_2 x}{x-1} > 1$

따라서 보기 ㄴ에서 주어진 부등식은 항상 성립하는 것이 아니다.

▸ ㄷ. (거짓)

곡선 $y = \log_2 x$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 곡선 $y = \log_2(x+1)$과 일치한다.



위의 그림처럼 점 Q의 x좌표가 0보다 크고 1보다 작으면 직선 OQ의 기울기가 1보다 크다.

즉, $0 < x < 1$이면 $\dfrac{\log_2(x+1) - 0}{x} > 1$,

$\dfrac{\log_2(x+1)}{x} > 1$

따라서 보기 ㄷ에서 주어진 부등식은 항상 성립하는 것이 아니다.

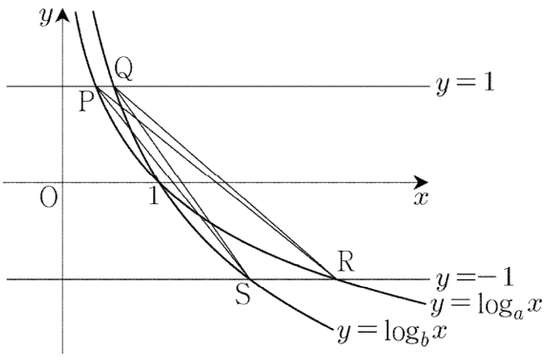
이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

A120 | 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 두 곡선을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



위의 그림에서

$\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$, $\gamma < \alpha$, $\delta < \beta$

임을 확인할 수 있다.

따라서 부등식

$\gamma < \alpha < \beta$, $\gamma < \delta < \beta$

이 성립한다.

이제 α, δ의 대소 관계를 밝히자.

네 점 P, Q, R, S의 좌표는 각각

$(a,\ 1)$, $(b,\ 1)$, $\left(\frac{1}{a},\ -1\right)$, $\left(\frac{1}{b},\ -1\right)$

위의 그림에서

$$\alpha = (\text{직선 PS의 기울기}) = \frac{-2}{\frac{1}{b}-a} = \frac{-2b}{1-ab}$$

$$\delta = (\text{직선 QR의 기울기}) = \frac{-2}{\frac{1}{a}-b} = \frac{-2a}{1-ab}$$

$$\alpha - \delta = \frac{2(a-b)}{1-ab} < 0 \text{ 즉, } \alpha < \delta$$

$\therefore\ \gamma < \alpha < \delta < \beta$

답 ②

A121 | 답 ③

[풀이] ★

세 점 $(b,\ d)$, $(p,\ p)$, $(c,\ b)$가 곡선 $y = \log_a x$ 위의 점이므로

$d = \log_a b$, $p = \log_a p$, $b = \log_a c$

로그의 정의에 의하여

$a^d = b$ … ㉠

$a^p = p$ … ㉡

$a^b = c$ … ㉢

▸ ㄱ. (참)

㉡에 $p = \frac{1}{2}$을 대입하면 $a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

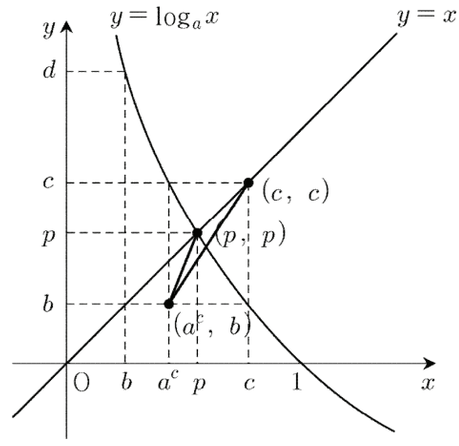
양변을 제곱하면 $a = \frac{1}{4}$이다.

▸ ㄴ. (참)

㉠, ㉢을 변변히 곱하면 지수법칙에 의하여

$a^{b+d} = bc$

▸ ㄷ. (거짓)



곡선 $y = \log_a x$와 직선 $y = c$의 방정식을 연립하면

$\log_a x = c$

로그의 정의에 의하여 $x = a^c$이므로

두 점 $(a^c,\ c)$, $(a^c,\ b)$의 위치는 위의 그림과 같다.

$\frac{p-b}{p-a^c}$ = (두 점 $(a^c,\ b)$, $(p,\ p)$를 잇는 직선의 기울기)

$\frac{c-b}{c-a^c}$ = (두 점 $(a^c,\ b)$, $(c,\ c)$를 잇는 직선의 기울기)

위의 그림에서

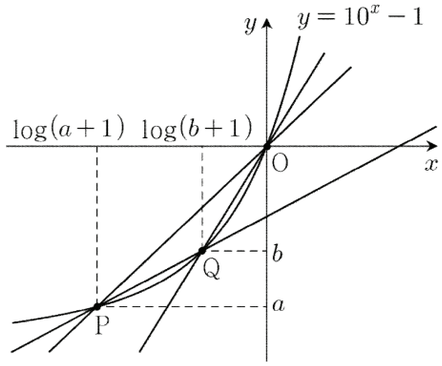
$$\frac{p-b}{p-a^c} > \frac{c-b}{c-a^c}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

A122 | 답 ③

[풀이] ★



$$(\text{직선 OP의 기울기})=\frac{a-0}{\log(a+1)-0}=\frac{1}{\log(a+1)^{\frac{1}{a}}}$$

$$(\text{직선 OQ의 기울기})=\frac{b-0}{\log(b+1)-0}=\frac{1}{\log(b+1)^{\frac{1}{b}}}$$

$$(\text{직선 PQ의 기울기})=\frac{b-a}{\log(b+1)-\log(a+1)}$$

$$=\frac{1}{\log\left(\frac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}}$$

문제에서 주어진 그림에서

(직선 PQ의 기울기)<(직선 OP의 기울기)<(직선 OQ의 기울기)

즉, $\frac{1}{\log\left(\frac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}}<\frac{1}{\log(a+1)^{\frac{1}{a}}}<\frac{1}{\log(b+1)^{\frac{1}{b}}}$

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $y=\frac{1}{x}$는 감소하므로

$$\log(b+1)^{\frac{1}{b}}<\log(a+1)^{\frac{1}{a}}<\log\left(\frac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $y=\log x$는 증가하므로

$$(b+1)^{\frac{1}{b}}<(a+1)^{\frac{1}{a}}<\left(\frac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

$\therefore\ B<A<C$

답 ③

A123 | 답 9

[풀이]

조건 (나)에 의하여

$$\frac{\log_n(m+1)-\log_n m}{m+1-m}=\log_n\frac{m+1}{m}\le\frac{1}{3}$$

$$\frac{m+1}{m}\le n^{\frac{1}{3}},\ (m+1)^3\le m^3\cdot n$$

• (1) $n=3$인 경우

$(m+1)^3\le 3m^3$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 3이다.

• (2) $n=4$인 경우

$(m+1)^3\le 4m^3$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 2이다.

• (3) $n=5$인 경우

$(m+1)^3\le 5m^3$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 2이다.

• (4) $n=6$인 경우

$(m+1)^3\le 6m^3$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 2이다.

$\therefore\ f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=3+2+2+2=9$

답 9

A124 | 답 ⑤

[풀이]

네 점 A, B, C, D의 좌표를 구하면

$\mathrm{A}(\log_2 a,\ a)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}\log_2 a,\ a\right)$,

$\mathrm{C}\left(-\log_2 b,\ \frac{1}{b}\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\log_2 b,\ \frac{1}{b}\right)$

▸ ㄱ. (참)

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{3}{2}\log_2 a$, $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{3}{2}\log_2 b$

이므로 $a=b$이면

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$

▸ ㄴ. (참)

$$m_1=\frac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab},\ m_2=\frac{2\left(\frac{1}{b}-a\right)}{\log_2 ab}$$

$\therefore\ 2m_1+m_2=0$

▸ ㄷ. (참)

두 직선 AC와 BD가 서로 수직이므로

$$\frac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}\times\frac{2\left(\frac{1}{b}-a\right)}{\log_2 ab}=-1$$

즉, $\left(\dfrac{a-\dfrac{1}{b}}{\log_2 ab}\right)^2=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{a-\dfrac{1}{b}}{\log_2 ab}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ … ㉠

(직선 AD의 기울기)$=\dfrac{a-\dfrac{1}{b}}{\log_2 \dfrac{a}{\sqrt{b}}}=2\sqrt{2}$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\dfrac{\log_2 ab}{\log_2 \dfrac{a}{\sqrt{b}}}=4$, $\log_2 a=\log_2 b$, $a=b$

네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(\log_2 a,\ a)$, $\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{2}\log_2 a,\ a\right)$,

$\mathrm{C}\left(-\log_2 a,\ \dfrac{1}{a}\right)$, $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2}\log_2 a,\ \dfrac{1}{a}\right)$

두 선분 AC, BD의 중점은 모두

$\left(0,\ \dfrac{a+\dfrac{1}{a}}{2}\right)$

이므로 사각형 ABCD는 마름모이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A125 | 답 ③

[풀이]

곡선 $y=\log_3 x$의 x절편이 1이므로 $\mathrm{A}(1,\ 0)$이다.

두 점 O, A를 평행이동시킨 점을 각각 O′, A′라고 하면

$\mathrm{O}'(3,\ 2)$, $\mathrm{A}'(4,\ 2)$

곡선 $y=\log_3(x+a)$가 선분 O′A′와 만나려면

$\log_3(3+a)\le 2$, $\log_3(4+a)\ge 2$

이어야 한다. 각각을 풀면

$a\le 6$, $a\ge 5$, 즉 $5\le a\le 6$

따라서 구하는 값은 11이다.

답 ③

A126 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$(a,\ b)\in A$이면 $b=\log_3 a$이므로

$b+1=\log_3 a+1=\log_3 3a$에서

$(3a,\ b+1)\in A$

▸ ㄴ. (거짓)

$\left(\dfrac{a}{3},\ b\right)\in A$이면 $b=\log_3\dfrac{a}{3}$이므로

$b-1=\log_3\dfrac{a}{3}-1=\log_3\dfrac{a}{9}$에서

$\left(\dfrac{a}{9},\ b-1\right)\in A$

왜냐하면 $\dfrac{a}{9}=a$이면 $a=0$인데, 이는 a가 양수라는 조건에 맞지 않는다.

(물론 $(a,\ b+1)\in A$임을 보여도 좋다.)

▸ ㄷ. (참)

$(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in A$이면

$b=\log_3 a$, $d=\log_3 c$에서 $b+d=\log_3 ac$이므로

$(ac,\ b+d)\in A$

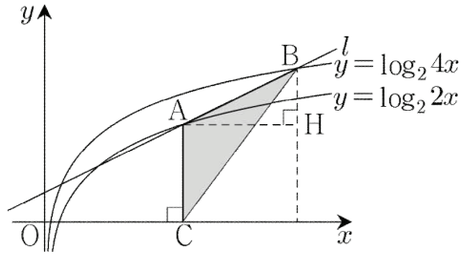
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A127 | 답 ⑤

[풀이]

점 A에서 '점 B를 지나고 y축에 평행한 직선'에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



직선 l(AB)의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{HB}}=2:1(=2k:k$로 두자.)

직각삼각형 AHB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$(2\sqrt{5})^2=(2k)^2+k^2$, $k=2$, $\overline{\mathrm{AH}}=4$, $\overline{\mathrm{BH}}=2$

점 A의 x좌표를 a로 두면 점 B의 x좌표는 $a+4$이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=\log_2 4(a+4)-\log_2 2a=2$,

$\log_2\dfrac{2a+8}{a}=2$, $\dfrac{2a+8}{a}=4$, $a=4$

$\therefore$ (△ACB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4=6$

답 ⑤

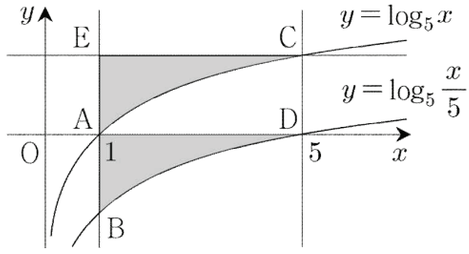
A128 | 답 ②

[풀이]

곡선 $y=\log_5 x$를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면

곡선 $y=\log_5 \frac{x}{5}=\log_5 x-1$과 일치한다.

점 C에서 직선 AB$(x=1)$에 내린 수선의 발을 E라고 하자.



위의 그림에서 어둡게 색칠된 두 도형의 넓이가 같으므로

$S+T=$(□EADC의 넓이)+(△CAD의 넓이)

$=4\times1+\frac{1}{2}\times4\times1=6$

답 ②

A129 | 답 ③

[풀이]

함수 $h(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동시키면 함수 $f(x)$의 그래프와 일치하므로 $\overline{BA}=\overline{DE}=4$이다.

점 A의 좌표를 $(a,\ \log_4 a)$로 두면

D$(a,\ \log_2 a)$이므로

$\overline{DA}=\log_2 a-\log_4 a=\frac{1}{2}\log_2 a$

두 점 A, B의 y좌표가 같으므로

(점 B의 y좌표)$=\log_2 x=\log_4 a=\log_2 \sqrt{a}$

에서 $x=\sqrt{a}$(=점 B의 x좌표)

$\overline{BC}=\log_2 \sqrt{a}-\log_4 \sqrt{a}=\frac{1}{4}\log_2 a$

$\therefore\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DA}}=\frac{1}{2}$

답 ③

A130 | 답 ④

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\left|\log_2(x-k)\right|$

두 곡선 $y=\left|\log_2(-x+8)\right|$, $y=f(x)$는

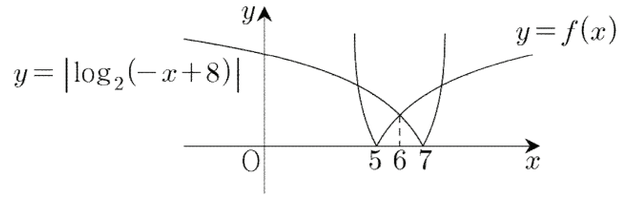
직선 $x=\frac{k+8}{2}$에 대하여 대칭이므로

이 두 곡선의 세 교점의 x좌표를 각각

$\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$로 두면

$\alpha+\beta+\gamma=2\times\frac{k+8}{2}+\frac{k+8}{2}$

$=3\times\frac{k+8}{2}=18,\ k=4$



$\therefore\ k=4$

답 ④

A131 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 두 곡선은 직선 $x=x_2(=\frac{k}{2})$에 대하여 대칭이므로

(이때, 두 점 P, R은 직선 $x=x_2$에 대하여 대칭)

$x_2-x_1=x_3-x_2=\sqrt{3}\ (=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3})$ …㉠

점 Q는 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(-x+k)$의 교점이므로

$\log_2 x_2=\log_2(-x_2+k),\ x_2=\frac{k}{2}$ …㉡

㉠, ㉡에서 $x_3=\frac{k}{2}+\sqrt{3}$

점 R은 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(-x+k)$의 교점이므로

$\log_2 x_3=-\log_2(-x_3+k)$

즉, $\frac{1}{x_3}=-x_3+k,\ \frac{1}{\frac{k}{2}+\sqrt{3}}=\frac{k}{2}-\sqrt{3}$

$\frac{k^2}{4}-3=1,\ k=4$

$\therefore\ x_1+x_3=2x_2=k=4$

답 ③

A132 | 답 ④

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-\log_2(x-2)$

점 B의 좌표를 $(b,\ \log_2 b)$로 두면

A$(1,\ 0)$이므로 내분점의 공식에 의하여

$\mathrm{M}\left(\dfrac{b+1}{2},\ \dfrac{\log_2 b}{2}\right)$

점 M은 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로

$\dfrac{\log_2 b}{2}=-\log_2\dfrac{b-3}{2}$, 즉

$\log_2\dfrac{1}{\sqrt{b}}=\log_2\dfrac{b-3}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{b}}=\dfrac{b-3}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$b^3-6b^2+9b-4=0,\ (b-1)^2(b-4)=0$

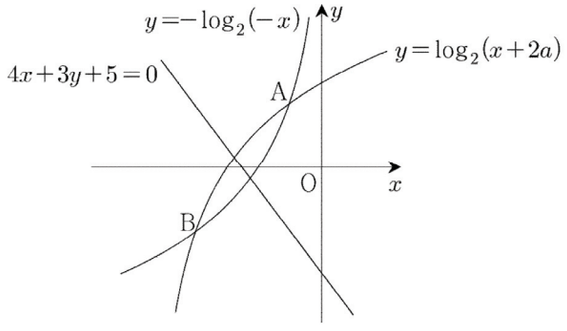
풀면 $b=4(\because b>1)$

답 ④

A133 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 상황을 그림으로 나타내자.



이때, 문제에서 주어진 두 곡선은 점 $(-a,\ 0)$에 대하여 서로 대칭이다.

선분 AB의 중점 $(-a,\ 0)$가 문제에서 주어진 직선 위에 있으므로

$-4a+5=0,\ a=\dfrac{5}{4}$

문제에서 주어진 두 곡선의 방정식을 연립하면

$-\log_2(-x)=\log_2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$,

$\log_2\dfrac{1}{-x}=\log_2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$,

$-\dfrac{1}{x}=x+\dfrac{5}{2},\ 2x^2+5x+2=0$,

$(2x+1)(x+2)=0,\ x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=-2$

$\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right),\ \mathrm{B}(-2,\ -1)$

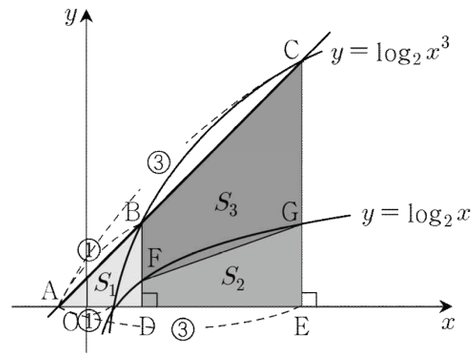
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}+2\right)^2+(1+1)^2}=\dfrac{5}{2}$

답 ⑤

A134 | 답 24

[풀이] ★

삼각형 ABD의 넓이를 S_1, 두 사각형 FDEG, BFGC의 넓이를 각각 S_2, S_3이라고 하자.



도형의 닮음비와 넓이비의 관계에 의하여

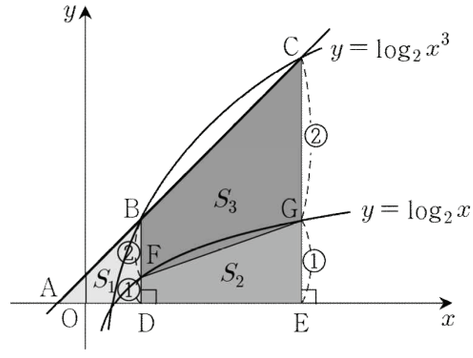
(△ABD의 넓이):(△ACE의 넓이)$=1^2:3^2$

(△ACE의 넓이)$=9\times$(△ABD의 넓이)$=\dfrac{81}{2}$

이므로

(□BDEC의 넓이)

=(△ACE의 넓이)−(△ABD의 넓이)$=36$



로그의 성질에 의하여 $\log_2 x^3=3\log_2 x$이므로

$t>1$인 임의의 실수 t에 대하여

$\log_2 t^3:\log_2 t=3:1$

따라서 두 사각형 BFGC, FDEG에 대하여

$S_2:S_3=1:2$

즉, $S_3=$(□BDEC의 넓이)$\times\dfrac{2}{3}=24$

따라서 사각형 BFGC의 넓이는 24이다.

답 24

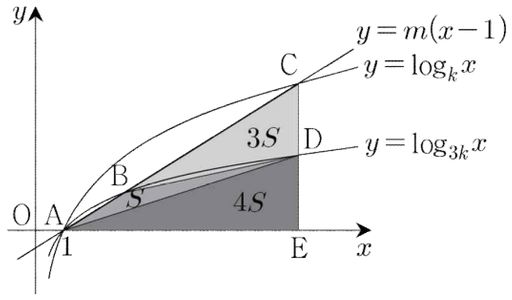
A135 | 답 12

[풀이]

삼각형 ADB의 넓이를 S라고 하면

삼각형 BDC의 넓이는 $3S$,

삼각형 AED의 넓이는 $4S$이다.



두 삼각형 AED, ADC의 넓이가 같으므로

점 D는 선분 CE의 중점이다.

두 삼각형 ADB, BDC의 넓이의 비가 1 : 3이므로

점 B는 선분 AC의 1 : 3 내분점이다.

점 B의 y좌표를 q로 두면 점 C의 y좌표는 $4q$이다.

$\log_{3k}x=q$에서 $x=(3k)^q$=(점 B의 x좌표),

$\log_k x=4q$에서 $x=k^{4q}$=(점 C의 x좌표)

이므로

$(3k)^q-1 : k^{4q}-(3k)^q=1 : 3$

정리하면

$k^{4q}-4(3k)^q+3=0$ … ㉠

한편 $\mathrm{D}(k^{4q},\ \log_{3k}k^{4q})$, $\mathrm{C}(k^{4q},\ \log_k k^{4q})$에서

$\log_{3k}k^{4q}=\dfrac{1}{2}\log_k k^{4q}$,

$\dfrac{1}{1+\log_k 3}=\dfrac{1}{2}$, $\log_k 3=1$, $k=3$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3^{4q}-4\times 3^{2q}+3=0$,

$(3^{2q}-3)(3^{2q}-1)=0$,

$3^{2q}=3$ 또는 $3^{2q}=1$

즉, $q=\dfrac{1}{2}$ 또는 $q=0$

m=(직선 AB의 기울기)$=\dfrac{\frac{1}{2}-0}{3-1}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \dfrac{k}{m}=3\times 4=12$

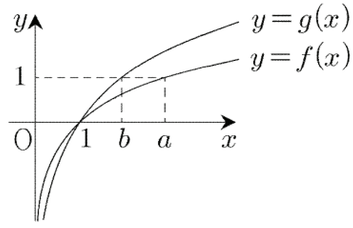
답 12

A136 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

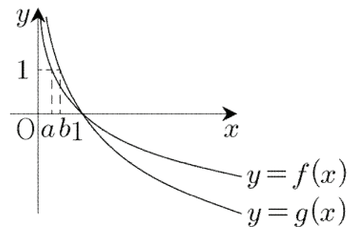
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<x<1$에서 $f(x)>g(x)$이다.

▸ ㄴ. (거짓)

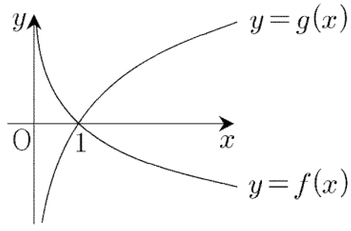
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<x<1$에서 $f(x)<g(x)$이다.

▸ ㄷ. (참)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



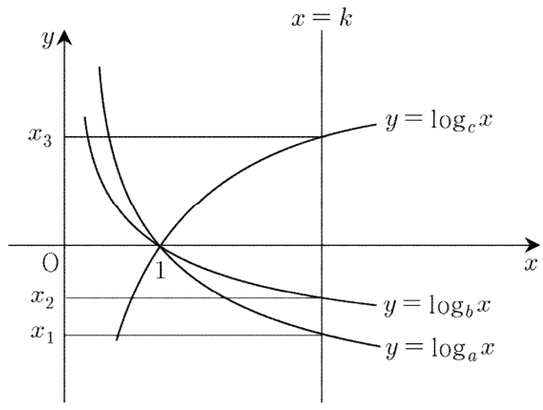
$0<x<1$에서 $f(x)>g(x)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A137 | 답 ⑤

[풀이]



$a^{x_1}=b^{x_2}=c^{x_3}=k$로 두면 $k>1$이고,

로그의 정의에 의하여

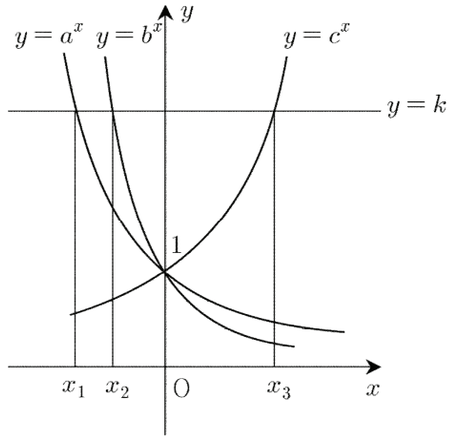
$x_1=\log_a k,\ x_2=\log_b k,\ x_3=\log_c k$

위의 그림에서

$\therefore\ x_3>x_2>x_1$

답 ⑤

[참고]



세 함수 $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$의 방정식과

직선 $y=k(k>1)$의 방정식을 연립하면

$a^x=k,\ b^x=k,\ c^x=k$

지수함수는 일대일대응이므로

위의 세 방정식의 실근은 각각 x_1, x_2, x_3이다.

즉, $a^{x_1}=b^{x_2}=c^{x_3}=k$

위의 그림에서 $x_3>x_2>x_1$임을 확인할 수 있다.

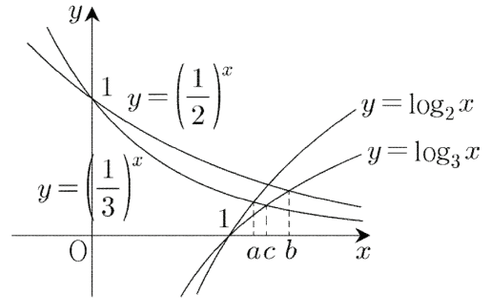
A138 | 답 ②

[풀이]

네 함수

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y=\left(\frac{1}{3}\right)^x,\ y=\log_2 x,\ y=\log_3 x$

의 그래프를 한 평면 위에 그리면 아래 그림과 같다.

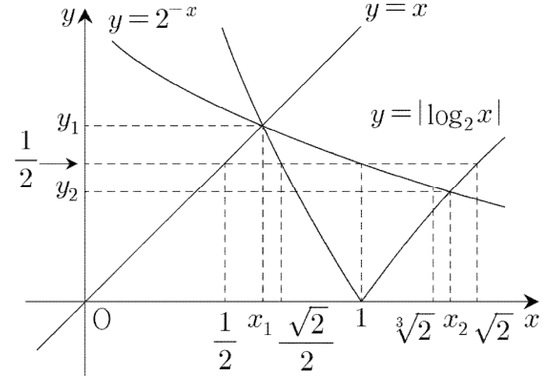


답 ②

A139 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 두 함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.



▸ ㄱ. (참)

$2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1=\left|\log_2\frac{1}{2}\right|,$

$2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}>\frac{1}{2}=\left|\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$

이므로 위의 그림처럼

$\therefore\ \frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

▸ ㄴ. (참)

$2^{-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{2^{\sqrt[3]{2}}}>\frac{1}{3}=\left|\log_2\sqrt[3]{2}\right|,$

$(\because\ 2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}<3,$ 이때 $2<\left(\frac{3}{2}\right)^3)$

$2^{-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2^{\sqrt{2}}}<\dfrac{1}{2}=\left|\log_2\sqrt{2}\right|$

$(\because\ 2^1<2^{\sqrt{2}})$

이므로 위의 그림처럼

$\therefore\ \sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$

▸ ㄷ. (참)

$x_1=y_1$이므로 ㄱ에서

$\dfrac{1}{2}<y_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y_2=\log_2 x_2$이므로 ㄴ에서

$\dfrac{1}{3}<y_2<\dfrac{1}{2}$

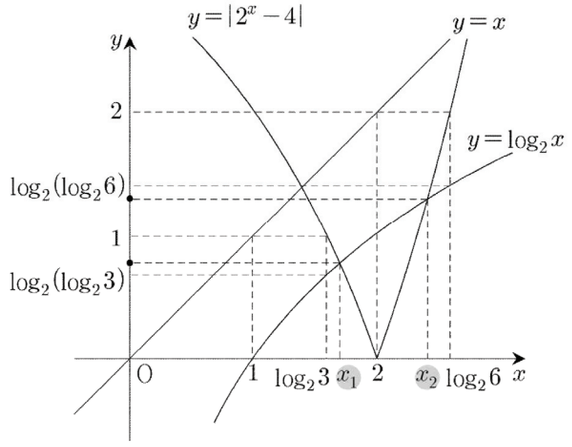
$\therefore\ y_1-y_2<\dfrac{3\sqrt{2}-2}{6}\left(=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{3}\right)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A140 | 답 ②

[풀이]



▸ ㄱ. (참)

위의 그림처럼

$x=\log_2 3$일 때, $|2^x-4|>\log_2 x$이고,

$x=2$일 때, $|2^x-4|<\log_2 x$이므로

$\log_2 3<x_1<2$

마찬가지의 방법으로

$2<x_2<\log_2 6$

$\therefore\ \log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$

▸ ㄴ. (참)

위의 그림에서

$x_2-x_1<\log_2 6-\log_2 3=1$

한편

$\log_2(\log_2 3)<4-2^{x_1}<1,$ …㉠

$1<2^{x_2}-4<\log_2(\log_2 6)$ …㉡

위의 두 부등식을 변변히 합하면

$1+\log_2(\log_2 3)<2^{x_2}-2^{x_1}<1+\log_2(\log_2 6)$

즉, $2^{x_2}-2^{x_1}<\log_2(2\log_2 6)$

$(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<1\times\log_2(2\log_2 6)<3$

$(\because\ 6<16,\ \log_2 6<4,\ 2\log_2 6<8,$

$\log_2(2\log_2 6)<3)$

$\therefore\ (x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$

▸ ㄷ. (거짓)

위의 그림에서

㉡−㉠:

$2^{x_1}+2^{x_2}-8<\log_2(\log_2 6)-\log_2(\log_2 3)$

즉, $2^{x_1}+2^{x_2}<8+\log_2(\log_3 6)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

A141 | 답 ⑤

[풀이]

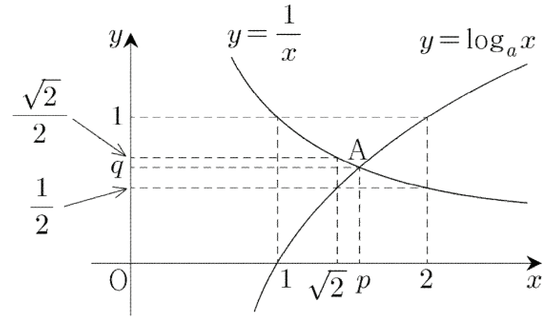
▸ ㄱ. (참)

점 A가 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위에 있으므로

$q=\dfrac{1}{p}\ \ \therefore\ pq=1$

▸ ㄴ. (참)

$a=2$일 때, 문제에서 주어진 두 곡선을 한 평면에 그리면



위의 그림에서 $p>\sqrt{2}$이다.

▸ ㄷ. (참)

점 A는 곡선 $y=\log_a x$ 위에 있으므로

$q=\log_a p,\ p=a^q,\ p=a^{\frac{1}{p}}\ (\because$ ㄱ),

$a=p^p<p^2\ (\because\ 1<p<2)$

$S(p)=\dfrac{1}{2}(p+q)q=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}q^2$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2p^2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} = \frac{a+1}{2a}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A142 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

두 곡선 $y = \log_2(-kx)$, $y = \log_2(x+4)$의 방정식을 연립하면

$\log_2(-kx) = \log_2(x+4)$, $-kx = x+4$, $x_1 = -\frac{4}{k+1}$

두 곡선 $y = \log_2 kx$, $y = \log_2(x+4)$의 방정식을 연립하면

$\log_2 kx = \log_2(x+4)$, $kx = x+4$, $x_2 = \frac{4}{k-1}$

$x_2 = -2x_1 \Leftrightarrow \frac{4}{k-1} = \frac{8}{k+1}$

$\therefore\ k = 3$

▸ ㄴ. (참)

두 곡선 $y = \log_2(-x+m)$, $y = \log_2(x+4)$의 방정식을 연립하면

$\log_2(-x+m) = \log_2(x+4)$, $-x+m = x+4$,

$x_2 = \frac{m-4}{2}$

$\frac{m-4}{2} = \frac{4}{k-1} (= x_2)$에서 $m = \frac{4k+4}{k-1}$

두 곡선 $y = \log_2(-kx)$, $y = \log_2(-x+m)$의 방정식을 연립하면

$\log_2(-kx) = \log_2(-x+m)$, $-kx = -x+m$,

$x_3 = \frac{m}{1-k} = -\frac{4k+4}{(k-1)^2}$

$x_2^2 = \left(\frac{4}{k-1}\right)^2$,

$x_1 x_3 = -\frac{4}{k+1} \times \frac{-(4k+4)}{(k-1)^2} = \left(\frac{4}{k-1}\right)^2$

$\therefore\ x_2^2 = x_1 x_3$

▸ ㄷ. (거짓)

세 수 x_1, x_2, x_3은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

이 등비수열의 공비를 $r(<0)$이라고 하자.

(직선 AB의 기울기)+(직선 AC의 기울기)

$= \frac{\log_2 kx_2 - \log_2(-kx_1)}{x_2 - x_1} +$

$\frac{\log_2(-kx_3) - \log_2(-kx_1)}{x_3 - x_1}$

$= \frac{\log_2\left(-\frac{x_2}{x_1}\right)}{x_1(r-1)} + \frac{\log_2 \frac{x_3}{x_1}}{x_1(r^2-1)}$

$= \frac{\log_2(-r)}{x_1(r-1)} + \frac{\log_2(-r)^2}{x_1(r^2-1)} = 0$

정리하면

$1 + \frac{2}{r+1} = 0$, $r = -3$

$x_2 = x_1 r$에서 $\frac{4}{k-1} = \frac{12}{k+1}$, $k = 2$

$x_2 = \frac{m-4}{2} = \frac{4}{k-1}$에서 $m = 12$

$\therefore\ m + k^2 = 12 + 4 = 16$

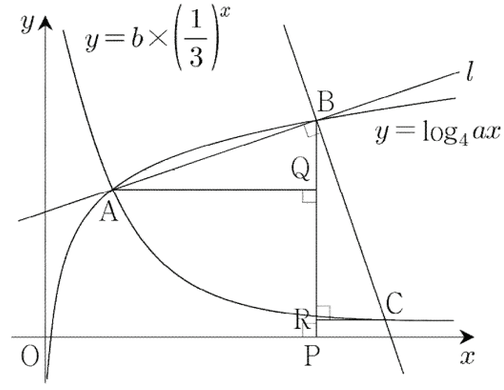
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

A143 | 답 ②

[풀이]

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 P, 두 점 A, C에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라고 하자. 이때, 직선 BC의 기울기는 -3이다.



▸ ㄱ. (참)

직선 l의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

직각삼각형 AQB에서

$\overline{AQ} : \overline{QB} : \overline{AB} = 3 : 1 : \sqrt{10}$

즉, $\overline{AQ} = 3$

$\therefore\ x_2 - x_1 = 3$

▸ ㄴ. (참)

$\triangle AQB \equiv \triangle BRC$이므로

$x_2 - x_1 = 3$, $y_2 - y_1 = 1$,

$x_3 = x_2 + 1 = x_1 + 4$, $y_3 = y_2 - 3 = y_1 - 2$

다음의 결과를 얻는다.

$x_3-x_1=4,\ y_1-y_3=2$

$\therefore\ x_3-x_1=2(y_1-y_3)$

▸ ㄷ. (거짓)

점 A: $\log_4 ax_1=b\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}=y_1$

점 B: $\log_4 a(x_1+3)=y_1+1\ (\because\ \neg)$

위의 두 식을 변변히 빼면

$\log_4\frac{x_1+3}{x_1}=1,\ \frac{x_1+3}{x_1}=4,\ x_1=1$

이를 맨 위의 등식에 대입하면

$\log_4 a=\frac{b}{3},\ a=4^{\frac{b}{3}},\ a^3=4^b$

$\therefore\ a^2\neq 4^b$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

A144 | 답 ①

[풀이]

$(g\circ f)(x)=3^{|x-1|}$이므로

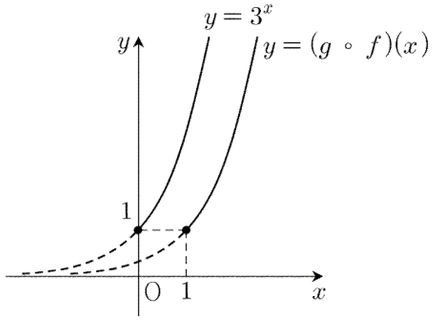
$x\geq 1$일 때, $(g\circ f)(x)=3^{x-1}$ …㉠

이고,

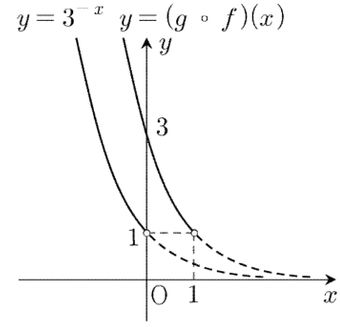
$x<1$일 때, $(g\circ f)(x)=3^{1-x}$ …㉡

이다.

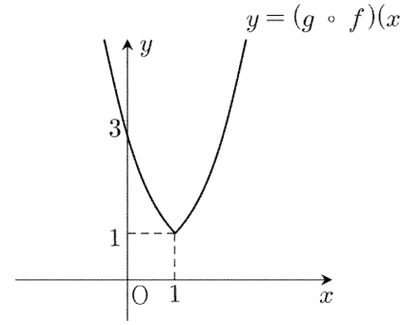
함수 $y=3^x(x\geq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 ㉠과 일치한다.



함수 $y=3^x(x\geq 0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 ㉡과 일치한다.



따라서 함수 $(g\circ f)(x)$의 그래프는 ①과 같다.



답 ①

A145 | 답 ③

[풀이]

$f(g(x))=\begin{cases}\log_2(x-2) & (x>2)\\ \log_2(2-x) & (x<2)\end{cases}$

함수 $f(g(x))$의 그래프는 ③과 같다.

답 ③

A146 | 답 ⑤

[풀이]

$2^x=t(x>0)$로 두면 $x=\log_2 t$이므로

$f(t)=-\log_3(\log_2 t)$ (단, $t>1$)

$t(>1)$가 증가할 때, 양수 $\log_2 t$는 증가하므로

$f(t)$는 감소한다.

그런데 $f(2)=0$이므로 곡선 $y=f(t)$의 x절편은 2이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 ⑤와 같이 그려진다.

답 ⑤

H. 초월함수의 미분가능성: 절댓값

H126

○○○
(2013(4)고3-B형30)

함수 $f(x)=x+\cos x+\frac{\pi}{4}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=|f(x)-k|$ (k는 $0<k<6\pi$인 상수)

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

H127

●●●
(2015(4)고3-B형21)

함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)^2e^x+k & (x\geq 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|-f(x)$가 다음 조건을 만족하도록 하는 정수 k의 개수는? [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 미분가능하지 않은 점이 2개다.

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

H128

★★★
(2019(4)고3-가형30)

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$(a, b는 정수)에 대하여 함수

$g(x)=e^{f(x)}-f(x)$는 $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$

($\alpha<-1<\beta$)에서만 극값을 갖는다.

함수 $y=|g(x)-g(\alpha)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2일 때, $\{f(-1)\}^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]

H129

★★★ (2017(4)고3–가형30)

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0과 2뿐이고 허근은 존재하지 않는다.

(나) $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^3}{f(x)}$이 존재한다.

(다) 함수 $\left|\frac{g(x)}{x}\right|$는 $x=\frac{5}{4}$에서 연속이고 미분가능하지 않다.

함수 $g(x)$의 극솟값을 k라 할 때, $27k$의 값을 구하시오. [4점]

H. 초월함수의 미분가능성: 합성함수

H130

●●● (2020사관(1차)–가형21)

두 함수

$$f(x)=4\sin\frac{\pi}{6}x,$$

$$g(x)=|2\cos kx+1|$$

이 있다. $0<x<2\pi$에서 정의된 함수

$$h(x)=(f\circ g)(x)$$

에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 자연수이다.) [4점]

ㄱ. $k=1$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $k=2$일 때, 방정식 $h(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

ㄷ. 함수 $|h(x)-k|$가 $x=\alpha(0<\alpha<2\pi)$에서 미분가능하지 않은 실수 α의 개수를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{4}a_k=34$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H131

★★★

(2021(7)고3-미적분29)

함수 $f(x)=x^3-x$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=ax^3+x^2+bx+1$이 있다. 함수 $g(x)$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}(f\circ g^{-1})(x) & (x<0 \text{ 또는 } x>1)\\ \dfrac{1}{\pi}\sin\pi x & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

H132

★★★

(2019(3)고3-가형30)

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 1인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$) [4점]

(가) $f(1)=0$, $f'(1)=0$

(나) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 10 이하의 자연수이다.

(다) 함수 $g(x)=\dfrac{3x}{e^{x-1}}+k$에 대하여

함수 $|(f\circ g)(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수는 4이다.

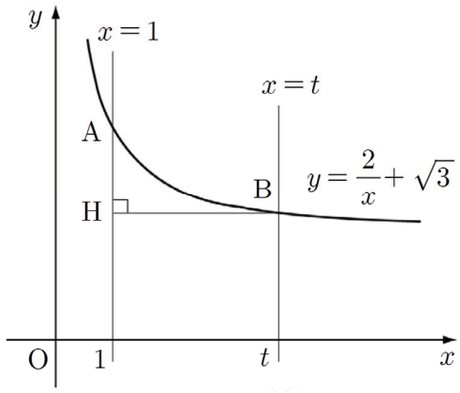
H. 접선

H133

○○
(2007(4)고3–가형4)

곡선 $y=\frac{2}{x}+\sqrt{3}\,(x>0)$과 두 직선 $x=1$, $x=t$의 교점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 직선 $x=1$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때, $\lim_{t\to 1+}\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$의 값은? (단, $t>1$이다.) [3점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

H134

○○○
(2014(3)고3–B형30)

실수 t에 대하여 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선과 원 $x^2+y^2=e^{2t}$이 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 P라 하고, 점 P가 나타내는 곡선을 C라 하자. $t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a\times e^{b\pi}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

H. 평균값 정리

H135

○○○
(2012(4)고3–가형21)

함수 $f(x)=\ln(2x^2+1)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=-f'(x)$이다.
ㄴ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.
ㄷ. 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $\lvert f(x_1)-f(x_2)\rvert \le \sqrt{2}\,\lvert x_1-x_2\rvert$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H136

○○○
(2019(10)고3–가형15)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x>0$일 때, $f(x)=axe^{2x}+bx^2$
(나) $x_1<x_2<0$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)=3x_2-3x_1$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2e$일 때, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $2e$ ② $4e$ ③ $6e$
④ $8e$ ⑤ $10e$

H137

○○○
(2016(4)고3–가형27)

모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.
(나) $0\le x\le 1$일 때, $f(x)=\sin\pi x+1$이다.
(다) $1<x<2$일 때, $f'(x)\ge 0$이다.

$\int_0^6 f(x)dx=p+\frac{q}{\pi}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]

▶ 이 문항은 적분법에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

H. 극대와 극소

H138

○○
(2007(10)고3–가형27)

두 상수 $a(\neq 0)$, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin x+bx+1$$

이 극값을 가질 때, 다음 중 항상 옳은 것은? [3점]

① $a>b$ ② $a<b$ ③ $a^2>b^2$
④ $a^2<b^2$ ⑤ $a^2=b^2$

H139

○○
(2020사관(1차)–가형19)

함수 $f(x)=xe^{2x}-(4x+a)e^x$이 $x=-\frac{1}{2}$에서 극댓값을 가질 때, $f(x)$의 극솟값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $1-\ln 2$ ② $2-2\ln 2$ ③ $3-3\ln 2$
④ $4-4\ln 2$ ⑤ $5-5\ln 2$

H140

○○
(2016(4)고3–가형18)

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$, $\mathrm{Q}(2t,\ \ln 2t)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{R}(r(t),\ 0)$, $\mathrm{S}(s(t),\ 0)$이라 하자.
함수 $f(t)$를 $f(t)=r(t)-s(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$의 극솟값은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

H141

★★★
(2019(7)고3–가형30)

$x=a(a>0)$에서 극댓값을 갖는 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\pi x}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ \dfrac{7}{128}\pi^2 & (f(x)=0)\end{cases}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(0)\times g'(2a)\neq 0$
(나) 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

$g(1)=\frac{2}{7}$일 때, $g(-1)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

H142

★★★
(2017(3)고3–가형14)

모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이고, $0\le x<2$일 때, $f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$인 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. 구간 $[0,\ 2)$에서 극솟값을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 곱은? [4점]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

H. 변곡점

H143

○○
(2020(7)고3–가형15)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고 $g(x)$가 증가함수일 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=(f\circ g)(x)$$

라 하자. 점 $(2,\ 2)$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이고 $\dfrac{h''(2)}{f''(2)}=4$이다. $f'(2)=4$일 때, $h'(2)$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

H144

○○○
(2019(3)고3–가형20)

함수 $f(x)=x^2+ax+b\left(0<b<\dfrac{\pi}{2}\right)$에 대하여

함수 $g(x)=\sin(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=-g'(x)$이다.
> (나) 점 $(k,\ g(k))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이고, $2kg(k)=\sqrt{3}g'(k)$이다.

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
④ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

H. 변곡점: 변곡점에서의 접선

H145

○○○
(2019(10)고3–가형21)

정수 n에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-n)e^x$에 그은 접선의 개수를 $f(n)$이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a=0$일 때, $f(4)=1$이다.
ㄴ. $f(n)=1$인 정수 n의 개수가 1인 정수 a가 존재한다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{5} f(n)=5$를 만족시키는 정수 a의 값은 -1 또는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H146

●●●
(2015사관(1차)–B형30)

함수 $f(x)=-xe^{2-x}$과 상수 a가 다음 조건을 만족시킨다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $x<a$이면 $f(x)>g(x)$이고, $x>a$이면 $f(x)<g(x)$이다.

곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $k-e^2$이다. k의 값을 구하시오. [4점]

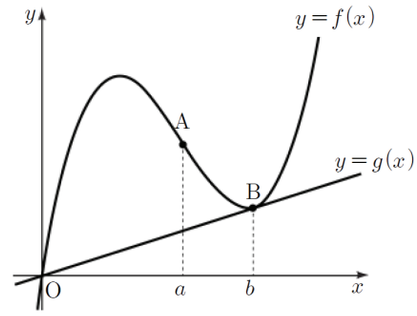
▶ 이 문항은 적분법에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

H. 그래프 개형: 삼차함수

H147

○○○
(2011(4)고3–가형19)

그림과 같이 좌표평면에서 최고차항의 계수가 양수이고 원점을 지나는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 있다.
곡선 $y=f(x)$의 변곡점을 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$라 하고 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0<a<b$) [4점]



ㄱ. 곡선 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는 a이다.
ㄴ. 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\frac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $\frac{b-a}{a}=\frac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H148

○○○
(2014(10)고3–B형29)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 2$일 때, $g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ f(2-x) & (1 \le x < 2) \end{cases}$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2) = g(x)$이다.
(다) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$g(6) - g(3) = \dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

H149

○○○
(2015(3)고3–B형28)

삼차함수 $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \ge k) \\ f(2k-x) & (x < k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\dfrac{q}{p}$라 할 때, $p^2 + q^2$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

H. 그래프 개형: 사차함수

H150

○○
(2007(7)고3–가형22)

원점을 지나는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y = f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(2+x) = f(2-x)$
(나) $x = 1$에서 극솟값을 갖는다.

이때, $f(x)$의 극댓값을 a라 할 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

H151

○○○
(2014(7)고3–A형21)

최고차항의 계수가 1이고 $f(0) < f(2)$인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(2+x) = f(2-x)$를 만족시킨다. 방정식 $f(|x|) = 1$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

H152

★★★
(2017경찰대(1차)—공통19)

함수 $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x+1$과 이차함수 $g(x)$는 어떤 실수 α에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$, $f'(\alpha)=g'(\alpha)$
(나) $f(\alpha+1)=g(\alpha+1)$, $f'(\alpha+1)=g'(\alpha+1)$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 할 때, $\dfrac{S_2}{S_1}$의 값은? [5점]

① 20 ② 25 ③ 30
④ 35 ⑤ 40

H. 그래프 개형: 대칭성

H153

○○○
(2008(7)고3-가형28)

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x)$$

를 만족하고 $h(x)=f(x)+xg(x)$로 정의할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $h(0)=0$
ㄴ. $h'(-x)=h'(x)$
ㄷ. $h(x)$의 이계도함수 $h''(x)$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가질 때, 방정식 $h''(x)-x=0$의 실근은 적어도 3개다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H154

●●● (2014(3)고3-B형21)

-1과 1을 제외한 모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)=-1$이고 $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$이다.
(다) $x\neq 1$인 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)<0$이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 한 점에서 만난다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 세 점에서 만난다.
ㄷ. $f'(\alpha)=-1$인 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

H155

●●● (2016(10)고3-가형21)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
(다) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pi$

함수 $g(x)=\dfrac{\sin f(x)}{x}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)+g(-x)=0$이다.
ㄴ. $\lim_{x\to 0} g(x)=0$
ㄷ. $f(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}(\alpha>0)$이면 방정식 $|g(x)|=\dfrac{1}{\alpha}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H156

●●● (2018(10)고3–가형21)

함수 $f(x)=-\dfrac{kx^3}{x^2+1}\,(k>1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 α, 가장 큰 값을 β라 하자. 함수 $y=f(x-2\beta)+2\alpha$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $f'(\beta)=2g'(\alpha)$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$ ③ $\dfrac{4+2\sqrt{2}}{5}$

④ $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{5}$

H157

★★★ (2021(10)고3–미적분30)

서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고, 두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=h(0)$
(나) $g'(2)=-5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오. [4점]

꿔므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore\ p^2=(g(2))^2=(2^2(2-4))^2=64$

답 64

H126 | 답 37

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=1-\sin x$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능해야 하므로

$f(\alpha)=k$인 $x=\alpha$에 대하여 $f'(\alpha)=0$이어야 한다.

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

$k=f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{3\pi}{4}$

이를 k의 범위에 대입하면

$0<2n\pi+\frac{3\pi}{4}<6\pi$

풀면

$-\frac{3}{8}<n<\frac{21}{8}$

n은 정수이므로

$n=0,\ 1,\ 2$

k가 가질 수 있는 값은

$\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{11}{4}\pi$ 또는 $\frac{19}{4}\pi$

따라서 모든 k의 값의 합은

$\frac{q}{p}\pi=\frac{3}{4}\pi+\frac{11}{4}\pi+\frac{19}{4}\pi=\frac{33}{4}\pi$

$p=4,\ q=33$

$\therefore\ p+q=37$

답 37

H127 | 답 ①

[풀이]

우선 $h(x)=(x-2)^2e^x$로 두고,

함수 $h(x)$의 그래프를 그리자.

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=(x^2-2x)e^x$

함수 $h(x)$의 이계도함수는

$h''(x)=(x^2-2)e^x$

방정식 $h'(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=2$

방정식 $h''(x)=0$을 풀면

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

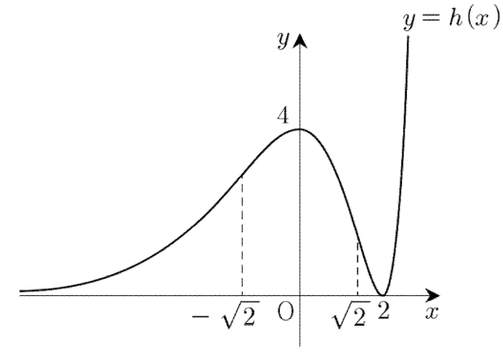
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0
$h'(x)$	$+$	$+$	$+$	0
$h''(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$h(x)$	↗	변곡점	↱	극대
$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-$	0	$+$	$+$	$+$
↘	변곡점	↳	극소	↗

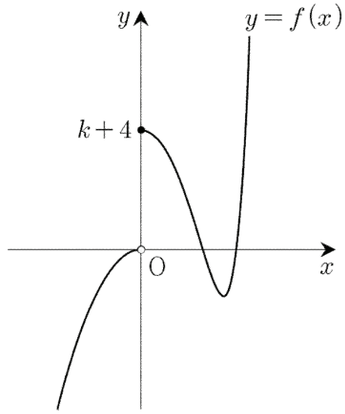
$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)^2}{e^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{(t+2)^2}{e^t}=0$

이므로 x축은 점근선이다.

함수 $h(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 그래프는

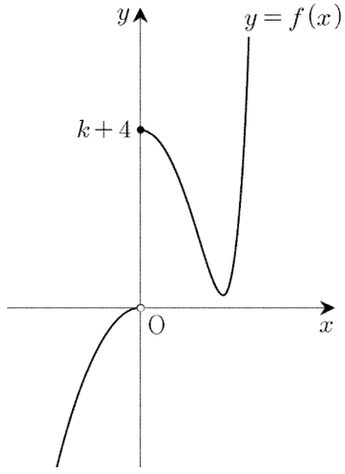


함수 $g(x)$의 방정식을 다시 쓰면

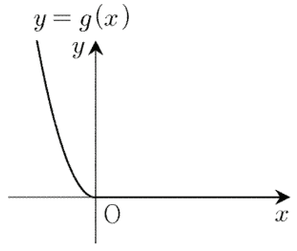
$g(x)=\begin{cases}0 & (f(x)\geq 0)\\ -2f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$

• (1) $k\geq 0$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$의 그래프는

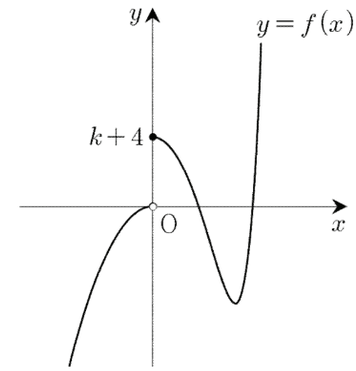


조건(가) 성립○: 함수 $g(x)$는 연속함수이다.

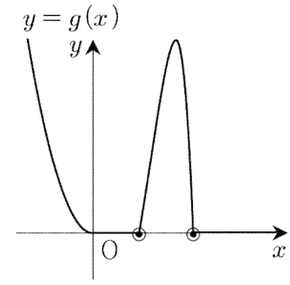
조건(나) 성립×: 함수 $g(x)$는 미분가능하다.

• (2) $-4<k<0$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$의 그래프는



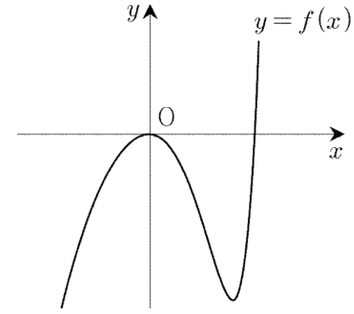
(단, ◉는 미분가능하지 않은 점)

조건(가) 성립○: 함수 $g(x)$는 연속함수이다.

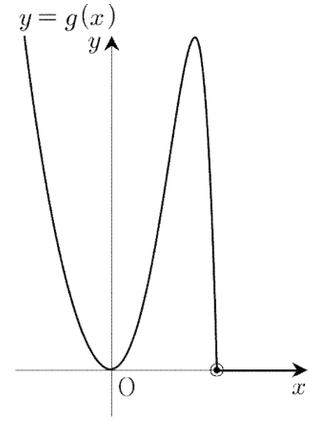
조건(나) 성립○: 함수 $g(x)$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

• (3) $k=-4$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$의 그래프는



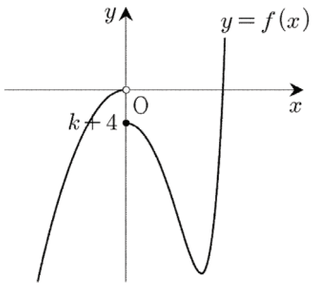
(단, ◉는 미분가능하지 않은 점)

조건(가) 성립○: 함수 $g(x)$는 연속함수이다.

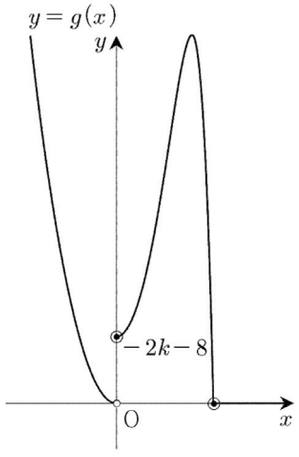
조건(나) 성립×: 함수 $g(x)$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 1이다.

• (4) $k<-4$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$의 그래프는



(단, ◉는 미분가능하지 않은 점)

조건(가) 성립×: 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

조건(나) 성립○: 함수 $g(x)$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

이상에서 문제에서 주어진 두 조건을 모두 만족시키는 정수 k는 -3, -2, -1이다. 따라서 구하는 정수 k의 개수는 3이다.

답 ①

H128 | 답 9

[풀이]

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=f'(x)(e^{f(x)}-1)$

방정식 $g'(x)=0$을 풀면

$f(x)=0$ 또는 $f'(x)=0$

만약 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이면 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 이때, 이 다섯 개의 실근 중에서 어느 두 수도 서로 같지 않다. 따라서 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다. 이때, 이 다섯 개의 실근 각각에 대하여 함수 $g(x)$는 극값을 갖는다. 이는 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3일 수 없다.

▸ (1) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

• 방정식 $x^2+ax+b=0$의 실근 중 하나가 $x=0$인 경우

$b=0$이므로 방정식 $x^2+ax+b=0$의 0이 아닌 실근은

$x=-a$

$f(x)=x^3+ax^2=x^2(x+a)$

$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

$g'(x)=0$에서

$x=-a$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$ 또는 $x=0$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\alpha=-a$, $-1=-\frac{2}{3}a$(즉, $a=\frac{3}{2}$), $\beta=0$

이는 a가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

• 방정식 $x^2+ax+b=0$이 0이 아닌 중근을 갖는 경우

방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4b=0$에서 $b=\frac{a^2}{4}$

$f(x)=x^3+ax^2+\frac{a^2}{4}x=x\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$

$f'(x)=3x^2+2ax+\frac{a^2}{4}=3\left(x+\frac{a}{2}\right)\left(x+\frac{a}{6}\right)$

$f'(x)=0$에서

$x=-\frac{a}{2}$ 또는 $x=-\frac{a}{6}$

$g'(x)=0$에서

$x=-\frac{a}{2}$ 또는 $x=-\frac{a}{6}$ 또는 $x=0$

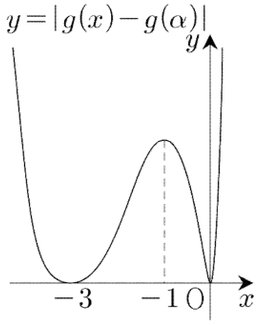
문제에서 주어진 조건에 의하여

$-\frac{a}{2}=\alpha$, $-\frac{a}{6}=-1$, $\beta=0$

즉, $a=6$, $b=9$, $\alpha=-3$, $\beta=0$

이때, $g(\alpha)=g(0)=1$이므로

아래 그림과 같이 함수 $|g(x)-g(\alpha)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



▸ (2) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우

• 방정식 $x^2+ax+b=0$이 $x=0$을 중근으로 갖는 경우

$a=b=0$, $f(x)=x^3$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$, $g'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않는다.

• 방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는 경우

방정식 $f'(x)=0$의 실근 중 하나가 $x=-1$이므로

$3-2a+b=0$, 즉 $b=2a-3$

방정식 $x^2+ax+2a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8a+12<0$, $2<a<6$

$f(x)=x^3+ax^2+(2a-3)x$

$=x(x^2+ax+2a-3)$,

$f'(x)=(3x+2a-3)(x+1)$

이므로

$f'(x)=0$에서

$x=\frac{3-2a}{3}$ 또는 $x=-1$

$g'(x)=0$에서

$x=\frac{3-2a}{3}$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

즉, $\alpha=\frac{3-2a}{3}(<-1)$, $\beta=0$

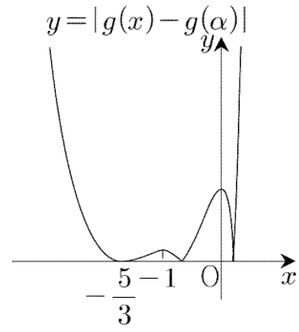
정수 a의 값은 4, 5이다.

$a=4$이면 $b=5$

함수 $g(x)$는 $x=-\frac{5}{3}$, $x=-1$, $x=0$에서 극값을 갖고

$g(\alpha)=g\left(-\frac{5}{3}\right)=e^{-\frac{50}{27}}+\frac{50}{27}>1$, $g(0)=1$이므로

함수 $|g(x)-g(\alpha)|$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.



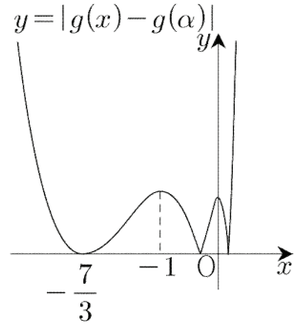
이때, $\{f(-1)\}^2=(-2)^2=4$

$a=5$이면 $b=7$

함수 $g(x)$는 $x=-\frac{7}{3}$, $x=-1$, $x=0$에서 극값을 갖고

$g(\alpha)=g\left(-\frac{7}{3}\right)=e^{-\frac{49}{27}}+\frac{49}{27}>1$, $g(0)=1$이므로

함수 $|g(x)-g(\alpha)|$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.



이때, $\{f(-1)\}^2=(-3)^2=9$

이상에서 $\{f(-1)\}^2$의 최댓값은 9이다.

답 9

H129 | 답 50

[풀이]

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^m(x-2)^n$

(단, m, n은 자연수)

조건 (나)에서 n의 값의 범위를 결정하자.

만약 $n\geq 4$(즉, $n-3\geq 1$)라고 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^3}{f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^m(x-2)^{n-3}}$

은 발산한다. 이는 가정에 모순이다.

따라서 n은 3 이하의 자연수이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=x^{m-1}(x-2)^{n-1}\{(m+n)x-2m\}$

함수 $\left|\frac{g(x)}{x}\right|$의 방정식은

$\left|\frac{g(x)}{x}\right|$

$=\left|\frac{x^m(x-2)^{n-1}\{(m+n-1)x-2(m-1)\}}{x^m(x-2)^{n-1}\{(m+n)x-2m\}}\right|$

다음과 같이 n의 값에 따라서 함수 $\left|\frac{g(x)}{x}\right|$가 달라진다.

• (경우1) $n=1$일 때,

$\left|\frac{g(x)}{x}\right|=\left|\frac{mx-2(m-1)}{(m+1)x-2m}\right|$

(단, $x\neq 0$, $x\neq\frac{2m}{m+1}$)

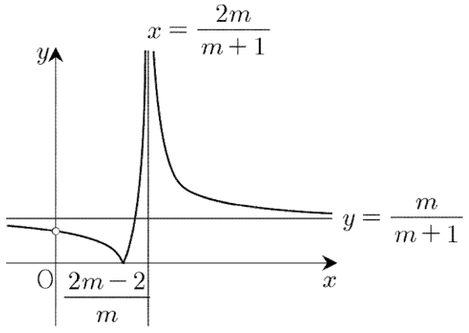
• (경우2) n이 2 또는 3일 때,

$\left|\frac{g(x)}{x}\right|=\left|\frac{(m+n-1)x-2(m-1)}{(m+n)x-2m}\right|$

(단, $x\neq 0$, $x\neq 2$, $x\neq\frac{2m}{m+n}$)

• (경우1)

함수 $\left|\frac{g(x)}{x}\right|$의 그래프는



함수 $\left|\frac{g(x)}{x}\right|$는 $x=\frac{2m-2}{m}$에서 연속이고 미분가능하지 않으므로

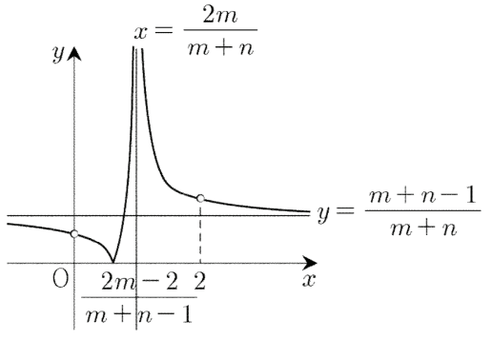
조건 (다)에 의하여

$\frac{2m-2}{m}=\frac{5}{4}$ 풀면 $m=\frac{8}{3}$($\neq$ 자연수)

이 경우는 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

• (경우2)

함수 $\left|\frac{g(x)}{x}\right|$의 그래프는



조건 (다)에 의하여

$\frac{2m-2}{m+n-1}=\frac{5}{4}$

정리하면

$3(m-1)=5n$

m, n이 자연수이므로

$n=3$, $m=6$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=\frac{8x^2-10x}{9x-12}$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=\frac{8(3x-5)(x-1)}{3(3x-4)^2}$

방정식 $g'(x)=0$을 풀면

$x=1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

$x=\frac{5}{3}$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\frac{5}{3}$에서 극솟값을 갖는다. (그리고 함수 $g(x)$는 $x=1$의 좌우에서 극댓값을 갖는다.)

$\therefore\ 27k=27g\left(\frac{5}{3}\right)=50$

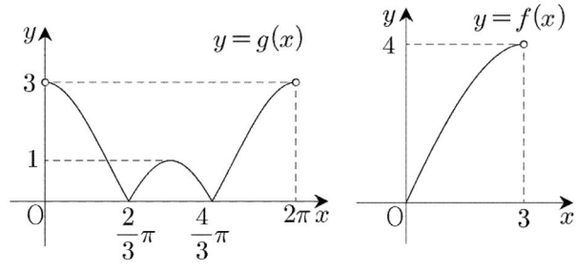
답 50

H130 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$k=1$일 때, 두 함수 $g(x)$, $f(x)$의 그래프는



$x\to\frac{2}{3}\pi+$일 때,

$g(x)=-2\cos x-1$($g'(x)=2\sin x$)이므로

$g'(x)\to\sqrt{3}$, $f'(g(x))\to\frac{2}{3}\pi$

즉, $f'(g(x))g'(x)\to\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

$x\to\frac{2}{3}\pi-$일 때,

$g(x)=2\cos x+1$($g'(x)=-2\sin x$)이므로

$g'(x) \to -\sqrt{3}$, $f'(g(x)) \to \frac{2}{3}\pi$

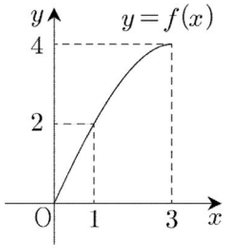
즉, $f'(g(x))g'(x) \to -\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

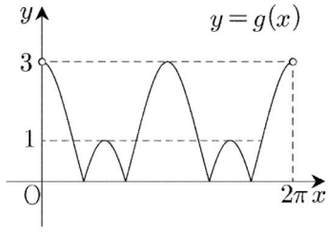
따라서 함수 $h(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 미분가능하지 않다.

▸ ㄴ. (참)

$k=2$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는

(단, 함수 $g(x)$의 주기는 π이다.)





$h(x)=2 \Leftrightarrow f(t)=2$, $g(x)=t$

$t=1$이므로 $g(x)=1$을 풀면 된다.

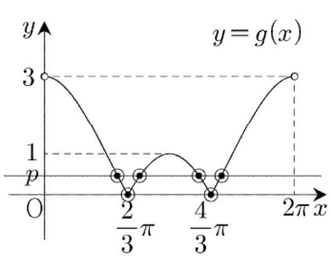
함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수가 6이므로

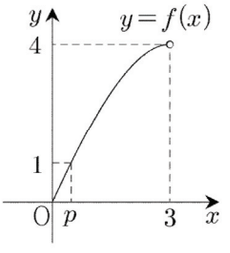
방정식 $h(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

▸ ㄷ. (참)

ㄱ에서의 방법을 그대로 적용하면 아래의 결과를 얻는다.

• $k=1$인 경우

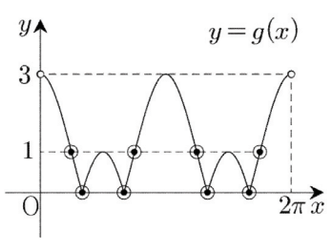


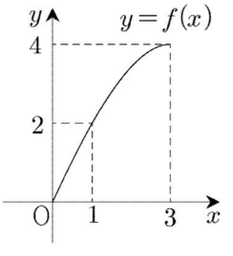


(단, ◉는 함수 $|h(x)-k|$가 미분가능하지 않은 점이다.)

위의 그림에서 $a_1=6$

• $k=2$인 경우

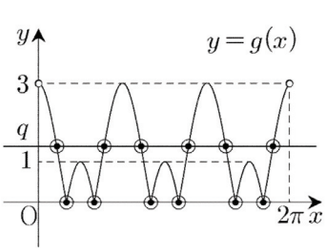


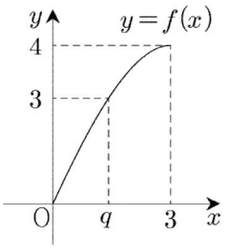


(단, ◉는 함수 $|h(x)-k|$가 미분가능하지 않은 점이다.)

위의 그림에서 $a_2=8$

• $k=3$인 경우

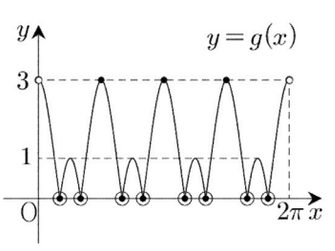


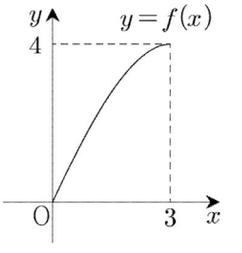


(단, ◉는 함수 $|h(x)-k|$가 미분가능하지 않은 점이다.)

위의 그림에서 $a_3=12$

• $k=4$인 경우





(단, ◉는 함수 $|h(x)-k|$가 미분가능하지 않은 점이다.)

위의 그림에서 $a_4=8$

세 개의 점(•)에서 함수 $h(x)$가 미분가능한 이유는 다음과 같다.

이때, 세 개의 점(•)의 x좌표는 각각 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$이다.

$x=\frac{\pi}{2}$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능함을 보이자.

$x \to \frac{\pi}{2}$일 때,

$g'(x) \to 0$, $f'(g(x)) \to 0$

이므로

$f'(g(x))g'(x) \to 0$

$\therefore \sum_{k=1}^{4} a_k = 6+8+12+8=34$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H131 | 답 15

[풀이]

함수 $h(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0-} h(x) = h(0)$, $\lim_{x \to 1+} h(x) = h(1)$

즉, $f(g^{-1}(0))=0$, $f(g^{-1}(1))=0$

그런데

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ 또는 ± 1

이고, $g(0)=1 (g^{-1}(1)=0)$이므로

$g^{-1}(0)=1$ ($g(x)$는 감소함수)

또는

$g^{-1}(0)=-1$ ($g(x)$는 증가함수)

이다.

함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=\begin{cases} f'(g^{-1}(x))(g^{-1}(x))' & (x<0 \text{ 또는 } x>1) \\ \cos\pi x & (0<x<1) \end{cases}$$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 1+} h'(x)=\lim_{x\to 1-} h'(x)$ 즉,

$f'(g^{-1}(1))(g^{-1})'(1)=-1$

$f'(0)\times\frac{1}{g'(0)}=-1$

$g'(0)=-f'(0)$, 즉 $b=1$

($\because f'(x)=3x^2-1$, $g'(x)=3ax^2+2x+b$)

$g'(0)=b=1>0$이므로 함수 $g(x)$는 증가함수이다.

그러므로 $g^{-1}(0)=-1$, $g(-1)=0$

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0-} h'(x)=\lim_{x\to 0+} h'(x)$, 즉

$f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0)=1$

$f'(-1)\times\frac{1}{g'(-1)}=1$, 즉 $2=3a+b-2$, $a=1$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=x^3+x^2+x+1$

$\therefore\ g(a+b)=g(2)=15$

답 15

H132 | 답 77

[풀이]

우선 함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 그리자.

함수 $g(x)$의 도함수는

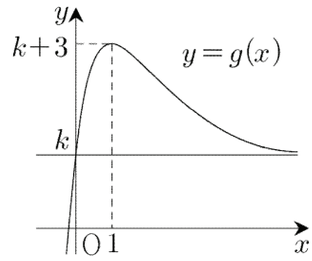
$g'(x)=3(1-x)e^{1-x}$

방정식 $g'(x)=0$을 풀면 $x=1$

$x=1$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $3+k$를 갖는다.

$x\to\infty$일 때, $g(x)\to k$이므로 $y=k$는 점근선이다. 이때, 곡선 $y=g(x)$의 y절편도 k이다.

함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



조건 (가)에서 인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)^2(x^2+ax+b)$

만약 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는다면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이므로

$|f(g(x))|=f(g(x))$

이다. 이때, 임의의 자연수 k에 대하여 함수 $|f(g(x))|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 따라서 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

이제 함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)(x-\beta)$

로 둘 수 있다. (단, α, β는 모두 10 이하의 자연수이다.)

▸ (1) $\alpha=\beta$인 경우

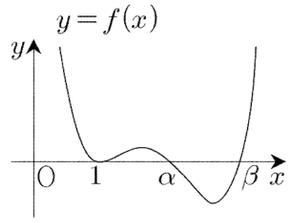
$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)^2$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이므로

$|f(g(x))|=f(g(x))$

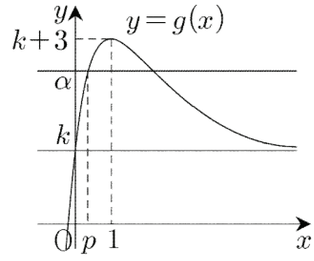
이다. 이때, 임의의 자연수 k에 대하여 함수 $|f(g(x))|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 따라서 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

▸ (2) $1<\alpha<\beta\leq 10$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



• $k+3>\alpha$인 경우



$g(p)=\alpha$, $f(g(p))=0$라고 하자.

$x\to p-$일 때,

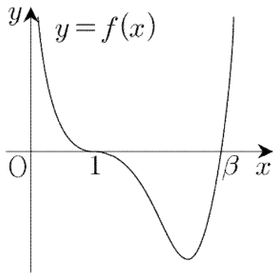
$g'(x)\to g'(p)$, $f'(g(x))\to f'(\alpha)$

이므로

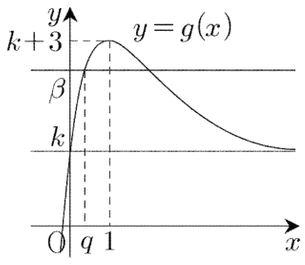
$f'(g(x))g'(x) \to f'(\alpha)g'(p)(\neq 0)$
$(\because x \to p-$일 때, $|f(g(x))| = f(g(x)))$
$x \to p+$일 때,
$g'(x) \to g'(p)$, $-f'(g(x)) \to -f'(\alpha)$
이므로
$-f'(g(x))g'(x) \to -f'(\alpha)g'(p)(\neq 0)$
$(\because x \to p+$일 때, $|f(g(x))| = -f(g(x)))$
그러므로 함수 $|f(g(x))|$는 $x=p$에서 미분가능하지 않다.
이는 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

• $k+3 \le \alpha < \beta$인 경우
모든 실수 x에 대하여 $g(x) \le k+3 \le \alpha$이므로 $f(g(x)) \ge 0$이다.
함수 $|f(g(x))|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수가 4이려면
$4 \le \alpha - 3 < 5$
(이때, k가 갖는 값은 1, 2, 3, 4뿐이다.)
$7 \le \alpha < 8$
이고, α는 자연수이므로 $\alpha = 7$
따라서 순서쌍 (α, β)는 $(7, 8)$, $(7, 9)$, $(7, 10)$이다.

▸ (3) $1 = \alpha < \beta \le 10$인 경우
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은

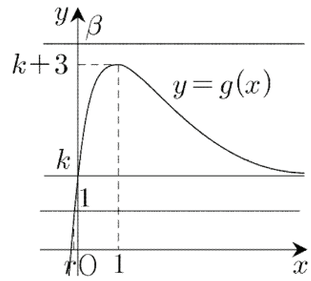


• $k+3 > \beta$인 경우



$g(q) = \beta$, $f(g(q)) = 0$라고 하자.
$x \to q-$일 때,
$-f'(g(x))g'(x) \to -f'(\beta)g'(q)(\neq 0)$
$(\because x \to q-$일 때, $|f(g(x))| = -f(g(x)))$
$x \to q+$일 때,
$f'(g(x))g'(x) \to f'(\beta)g'(q)(\neq 0)$
$(\because x \to q+$일 때, $|f(g(x))| = f(g(x)))$
그러므로 함수 $|f(g(x))|$는 $x=q$에서 미분가능하지 않다.
이는 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

• $1 = \alpha < k+3 \le \beta$인 경우



$g(r) = 1$, $f(g(r)) = 0$이라고 하자.
$x \to r-$일 때,
$f'(g(x))g'(x) \to f'(1)g'(r)(=0)$
$(\because x \to r-$일 때, $|f(g(x))| = f(g(x)))$
$x \to r+$일 때,
$-f'(g(x))g'(x) \to -f'(1)g'(r)(=0)$
$(\because x \to r+$일 때, $|f(g(x))| = -f(g(x)))$
그러므로 함수 $|f(g(x))|$는 $x=r$에서 미분가능하다.
즉, $1 = \alpha < k+3 \le \beta$일 때 실수 전체의 집합에서 함수 $|f(g(x))|$가 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수가 4이려면
$4 \le \beta - 3 < 5$, $7 \le \beta < 8$
이고, β는 자연수이므로 $\beta = 7$이다.
순서쌍 (α, β)는 $(1, 7)$이다.

• $k+3 \le 1 = \alpha$인 경우
이를 만족시키는 자연수 k는 존재하지 않는다.
이상에서 순서쌍 (α, β)는 모두
$(7, 8)$, $(7, 9)$, $(7, 10)$, $(1, 7)$
이다. 그런데 $f(0) = \alpha\beta$이므로
$f(0)$의 최댓값과 최솟값의 합은
$70 + 7 = 77$

답 77

H133 | 답 ⑤

[풀이1]
미분계수의 정의에 의하여
$\lim_{t \to 1+} \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$의 값은 곡선 $y = \frac{2}{x} + \sqrt{3}$ 위의 점 A에서의 기울기의 절댓값이다.
문제에서 주어진 함수의 도함수는
$y' = -\frac{2}{x^2}$ ($\because$ 몫의 미분법)
이므로 구하는 값은 2이다.

답 ⑤

[풀이2]

세 점 A, B, H의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(1,\ 2+\sqrt{3}),\ \mathrm{B}\left(t,\ \frac{2}{t}+\sqrt{3}\right),$

$\mathrm{H}\left(1,\ \frac{2}{t}+\sqrt{3}\right)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{t\to 1+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}=\lim_{t\to 1+}\frac{2-\frac{2}{t}}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{2}{t}=2$$

답 ⑤

H134 | 답 25

[풀이]

직선의 방정식은 $y=(\tan(\sin t))x$이다.

직선과 원의 방정식을 연립하면

$x^2+(\tan^2(\sin t))x^2=e^{2t}$

$1+\tan^2 x=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$이므로

$\frac{x^2}{\cos^2(\sin t)}=e^{2t},\ x^2=e^{2t}\cos^2(\sin t)$

x가 양수이므로

$x=e^t\cos(\sin t)$

이를 직선의 방정식에 대입하면

$y=e^t\sin(\sin t)$

곡선 C의 방정식은

$$\begin{cases}x=e^t\cos(\sin t)\\ y=e^t\sin(\sin t)\end{cases}$$

$t=\pi$일 때, 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(e^{\pi},\ 0)$이다.

$\frac{dx}{dt}=e^t\{\cos(\sin t)-\cos t\sin(\sin t)\}$

$\frac{dy}{dt}=e^t\{\sin(\sin t)+\cos t\cos(\sin t)\}$

매개변수의 미분법에 의하여

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi}=\frac{e^{\pi}(0-1)}{e^{\pi}(1+0)}=-1$

곡선 C 위의 점 $\mathrm{P}(e^{\pi},\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=-(x-e^{\pi})$

이 직선의 x절편과 y절편은 각각 e^{π}, e^{π}이므로

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$a\times e^{b\pi}=\frac{1}{2}e^{2\pi}$

a, b가 유리수이므로 $a=\frac{1}{2},\ b=2$

$\therefore\ 10(a+b)=25$

답 25

H135 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\frac{4x}{2x^2+1}$

$f'(-x)=\frac{4(-x)}{2(-x)^2+1}=-\frac{4x}{2x^2+1}=-f'(x)$

▸ ㄴ. (참)

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=\frac{4-8x^2}{(2x^2+1)^2}=\frac{4(1+\sqrt{2}x)(x-\sqrt{2}x)}{(2x^2+1)^2}$

에서 $f''(x)=0$이면 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f'(x)$는 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 극솟값을 갖는다.

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f'(x)$는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

함수 $f'(x)$는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 최댓값 $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$를 갖는다.

▸ ㄷ. (참)

• (1) $x_1=x_2$인 경우

주어진 부등식의 좌변과 우변의 값은 각각 0이므로, 부등식이 성립한다.

• (2) $x_1<x_2$인 경우

함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.

평균값 정리에 의하여

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$ (단, $x_1<c<x_2$)

인 c가 구간 $(x_1,\ x_2)$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $|f'(x)|\le\sqrt{2}$이므로

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| = |f'(c)| \le \sqrt{2}$$

정리하면

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le \sqrt{2}\,|x_1-x_2|$$

• (3) $x_1 > x_2$인 경우

(2)와 마찬가지의 방법으로 문제에서 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

(1), (2), (3)에서 문제에서 주어진 부등식은 성립한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H136 | 답 ④

[풀이]

조건 (가)에서

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0), \text{ 즉 } f(0)=0 \qquad \cdots ㉠$$

조건 (나)에서

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = 3 \quad (x_1 < x < 0)$$

이므로

$$f'(x_1) = \lim_{x\to x_1+} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \lim_{x\to x_1+} 3 = 3$$

즉, 구간 $(-\infty, 0)$에서 $f'(x)=3$

부정적분을 하면

$$f(x) = \int f'(x)dx = 3x + C$$

(단, C는 적분상수)

$f(0) = C = 0$ ($\because$ ㉠)

이므로 $x \le 0$일 때, $f(x) = 3x$

조건 (가)에서

$x > 0$일 때, $f'(x) = (2ax+a)e^{2x} + 2bx$

이므로

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = a = \lim_{x\to 0-} f'(x), \text{ 즉 } a = 3$$

(물론 미분계수의 정의에서

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

으로 두어도 동일한 결과를 얻는다.)

한편

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\times\frac{1}{2}\times e + \frac{b}{4} = 2e \text{에서 } b = 2e$$

이므로

$$f'(x) = (6x+3)e^{2x} + 4ex$$

$$\therefore\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = 8e$$

답 ④

H137 | 답 12

[풀이1] ★

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 연속이므로

$$f(2) = \lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x-2)$$

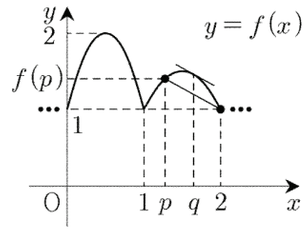
($\because$ 조건 (가)에 의하여

모든 실수 x에 대하여 $f(x) = f(x-2)$이다.)

$$= \lim_{t\to 0+} f(t) = \sin(\pi\times 0)+1 = 1$$

($\because$ 조건 (나))

$1 < p < 2$인 어떤 p에 대하여 $f(p) > 1$이라고 가정하자.



함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[p, 2]$에서 연속이고

열린구간 $(p, 2)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(p)}{2-p} = f'(q)$$

인 실수 q가 열린구간 $(p, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

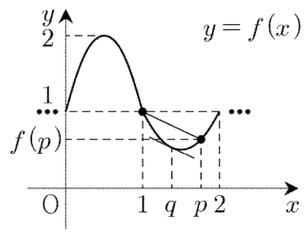
그런데

$$\frac{f(2)-f(p)}{2-p} = \frac{1-f(p)}{2-p} < 0 \text{ 즉, } f'(q) < 0$$

이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $f(p) \le 1$이다.

$1 < p < 2$인 어떤 p에 대하여 $f(p) < 1$이라고 가정하자.



함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, p]$에서 연속이고

열린구간 $(1, p)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(p)-f(1)}{p-1} = f'(q)$$

인 실수 q가 열린구간 $(1, p)$에 적어도 하나 존재한다.

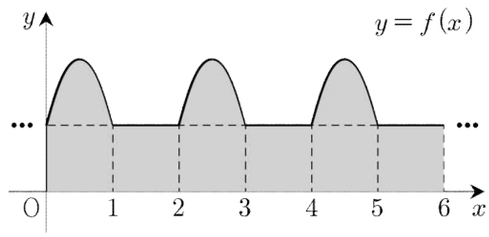
그런데

$\frac{f(p)-f(1)}{p-1}=\frac{f(p)-1}{p-1}<0$ 즉, $f'(q)<0$

이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $f(p)=1$이다.

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



정적분의 치환적분법에 의하여

$\int_0^6 f(x)dx=3\int_0^2 f(x)dx$

$=3\left\{\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx\right\}$

$=3\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)+x\right]_0^1+3\times 1^2$

$=6+\frac{6}{\pi}$

$p=q=6$

$\therefore\ p+q=12$

답 12

[풀이2] 시험장

(가): 함수 $f(x)$의 주기는 2이다.

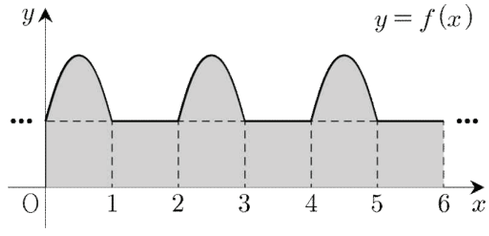
(가)+(나)+(다): 함수 $f(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 1)$을 지나므로 구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)=0$이어야 한다.

즉, 구간 $(1,\ 2)$에서 함수 $f(x)$는 증가할 수 없다.

구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 상수함수이므로

$f(x)=f(1)=1$

함수 $f(x)$의 그래프는



$\therefore\ \int_0^6 f(x)dx=3\int_0^2 f(x)dx$

$=3\left\{\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx\right\}$

$=3\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)+x\right]_0^1+3\times 1^2$

$=6+\frac{6}{\pi}$

$\therefore\ p+q=12$

답 12

H138 | 답 ③

[풀이] ★

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=a\cos x+b\ (a\neq 0)$

함수 $f'(x)$의 그래프가 x축과 만나야 하고, 교점의 좌우에서의 $f'(x)$의 부호가 달라야 하므로

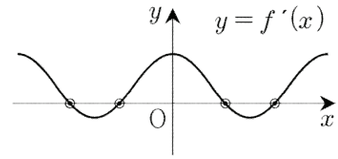
(함수 $f'(x)$의 최댓값)

$\times$(함수 $f'(x)$의 최솟값)

$=(a+b)(-a+b)<0$

정리하면

$\therefore\ a^2>b^2$



위의 그림처럼 곡선 $y=f'(x)$와 x축의 교점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.

답 ③

[참고]

a가 양수일 때, 함수 $f'(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각

$a+b,\ -a+b$

a가 음수일 때, 함수 $f'(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각

$-a+b,\ a+b$

H139 | 답 ④

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(1+2x)e^{2x}-(4x+a+4)e^x$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-(a+2)e^{-\frac{1}{2}}=0$에서 $a=-2$

방정식 $f'(x)=0$은

$(1+2x)e^{2x}-2(2x+1)e^x=0$

$(1+2x)(e^x-2)=0$

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\ln 2$

$x=\ln 2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로

바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\ln 2$에서 극솟값을 갖는다.
따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은
$f(\ln 2)=4\ln 2-2(4\ln 2-2)$
$=4-4\ln 2$
답 ④

H140 | 답 ③

[풀이]

함수 $y=\ln x$의 도함수는 $y'=\frac{1}{x}$이다.

곡선 $y=\ln x$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{t}(x-t)+\ln t$

$y=0$을 대입하여 정리하면

$r(t)=t-t\ln t$

곡선 $y=\ln x$ 위의 점 Q에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2t}(x-2t)+\ln 2t$

$y=0$을 대입하여 정리하면

$s(t)=2t-2t\ln 2t$

함수 $f(t)$의 방정식은

$f(t)=(2\ln 2-1)t+t\ln t$

함수 $f(t)$의 도함수는

$f'(t)=2\ln 2+\ln t$

방정식 $f'(t)=0$을 풀면 $t=\frac{1}{4}$이다.

$t=\frac{1}{4}$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바

뀌므로 함수 $f(t)$는 $t=\frac{1}{4}$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 값은

$f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$

답 ③

H141 | 답 95

[풀이]

$f(x)\neq 0$일 때,

$g'(x)=\frac{\pi(\sin\pi x)f(x)-(1-\cos\pi x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

만약 $f(0)\neq 0$이면 $g'(0)=0$이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 $f(0)=0$이고, $g(0)=\frac{7}{128}\pi^2$이다.

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)\left(=\frac{7}{128}\pi^2\right)$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\pi x}{f(x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\pi x}{(\pi x)^2}\cdot\frac{(\pi x)^2}{f(x)}=\frac{7}{128}\pi^2$, 즉

$\lim_{x\to 0}\frac{(\pi x)^2}{f(x)}=\frac{7}{64}\pi^2$ … (*)

이제 함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=kx^2h(x)$ (단, $k\neq 0$, $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수, $h(0)\neq 0$)

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가지므로

$f'(a)=0$

만약 $f(a)=0(k>0)$이면 $f(x)=kx^2(x-a)^2$에서

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

만약 $f(a)=0(k<0)$이면 $f(x)=kx^2(x-a)^2$에서

$f(1)=k(1-a)^2$, $g(1)=\frac{2}{f(1)}<0$ (즉, $g(1)\neq\frac{2}{7}$)이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $f(a)\neq 0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로

$g'(a)=\frac{\pi(\sin a\pi)f(a)}{\{f(a)\}^2}=0$

$\sin a\pi=0$에서 $\sin 2a\pi=0$, $\cos 2a\pi=1$

한편 $f(2a)\neq 0$이면

$g'(2a)$

$=\frac{\pi(\sin 2\pi a)f(2a)-(1-\cos 2\pi a)f'(2a)}{\{f(2a)\}^2}$

$=0$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 $f(2a)=0$이다.

이상에서 함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=kx^2(x-2a)(x-b)$ (단, b는 상수)

$f'(a)=ka^2(b-2a)=0$에서 $b=2a$이므로

$f(x)=kx^2(x-2a)^2$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가지므로 $k>0$이다.

(*): $\lim_{x\to 0}\frac{(\pi x)^2}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\pi x)^2}{kx^2(x-2a)^2}$

$=\frac{\pi^2}{4ka^2}=\frac{7}{64}\pi^2$, 즉 $ka^2=\frac{16}{7}$ … ㉠

그런데 $g(1)=\frac{2}{f(1)}=\frac{2}{k(1-2a)^2}=\frac{2}{7}$에서

$k(1-2a)^2=7$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\frac{16(1-2a)^2}{7a^2}=7,\ 15a^2-64a+16=0,$

$(15a-4)(a-4)=0$

$a=4(\because \sin a\pi=0),\ k=\frac{1}{7}$

$g(x)=\begin{cases}\frac{7(1-\cos\pi x)}{x^2(x-8)^2} & (x\neq 0,\ x\neq 8)\\ \frac{7}{128}\pi^2 & (x=0,\ x=8)\end{cases}$

$\therefore\ g(-1)=\frac{14}{81}$

$\therefore\ p+q=95$

답 95

H142 | 답 ①

[풀이1] 시험장

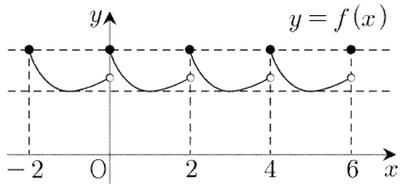
함수 $f(x)$의 주기는 2이다.

a가 정수일 때,

$f(0)=a^2\neq\frac{(2-a)^2}{3}=f(2-)(=f(0-))$

이므로 $f(0)>f(0-)$이어야 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

그리고 구간 $[0,\ 2)$에서 함수 $f(x)$는 극솟값을 가지므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같이 그려져야 한다.



$f(0)>f(0-)$, 즉 $a^2>\frac{(2-a)^2}{3}$

$\Leftrightarrow a^2+2a-2>0$

$\Leftrightarrow a>-1+\sqrt{3},\ a<-1-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow a=\cdots,\ -4,\ -3,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

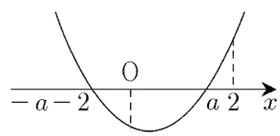
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\frac{2(x-a)(x+a+2)}{(x+1)^2}$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=a$ 또는 $x=-a-2\ (a\neq -a-2)$

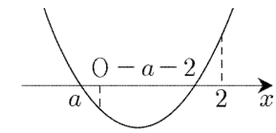
▸ $a>-a-2$인 경우 $(a>-1)$



위의 그림과 같으면 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2)$에서 극솟값을 갖는다.

$-1<a<2$이므로 $a=1$

▸ $a<-a-2$인 경우 $(a<-1)$



위의 그림과 같으면 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2)$에서 극솟값을 갖는다.

$0<-a-2<2$, 즉 $-4<a<-2$이므로

$a=-3$

이상에서 모든 정수 a의 값의 곱은

$1\times(-3)=-3$

답 ①

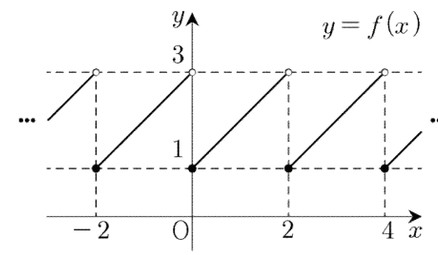
[풀이2]

▸ (1) $a=-1$인 경우

구간 $[0,\ 2)$에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x+1}=x+1\ (\text{단},\ x\neq -1)$

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

▸ (2) $a\neq -1$인 경우

구간 $(0,\ 2)$에서 함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\frac{(x-a)(x+a+2)}{(x+1)^2}$

함수 $f'(x)$의 분자를 $g(x)$로 두자.

이차방정식

$g(x)=0$ 즉, $(x-a)(x+a+2)=0$

의 서로 다른 두 실근은 $a,\ -a-2$이다.

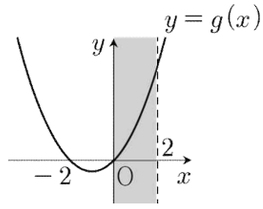
$(\because a=-a-2$이면 $a=-1$이기 때문이다.)

$a>-a-2$이면 $a>-1$이고, (←경우1)

$a<-a-2$이면 $a<-1$이다. (←경우2)

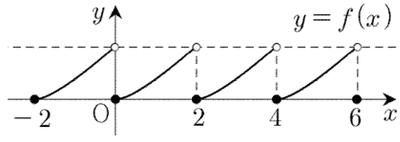
▸ (경우1) a가 0 이상의 정수인 경우

• $a=0$일 때, $g(x)=x(x+2)$



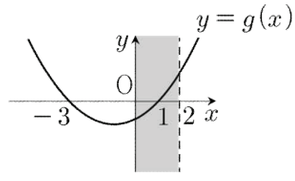
구간 $[0,\ 2)$에서 $g(x)\geq 0$이다.
(단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)
$\Rightarrow$
구간 $[0,\ 2)$에서 $f'(x)\geq 0$이다.
(단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)
$\Rightarrow$
구간 $[0,\ 2)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

함수 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$의 그래프는



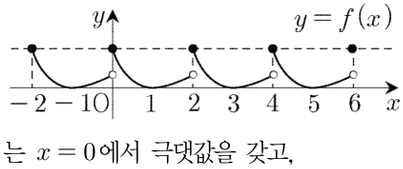
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

• $a=1$일 때, $g(x)=(x-1)(x+3)$



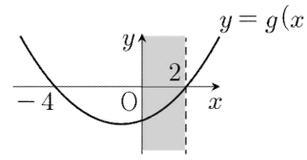
구간 $[0,\ 1]$에서 $g(x)\leq 0$이고,
(단, 등호는 $x=1$일 때 성립한다.)
구간 $(1,\ 2)$에서 $g(x)>0$이다.
$\Rightarrow$
구간 $[0,\ 1]$에서 $f'(x)\leq 0$이고,
(단, 등호는 $x=1$일 때 성립한다.)
구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)>0$이다.
$\Rightarrow$
구간 $[0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$는 감소하고,
구간 $(1,\ 2)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

함수 $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$의 그래프는



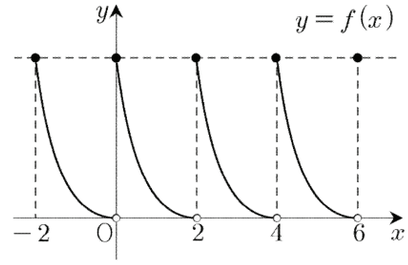
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고,
$x=1$에서 극솟값을 갖는다.

• $a=2$일 때, $g(x)=(x-2)(x+4)$



구간 $[0,\ 2)$에서 $g(x)<0$이다.
$\Rightarrow$
구간 $[0,\ 2)$에서 $f'(x)<0$이다.
$\Rightarrow$
구간 $[0,\ 2)$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

함수 $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$의 그래프는

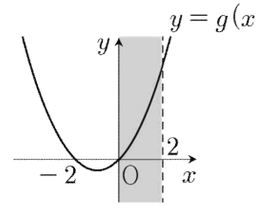


함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖지만,
구간 $(0,\ 2)$에서 극솟값을 갖지 않는다.

• $a\geq 3$일 때에도
$a=2$일 때와 마찬가지의 방법으로
함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 2)$에서 극솟값을 갖지 않음을 보일 수 있다.

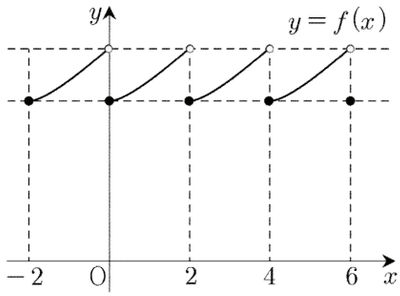
▸ (경우2) a가 -2 이하의 정수인 경우

• $a=-2$일 때, $g(x)=x(x+2)$



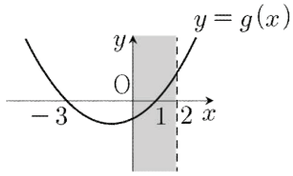
구간 $[0,\ 2)$에서 $g(x)\geq 0$이다.
(단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)
$\Rightarrow$
구간 $[0,\ 2)$에서 $f'(x)\geq 0$이다.
(단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)
$\Rightarrow$
구간 $[0,\ 2)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

함수 $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x+1}$의 그래프는



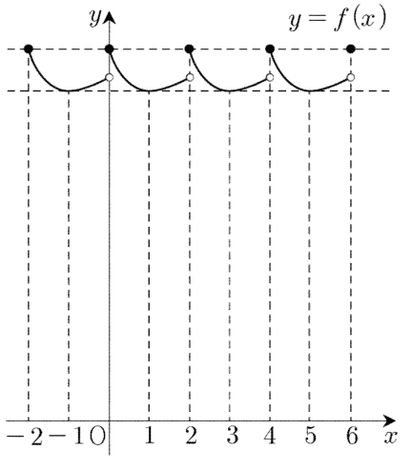
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

• $a=-3$일 때, $g(x)=(x+3)(x-1)$



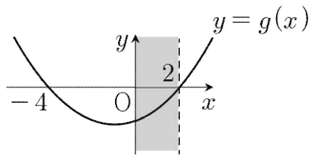
구간 $[0,\ 1]$에서 $g(x)\le 0$이고,
(단, 등호는 $x=1$일 때 성립한다.)
구간 $(1,\ 2)$에서 $g(x)>0$이다.
$\Rightarrow$
구간 $[0,\ 1]$에서 $f'(x)\le 0$이고,
(단, 등호는 $x=1$일 때 성립한다.)
구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)>0$이다.
$\Rightarrow$
구간 $[0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$는 감소하고,
구간 $(1,\ 2)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

함수 $f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{x+1}$의 그래프는



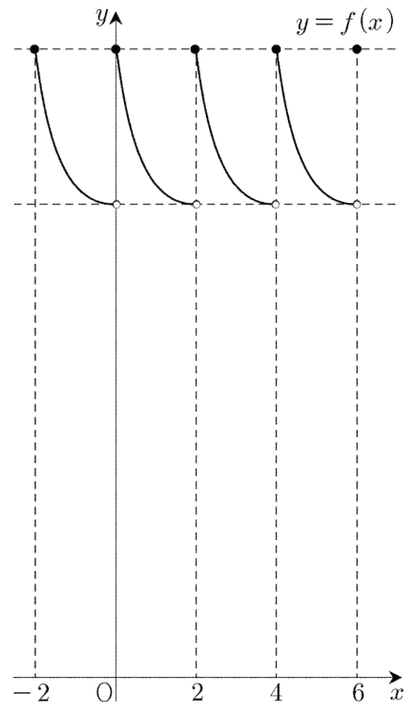
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고,
$x=1$에서 극솟값을 갖는다.

• $a=-4$일 때, $g(x)=(x-2)(x+4)$



구간 $[0,\ 2)$에서 $g(x)<0$이다.
$\Rightarrow$
구간 $[0,\ 2)$에서 $f'(x)<0$이다.
$\Rightarrow$
구간 $[0,\ 2)$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

함수 $f(x)=\dfrac{(x+4)^2}{x+1}$의 그래프는



함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖지만,
구간 $(0,\ 2)$에서 극솟값을 갖지 않는다.

• $a\le -5$일 때에도
$a=-4$일 때와 마찬가지의 방법으로
함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 2)$에서 극솟값을 갖지 않음을 보일 수 있다.

이상에서 문제의 조건을 모두 만족시키는 정수 a는 1 또는 -3이다.
따라서 구하는 값은 -3이다.

답 ①

H143 | 답 ①

[풀이]

점 $(2,\ 2)$가 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이므로

$g''(2)=0,\ g(2)=2$

함수 $h(x)$의 도함수와 이계도함수는

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$h''(x)=f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)$

문제에서 주어진 등식은

$$\frac{h''(2)}{f''(2)}=\frac{f''(g(2))\{g'(2)\}^2+f'(g(2))g''(2)}{f''(2)}$$

$$=\frac{f''(2)\{g'(2)\}^2+f'(2)\times 0}{f''(2)}$$

$=\{g'(2)\}^2=4$, 즉 $g'(2)=2\ (\because g'(x)>0)$

$\therefore\ h'(2)=f'(g(2))g'(2)$

$=f'(2)g'(2)=4\times 2=8$

답 ①

H144 | 답 ③

[풀이]

조건 (가)에서 함수 $g'(x)$가 기함수(원점에 대하여 대칭인 함수)이므로 함수 $g(x)$는 우함수(y축에 대하여 대칭인 함수)이다.

그런데 함수 $y=\sin x$가 기함수이므로 함수 $f(x)$가 우함수이여야 함수 $g(x)=\sin(f(x))$가 우함수일 수 있다.

즉, $a=0$이고,

$f(x)=x^2+b$ (단, $0<b<\frac{\pi}{2}$)

함수 $g(x)$의 도함수와 이계도함수는 각각

$g'(x)=2x\cos(x^2+b)$

$g''(x)=2\cos(x^2+b)-4x^2\sin(x^2+b)$

조건 (나)에 의하여

$g''(k)=2\cos(k^2+b)-4k^2\sin(k^2+b)=0$

즉, $\tan(k^2+b)=\frac{1}{2k^2}$ … ㉠

그리고 $2kg(k)=\sqrt{3}g'(k)$에서

$2k\sin(k^2+b)=2\sqrt{3}k\cos(k^2+b)$

즉, $\tan(k^2+b)=\sqrt{3}$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1}{2k^2}=\sqrt{3},\ k^2=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

㉡에서 $k^2+b=\frac{\pi}{3}$이므로

$b=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore\ a+b=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

답 ③

H145 | 답 ③

[풀이]

주어진 함수의 도함수는

$y'=(x-n+1)e^x$

방정식 $y'=0$을 풀면 $x=n-1$

$x=n-1$의 좌우에서 y'의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 문제에서 주어진 함수는 $x=n-1$에서 극솟값을 갖는다.

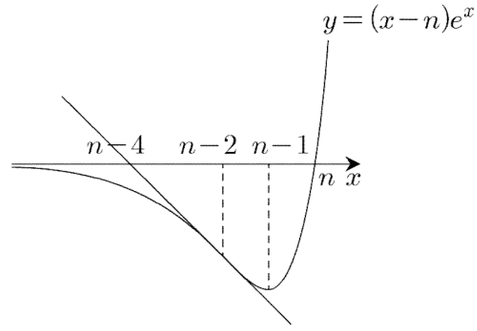
주어진 함수의 이계도함수는

$y''=(x-n+2)e^x$

방정식 $y''=0$을 풀면 $x=n-2$

$x=n-2$의 좌우에서 y''의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 $(n-2,\ -2e^{n-2})$는 문제에서 주어진 함수의 그래프의 변곡점이다.

함수 $y=(x-n)e^x$의 그래프는



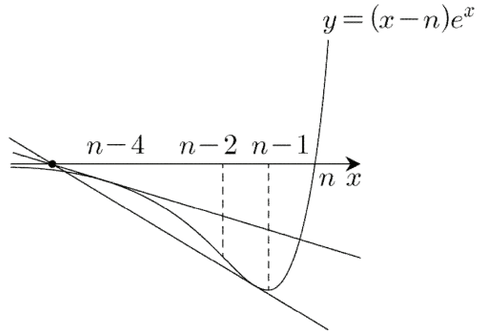
곡선 $y=(x-n)e^x$의 변곡점에서의 접선의 방정식은

$y=-e^{n-2}(x-n+2)-2e^{n-2}$

이 직선의 x절편은 $n-4$이다.

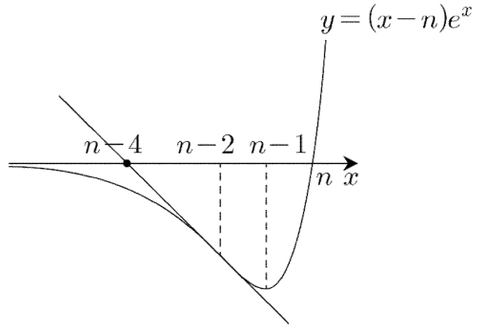
a의 값을 변화시키면서 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-n)e^x$에 접선을 그어보자.

- $a<n-4$



위의 그림처럼 접선의 개수는 2이다.

• $a=n-4$

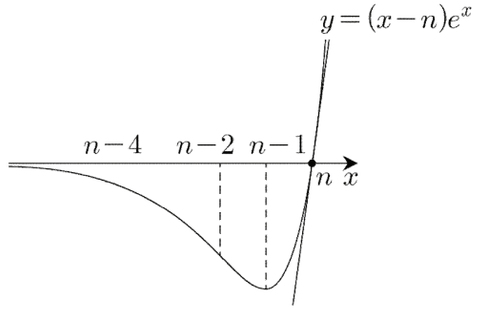


위의 그림처럼 접선의 개수는 1이다.

• $n-4<a<n$

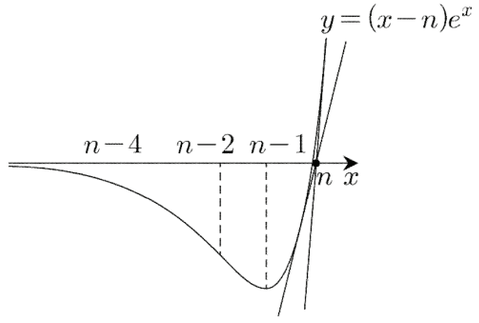
접선을 그을 수 없다.

• $a=n$



위의 그림처럼 접선의 개수는 1이다.

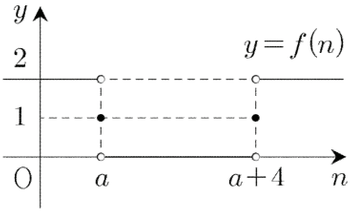
• $a>n$



위의 그림처럼 접선의 개수는 2이다.

이상에서 함수 $f(n)$의 방정식은

$$f(n)=\begin{cases}2 & (n>a+4)\\ 1 & (n=a+4)\\ 0 & (a<n<a+4)\\ 1 & (n=a)\\ 2 & (n<a)\end{cases}$$



▸ ㄱ. (참)

$a=0$, $n=4$이면 $f(4)=1$

▸ ㄴ. (거짓)

$f(n)=1$인 정수 n은 $a+4$, a이므로 항상 2개다.

▸ ㄷ. (참)

$f(n)$이 가질 수 있는 값은 0, 1, 2뿐이다.

$\sum_{n=1}^{5} f(n)=5$이므로 가능한 경우는 다음과 같다.

$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=2$,

$f(5)=2$인 경우는 $3=a+4$, $a=-1$

$f(1)=2$, $f(2)=2$, $f(3)=1$, $f(4)=0$,

$f(5)=0$인 경우는 $3=a$, $a=3$

따라서 $a=-1$ 또는 $a=3$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

H146 | 답 9

[풀이]

접선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 접선이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(x-1)e^{2-x}$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

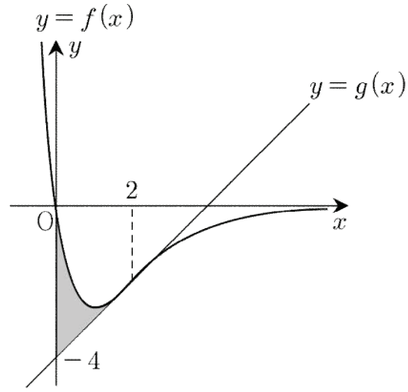
$f''(x)=(2-x)e^{2-x}$

$f''(x)=0$에서 $x=2$

$x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 점 $(2,\ -2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. 이 점에서의 접선의 방정식은

$g(x)=x-4$

함수 $f(x)$의 그래프는



구하는 넓이를 S라고 하면

$$S=\int_0^2\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^2(-xe^{2-x}-x+4)dx$$

$$=\left[xe^{2-x}+e^{2-x}-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_0^2=9-e^2$$

답 9

H147 | 답 ⑤

[풀이1] ★

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 1로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 모두 원점을 지나므로

$f(0)=g(0)=0$

직선 $y=g(x)$가 점 $(b,\ f(b))$에서 함수 $f(x)$에 접하므로

$f(b)=g(b)$, $f'(b)=g'(b)$

점 $(a,\ g(a))$가 함수 $f(x)$의 변곡점이므로

$f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀐다.

▸ ㄱ. (참)

함수 $y=f(x)-g(x)$의 이계도함수는

$y''=f''(x)-g''(x)=f''(x)$

($\because$ 모든 일차함수의 이계도함수는 $y=0$이다.)

$y''|_{x=a}=f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 y''의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀐다.

따라서 보기 ㄱ에서 주어진 명제는 참이다.

▸ ㄴ. (참)

인수정리에 의하여

$f(x)-g(x)=x(x-b)(x-c)$

(단, c는 상수)

함수 $f(x)-g(x)$의 도함수는

$f'(x)-g'(x)=(x-b)(x-c)$

$+x(x-c)+x(x-b)$

이므로

$f'(b)-g'(b)=b(b-c)=0$

에서 $c=b(\because b\neq 0)$

함수 $f(x)-g(x)$의 방정식은

$f(x)-g(x)=x(x-b)^2$

함수 $f(x)-g(x)$의 도함수는

$f'(x)-g'(x)=(x-b)(3x-b)$

방정식 $f'(x)-g'(x)=0$을 풀면

$x=b$ 또는 $x=\frac{b}{3}$

$x=\frac{b}{3}$의 좌우에서 $f'(x)-g'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\frac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

▸ ㄷ. (참)

함수 $f(x)-g(x)$의 이계도함수는

$f''(x)-g''(x)=6x-4b$

방정식 $f''(x)-g''(x)=0$을 풀면

$x=\frac{2}{3}b$

보기 ㄱ의 결과에 의하여 $a=\frac{2}{3}b$이므로

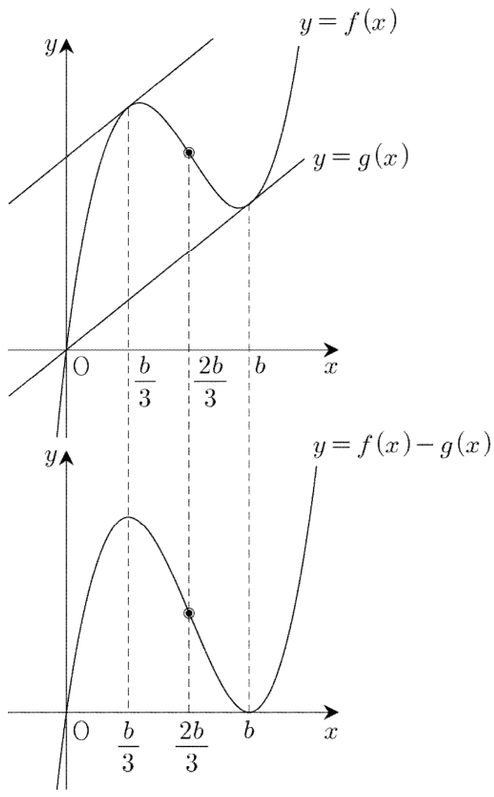
$$\frac{b-a}{a}=\frac{\frac{3}{2}a-a}{a}=\frac{1}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[풀이2] 시험장

수평화와 삼차함수의 비율관계를 이용하여 문제를 해결하자.



(단, ◉는 변곡점이다.)

▸ ㄱ. (참)

곡선 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표와 같으므로 a이다.

($\because$ 모든 일차함수의 이계도함수는 $y=0$이다.)

▸ ㄴ. (참)

위의 그림에서 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\dfrac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

▸ ㄷ. (참)

위의 그림에서

$f'\left(\dfrac{b}{3}\right)-g'\left(\dfrac{b}{3}\right)=0$이고, $a=\dfrac{2b}{3}$이다.

$\therefore\ \dfrac{b-a}{a}=\dfrac{b}{a}-1=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H148 | 답 3

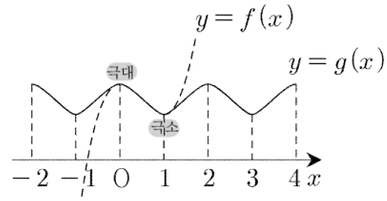
[풀이1] 시험장

(가)+(다): 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

$\Rightarrow f'(1)=-f'(2-1)$, 즉 $f'(1)=0$

(나)+(다): 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

$\Rightarrow f'(0)=-f'(0)$, 즉 $f'(0)=0$



위의 그림에서 곡선 $y=g(x)$는 직선 $x=n$에 대하여 대칭이다. (단, n은 정수)

인수정리에 의하여

$f'(x)=3x(x-1)$

부정적분을 하면

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+C$

$\therefore\ g(6)-g(3)=g(0)-g(1)$

$=f(0)-f(1)=C-\left(-\dfrac{1}{2}+C\right)=\dfrac{1}{2}$

답 3

[풀이2] ★

조건 (다)에서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 미분가능하다.

• $f'(1)=0$임을 보이자.

조건 (다)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능해야 한다.

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

($\because$ 다항함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이다.)

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(2-x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}\times(-1)=-f'(1)$

($t=2-x$로 두면 $x\to1+$일 때, $t\to1-$이다.)

($\because$ 다항함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이다.)

미분가능성의 정의에 의하여

$f'(1)=-f'(1)$ 즉, $f'(1)=0$

• $f'(0)=0$임을 보이자.

조건 (다)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능해야 한다.

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

($\because$ 다항함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이다.)

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x+2)-g(2)}{x-0}$

($\because$ 조건(나)에서 $g(x)=g(x+2)$, $g(0)=g(2)$)

$=\lim\limits_{t\to2-}\dfrac{g(t)-g(2)}{t-2}$

($x+2=t$로 두면 $x\to0-$일 때, $t\to2-$이다.)

$$= \lim_{t \to 2-} \frac{f(2-t)-f(0)}{t-2}$$

$$= \lim_{s \to 0+} \frac{f(s)-f(0)}{s-0} \times (-1) = -f'(0)$$

$(2-t=s$로 두면 $t \to 2-$일 때, $s \to 0+$이다.)

($\because$ 다항함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이다.)

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x \to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

즉, $f'(0) = -f'(0)$

따라서 $f'(0) = 0$이다.

이상을 정리하면

$f'(0) = f'(1) = 0$

(삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $(0,\ f(0))$은 극대점이고, $(1,\ f(1))$은 극소점이다.)

인수정리에 의하여

$f'(x) = 3x(x-1)$

($\because$ 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 3이다.)

부정적분을 하면

$$f(x) = \int f'(x)dx = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$$

(단, C는 적분상수)

조건 (나)에 의하여

$g(6) = g(0+2\times3) = g(0)$,

$g(3) = g(1+2\times1) = g(1)$

이므로

$\therefore\ g(6)-g(3) = g(0)-g(1)$

$= f(0)-f(1)$ ($\because$ 조건(가))

$$= C - \left(-\frac{1}{2} + C\right) = \frac{1}{2}$$

$p=2,\ q=1$

$\therefore\ p+q=3$

답 3

[참고] ★

다음과 같은 방법으로 $f'(0) = f'(1) = 0$임을 보여도 좋다.

$1 \le x < 2$일 때, $g(x) = f(2-x)$

$x = t+2$로 두면

$-1 \le t < 0$일 때, $g(t+2) = f(-t)$

즉, $g(t) = f(-t)$ ($\because$ 조건(나))

함수 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} f(-x) & (-1 \le x < 0) \\ f(x) & (0 \le x < 1) \\ f(2-x) & (1 \le x < 2) \end{cases}$$

구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $g(x)$의 그래프는 아래의 순서대로 그리면 된다.

❶ 구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 그래프를 그린다.

❷ 구간 $[0,\ 1]$의 함수 $f(x)$의 그래프를 직선 $x=1$에 대하여 대칭이동하면 구간 $[1,\ 2]$의 함수 $f(2-x)$의 그래프가 된다.

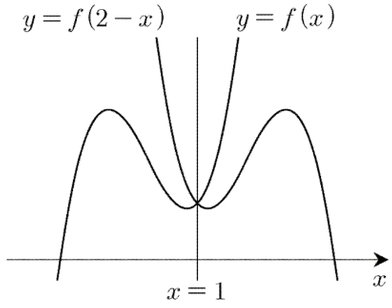
❸ 구간 $[0,\ 1]$의 함수 $f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 구간 $[-1,\ 0]$의 함수 $f(-x)$의 그래프가 된다.

그리고 구간 $[0,\ 2]$의 함수 $g(x)$의 그래프를 구간 $\cdots$, $[-2,\ 0]$, $[2,\ 4]$, $[4,\ 6]$, $\cdots$ 에서도 동일하게 그리면, 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 얻는다.

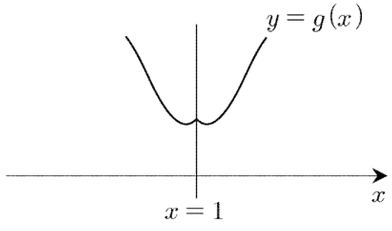
우선 $f'(1) = 0$임을 보이자.

$f'(1) \neq 0$라고 가정하자.

두 함수 $f(x)$, $f(2-x)$의 그래프는



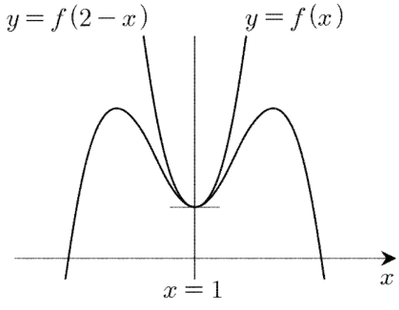
함수 $g(x)$의 그래프의 일부는



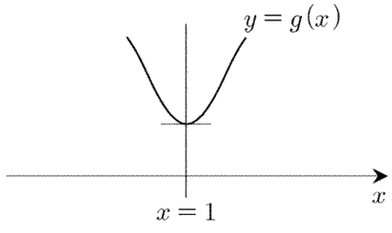
위의 그림처럼 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $f'(1) = 0$이다.

$f'(1) = 0$일 때, 두 함수 $f(x)$, $f(2-x)$의 그래프는



함수 $g(x)$의 그래프의 일부는



위의 그림처럼 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
마찬가지의 방법으로 $f'(0)=0$임을 보일 수 있다.
삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f'(0)=0,\ f'(1)=0$
이므로 점 $(0,\ f(0))$은 함수 $f(x)$의 극대점이고,
점 $(1,\ f(1))$은 함수 $f(x)$의 극소점이다.

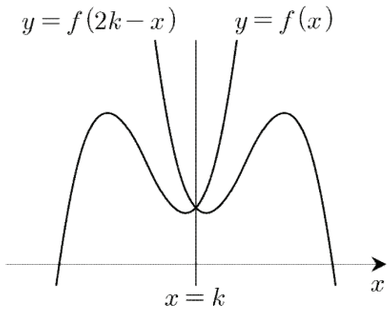
H149 | 답 13

[풀이1] 시험장
함수 $g(x)$는 $x=k$에 대하여 대칭이고, 미분가능하므로
$g'(k)=0$, 즉 $f'(k)=0$
$(\because f'(k)=-f'(k))$
방정식 $f'(x)=0$은
$3x^2-2x-9=0$
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{2}{3}$이다.
$\therefore\ p^2+q^2=13$
답 13

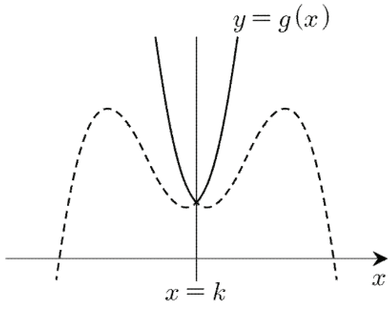
[풀이2] ★
다항함수 $f(x)$와 $f(2k-x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
두 구간 $(-\infty,\ k)$, $(k,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하다.
실수 전체의 집합에서 $g(x)$가 미분가능하므로
함수 $g(x)$는 $x=k$에서 미분가능해야 한다.
$$\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=f'(k)$$
$(\because$ 다항함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이다.$)$
$$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{f(2k-x)-f(k)}{x-k}$$
$$=\lim_{t\to k+}\frac{f(t)-f(k)}{t-k}\times(-1)=-f'(k)$$
$(t=2k-x$로 두면 $x\to k-$일 때, $t\to k+$이다.$)$
$(\because$ 다항함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이다.$)$
미분가능성의 정의에 의하여
$f'(k)=-f'(k)$ 즉, $f'(k)=0$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2-2x-9$
이차방정식
$f'(x)=0$ $\cdots(*)$
의 판별식을 D라고 하면
$D/4=(-1)^2-3\times(-9)=28>0$
이차방정식 (*)은 서로 다른 두 실근을 가지므로
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여
$\frac{q}{p}=\frac{2}{3}$ 즉, $p=3,\ q=2$
$\therefore\ p^2+q^2=13$
답 13

[참고1]
다음과 같은 방법으로 $f'(k)=0$을 유도해도 좋다.
함수 $g(x)$의 도함수는
$$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (x>k)\\ -f'(2k-x) & (x<k)\end{cases}$$
$(\because$ 합성함수의 미분법$)$
함수 $g(x)$가 $x=k$에서 미분가능해야 하므로
$\lim_{x\to k-}g'(x)=\lim_{x\to k+}g'(x)$ 즉, $-f'(k)=f'(k)$
정리하면
$\therefore\ f'(k)=0$

[참고2]
다음과 같은 방법으로 $f'(k)=0$을 유도해도 좋다.
이차방정식 (*)은 서로 다른 두 실근을 가지므로 삼차함수 $f(x)$는 극값을 가진다. (다시 말하면 극댓값과 극솟값이 각각 1, 1개씩이다.)
함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $x=k$에 대하여 대칭이동하면 함수 $y=f(2k-x)$의 그래프가 된다.
• (1) $f'(k)\neq0$인 경우
두 함수 $f(x)$, $f(2k-x)$의 그래프는



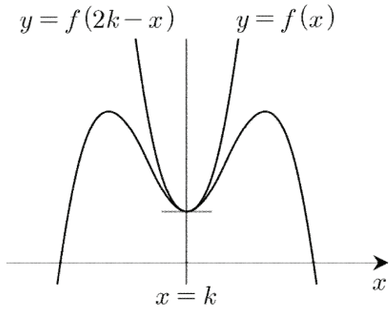
함수 $g(x)$의 그래프는



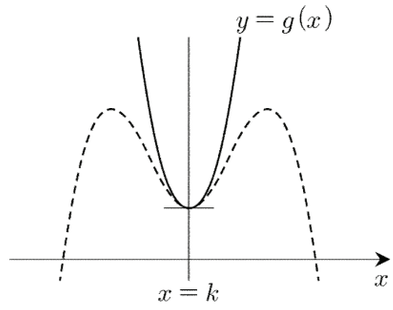
위의 그림에서 함수 $g(x)$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

• (2) $f'(k)=0$인 경우

두 함수 $f(x)$, $f(2k-x)$의 그래프는



함수 $g(x)$의 그래프는



위의 그림에서 함수 $g(x)$는 $x=k$에서 미분가능하다.

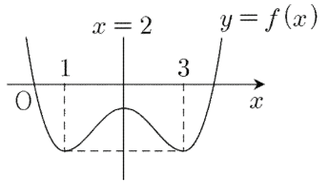
따라서 $f'(k)=0$이어야 한다.

H150 | 답 64

[풀이1] 시험장

(가): 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

(가)+(나): 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖고, $x=2$에서 극댓값을 갖는다.



인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)-f(1)=(x-1)^2(x-3)^2$

곡선 $y=f(x)$는 원점을 지나므로

$f(0)-f(1)=9$, $f(1)=-9$

$a=f(2)=-8$

$\therefore\ a^2=64$

답 64

[풀이2]

조건 (가)에 의하여

곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

그리고 주어진 조건에 의하여

곡선 $y=f(x)$는 원점을 지난다.

조건 (가)에서 주어진 항등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(2+x)=-f'(2-x)$

($\because$ 합성함수의 미분법)

정리하면

$$\frac{f'(2+x)+f'(2-x)}{2}=0$$

곡선 $y=f'(x)$는 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

그런데 조건 (나)에서 $f'(1)=0$이므로

곡선 $y=f'(x)$는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

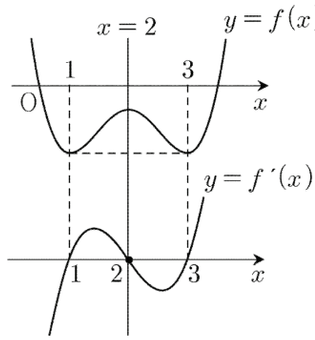
두 점 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$은

점 $(2,\ 0)$에 대하여 서로 대칭이므로

곡선 $y=f'(x)$는 점 $(3,\ 0)$을 지난다.

즉, $f'(3)=0$이다.

두 함수 $f(x)$, $f'(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



(단, ●는 변곡점이다.)

$f(1)=f(3)=k$ (단, k는 상수),

$f'(1)=f'(3)=0$

이므로 인수정리에 의하여

$f(x)-k=(x-1)^2(x-3)^2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-1)^2(x-3)^2+k$

곡선 $y=f(x)$는 원점을 지나므로

$f(0)=9+k=0$에서 $k=-9$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-1)^2(x-3)^2-9$

$a=f(2)=-8$

$\therefore\ a^2=64$

답 64

H151 | 답 ④

[풀이1] 시험장

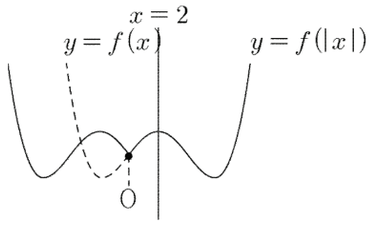
$f(2+x)=f(2-x)$

$\Rightarrow$ 함수 $f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$

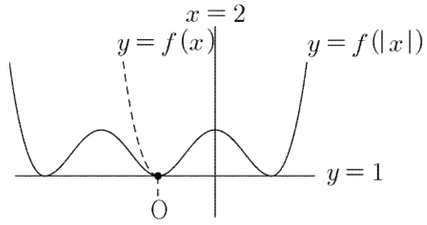
두 함수 $f(x)$, $f(|x|)$의 그래프는

• (경우1) ×



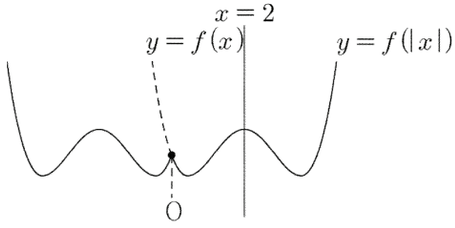
곡선 $y=f(|x|)$와 어떤 x축에 평행한 직선도 서로 다른 3개의 점에서 만날 수 없다.

• (경우2) ○



위의 그림처럼 $f'(0)=0$, $f(0)=1$이면 곡선 $y=f(|x|)$와 직선 $y=1$은 서로 다른 3개의 점에서 만난다.

• (경우3) ×



곡선 $y=f(|x|)$와 어떤 x축에 평행한 직선도 서로 다른 3개의 점에서 만날 수 없다.

따라서 (경우2)만이 가능하다.

인수정리에 의하여

$f(x)-1=x^2(x-4)^2$

극댓값: $f(2)=17$

답 ④

[풀이2] ★

모든 실수 x에 대하여

$f(2+x)=f(2-x)$

가 성립하므로

함수 $f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

합성함수의 미분법에 의하여

$f'(2+x)=-f'(2-x)$

정리하면

$\dfrac{f'(2+x)+f'(2-x)}{2}=0$

모든 실수 x에 대하여 위의 등식이 성립하므로

함수 $f'(x)$는 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

함수 $f'(x)$가 극값을 갖지 않는다고 가정하자.

삼차함수 $f'(x)$는 증가함수이므로

구간 $(-\infty,\ 2)$에서 $f'(x)<0$이고,

구간 $(2,\ \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

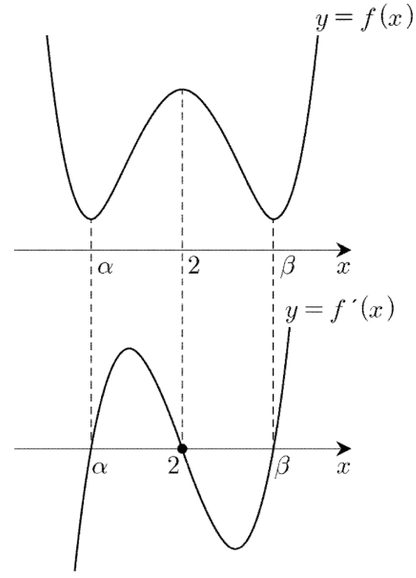
그러므로 $f(2)<f(0)$이다.

이는 가정에 모순이다.

따라서 함수 $f'(x)$는 극값을 갖는다.

다시 말하면 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 이때, 세 실근 중에서 2가 아닌 두 실근을 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하자.

두 함수 $f(x)$, $f'(x)$의 그래프는



(단, $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=2$이다.)

다음과 같은 필요충분조건을 생각하자.

$f(|x|)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t)=1 \\ t=|x| \end{cases}$

$t<0$일 때, $t=|x|$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

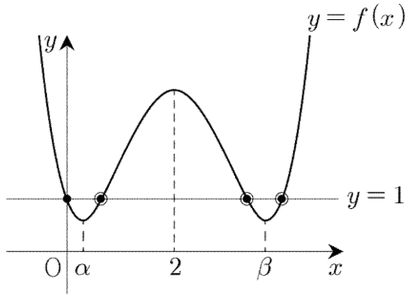
$t=0$일 때, $t=|x|$을 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수는 1이다. $(x=0)$

$t>0$일 때, $t=|x|$을 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수는 2이다. $(x=-t$ 또는 $x=t)$

방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로, 이

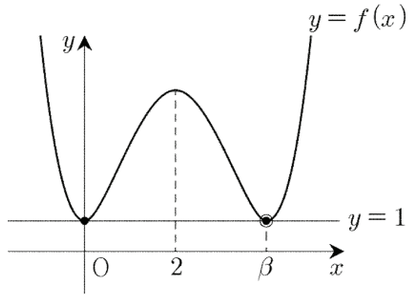
방정식은 0을 반드시 실근으로 가져야 한다. 즉, $f(0)=1$이다.

• (1) $0<\alpha<2$인 경우



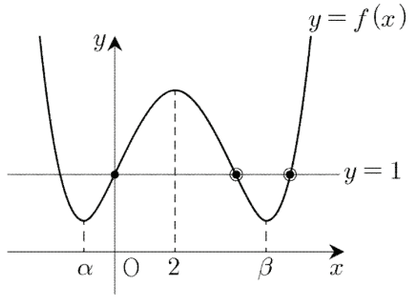
방정식 $f(t)=1$을 만족시키는 t는 0 또는 서로 다른 세 양의 실수이다. 따라서 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 $1+2\times3=7$이다.

• (2) $\alpha=0$인 경우



방정식 $f(t)=1$을 만족시키는 t는 0 또는 하나의 양의 실수이다. 따라서 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 $1+2\times1=3$이다.

• (3) $\alpha<0$인 경우



방정식 $f(t)=1$을 만족시키는 t는 0 또는 하나의 음의 실수 또는 서로 다른 두 양의 실수이다. 따라서 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 $1+0+2\times2=5$이다.

(1), (2), (3)에서 $\alpha=0$이다.

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=2$에서 $\beta=4$이다.

인수정리에 의하여

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^2(x-4)^2+1$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 구하는 값은

$f(2)=17$

답 ④

H152 | 답 ⑤

[풀이] ★

$h(x)=f(x)-g(x)$, $\alpha+1=\beta$로 두고

두 조건 (가), (나)를 다시 쓰면

$h(\alpha)=h(\beta)=0$, $h'(\alpha)=h'(\beta)=0$

인수정리에 의하여

$h(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

함수 $h(x)$의 이계도함수는

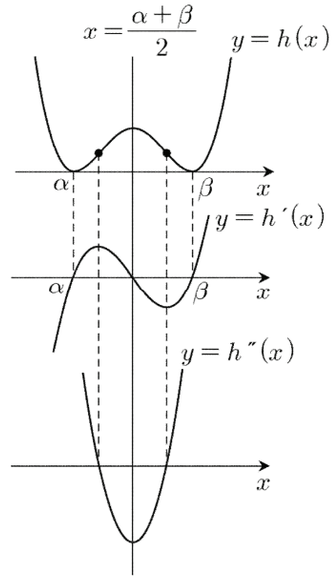
$h''(x)=12x^2-4(3\alpha+3\beta)x$

$+2(\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta)$

이차함수 $h''(x)$의 대칭축은

$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ …㉠

세 함수 $h(x)$, $h'(x)$, $h''(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



이차함수 $g(x)$의 이계도함수 $g''(x)$는 상수함수이므로

$h''(x)=f''(x)-g''(x)=f''(x)-$(상수함수)

이다. 따라서 두 이차함수 $h''(x)$, $f''(x)$의 대칭축은 일치한다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x^3-18x^2+24x-8$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=12x^2-36x+24$

이차함수 $f''(x)$의 대칭축은

$x=\frac{3}{2}$ … ㉡

㉠=㉡이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}$ 즉, $\frac{2\alpha+1}{2}=\frac{3}{2}$

풀면 $\alpha=1$, $\beta=\alpha+1=2$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=(x-1)^2(x-2)^2$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=-x^2+4x-3$

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 정적분의 공식에 의하여

$S_1=\int_1^2|f(x)-g(x)|dx$

$=\int_1^2(x-1)^2(x-2)^2dx$

$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$

($\because$ 정적분의 치환적분법)

$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$

($\because$ 곡선 $y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$은 y축에 대하여 대칭이다.)

$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}\right)dx$

$=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{16}x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{30}$

$S_2=\int_1^3|g(x)|dx$

$=\int_1^3-(x-1)(x-3)dx$

$=\frac{1}{6}(3-1)^3=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{30}}=40$

답 ⑤

[참고]

함수 $h(x)$의 방정식을 유도하면서 생략된 계산과정은 다음과 같다.

$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고,

$h(\alpha)=h(\beta)=0$이므로

인수정리에 의하여

$h(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$

(단, $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=(x-\beta)Q(x)+(x-\alpha)Q(x)$

$+(x-\alpha)(x-\beta)Q'(x)$

$h'(\alpha)=(\alpha-\beta)Q(\alpha)=0$,

$h'(\beta)=(\beta-\alpha)Q(\beta)=0$

그런데 $\alpha\neq\beta$이므로

$Q(\alpha)=0$, $Q(\beta)=0$

인수정리에 의하여

$Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

이므로

$h(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

H153 | 답 ⑤

[풀이1]

f: 기함수, g: 우함수

$h(x)=f(x)+xg(x)$

=(기함수)+(기함수)×(우함수)

=(기함수)+(기함수)

=(기함수)

따라서 $h(x)$는 기함수이다.

기함수의 도함수는 우함수이므로

$h'(x)$는 우함수이다.

우함수의 도함수는 기함수이므로

$h''(x)$는 기함수이다.

▶ ㄱ. (참)

연속인 기함수는 항상 원점을 지나므로

$h(0)=0$

▶ ㄴ. (참)

$h'(x)$는 우함수이므로

$h'(-x)=h'(x)$

▶ ㄷ. (참)

기함수 $h''(x)$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가지므로

이 함수는 $x=-1$에서 극솟값 -1을 갖는다. 왜냐하면 모든 기함수는 원점에 대하여 대칭이기 때문이다. 그리고 $h''(x)$는 연속함수이므로 $h''(0)=0$이다.

이상을 정리하면

$h''(1)=1$, $h''(0)=0$, $h''(-1)=-1$

이므로 세 수 1, 0, -1은 방정식 $h''(x)-x=0$의 실근이다. 따라서 이 방정식은 적어도 3개 이상의 서로 다른 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[풀이2] 시험장

함수 $f(x)$의 그래프는 원점 대칭이고,

함수 $g(x)$의 그래프는 y축 대칭이다.

함수 $f(x)$의 그래프가 원점 대칭이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 반드시 지난다.

즉, $f(0)=0$

▸ ㄱ. (참)

$h(0)=f(0)+0g(0)=0$

▸ ㄴ. (참)

문제에서 주어진 등식의 양변을 미분하면

$-f'(-x)=-f'(x)$ 즉, $f'(-x)=f'(x)$

$-g'(-x)=g'(x)$ 즉, $g'(-x)=-g'(x)$

($\because$ 합성함수의 미분법)

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=f'(x)+g(x)+xg'(x)$

$h'(-x)$

$=f'(-x)+g(-x)-xg'(-x)$

$=f'(x)+g(x)+xg'(x)$

$=h'(x)$

$\therefore\ h'(-x)=h'(x)$

▸ ㄷ. (참)

보기 ㄴ의 등식의 양변을 미분하면

$h''(-x)=-h''(x)$

($\because$ 합성함수의 미분법)

함수 $h''(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(함수 $h''(x)$의 그래프는 원점을 반드시 지난다.)

함수 $h''(x)$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가지므로

함수 $h''(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -1을 가진다.

이상을 정리하면

$h''(-1)=-1,\ h''(0)=0,\ h''(1)=1$

세 실수 -1, 0, 1은 방정식 $h''(x)-x=0$의 실근이므로

보기 ㄷ에서 주어진 명제는 참이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고]

기함수: 원점 대칭인 함수

우함수: y축 대칭인 함수

다음이 성립한다.

▸ (1) 사칙연산 관련

(기함수)$\pm$(기함수)=(기함수)

(우함수)$\pm$(우함수)=(우함수)

(기함수)$\times$(우함수)=(기함수)

(기함수)$\div$(우함수)=(기함수)

▸ (2) 도함수 관련

기함수의 도함수는 우함수이다.

우함수의 도함수는 기함수이다.

H154 | 답 ④

[풀이]

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.)

조건 (다)에 의하여

구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로

$0<x<1$인 x에 대하여

$f(0)>f(x)>f(1)$

즉, $0>f(x)>-1$ ($\because$ 조건(나))

조건 (다)에 의하여

구간 $(1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로

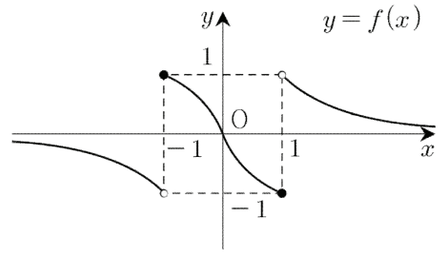
$x>1$인 x에 대하여

$f(x)<1=\lim\limits_{x\to1+}f(x)$ 즉, $f(x)<1$ ($\because$ 조건(나))

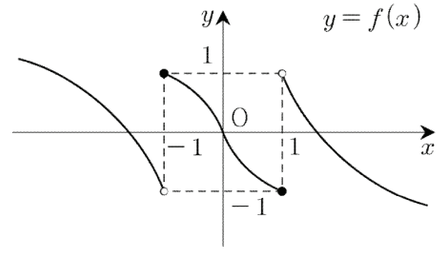
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

• x축과 만나지 않는 경우

(제1사분면에서 점근선 $y=k(\geq0)$을 갖는다.)



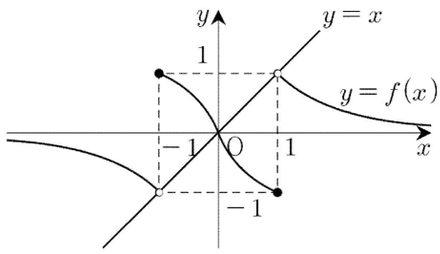
• x축과 만나는 경우



▸ ㄱ. (참)

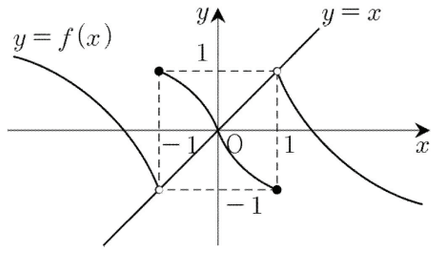
• x축과 만나지 않는 경우

(제1사분면에서 점근선 $y=k(\geq0)$을 갖는다.)



위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 원점에서 만난다.

• x축과 만나는 경우



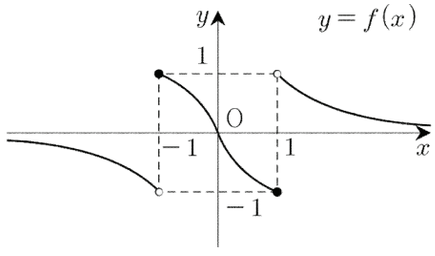
위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 원점에서 만난다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 한 점에서 만난다.

▸ ㄴ. (거짓)

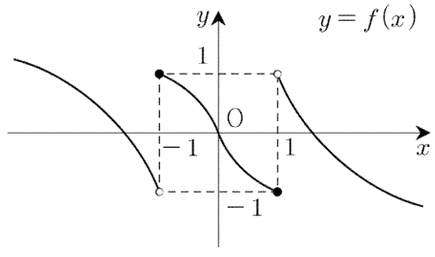
• x축과 만나지 않는 경우

(제1사분면에서 점근선 $y=k(\geq 0)$을 갖는다.)



곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 개수는 1이다.

• x축과 만나는 경우

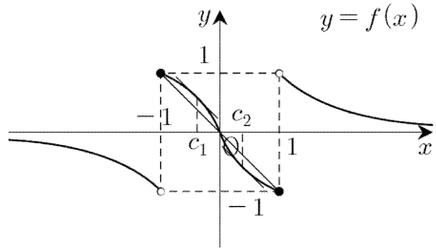


곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 개수는 3이다.

▸ ㄷ. (참)

• x축과 만나지 않는 경우

(제1사분면에서 점근선 $y=k(\geq 0)$을 갖는다.)



함수 $f(x)$가 구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고

구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=-1=f'(c_1)$$

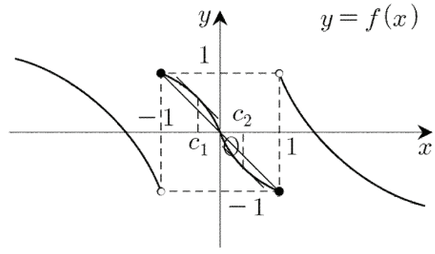
인 c_1이 구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

마찬가지의 이유로

$f'(c_2)=-1$인 c_2가 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f'(\alpha)=-1$인 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

• x축과 만나는 경우



마찬가지의 이유로

$f'(\alpha)=-1$인 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

H155 | 답 ③

[풀이]

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

조건 (가)에서 주어진 등식에서

$f'(x)=-f'(-x)$

($\because$ 합성함수의 미분법)

$x<0$일 때, $-x>0$이므로

$f'(x)=-f'(-x)<0$($\because$ 조건(나))

구간 $(-\infty,\ 0)$에서 함수 $f(x)$는 감소하고,

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

미분가능한 함수는 연속함수이므로

함수 $f(x)$는 연속함수이다.

함수의 연속의 정의에 의하여

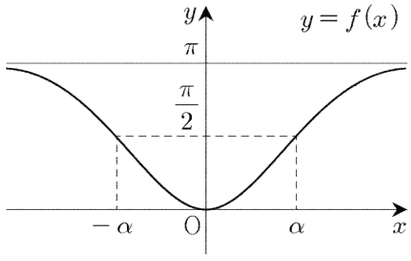
$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ($\because$ 조건 (다))

즉, $f(0)=0$

조건 (다)에서 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pi$이므로

직선 $y=\pi$는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



▸ ㄱ. (참)

모든 양의 실수 x에 대하여

$$g(-x)=\frac{\sin f(-x)}{-x}=-\frac{\sin f(x)}{x}=-g(x)$$

$\therefore\ g(-x)+g(x)=0$

▸ ㄴ. (참)

조건 (가)에서 주어진 등식에서

$f'(x)=-f'(-x)$

($\because$ 합성함수의 미분법)

$x=0$을 대입하여 정리하면

$f'(0)=0$

함수의 극한의 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}\times\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times f'(0)$$

($t=f(x)$로 두면 $x\to 0$일 때, $t\to 0$이다.)

$=1\times 0=0$

▸ ㄷ. (거짓)

함수 $g(x)$의 정의역은 $x\neq 0$인 모든 실수의 집합이다.

$$g(\alpha)=\frac{\sin f(\alpha)}{\alpha}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}(>0)$$

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=\frac{xf'(x)\cos(f(x))-\sin(f(x))}{x^2}$$

$$g'(\alpha)=\frac{\alpha f'(\alpha)\cos(f(\alpha))-\sin(f(\alpha))}{\alpha^2}$$

$$=\frac{\alpha f'(\alpha)\times 0-1}{\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha^2}(<0)$$

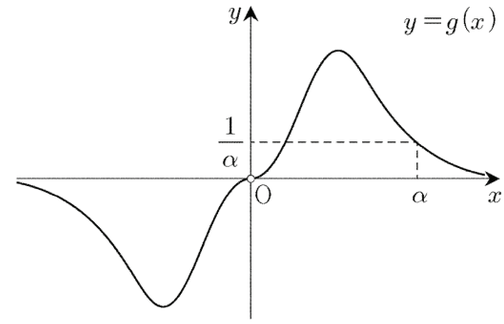
즉, 함수 $g(x)$의 그래프는 점 $\left(\alpha,\ \frac{1}{\alpha}\right)$을 지나고,

이 점에서 그은 접선의 기울기는 음수이다.

이 결과와 보기 ㄱ, ㄴ의 결과를 종합하여

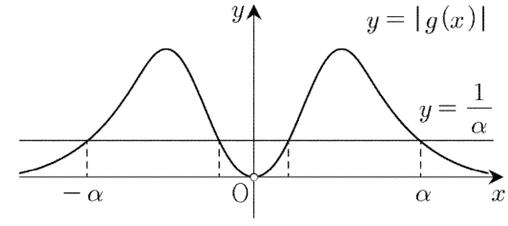
함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

(아래는 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 $g(x)$의 그래프 중에서 가장 간단한 것을 그린 것이다.)



함수 $|g(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(아래는 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 $|g(x)|$의 그래프 중에서 가장 간단한 것을 그린 것이다.)



따라서 방정식 $|g(x)|=\frac{1}{\alpha}$의 서로 다른 실근의 개수는 2일 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

H156 | 답 ②

[풀이]

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

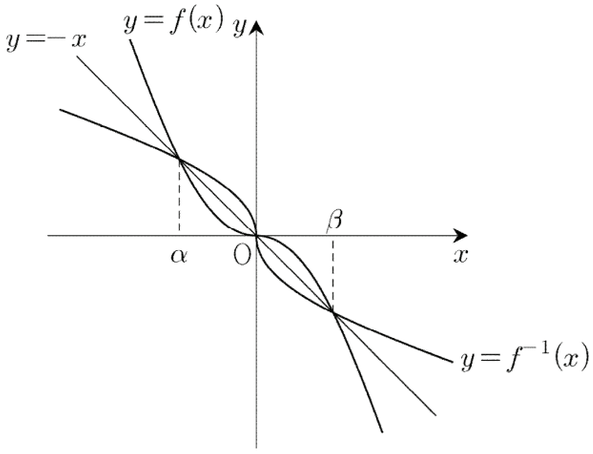
$$f'(x)=-\frac{kx^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}(\text{단, } k>1)$$

모든 실수 x에 대하여

$f'(x)\leq 0$

이므로 함수 $f(x)$는 감소함수이다.

두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



위의 그림처럼 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 세 교점은 직선 $y=-x$ 위에 있다.

방정식 $f(x)=-x$는

$$-\frac{kx^3}{x^2+1}=-x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{kx^2}{x^2+1}=-1 \text{ 또는 } x=0$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{k-1}} \text{ 또는 } x=0$$

$$\alpha=-\sqrt{\frac{1}{k-1}},\ \beta=\sqrt{\frac{1}{k-1}}$$

이때, $\beta=-\alpha$, $f(\beta)=\alpha$, $f(\alpha)=\beta$이다.

$h(x)=f(x-2\beta)+2\alpha$로 두자.

$h(\beta)=f(-\beta)+2\alpha=f(\alpha)+2\alpha$

$=\beta+2\alpha=\alpha$

역함수의 성질에 의하여

$g(\alpha)=\beta$

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(\alpha)=\frac{1}{h'(\beta)}$$

그런데 $h'(x)=f'(x-2\beta)$이므로

$$g'(\alpha)=\frac{1}{f'(-\beta)}$$

함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

함수 $f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f'(-x)=f'(x)$이 성립한다.

$$g'(\alpha)=\frac{1}{f'(\beta)}$$

이를 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$$f'(\beta)=2g'(\alpha)=\frac{2}{f'(\beta)}$$

정리하면

$f'(\beta)=-\sqrt{2}$

($\because$ $f(x)$는 감소함수이다.)

$$f'(\beta)=f'\left(\sqrt{\frac{1}{k-1}}\right)$$

$$=-\frac{\frac{k}{k-1}\times\frac{3k-2}{k-1}}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^2}=-\sqrt{2}$$

정리하면

$(3-\sqrt{2})k=2$

풀면

$$\therefore\ k=\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$$

답 ②

H157 | 답 10

[풀이]

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

이므로 함수 $f(x)$는 기함수이다. (즉, 원점 대칭이다.)

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=-\frac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2} \text{ (단, } a>0,\ b>0)$$

$f'(0)=-b<0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이어야 한다.

즉, 함수 $f(x)$는 감소함수이다.

조건 (가)에서

$f(2)-f^{-1}(2)=g(f(0))$

$=g(0)=f(0)-f^{-1}(0)=0-0=0$

즉, $f(2)=f^{-1}(2)(=t$로 두자.)

역함수의 성질에 의하여

$f(t)=2$

그런데 $f(x)$가 원점 대칭이므로

$f(-2)=-f(2)=-t$,

$f(-t)=-f(t)=-2$

즉, 곡선 $y=f(x)$는 다음의 네 점을 지난다.

$(2,\ t)$, $(t,\ 2)$, $(-2,\ -t)$, $(-t,\ -2)$

이때, $t\neq-2$이면 '함수 $f(x)$는 감소함수이다.'에 모순이다.

따라서 $t=-2$ 즉, $f(2)=-2$

이제 상수 a, b의 값을 결정하자.

$$f(2)=-\frac{8a+2b}{5}=-2,\ 4a+b=5 \quad \cdots ㉠$$

두 함수 $g(x)$, $h(x)$의 도함수는

$g'(x)=f'(x)-(f^{-1})'(x)$

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

이므로

$g'(2)=f'(2)-(f^{-1})'(2)=f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}$,

($\because$ $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.)

$h'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(-2)f'(2)$

$=\{f'(-2)-(f^{-1})'(-2)\}f'(2)$

$=\left\{f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}\right\}f'(2)$

($\because$ $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.)

$=(f'(2))^2-1$

조건 (나)에 의하여

$f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}=-5\{(f'(2))^2-1\}$

$f'(2)=p$로 두고 정리하면

$5p^3+p^2-5p-1=0$, $(5p+1)(p+1)(p-1)=0$

$p=-\dfrac{1}{5}(=f'(2))$ 또는 $p=-1(=f'(2))$

($\because f'(2)<0$)

• (1) $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$인 경우 (○)

$f'(2)=-\dfrac{28a-3b}{25}=-\dfrac{1}{5}$, $28a-3b=5$

㉠과 연립하면

$a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$

• (2) $f'(2)=-1$인 경우 (×)

$f'(2)=-\dfrac{28a-3b}{25}=-1$, $28a-3b=25$

㉠과 연립하면

$a=1$, $b=1$이므로 모순이다. ($\because a\neq b$)

(1), (2)에서

$\therefore$ $4(b-a)=10$

답 10

H158 | 답 49

[풀이]

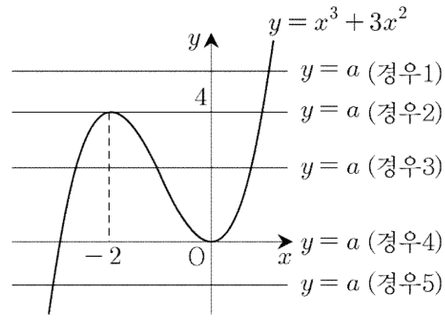
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(x^3+3x^2-a)e^x$

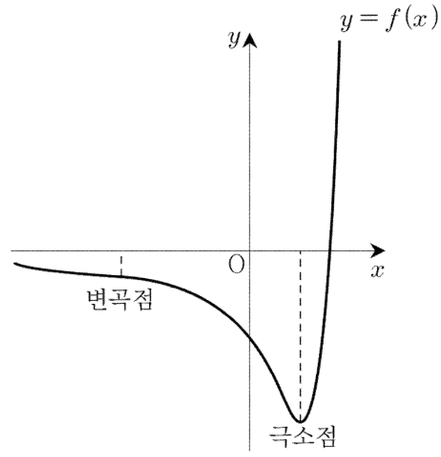
방정식 $f'(x)=0$과 아래의 방정식은 서로 필요충분조건이다.

$x^3+3x^2-a=0$

곡선 $y=x^3+3x^2$과 직선 $y=a$의 위치 관계에 따른 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



▸ (경우1) $a>4$

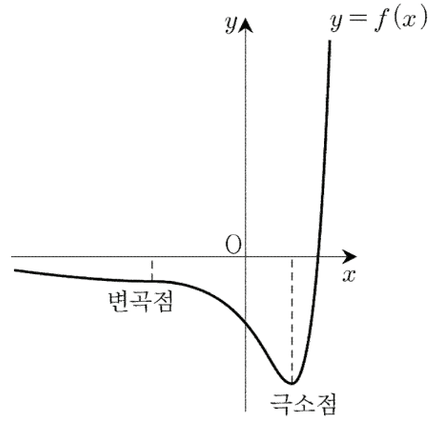


실수 t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때, $g(t)$의 함숫값의 변화는 다음과 같다.

$0\to1\to2\to1$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

▸ (경우2) $a=4$



실수 t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때, $g(t)$의 함숫값의 변화는 다음과 같다.

$0\to1\to2\to1$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

▸ (경우3) $0<a<4$

G. 수열의 극한: 샌드위치

수렴하는 수열의 극한의 대소 관계에 대하여 다음과 같은 성질이 성립하는 것이 알려져 있다.

〈수열의 극한의 대소 관계〉
수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여
$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta(\alpha,\ \beta$는 실수)일 때

❶ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.

❷ 수열 $\{c_n\}$과 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.

참고
각 경우에 대한 예를 생각해보자.

(1) ❶에서 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$일 때,
모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만
$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$인 경우도 있다.

(2) ❷에서
$a_n=1-\frac{1}{n}$, $b_n=1+\frac{3}{n}$, $c_n=1+\frac{1}{n}$일 때,
모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이지만
$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=1$, $\lim_{n\to\infty} c_n=1$인 경우도 있다.

식 변형을 한 후에 샌드위치 정리를 적용하는 문제들을 함께 풀어보자.

예제 1

다음의 두 명제의 참, 거짓을 판정하시오. 그리고 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 찾으시오.

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이고
$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$이면 $\lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$이다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이고
$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n=0$이다.

증명
(1) (참)
모든 자연수 n에 대하여 $0<c_n-a_n<b_n-a_n$이고,
$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$이므로 수렴하는 수열의 극한값의 대소 관계에 의하여
$\therefore \lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$

(2) (거짓)
(반례)
예를 들어 $a_n=1+\frac{1}{n}$, $b_n=1+\frac{3}{n}$, $c_n=1+\frac{2}{n}$이면
$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만 $\lim_{n\to\infty} c_n=1$이다.
(반례)
예를 들어
$a_n=\sqrt{n}$, $b_n=\sqrt{n+2}$, $c_n=\sqrt{n+1}$
이면
$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$
이지만 $\lim_{n\to\infty} c_n=\infty$이다.

답 풀이 참조

예제 2

다음 명제의 참, 거짓을 말하고, 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 찾으시오.

(1) 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$0 < a_n < n$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} = 0$이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$0 \le a_n \le n$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$은 수렴한다.

(3) 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여

$a_n < b_n < c_n$이고,

$\lim_{n\to\infty} (2n+1)a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} (2n-1)c_n = 0$이면

$\lim_{n\to\infty} nb_n = 0$이다.

풀이

(1) (참)

주어진 부등식의 각 변을 n^2으로 나누면

$0 < \frac{a_n}{n^2} < \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$이므로

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} = 0$

(2) (거짓)

$a_n = n\left|\sin \pi n\right|$이면 모든 자연수 n에 대하여

$0 \le n\left|\sin \frac{n}{2}\pi\right| \le n$이다.

수열 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ (즉, $\left|\sin \frac{n}{2}\pi\right|$)을 나열하면

1, 0, 1, 0, … (즉, 1, 0이 반복되어 나타난다.)

이때, 수열 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$은 진동하면서 발산한다.

(3) (참)

$(2n+1)a_n = p_n$, $(2n-1)c_n = q_n$으로 두면

$a_n = \frac{p_n}{2n+1}$, $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$이고,

$c_n = \frac{q_n}{2n-1}$, $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$이다.

문제에서 주어진 부등식을 정리하면

$\frac{np_n}{2n+1} < nb_n < \frac{nq_n}{2n-1}$

그런데 $\lim_{n\to\infty} \frac{np_n}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$,

$\lim_{n\to\infty} \frac{nq_n}{2n-1} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

이므로

$\therefore \lim_{n\to\infty} nb_n = 0$

답 풀이 참조

예제 3

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{2023}{2024}$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n + n - 2}{4a_n + 3n + 1}$의 값을 구하여라.

접근법

• 답을 먼저 구하고, 이를 나중에 증명한다. (문제해결전략)

이 문제를 풀 때에는 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2023}{2024} (< 1)$으로 두어도 좋다. 즉, 문제에서 주어진 조건의 일부만을 사용하여 답을 구하는 것이다. 이처럼 복잡도가 높은 문제를 풀 때에는 일부의 조건만을 사용하여 빠르게 답을 구하고, 이 답이 참임을 나중에 증명하는 것이 보편적이다. (일반적이지는 않지만 부등호가 주어졌을 때, 보통 등호가 성립하는 경우가 답일 확률이 높다.)

풀이

2 이상의 자연수 n에 대하여

$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{2023}{2024}$, $\frac{a_3}{a_2} \le \frac{2023}{2024}$, $\frac{a_4}{a_3} \le \frac{2023}{2024}$,

…, $\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{2023}{2024}$

위의 부등식을 변변히 모두 곱하면

$\frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}\frac{a_4}{a_3} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \left(\frac{2023}{2024}\right)^{n-1}$

정리하면

$\frac{a_n}{a_1} \le \left(\frac{2023}{2024}\right)^{n-1}$

즉, $0 < a_n \le a_1\left(\frac{2023}{2024}\right)^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_1\left(\frac{2023}{2024}\right)^{n-1}=0$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+n-2}{4a_n+3n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\frac{a_n}{n}+1-\frac{2}{n}}{4\frac{a_n}{n}+3+\frac{1}{n}}=\frac{0+1-0}{0+3+0}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

예제 4

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$2n-1<na_n<\sqrt{4n^2+n}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{n+3}$의 값을 구하여라.

풀이

문제에서 주어진 부등식을 변형하면

$$\frac{2n-1}{n}<a_n<\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=2$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+3}\cdot a_n=2\cdot 2=4$$

답 4

예제 5

다음 극한의 수렴과 발산을 판단하시오. 만약 수렴한다면 극한값을 구하시오.

(1) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\sin\frac{n}{2}\pi$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

(2) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=(-1)^n n$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

풀이

(1)

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \cdots$

(즉, $1,\ 0,\ -1,\ 0$이 반복된다.)

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots$

(즉, $1,\ 1,\ 0,\ 0$이 반복된다.)

$\frac{S_{4n-3}}{4n-3}=\frac{1}{4n-3}$, $\frac{S_{4n-2}}{4n-2}=\frac{1}{4n-2}$,

$\frac{S_{4n-1}}{4n-1}=0$, $\frac{S_{4n}}{4n}=0$이고,

$n\to\infty$일 때, $\frac{1}{4n-3}\to 0$, $\frac{1}{4n-2}\to 0$, $0\to 0$이므로

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$$

(2)

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6,\ -7,\ 8,\ \cdots$

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$-1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -4,\ 4,\ \cdots$

$\frac{S_{2n-1}}{2n-1}=-\frac{n}{2n-1}$, $\frac{S_{2n}}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$이고,

$n\to\infty$일 때, $-\frac{n}{2n-1}\to-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$은 발산한다.

답 (1) 0 (2) 발산

G033

○ (2014(6)-A형24)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n}$의 값을 구하시오. [3점]

G034

○○○ (2020(9)-나형10)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

G035

○○ (2010(6)-나형5)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}b_n$의 값은? [3점]

(가) $20-\frac{1}{n}<a_n+b_n<20+\frac{1}{n}$

(나) $10-\frac{1}{n}<a_n-b_n<10+\frac{1}{n}$

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

G036

○○ (2016-A형10)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다.

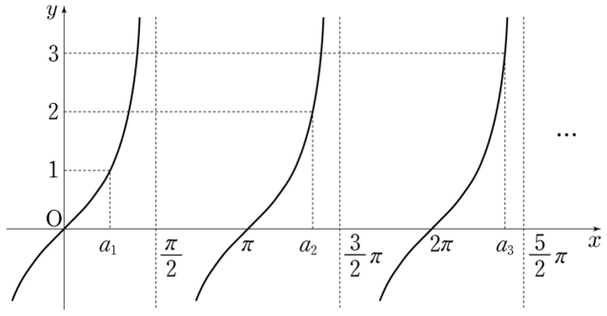
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

G037

○○○ (2014-B형18)

자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=\tan x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [4점]



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{3}{4}\pi$

④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$

G038

○○ (2006-나형7)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n<a_n<n+1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

G039

○○○ (2005(6)-나형9)

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{2}\pi\right)$의 값은? [3점]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

G040

○○
(1999-인문7/자연7)

〈보기〉의 수열 $\{a_n\}$중 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$이 존재하는 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $a_n=n$
ㄴ. $a_n=\frac{1}{2^n}$
ㄷ. $a_n=(-1)^n$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G. 수열의 극한: 등차수열

G041

○○
(2008(6)-나형30)

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=4$, $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=28$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. [4점]

G042

○○
(2005(9)-나형3)

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 6인 등차수열이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{3}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

G043

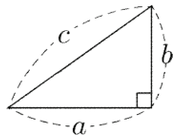
○○
(2006(6)-나형6)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=2n^2-n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

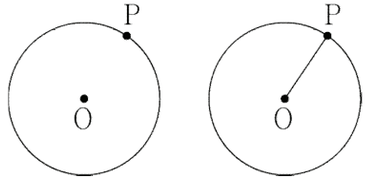
G. 등비급수(기하): 원의 정의+피타고라스

〈피타고라스의 정리〉
직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면
$c^2 = a^2 + b^2$
이 성립한다.

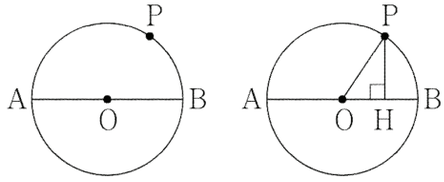


피타고라스의 정리를 원의 정의와 연관시켜 생각해보자.

• 원의 정의
아래 그림처럼 중심이 O인 원 위의 점 P가 주어지면 선분 OP를 긋는다. 이때, $\overline{OP}$는 원 O의 반지름이다.



아래 그림처럼 중심이 O이고, 지름이 AB인 원 위의 점 P가 주어지면 점 P에서 선분 AB에 수선을 내린다. 이때, 수선의 발을 H라고 하자.
피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HP}^2$, 즉 $\overline{OP} = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{HP}^2}$



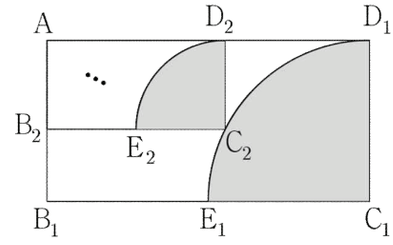
만약 직각삼각형 POH에서 $\angle POH$가 30°, 45°, 60°와 같은 특수각이면 삼각비의 정의를 이용하여 반지름의 길이를 구하면 된다. 하지만 직각삼각형의 직각이 아닌 한 각이 특수각이 아니라면 삼각비를 적용할 수 없으므로 피타고라스의 정리를 이용하여 반지름의 길이를 구해야 한다.

이처럼 직각삼각형이 주어지면 '피타고라스의 정리' 또는 '삼각비의 정의'를 적용해야 함을 반드시 기억해야 한다.

예제 1

$\overline{AB_1} = 1$, $\overline{B_1C_1} = 2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 중심이 C_1이고 반지름이 C_1D_1인 사분원을 그리자. 이때, 이 사분원의 넓이를 S_1이라 하자.
선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2, 호 D_1E_1 위의 점 C_2를 사각형 $AB_2C_2D_2$가 $\overline{AB_2} : \overline{B_2C_2} = 1 : 2$인 직사각형이 되도록 잡자. 직사각형 $AB_2C_2D_2$의 내부에 중심이 C_2이고 반지름이 C_2D_2인 사분원을 그리자. 이때, 이 사분원의 넓이를 S_2라 하자.
마찬가지의 방법으로 직사각형 $AB_nC_nD_n$의 내부에 중심이 C_n이고 반지름이 C_nD_n인 사분원을 그리자. 이때, 이 사분원의 넓이를 S_n라 하자.

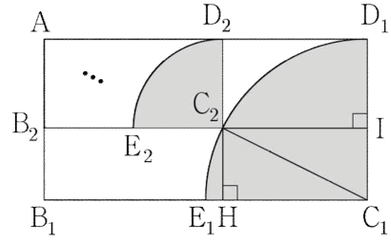
$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오.



풀이

$S_1 = \frac{\pi}{4}$

점 C_2에서 두 선분 B_1C_1, C_1D_1에 내린 수선의 발을 H, I라고 하자. 그리고 직사각형 $AB_2C_2D_2$의 이웃한 두 변의 길이를 x, $2x$라고 하자.



직각삼각형 C_2C_1I에서 피타고라스의 정리에 의하여

$1^2 = (2-2x)^2 + (1-x)^2$, $x = \frac{5-\sqrt{5}}{5}$

두 직사각형 $AB_1C_1D_1$, $AB_2C_2D_2$의 닮음비는

$1 : \dfrac{5-\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\dfrac{\pi}{4}}{1-\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{10\sqrt{5}+5}{76}$$

답 $\dfrac{10\sqrt{5}+5}{76}$

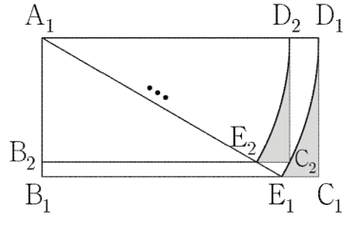
예제 2

$\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 변 B_1C_1 위의 점 E_1을 $\overline{A_1D_1}=\overline{A_1E_1}$이 되도록 잡는다. 부채꼴 $A_1D_1E_1$의 호 D_1E_1과 두 선분 E_1C_1, C_1D_1으로 둘러싸인 ◢ 모양의 도형의 넓이를 S_1이라고 하자.

호 D_1E_1 위의 점 C_2, 선분 A_1B_1 위의 점 B_2, 선분 A_1D_1 위의 점 D_2에 대하여 $\overline{A_1B_2}:\overline{A_1D_2}=1:2$인 직사각형 $A_1B_2C_2D_2$를 그리자. 선분 B_2C_2 위의 점 E_2를 $\overline{A_1D_2}=\overline{A_1E_2}$가 되도록 잡는다. 부채꼴 $A_1D_2E_2$의 호 D_2E_2와 두 선분 E_2C_2, C_2D_2로 둘러싸인 ◢ 모양의 도형의 넓이를 S_2라고 하자.

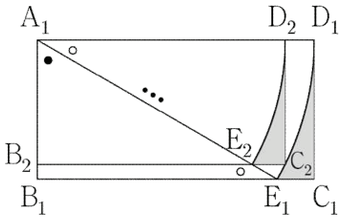
마찬가지 방법으로 사각형 $A_1B_nC_nD_n$ 안에 그려진 ◢ 모양의 도형의 넓이를 S_n이라고 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오.



풀이

특수각의 삼각비를 이용하면 다음과 같이 각을 결정할 수 있다.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

직각삼각형 $A_1B_1E_1$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{B_1E_1}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

S_1 =(□$A_1B_1C_1D_1$의 넓이)−(△$A_1B_1E_1$의 넓이)−(♡$A_1E_1D_1$의 넓이)

$$=2-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$$

직사각형 $A_1B_2C_2D_2$의 이웃한 두 변의 길이를 각각 x, $2x$로 두면

$$\overline{A_1C_2}=\sqrt{x^2+(2x)^2}=2,\ x=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_1B_2C_2D_2$의 닮음비는 $1:\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이므로

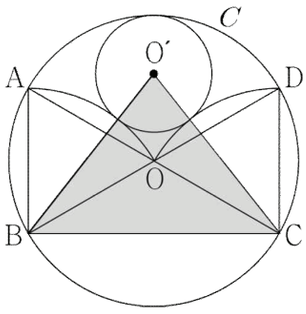
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{3}}{1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{60-15\sqrt{3}-10\pi}{6}$$

답 $\dfrac{60-15\sqrt{3}-10\pi}{6}$

두 원의 위치 관계와 피타고라스의 정리가 연관된 문제를 풀어보자.

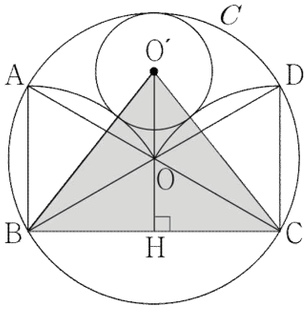
예제 3

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD에 외접하는 원을 C, 두 선분 AC, BD의 교점을 O라고 하자. 점 B를 중심으로 하고 반지름이 BO인 호 AO, 점 C를 중심으로 하고 반지름이 OC인 호 OD, 그리고 원 C에 동시에 접하는 원의 중심을 O′라고 하자. 삼각형 BCO′의 넓이를 구하시오. (단, 원 C의 지름의 길이는 2이다.)



풀이

점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 이때, 세 점 O′, O, H는 한 직선 위에 있다.



작은 원의 반지름의 길이를 r이라고 하면

$\overline{O'B}=\overline{O'C}=1+r$, $\overline{BC}=\sqrt{3}$

직각삼각형 O′BH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$(1+r)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(2-r-\frac{1}{2}\right)^2,\ r=\frac{2}{5}$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{11}{10}=\frac{11}{20}\sqrt{3}$$

답 $\frac{11}{20}\sqrt{3}$

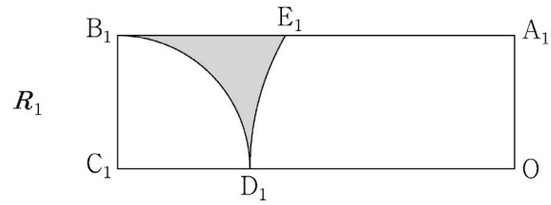
G154

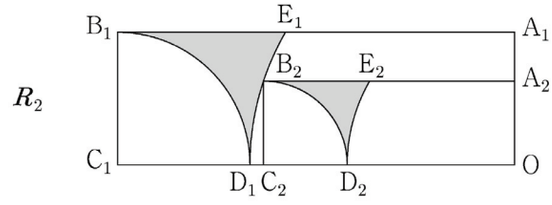
○○○
(2019(9)–나형19)

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=3$, $\overline{B_1C_1}=1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1C_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 D_1, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OD_1}$인 원과 선분 A_1B_1의 교점을 E_1이라 하자. 직사각형 $OA_1B_1C_1$에 호 B_1D_1, 호 D_1E_1, 선분 B_1E_1로 둘러싸인 ㄱ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 OA_1 위의 점 A_2와 호 D_1E_1 위의 점 B_2, 선분 OD_1 위의 점 C_2와 점 O를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=3:1$인 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 ㄱ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]





⋮ ⋮

① $4-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{7}{9}\pi$ ② $5-\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{35}{36}\pi$

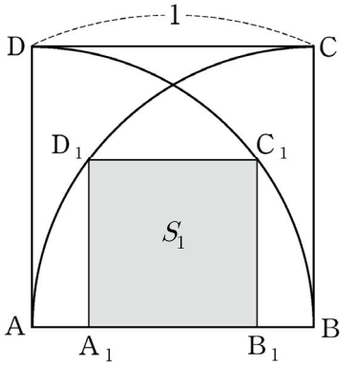
③ $6-\sqrt{3}-\frac{7}{6}\pi$ ④ $7-\frac{7\sqrt{3}}{6}-\frac{49}{36}\pi$

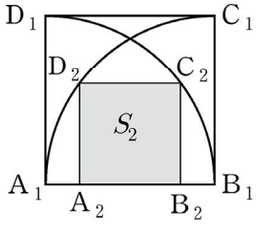
⑤ $8-\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{14}{9}\pi$

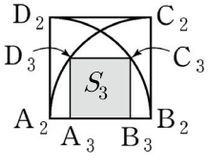
G155

(2009(9)−가형17/나형17)

한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD 안에 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 변 AB를 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_1B_1C_1D_1$이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 두 점 A_1, B_1을 각각 중심으로 하고 변 A_1B_1을 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_2B_2C_2D_2$라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]







…

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{4}{5}$

④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{23}{16}$

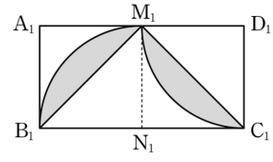
G156

(2014−A형17/B형15)

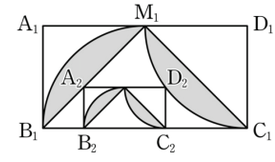
직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자. 중심이 N_1, 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $N_1M_1B_1$을 그리고, 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $D_1M_1C_1$을 그린다. 부채꼴 $N_1M_1B_1$의 호 M_1B_1과 선분 M_1B_1로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$의 호 M_1C_1과 선분 M_1C_1로 둘러싸인 부분인 ◠ 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2, 호 M_1C_1 위의 점 D_2와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}$: $\overline{A_2D_2}=1$: 2인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◠ 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

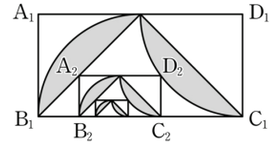
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3 …

…

① $\frac{25}{19}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ② $\frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ③ $\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

④ $\frac{25}{22}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ⑤ $\frac{25}{23}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

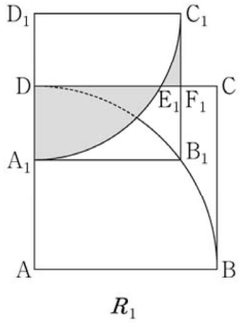
G157

●●● (2020–나형18)

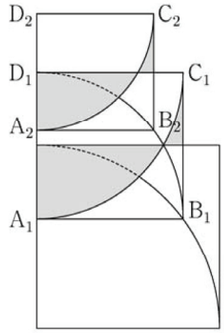
그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD에 중심이 A이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 ABD를 그린다. 선분 AD를 3 : 2로 내분하는 점을 A_1, 점 A_1을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 BD와 만나는 점을 B_1이라 하자. 선분 A_1B_1을 한 변으로 하고 선분 DC와 만나도록 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$을 그린 후, 중심이 D_1이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $D_1A_1C_1$을 그린다. 선분 DC가 호 A_1C_1, 선분 B_1C_1과 만나는 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 DA_1, DE_1과 호 A_1E_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 E_1F_1, F_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인 ⌐ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에 중심이 A_1이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $A_1B_1D_1$을 그린다. 선분 A_1D_1을 3 : 2로 내분하는 점을 A_2, 점 A_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 호 B_1D_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 선분 A_2B_2를 한 변으로 하고 선분 D_1C_1과 만나도록 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 ⌐ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2 …

① $\frac{50}{3}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ ② $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

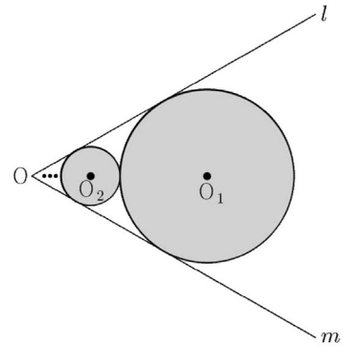
③ $\frac{50}{3}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$ ④ $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

⑤ $\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

G. 등비급수(기하): 원과 직선(접선)

예제 1

아래 그림처럼 점 O에서 만나는 두 반직선 l, m이 이루는 예각의 크기는 60°이다. 중심이 O_1인 원 C_1은 두 반직선 l, m에 동시에 접하고, 중심이 O_2인 원 C_2는 두 반직선 l, m 및 원 C_1에 동시에 접한다고 하자. 2 이상의 자연수 n에 대하여 중심이 O_n인 원 C_n은 두 반직선 l, m 및 원 C_{n-1}에 동시에 접한다. 원 C_n의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오. (단, 원 C_1의 반지름의 길이는 2이다.)



풀이

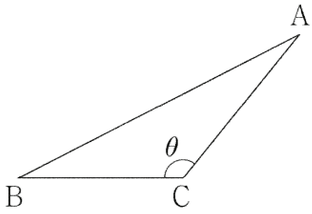
점 O_1에서 두 반직선 l, m에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1, 점 O_2에서 두 반직선 l, m에 내린 수선의 발을 각각 A_2, B_2, 점 O_2에서 두 선분 O_1A_1, O_1B_1에 내린 수선의 발을 각각 C_1, C_2라고 하자. 그리고 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라고 하자. 이때, $r_1 = 2$이다.

(원의 정의, 원과 직선의 위치 관계(접선), 두 원의 위치 관계(외접)의 정의와 성질(결정조건)에 따라 보조선을 긋고, 각의 크기에 대한 정보를 시각화하면 다음과 같다.)

H. 삼각함수의 극한(기하): 각을 결정할 수 없을 때 (+피타고라스)

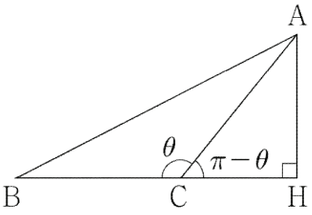
코사인법칙의 증명과정을 다시 생각해보자.

아래 그림처럼 둔각삼각형 ABC에 대하여
$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$이고, $\angle BCA=\theta$일 때,
코사인법칙에 의하여 다음의 등식이 성립한다.
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$



증명

점 A에서 선분 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



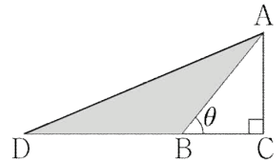
직각삼각형 ACH에서 삼각비의 정의에 의하여 …㉠
$\overline{CH}=-b\cos\theta$, $\overline{AH}=b\sin\theta$
직각삼각형 ABH에서 피타고라스의 정리에 의하여…㉡
$c^2=(a-b\cos\theta)^2+(b\sin\theta)^2$
$=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

㉠에서 삼각비의 정의를 쓸 수 있는 이유는 직각삼각형 ACH의 직각이 아닌 두 각을 모두 θ로 결정할 수 있기 때문이다. 반면 ㉡에서 피타고라스의 정리를 쓴 이유는 직각이 아닌 두 각을 모두 θ로 표현할 수 없기 때문이다. 다시 말하면 직각삼각형 ABH에서 $\angle ABH$와 $\angle HAB$ 모두 θ로 표현할 수 없다.

이에 대한 문제들을 풀어보자.

예제 1

$\angle BCA=\frac{\pi}{2}$, $\overline{AB}=1$인 직각삼각형 ABC에 대하여 직선 BC 위에 $\overline{AD}=2$가 되도록 점 D를 잡자. $\angle ABC=\theta$이고, 삼각형 ADB의 넓이가 $S(\theta)$일 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오.



풀이

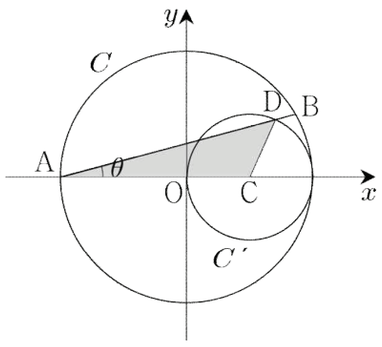
직각삼각형 ABC에서
$\overline{AC}=\sin\theta$, $\overline{BC}=\cos\theta$
직각삼각형 ADC에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{DC}=\sqrt{4-\sin^2\theta}$, $\overline{DB}=\sqrt{4-\sin^2\theta}-\cos\theta$
$S(\theta)=\frac{1}{2}(\sqrt{4-\sin^2\theta}-\cos\theta)\sin\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{4-\sin^2\theta}-\cos\theta}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}$
$=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

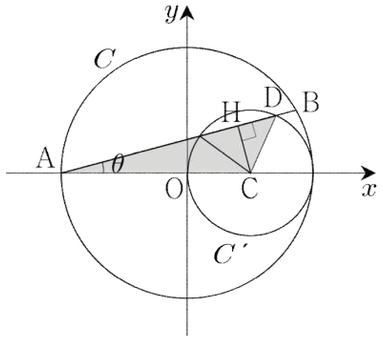
예제 2

좌표평면에서 원 C: $x^2+y^2=4$ 위의 점 B에 대하여 선분 AB가 원 C': $(x-1)^2+y^2=1$과 만나는 두 점 중에서 점 B에 가까운 점을 D라고 하자. $\angle BAC=\theta$이고, 삼각형 DAC의 넓이를 $S(\theta)$라고 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. (단, $C(1,\ 0)$이다.)



풀이

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



직각삼각형 ACH에서

$\overline{AH}=3\cos\theta$, $\overline{CH}=3\sin\theta$

직각삼각형 DHC에서

$\overline{HP}=\sqrt{1-9\sin^2\theta}$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times 3\sin\theta\times(3\cos\theta+\sqrt{1-9\sin^2\theta})$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$

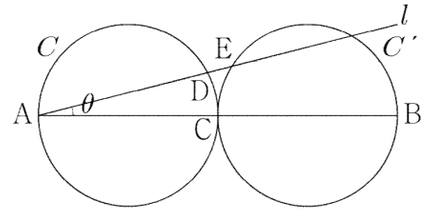
$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}(3\cos\theta+\sqrt{1-9\sin^2\theta})$

$=\frac{3}{2}\times 1\times(3+1)=6$

답 6

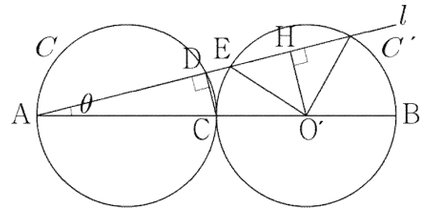
예제 3

$\overline{AB}=4$인 선분 AB의 중점을 C, 선분 AC를 지름으로 하는 원을 C, 선분 CB를 지름으로 하는 원을 C'라고 하자. 점 A를 지나는 직선 l이 원 C와 만나는 두 점 중에서 점 A가 아닌 점을 D, 원 C'와 만나는 두 점 중에서 점 A에 가까운 점을 E라고 하자. $\angle DAC=\theta$일 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{DE}}{\theta^2}$의 값을 구하시오.



풀이

원 C'의 중심을 O′, 점 O′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



직각삼각형 AO′H에서

$\overline{AH}=3\cos\theta$, $\overline{O'H}=3\sin\theta$

직각삼각형 EO′H에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{EH}=\sqrt{1-9\sin^2\theta}$

$\overline{DE}=3\cos\theta-2\cos\theta-\sqrt{1-9\sin^2\theta}$

$=\cos\theta-\sqrt{1-9\sin^2\theta}$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{DE}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\cos\theta-\sqrt{1-9\sin^2\theta}}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{8\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta+\sqrt{1-9\sin^2\theta})}$

$=4$

답 4

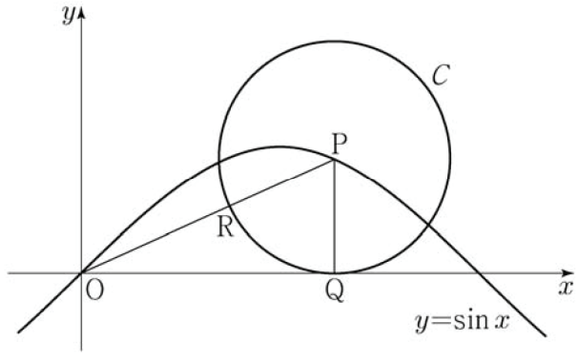
H076

○○ (2020–가형24)

좌표평면에서 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ $(0<t<\pi)$를 중심으로 하고 x축에 접하는 원을 C라 하자. 원 C가 x축에 접하는 점을 Q, 선분 OP와 만나는 점을 R라 하자.

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OR}}}=a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, a, b는 정수이다.) [3점]

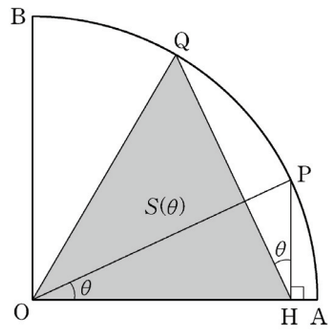


H077

○○○ (2019(6)–가형16)

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, 호 BP 위에 점 Q를 $\angle\mathrm{POH}=\angle\mathrm{PHQ}$가 되도록 잡는다. $\angle\mathrm{POH}=\theta$일 때, 삼각형 OHQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta}$의 값은?

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$) [4점]



① $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

④ $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{5+\sqrt{2}}{2}$

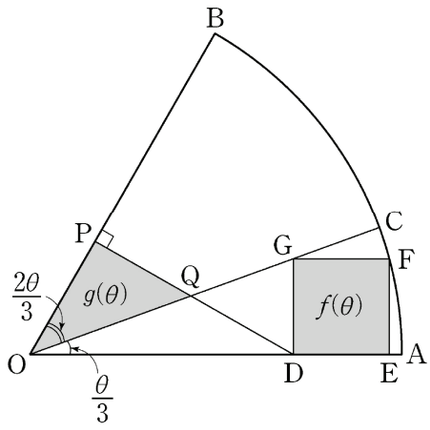
H078

(2018(6)-가형28)

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이고, $\overline{OD}<\overline{OE}$이다.) [4점]

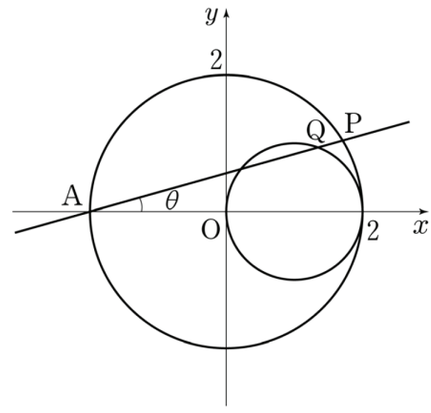


H079

(2013(9)-가형20)

그림과 같이 점 A$(-2,\ 0)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q라 하자.

$\angle OAP=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{\overline{PQ}}{\theta^2}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$

④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$

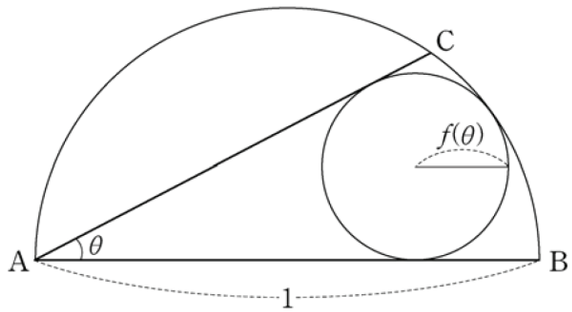
H080

●●● (2016(6)-B형29)

그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle BAC=\theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\alpha$$

이다. 100α의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



H. 삼각함수의 극한(기하): 근사적인 계산(빠른)(1)

• 초월함수(삼각함수, 지수함수, 로그함수)의 근사

$x\to 0$일 때, 초월함수를 다음과 같이 근사할 수 있다.

(1) 상수: $\cos x\approx 1$, $\sec x\approx 1$

(2) 1차:

$\sin x\approx x$, $\tan x\approx x$, $e^x-1\approx x$, $\ln(1+x)\approx x$,

$a^x-1\approx(\ln a)x$, $\log_a(1+x)\approx\frac{x}{\ln a}$

(3) 2차: $1-\cos x\approx\frac{1}{2}x^2$, $\sec x-1\approx\frac{1}{2}x^2$

(4) 3차: $\tan x-\sin x\approx\frac{1}{2}x^3$, $x-\sin x\approx\frac{x^3}{6}$,

$x-\tan x\approx-\frac{x^3}{3}$, $2\sin x-\sin 2x\approx x^3$

수능 대비를 위하여

(1)~(3)은 알아두는 편이 낫지만, (4)까지 알아야 하는 것은 아니다. 물론 알아두면 문제를 빠르게 해결할 수 있긴 하다. 다음과 같은 방법으로 근사하면 된다. ((1), (2), (3)은 이미 배웠다.)

(1) 상수: 함숫값의 극한 또는 접선의 방정식

(2) 1차: 접선의 방정식

(3) 2차: 서로 접하는 두 곡선

(4) 3차: 초월함수의 테일러급수

(4)번에 대하여 좀 더 알아보자.

• 초월함수와 테일러급수

다음과 같은 등식이 성립함이 알려져 있다.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\cdots$$

$$\sec x=1+\frac{x^2}{2}+\cdots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

위의 등식에서

$$x-\sin x=\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\cdots$$

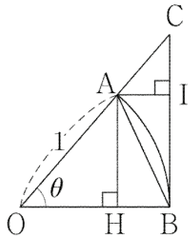
$x\to 0$일 때, $x^3 \gg x^5 \gg x^7 \gg \cdots$이므로

$x-\sin x\approx\frac{x^3}{3!}$ 즉, $x-\sin x$를 3차로 근사시킨 것이다.

마찬가지의 이유로

$x\to 0$일 때, $x-\tan x\approx-\frac{x^3}{3}$

아래 그림과 같은 직각삼각형에서 길이, 넓이의 근사를 차수의 관점에서 정리해보자.



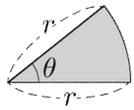
$\theta\to 0+$일 때, 아래의 표가 성립한다.

	길이	넓이
상수	$\overline{OH}=\cos\theta\approx 1$	·
1차	$\overline{AH}=\sin\theta\approx\theta$, $\overline{CB}=\tan\theta\approx\theta$, $\widehat{AB}=\theta$, $\overline{AB}=2\sin\frac{\theta}{2}\approx\theta$	(▽AOB의 넓이)$=\frac{1}{2}\theta$, (△COB의 넓이) $=\frac{1}{2}\tan\theta\approx\frac{1}{2}\theta$, (△AOH의 넓이) $=\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\approx\frac{1}{2}\theta$, (△AOB의 넓이) $=\frac{1}{2}\sin\theta\approx\frac{1}{2}\theta$
2차	$\overline{HB}=1-\cos\theta$ $\approx\frac{1}{2}\theta^2$, $\overline{AC}=\sec\theta-1$ $\approx\frac{1}{2}\theta^2$	·
3차	$\overline{CI}=\tan\theta-\sin\theta$ $\approx\frac{1}{2}\theta^3$	(△AHB의 넓이) $=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\sin\theta$ $\approx\frac{1}{4}\theta^3$, (△CAB의 넓이) $=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\tan\theta$ $\approx\frac{1}{4}\theta^3$, (활꼴AB의 넓이) $=\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)\approx\frac{1}{12}\theta^3$
4차 이상	·	(△CAI의 넓이) $=$ $\frac{1}{2}(1-\cos\theta)(\tan\theta-\sin\theta)$ $\approx\frac{1}{8}\theta^5$ (5차)

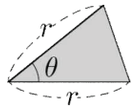
위의 표에서 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

• 1차

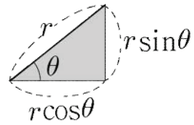
중심각이 θ이고 반지름의 길이가 r인 부채꼴의 넓이를 $S_1(\theta)$,



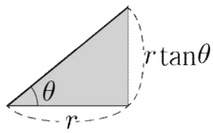
끼인각이 θ이고 두 변의 길이가 r인 이등변삼각형의 넓이를 $S_2(\theta)$,



빗변의 길이가 r이고 한 각이 θ인 직각삼각형의 넓이를 $S_3(\theta)$,



밑변의 길이가 r이고 한 각이 θ인 직각삼각형의 넓이를 $S_4(\theta)$



로 두면

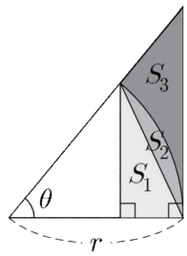
$$S_1(\theta)=\frac{1}{2}r^2\theta,\ S_2(\theta)=\frac{1}{2}r^2\sin\theta,$$

$$S_3(\theta)=\frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta,\ S_4(\theta)=\frac{1}{2}r^2\tan\theta$$

$\theta\to 0+$일 때, $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$, $S_3(\theta)$, $S_4(\theta)$는 모두 $\frac{1}{2}r^2\theta$(1차)에 근사된다.

• 3차

아래 그림은 밑변의 길이가 r이고, 한 각이 θ인 직각삼각형이다.



$$S_1(\theta)=\frac{1}{2}r^2(1-\cos\theta)\sin\theta\approx\frac{1}{4}r^2\theta^3,$$

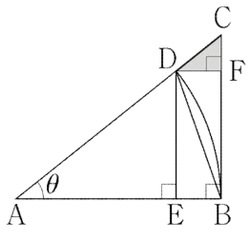
$$S_2(\theta)=\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)\approx\frac{1}{12}r^2\theta^3,$$

$$S_3(\theta)=\frac{1}{2}r^2(\tan\theta-\theta)\approx\frac{1}{6}r^2\theta^3$$

이므로 $\theta\to 0+$일 때, $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$, $S_3(\theta)$는 모두 3차로 근사된다.

예제 1

$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$, $\overline{AC}=1$인 직각삼각형 ABC의 변 AC 위에 점 D를 $\overline{AD}=\overline{AB}$가 되도록 잡자. 점 D에서 두 선분 AB, BC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자.
$\angle CAB=\theta$이고, 삼각형 DFC의 넓이가 $S(\theta)$일 때,
$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값을 구하시오.



풀이1

두 직각삼각형 ABC, AED에서
$\overline{AB}=\cos\theta(=\overline{AD})$, $\overline{BC}=\sin\theta$,
$\overline{AE}=\cos^2\theta$, $\overline{DE}=\cos\theta\sin\theta$
$\overline{DF}=\cos\theta-\cos^2\theta$, $\overline{CF}=\sin\theta-\cos\theta\sin\theta$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta(1-\cos\theta)^2$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\cos\theta}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

풀이2

$\theta\to 0+$일 때,

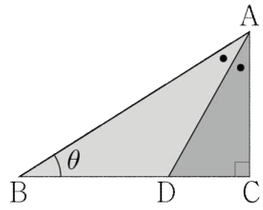
$$\overline{DF}\approx\frac{1}{2}\theta^2,\ \overline{CF}\approx\frac{1}{2}\theta^3$$

$$\frac{S(\theta)}{\theta^5}\approx\frac{\frac{1}{8}\theta^5}{\theta^5}\to\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

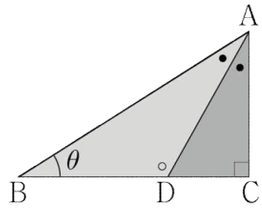
예제 2

$\angle BCA=\frac{\pi}{2}$, $\overline{AB}=1$인 직각삼각형 ABC에서 각 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라고 하자. $\angle ABC=\theta$, 두 삼각형 ABD, DCA의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라고 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$의 값을 구하시오.



풀이1

'삼각형의 세 내각의 합은 180°이다.'를 이용하면 다음과 같이 각의 크기를 결정할 수 있다.



(단, $\bullet=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$, $\circ=\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}$)

두 직각삼각형 ABC, ADC에서

$$\overline{AC}=\sin\theta,\ \overline{CD}=\sin\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\sin^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AB}}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}\right)},\ \text{즉 }\overline{AD}=\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$S(\theta)=\frac{\sin\theta}{2\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

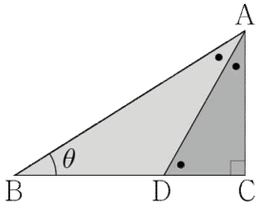
$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} \times 1} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

풀이2



$\theta \to 0+$일 때, $\bullet \approx \frac{\pi}{4}$이고,

$\overline{AC} \approx \overline{DC} \approx \theta$, $\overline{BD} \approx 1-\theta$이므로

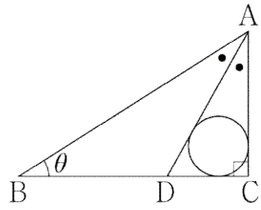
$S(\theta) \approx \frac{1}{2}(1-\theta)\theta$, $T(\theta) \approx \frac{1}{2}\theta^2$

$$\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)} \to \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

예제 3

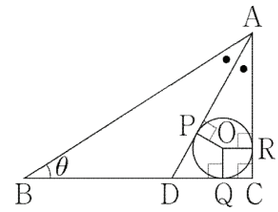
$\angle BCA = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AB} = 1$인 직각삼각형 ABC에서 각 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라고 하자. $\angle ABC = \theta$, 삼각형 ADC의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라고 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오.



풀이1

'삼각형의 세 내각의 합은 180°이다.'를 이용하면 다음과 같이 각의 크기를 결정할 수 있다.

원의 중심을 O, 점 O에서 세 선분 AD, DC, CA에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라고 하자.



(단, $\bullet = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$)

두 직각삼각형 ABC, ADC에서

$\overline{AC} = \sin\theta$, $\overline{CD} = \sin\theta \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$,

$$\overline{AD} = \frac{\sin\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

삼각형 ADC에서

$\overline{AD} = \overline{AP} + \overline{PD} = \overline{AR} + \overline{DQ}$, 즉

$$\frac{\sin\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} = \sin\theta - r(\theta) + \sin\theta \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) - r(\theta)$$

$$r(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}\right\}$$

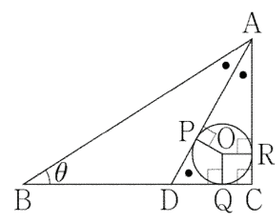
$$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times (2 - \sqrt{2}) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

풀이2



$\theta \to 0+$일 때, $\bullet \approx \frac{\pi}{4}$이고,

$\overline{AC} \approx \overline{DC} \approx \theta$, $\overline{AD} \approx \sqrt{2}\theta$이므로

삼각형 ADC는 직각이등변삼각형에 한없이 가까워진다.

$\sqrt{2}\theta \approx \{\theta - r(\theta)\} + \{\theta - r(\theta)\}$,

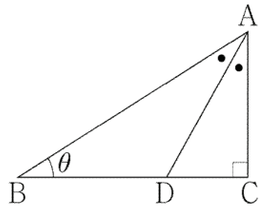
$$\frac{r(\theta)}{\theta} \approx \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

답 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

예제 4

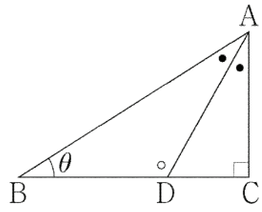
$\angle BCA=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{AB}=1$인 직각삼각형 ABC에서 각 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라고 하자. $\angle ABC=\theta$, 두 삼각형 ABD, DCA의 외접원의 반지름의 길이를 각각 $R_1(\theta)$, $R_2(\theta)$라고 할 때,

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{R_1(\theta)R_2(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오.



풀이1

'삼각형의 세 내각의 합은 180°이다.'를 이용하면 다음과 같이 각의 크기를 결정할 수 있다.



(단, $\bullet=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}$, $\circ=\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\theta}{2}$)

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}\right)}=2R_1(\theta),\ \text{즉}\ R_1(\theta)=\frac{1}{2\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\overline{AD}}{\sin\theta},\ \text{즉}\ \overline{AD}=\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}\right)}$$

선분 AD는 직각삼각형 ADC의 지름이므로

$$R_2(\theta)=\frac{\sin\theta}{2\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}\right)}$$

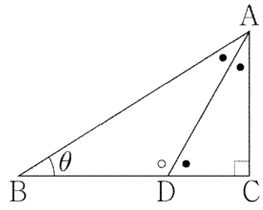
$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{R_1(\theta)R_2(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=1\times\frac{1}{4\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

풀이2



$\theta\to 0$일 때, $\bullet\approx\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\frac{1}{\sin 135^\circ}\approx 2R_1,\ R_1\approx\frac{\sqrt{2}}{2},\ R_2\approx\frac{\sqrt{2}}{2}\theta$$

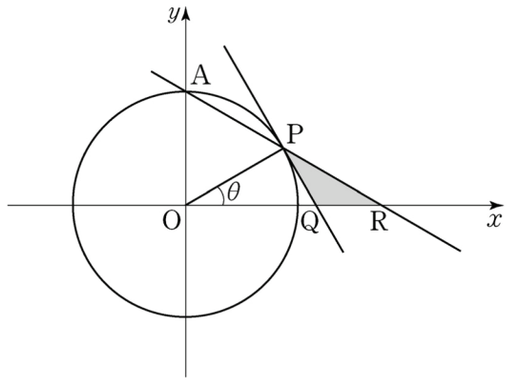
$$\frac{R_1(\theta)R_2(\theta)}{\theta}\to\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

H081

○○○ (2011(6)–가형30)

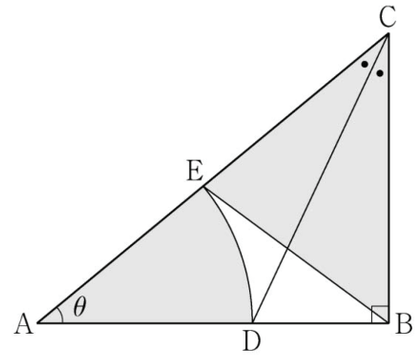
좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 A(0, 1)과 점 P를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 R라 하자. $\angle QOP=\theta$라 하고 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 고 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\alpha$일 때, 100α의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



H082

●●● (2019–가형18)

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle C$를 이등분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$인 원과 선분 AC의 교점을 E라 하자. $\angle A=\theta$일 때, 부채꼴 ADE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$의 값은? [4점]



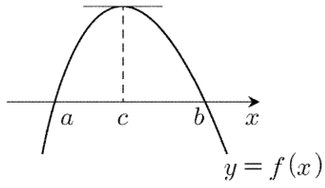
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

H. 평균값 정리

교과서 본문에서는 롤의 정리를 다음과 같이 정의하고 있다.

〈롤의 정리〉
함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,
$f(a)=f(b)$이면
$f'(c)=0$
인 c가 a와 b 사이의 적어도 하나 존재한다.



롤의 정리를 증명할 때에는 연속 함수에 대한 최대최소의 정리가 사용된다.

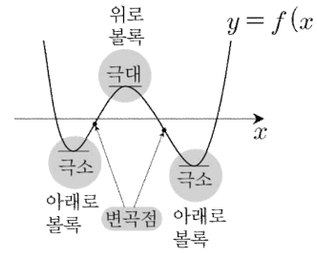
이와 연관하여 다음의 정리를 생각해보자.

예제 1

3차 이상의 다항함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 n개의 실근을 가지면, 함수 $f(x)$는 적어도 $n-2$개의 변곡점을 가짐을 보이시오. (단, $n\geq 3$)

접근법

예를 들어 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다고 하자.



위의 그림처럼 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 $4(=n)$일 때, 함수 $f(x)$의 변곡점의 개수는 $2(=n-2)$이다. 곡선 $y=f(x)$에서 아래로 볼록(극소)에서 위로 볼록(극대)으로 바뀔 때, 변곡점이 하나 생기고, 위로 볼록(극대)에서 아래로 볼록(극소)으로 바뀔 때, 변곡점이 또 하나 생긴다.

위의 정리는 교과서의 본문에 나와 있지 않지만, 수능 문제를 풀 때 매우 유용하다. 따라서 반드시 익혀두어야 한다.

아래는 위의 정리에 대한 엄밀한 증명이다. 한 번 읽고, 이해해보자. (스스로의 힘으로 증명할 수 있어야 하는 것은 아니다. 읽고, 이해할 수 있으면 된다.)

증명

• 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 $n-1$ 이상임을 보이자.

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.
방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 n개의 실근을 각각 a_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이라고 하면
$f(a_1)=f(a_2)=\ \cdots\ =f(a_n)=0$
구간 $[a_i,\ a_{i+1}](i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$에서 롤의 정리에 의하여
$f'(b_1)=f'(b_2)=\ \cdots\ =f'(b_{n-1})=0$

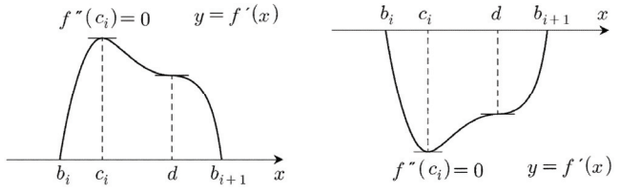
인 b_i가 구간 $(a_i,\ a_{i+1})(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$에 적어도 한 개 이상 존재한다.
따라서 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $n-1$ 이상이다.

• 방정식 $f''(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 $n-2$ 이상임을 보이자.

2차 이상의 다항함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.
구간 $[b_i,\ b_{i+1}](i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2)$에서 롤의 정리에 의하여
$f''(c_1)=f''(c_2)=\ \cdots\ =f''(c_{n-2})=0$
인 c_i가 구간 $(b_i,\ b_{i+1})(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2)$에 적어도 한 개 이상 존재한다.
따라서 방정식 $f''(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $n-2$ 이상이다.

• $x=c_i$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀜을 보이자.

2차 이상의 다항함수 $f'(x)$는 상수함수일 수 없다.
구간 $[b_i,\ b_{i+1}](i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2)$에서 최대최소의 정리에 의하여
$f'(x)\le f'(c_i)$ (← 즉, $f'(c_i)$가 최댓값)
또는
$f'(x)\ge f'(c_i)$ (← 즉, $f'(c_i)$가 최솟값)
인 c_i가 구간 $(b_i,\ b_{i+1})(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2)$에 적어도 한 개 이상 존재한다.

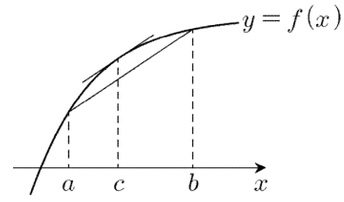


위의 그림처럼 $x=c_i$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로, $x=c_i$에서 함수 $f(x)$는 변곡점을 갖는다.
(반면 $f'(d)=0$이지만 $x=d$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로, $x=d$에서 함수 $f(x)$는 변곡점을 갖지 않는다.)
따라서 함수 $f(x)$는 적어도 $n-2$개의 변곡점을 갖는다.

답 풀이 참조

교과서 본문의 평균값 정리를 다시 써보자. (아래의 정리는 흰 종이에 스스로 쓸 수 있어야 한다.)

〈평균값 정리〉
함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ (←평균변화율과 같아지는 순간변화율이 존재한다.)
인 c가 a와 b 사이의 적어도 하나 존재한다.



위와 같이 평균값 정리는 그림과 함께 기억해야 한다.

위의 그림처럼 평균값 정리는 평균변화율과 같은 값을 갖는 순간변화율이 존재함을 의미한다. 하지만 순간변화율과 같은 평균변화율이 항상 존재하는 것은 아니다. 예를 들어서 함수 $f(x)=x^3$과 두 상수 $a,\ b(a<0<b)$에 대하여
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(0)=0$인 $a,\ b$는 존재하지는 않는다.
왜냐하면 모든 $a,\ b(a<0<b)$에 대하여 $f(b)>f(a)$이기 때문이다.

예제 2

$a<b$일 때, 부등식

$e^a(b-a)<e^b-e^a<e^b(b-a)$

이 성립함을 평균값 정리를 이용하여 증명하자.

증명

$f(x)=e^x$으로 두자.

주어진 부등식을 다시 쓰면

$(b-a)f(a)<f(b)-f(a)<(b-a)f(b)$

두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$에 대하여

$\Delta x=b-a,\ \Delta y=f(b)-f(a)$

가 위의 부등식에 포함되어 있으므로

평균변화율 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$를 만들기 위하여

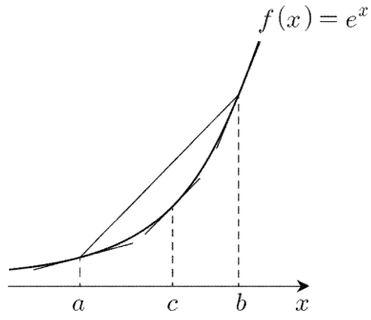
각 변을 $b-a(>0)$으로 나누면

$f(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f(b)$

즉, 가운데 항을 $\dfrac{f(\square)-f(\triangle)}{\square-\triangle}$의 꼴로 변형한 것이다.

이때, 이 평균변화율은 구간 $[\triangle,\ \square]$에서 정의된 것이다.

이제 이 함수 $f(x)$와 구간 $[\triangle,\ \square]$에 대하여 평균값 정리를 적용하여 문제를 해결하자.



함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고

열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ (단, $a<c<b$)

인 c가 구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나 존재한다.

함수 $f'(x)=e^x$는 증가함수이므로

$a<c<b$일 때,

$f'(a)<f'(c)<f'(b)$ 즉, $e^a<e^c<e^b$

다시 쓰면

$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$

정리하면

$e^a(b-a)<e^b-e^a<e^b(b-a)$

답 풀이 참조

위의 문제에 대한 접근법을 살펴보자.

접근법

문제에서 주어진 부등식의 각 변을 $b-a(>0)$로 나누면

$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$ $\cdots(*)$

위와 같이 나누는 이유는 주어진 부등식을 변형하면 평균변화율이 유도되기 때문이다.

간혹 문제에 따라서

$e^b-e^a-e^a(b-a)>0,\ e^b(b-a)-(e^b-e^a)>0$

으로 두고 좌변이 양수임을 증명해야 하는 경우도 있다. 하지만 주어진 식을 변형하였을 때 평균변화율이 유도되면, 이 유도된 평균변화율로 문제를 해결하게 되는 경우가 대부분이다.

부등식 (*)의 가운데 항이 평균변화율이므로 아래의 두 경우를 생각할 수 있다.

(평균변화율)<(평균변화율)<(평균변화율) $\cdots$㉠

(순간변화율)<(평균변화율)<(순간변화율) $\cdots$㉡

왜냐하면 미분법에서는 기하적 관점에서 '평균변화율' 또는 '순간변화율'을 모두 직선의 기울기로 해석하기 때문이다. 평균변화율이 보이면 순간변화율을 생각할 수 있어야 하고, 순간변화율이 보이면 평균변화율을 생각할 수 있어야 한다.

그런데 함수 $y=e^x$의 도함수는 자기 자신, 즉 $y=e^x$이므로

e^a=(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기)

e^b=(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기)

임을 바로 알 수 있다. 따라서 ㉠이 아닌 ㉡으로 해석하는 것이 자연스럽다.

이제 (*)의 가운데 항(평균변화율)을 순간변화율로 바꾸어야 한다. 이때, 평균값 정리가 사용되는 것이다.

평균값 정리에 의하여

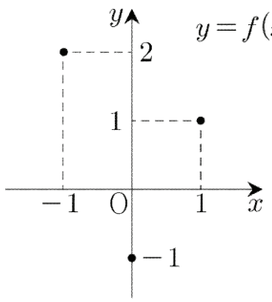
$\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=e^c$ (즉, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$)
인 c가 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

구간 $(a,\ b)$에서 $f'(x)>0$이므로
$a<c<b$일 때,
$f'(a)<f'(c)<f'(b)$ ← 3개의 순간변화율의 대소 비교를 하도록 식을 변형하는 것이 핵심이다!
이므로 부등식 (*)은 성립한다.

평균값의 정리와 집합의 포함관계, 집합의 연산이 결합 된 문제를 풀어보자.

예제 3

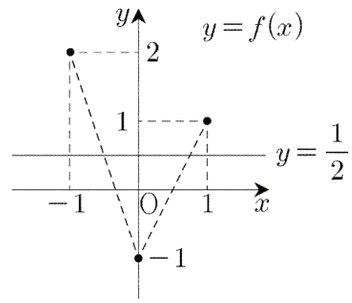
다항함수 $f(x)$가
$f(-1)=2,\ f(0)=-1,\ f(1)=1$
을 만족시킨다. 다음 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 모두 고르시오.



ㄱ. $f(a)=\dfrac{1}{2}$인 실수 a가 구간 $(-1,\ 1)$에 두 개 이상 존재한다.
ㄴ. $f'(b_1)=-3$인 실수 b_1이 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.
ㄷ. $f'(b_2)=2$인 실수 b_2가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.
ㄹ. $f'(c)=0$인 실수 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.
ㅁ. $f''(d)>0$인 실수 d가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

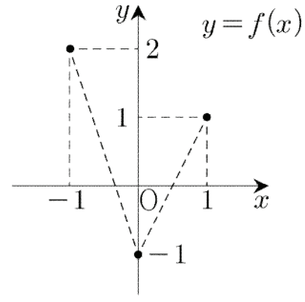
풀이

ㄱ. (참)



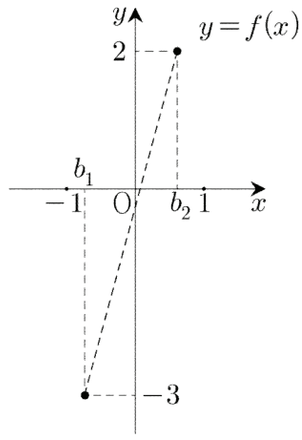
두 구간 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$ 각각에서 사이값 정리에 의하여
$f(a_1)=\dfrac{1}{2},\ f(a_2)=\dfrac{1}{2}$
인 두 실수 a_1, a_2가 존재한다.
(단, $-1<a_1<0,\ 0<a_2<1$)
따라서 $f(a)=\dfrac{1}{2}$인 실수 a가 구간 $(-1,\ 1)$에 두 개 이상 존재한다.

ㄴ. (참) & ㄷ. (참)



평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\dfrac{-1-2}{1}=-3=f'(b_1)$
인 실수 b_1이 구간 $(-1,\ 0)(\subset(-1,\ 1))$에 적어도 한 개 존재한다.
평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{1-(-1)}{1}=2=f'(b_2)$
인 실수 b_2가 구간 $(0,\ 1)(\subset(-1,\ 1))$에 적어도 한 개 존재한다.

ㄹ. (참)



사이값 정리에 의하여

$f'(c)=0$인 실수 c가 구간 $(b_1,\ b_2)$에 적어도 한 개 존재한다.

그런데 $(b_1,\ b_2)\subset(-1,\ 1)$이므로

$f'(c)=0$인 실수 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

ㅁ. (참)

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f'(b_2)-f'(b_1)}{b_2-b_1}=\frac{2-(-3)}{b_2-b_1}=f''(d)>0$$

인 실수 d가 구간 $(b_1,\ b_2)$에 적어도 한 개 존재한다.

그런데 $(b_1,\ b_2)\subset(-1,\ 1)$이므로

$f''(d)>0$인 실수 d가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

답 (1) 참 (2) 참 (3) 참 (4) 참 (5) 참

참고

ㄱ. $(-1,\ 1)=(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$

ㄴ. $(-1,\ 0)\subset(-1,\ 1)$

ㄷ. $(0,\ 1)\subset(-1,\ 1)$

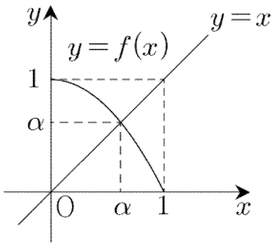
ㄹ. $(b_1,\ b_2)\subset(-1,\ 1)$

ㅁ. $(b_1,\ b_2)\subset(-1,\ 1)$

평균값과 정리와 합성함수가 결합 된 문제를 풀어보자.

예제 4

아래 그림은 직선 $y=x$와 다항함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부이다. 구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(x)\le 0$이고 $f(0)=1$, $f(1)=0$이다. $g(x)=(f\circ f)(x)$일 때, 보기에서 옳은 것을 있는 대로 고르시오.



ㄱ. $f'(a)=-1$인 실수 a가 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 한 개 존재한다.

ㄴ. $g(b)=\frac{1}{2}$인 실수 b가 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 한 개 존재한다.

ㄷ. $g'(c)=1$인 실수 c가 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 한 개 존재한다.

풀이

ㄱ. (참)

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{0-1}{1-0}=-1=f'(a)$$

인 실수 a가 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 한 개 존재한다.

ㄴ. (참)

$g(0)=f(f(0))=f(1)=0$,

$g(1)=f(f(1))=f(0)=1$

이므로 사이값 정리에 의하여

$g(b)=\frac{1}{2}$인 실수 b가 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 한 개 존재한다.

ㄷ. (참)

평균값 정리에 의하여

$$\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=\frac{1-0}{1-0}=1=g'(c)$$

인 실수 c가 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 한 개 존재한다.

답 (1) 참 (2) 참 (3) 참

예제 5

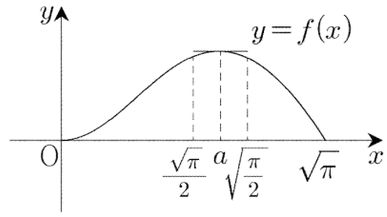
함수 $f(x)=e^{-x}\sin(x^2)$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

ㄱ. $f'(a)=0$인 실수 a가 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. $f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)>0,\ f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)<0$

ㄷ. $f''(b)<0$인 실수 b가 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다.

풀이



ㄱ. (참)

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}-0}=\frac{0-0}{\sqrt{\pi}-0}=0=f'(a)$$

인 실수 a가 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. (참)

$$f'(x)=-e^{-x}\sin(x^2)+2xe^{-x}\cos(x^2)$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}(\sqrt{\pi}-1)>0,$$

$$f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=-e^{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}<0$$

ㄷ. (참)

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)-f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=f''(b)<0$$

인 실수 b가 구간 $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$에서 적어도 하나 존재한다.

$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\subset(0,\ \sqrt{\pi})$이므로

$f''(b)<0$인 실수 b가 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다.

답 (1) 참 (2) 참 (3) 참

H173

○○○ (2010(6)-가형27)

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ 1

④ e ⑤ $2e$

H174

○○○ (2007(9)-가형28)

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가

$$f(-1)=-1,\ f(0)=1,\ f(1)=0$$

을 만족시킬 때, 다음 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $f(a)=\frac{1}{2}$인 실수 a가 구간 $(-1,\ 1)$에 두 개 이상 존재한다.

ㄴ. $f'(b)=-1$인 실수 b가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

ㄷ. $f''(c)=0$인 실수 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H175

●●● (2017-가형20)

함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H. 평균값 정리: 그래프, 영역

함수 $f(x)$의 이계도함수가 존재한다고 하자.

예제 1

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고
열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,
열린구간 $(a,\ b)$의 모든 x에 대하여
$f''(x)\geq 0,\ f(a)=f(b)=0$이면
닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$이다.

증명

함수 $f(x)$의 이계도함수가 존재하므로 함수 $f'(x)$는 연속이고 미분가능하다.
$a<x<b$인 임의의 실수 x에 대하여
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ x]$에서 연속이고
열린구간 $(a,\ x)$에서 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c_1)\ (\text{단, } a<c_1<x)$$

인 c_1이 적어도 하나 존재한다.
마찬가지의 이유로

$$\frac{f(b)-f(x)}{b-x}=f'(c_2)\ (\text{단, } x<c_2<b)$$

인 c_2가 적어도 하나 존재한다.

(1) 열린구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)>0$인 경우
열린구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f'(x)$는 증가하므로

$$f'(c_1)<f'(c_2)\ \text{즉, }\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

그런데 $f(a)=f(b)=0$이므로

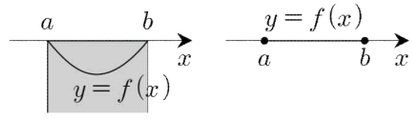
$$\frac{f(x)}{x-a}<\frac{-f(x)}{b-x}\text{에서 } f(x)<0$$

(2) 열린구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)=0$인 경우
부정적분을 하면
$f'(x)=C_1$ (단, C_1은 적분상수)
부정적분을 하면
$f(x)=C_1x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)
그런데 $f(a)=f(b)=0$이므로
$f(x)=0$

(1), (2)에서 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \le 0$이다.

답 풀이 참조

이를 기하적 관점에서 해석하면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$을 지나는데, 구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x) \ge 0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록이거나 상수함수이다. (←물론 이 구간에서 아래로 볼록인 곡선과 상수함수가 연달아 그려질 수 있지만, 아래로 볼록인 경우만 따로 상수함수인 경우만 따로 생각하자.) 따라서 이 두 경우에 대하여 구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 제1사분면과 제2사분면에서 그려지지 않으므로 $f(x) \le 0$이다.

위의 정리는 평균값 정리보다는 그래프의 개형에 대한 해석으로 참임을 보이는 것이 낫다.

예제 2

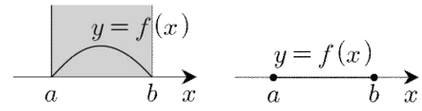
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,
열린구간 $(a,\ b)$의 모든 x에 대하여
$f''(x) \le 0$, $f(a)=f(b)=0$이면
닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \ge 0$임을 증명하시오.

풀이

앞선 명제와 마찬가지의 방법으로 주어진 명제가 참임을 보일 수 있다.

참고

이를 기하적인 관점에서 해석하면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$을 지나는데, 구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x) \le 0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이거나 상수함수이다. (←물론 이 구간에서 위로 볼록인 곡선과 상수함수가 연달아 그려질 수 있지만, 위로 볼록인 경우만 따로 상수함수인 경우만 따로 생각하자.) 따라서 이 두 경우에 대하여 구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 제3사분면과 제4사분면에서 그려지지 않으므로 $f(x) \ge 0$이다. 이 문제에서 소개된 정리는 평균값 정리보다는 그래프의 개형에 대한 해석으로 참임을 보이는 것이 낫다.

답 풀이 참조

예제 3

다음의 명제가 참임을 증명하시오.

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, 열린구간 $(a,\ b)$의 모든 x에 대하여
$f''(x) \le 0,\ f(x) \le 1,\ f(a)=f(b)=1$
이면 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)=1$이다.

(2) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, 열린구간 $(a,\ b)$의 모든 x에 대하여
$f''(x) \ge 0,\ f(x) \ge 1,\ f(a)=f(b)=1$
이면 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)=1$이다.

(3) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, 열린구간 $(a,\ b)$의 모든 x에 대하여
$f''(x) \le 0,\ f(x) \le x,\ f(a)=a,\ f(b)=b$
이면 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)=x$이다.

(4) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, 열린구간 $(a,\ b)$의 모든 x에 대하여
$f''(x) \ge 0,\ f(x) \ge x,\ f(a)=a,\ f(b)=b$
이면 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)=x$이다.

참고

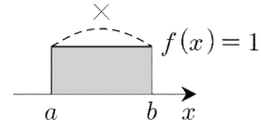
이 문제를 풀 때에도 평균값 정리에 의한 방법과 그래프의 개형을 이용한 방법(귀류법) 모두 적용하여 보아라. 그러면 실전에서 후자가 풀이 시간을 단축시킬 수 있음을 알게 될 것이다.

증명1

(1) 함수 $f(x)$의 이계도함수가 존재하므로 함수 $f'(x)$는 연속이고 미분가능하다.
$a<x<b$인 임의의 실수 x에 대하여
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ x]$에서 연속이고
열린구간 $(a,\ x)$에서 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c_1)$ (단, $a<c_1<x$)
인 c_1이 적어도 하나 존재한다.
마찬가지의 이유로
$\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}=f'(c_2)$ (단, $x<c_2<b$)
인 c_2가 적어도 하나 존재한다.
열린구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)<0$이라고 하자.
열린구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f'(x)$는 감소하므로
$f'(c_1)>f'(c_2)$
즉, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$
그런데 $f(a)=f(b)=1$이므로
$0 \ge \dfrac{f(x)-1}{x-a}>\dfrac{1-f(x)}{b-x}$에서 $f(x)>1$
이는 가정에 모순이다. 따라서 $f''(x)=0$이다.
열린구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)=0$이므로
부정적분을 하면
$f'(x)=C_1$ (단, C_1은 적분상수)
부정적분을 하면
$f(x)=C_1x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)
그런데 $f(a)=f(b)=1$이므로
$f(x)=1$
따라서 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)=1$이다.
(2) (1)과 마찬가지의 방법으로 증명이 가능하다.
(3) $g(x)=f(x)-x$로 두고 (1)과 마찬가지의 방법으로 증명이 가능하다.
(4) (3)과 마찬가지의 방법으로 증명이 가능하다.
답 풀이 참조

증명2

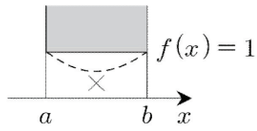
그래프의 개형을 이용하여 문제에서 주어진 명제들이 참임을 증명하자.
(1) (참)



곡선 $y=f(x)$는 $f(a)=f(b)=1$이므로 두 점 $(a,\ 1)$, $(b,\ 1)$을 지난다. 이때, 이 두 점은 직선 $y=1$ 위에 있다.
구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x) \le 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 이 구간에서 위로 볼록이거나 상수함수이다. (←물론 이 구간에서 위로 볼록인 곡선과 상수함수가 연달아 그려질 수 있지만, 위로 볼록인 경우만 따로 상수함수인 경우만 따로 생

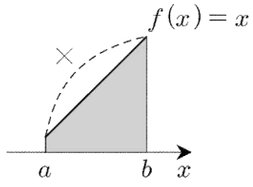
각하자.) 그런데 구간 $(a,\ b)$에서 $f(x)\le 1$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=1$과 만나거나 이 직선의 아래쪽에 있다. 따라서 구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록일 수 없으므로 상수함수 $f(x)=1$이다. (귀류법)

(2) (참)



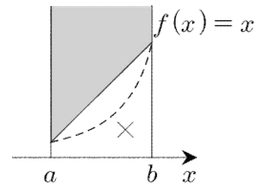
곡선 $y=f(x)$는 $f(a)=f(b)=1$이므로 두 점 $(a,\ 1)$, $(b,\ 1)$을 지난다. 이때, 이 두 점은 직선 $y=1$ 위에 있다. 구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 이 구간에서 아래로 볼록이거나 상수함수이다. (←물론 이 구간에서 아래로 볼록인 곡선과 상수함수가 연달아 그려질 수 있지만, 아래로 볼록인 경우만 따로 상수함수인 경우만 따로 생각하자.) 그런데 구간 $(a,\ b)$에서 $f(x)\ge 1$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=1$과 만나거나 이 직선의 위쪽에 있다. 따라서 구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록일 수 없으므로 상수함수 $f(x)=1$이다. (귀류법)

(3) (참)



곡선 $y=f(x)$는 $f(a)=a$, $f(b)=b$이므로 두 점 $(a,\ a)$, $(b,\ b)$를 지난다. 이때, 이 두 점은 직선 $y=x$ 위에 있다. 구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)\le 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 이 구간에서 위로 볼록이거나 직선이다. (←물론 이 구간에서 위로 볼록인 곡선과 직선이 연달아 그려질 수 있지만, 위로 볼록인 경우만 따로 직선인 경우만 따로 생각하자.) 그런데 구간 $(a,\ b)$에서 $f(x)\le x$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 만나거나 이 직선의 아래쪽에 있다. 따라서 구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록일 수 없으므로 직선 $f(x)=x$이다. (귀류법)

(4) (참)



곡선 $y=f(x)$는 $f(a)=a$, $f(b)=b$이므로 두 점 $(a,\ a)$, $(b,\ b)$를 지난다. 이때, 이 두 점은 직선 $y=x$ 위에 있다. 구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 이 구간에서 아래로 볼록이거나 직선이다. (←물론 이 구간에서 아래로 볼록인 곡선과 직선이 연달아 그려질 수 있지만, 아래로 볼록인 경우만 따로 직선인 경우만 따로 생각하자.) 그런데 구간 $(a,\ b)$에서 $f(x)\ge x$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 만나거나 이 직선의 위쪽에 있다. 따라서 구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록일 수 없으므로 직선 $f(x)=x$이다. (귀류법)

답 풀이 참조

예제 4

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\int_0^x |f'(t)|\,dt$$

이다.

(나) $f(1)=0$

구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=0$임을 보이시오.

풀이

조건 (가)에서

$f'(x)=|f'(x)| \Leftrightarrow f'(x)\ge 0 \quad \cdots(*)$

그리고 $f(0)=0$이다.

조건 (나)에서 $f(1)=0(=f(0))$이고, (*)이므로

구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 상수함수이다.

(즉, $f'(x)$의 값이 양수일 수 없으므로 $f'(x)=0$)

따라서 구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=0$이다.

답 풀이 참조

예제 5

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 정수 n에 대하여 $f(n)=n$이다.

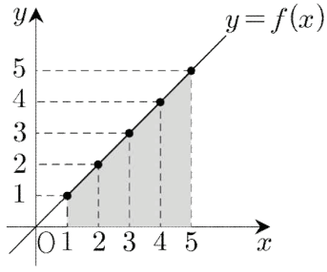
(나) 실수 전체의 집합에서

$f'(x) \geq 1$

이다.

이때, $\int_1^5 f(x)dx$의 값을 구하시오.

풀이



(가): 곡선 $y=f(x)$는 점 $(n,\ n)$을 지난다. (단, n은 정수)

만약 $f'(x)>1$이면 $f(2)>2$이므로 모순이다.

따라서 $f'(x)=1$이다. 즉, $f(x)=x$

$$\therefore \int_1^5 f(x)dx=\frac{1+5}{2}\times 4=12$$

답 12

아래의 두 문제는 수학2의 평균값 정리(그래프의 개형)의 실전 이론을 이용하여 풀면된다.

H176

○○○ (2011-가형29)

실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^2 f(x)dx$의 최솟값은?

[4점]

(가) $f(0)=1,\ f'(0)=1$

(나) $0<a<b<2$이면 $f'(a)\leq f'(b)$이다.

(다) 구간 $(0,\ 1)$에서 $f''(x)=e^x$이다.

① $\frac{1}{2}e-1$ ② $\frac{3}{2}e-1$ ③ $\frac{5}{2}e-1$

④ $\frac{7}{2}e-2$ ⑤ $\frac{9}{2}e-2$

▶ 이 문항은 적분법에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

H177

●●● (2016-B형30)

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

H. 함수의 극대와 극소

초월함수의 극대와 극소에 대한 기본적인 문제를 풀어보자.

예제 1

다항함수 $f(x)$가 다음의 두 조건을 만족시킨다.
(가) $f(0)=0$
(나) $f'(x)$는 증가함수이다.

양의 실수 전체의 집합에서 함수 $\frac{f(x)}{x}$가 증가함수임을 보이시오.

풀이

함수 $\frac{f(x)}{x}$의 도함수는

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\left(=\frac{g(x)}{x^2}\right)$

$g(x)=xf'(x)-f(x)$로 두자.
함수 $g(x)$의 도함수는
$g'(x)=xf''(x)$
모든 양의 실수 x에 대하여
$g'(x)=xf''(x)\ge 0$
($\because$ 조건 (나)에서 $f''(x)\ge 0$)
이므로 함수 $g(x)$는 증가함수이다.
그런데 $g(0)=0$($\because$ 조건(가))이므로
양의 실수 전체의 집합에서
$g(x)>0$, 즉 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'>0$

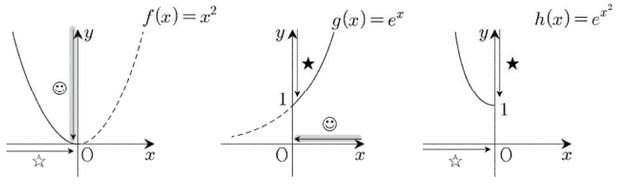
따라서 양의 실수 전체의 집합에서 함수 $\frac{f(x)}{x}$는 증가함수이다.

답 풀이 참조

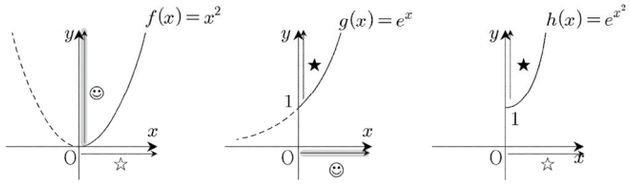
H. 그래프 개형: 합성함수(1)

• 합성함수의 그래프 그리기

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=e^x$에 대하여 함수 $h(x)=g(f(x))$, 즉 $h(x)=e^{x^2}$의 그래프를 그리자.

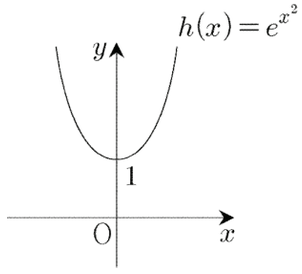


☆: x가 $-\infty$에서 0까지 변할 때,
☺: $f(x)$는 ∞에서 0까지 변하므로,
★: $g(f(x))$는 ∞에서 1까지 변한다.
즉, x가 $-\infty$에서 0까지 변할 때, $g(f(x))$는 ∞에서 1까지 변한다. (이때, ☺는 사라지고 ☆와 ★만이 남는다.)



☆: x가 0에서 ∞까지 변할 때,
☺: $f(x)$는 0에서 ∞까지 변하므로,
★: $g(f(x))$는 1에서 ∞까지 변한다.
즉, x가 0에서 ∞까지 변할 때, $g(f(x))$는 1에서 ∞까지 변한다. (이때, ☺는 사라지고 ☆와 ★만이 남는다.)

따라서 함수 $h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 예에서 함수 $f(x)$는 우함수이고, $g(x)$는 대칭성을 갖지 않지만 함수 $h(x)$는 우함수이다.

왜냐하면 모든 실수 x에 대하여
$h(-x)=g(f(-x))=g(f(x))=h(x)$
이기 때문이다.

• 합성함수의 우함수와 기함수

모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=-f(x)$(기함수), $g(-x)=g(x)$(우함수)
일 때,
$f(f(x))$, $g(g(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$
는 각각 기함수, 우함수, 우함수, 우함수이다.

증명

(1) $f(f(x))$는 기함수이다.
모든 실수 x에 대하여
$f(f(-x))=f(-f(x))=-f(f(x))$
이므로 함수 $f(f(x))$는 기함수이다.

(2) $g(g(x))$는 우함수이다.
모든 실수 x에 대하여
$g(g(-x))=g(g(x))$
이므로 함수 $g(g(x))$는 우함수이다.

(3) $f(g(x))$는 우함수이다.
모든 실수 x에 대하여
$f(g(-x))=f(g(x))$
이므로 함수 $f(g(x))$는 우함수이다.

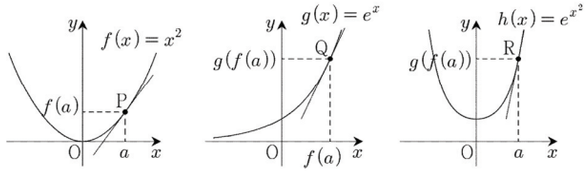
(4) $g(f(x))$는 우함수이다.
모든 실수 x에 대하여
$g(f(-x))=g(-f(x))=g(f(x))$
이므로 함수 $g(f(x))$는 우함수이다.

그리고 모든 함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 우함수이면 합성함수 $h(g(x))$는 우함수이다.
왜냐하면 모든 실수 x에 대하여
$h(g(-x))=h(g(x))$
이기 때문이다. 예를 들어 함수 $y=e^{x^2}$은 우함수이다. 이때, 함수 $y=x^2$은 우함수이지만, 함수 $y=e^x$는 대칭성을 갖지 않는다.

• 합성함수의 미분계수

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=e^x$에 대하여

함수 $h(x)=g(f(x))$, 즉 $h(x)=e^{x^2}$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



합성함수의 미분법에 의하여

$h'(a)=g'(f(a))f'(a)$

이다. 이를 위의 그림에서 보면

(곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(a,\ h(a))$에서의 접선의 기울기)

=(곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(f(a),\ g(f(a)))$에서의 접선의 기울기)

×(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기)

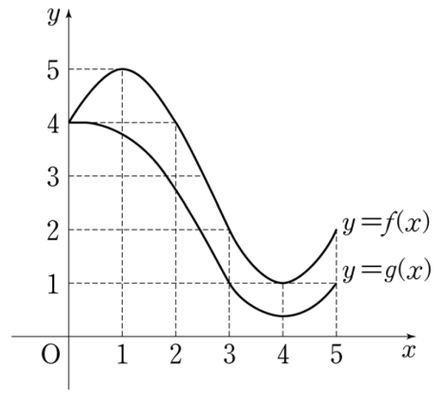
이와 같은 기하적 의미는 중요하므로 반드시 익혀두어야 한다.

H205

○○○

(2014(예비)-B형20)

열린구간 $(0,\ 5)$에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 그림과 같다. 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $h(3)=4$
ㄴ. $h'(2)\geq 0$
ㄷ. 함수 $h(x)$는 구간 $(3,\ 4)$에서 감소한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

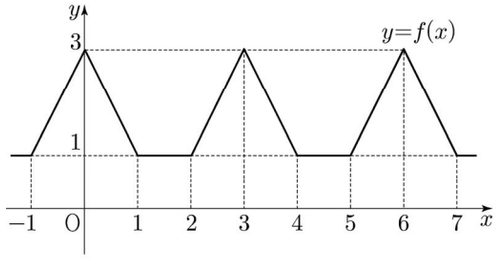
H206

★★★
(2021(6)-가형30)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0 \le x < 3$일 때 $f(x) = |x-1| + |x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3) = f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \lim_{h \to 0+} \left| \frac{f(2^{x+h}) - f(2^x)}{h} \right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x = a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5, 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, $\cdots$, a_n(n은 자연수)라 할 때, $n + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오. [4점]



H. 그래프 개형: 합성함수(2)

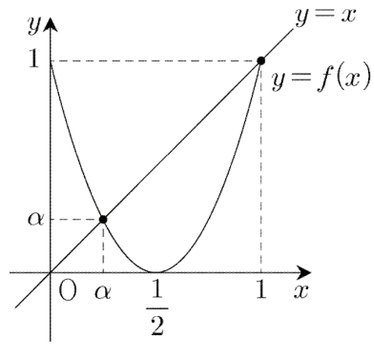
• 합성함수의 그래프 그리기

① 화살표로 증가감소를 우선 나타내고
② 미분가능한 함수라면 부드럽게 연결하여 곡선을 그린다.
③ 이때, 접선의 기울기로 오목볼록에 대한 판단을 할 수도 있다.

합성함수의 그래프를 그려보자.

• $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$에 대하여 함수 $(f \circ f)(x)$의 그래프를 그리시오.

(1) 우선 곡선 $y = (f \circ f)(x)$가 반드시 지나는 점을 찾아보자.



곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x좌표는 각각

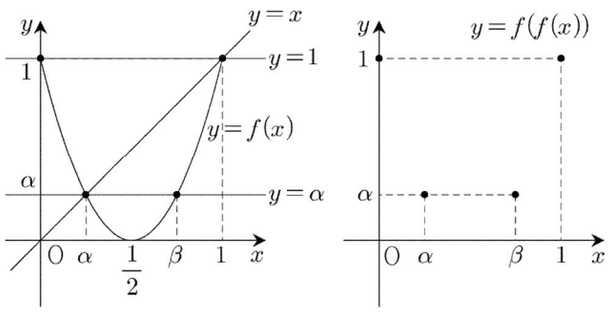
$\frac{1}{4}(=\alpha)$, 1

이다. 이때,

$f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$, $f(f(1)) = f(1) = 1$

이므로 곡선 $y = f(f(x))$는 두 점 (α, α), $(1, 1)$을 반드시 지난다.

(2) 곡선 $y = (f \circ f)(x)$가 지나는 점을 좀 더 찾아보자.

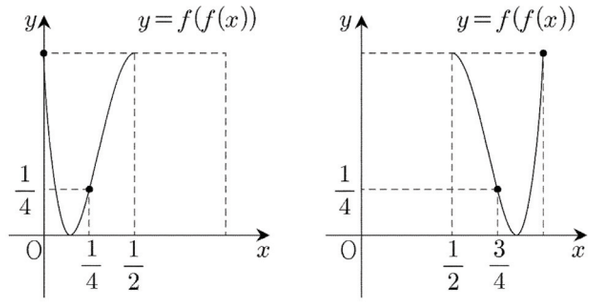


곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\alpha$가 만나는 두 교점 중에서 $(\alpha,\ \alpha)$가 아닌 점의 x좌표를 β라고 하자. 그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$이 만나는 두 교점 중에서 $(1,\ 1)$이 아닌 점은 $(0,\ 1)$이다. 이때,

$f(f(\beta))=f(\alpha)=\alpha,\ f(f(0))=f(1)=1$

이므로 곡선 $y=f(f(x))$는 두 점 $(\beta,\ \alpha)$, $(1,\ 1)$을 반드시 지난다.

(3) 이제 함수 $f(f(x))$의 그래프를 그리자.



x: $0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}$

$f(x)$: $1 \Rightarrow 0$

$f(f(x))$: $1 \Rightarrow 0 \Rightarrow 1$

이므로 왼쪽 그림처럼 그려진다.

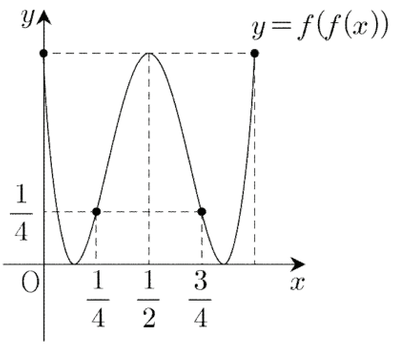
x: $\dfrac{1}{2} \Rightarrow 1$

$f(x)$: $0 \Rightarrow 1$

$f(f(x))$: $1 \Rightarrow 0 \Rightarrow 1$

이므로 오른쪽 그림처럼 그려진다.

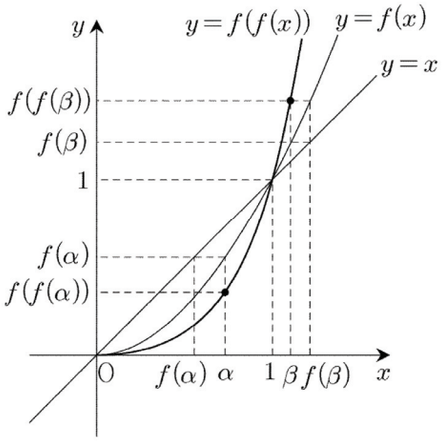
따라서 함수 $f(f(x))$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



고정점을 이용한 합성함수의 그래프의 개형을 그리는 기출 문제는 이미 평균값의 정리에서 다룬 바가 있다.

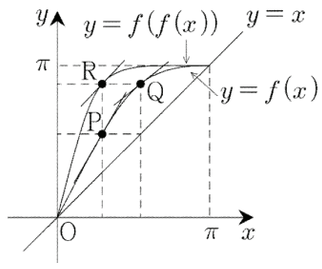
• 합성함수의 그래프와 오목볼록

(1) 함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



$0<\alpha<1$일 때, $f(f(\alpha))<f(\alpha)$이므로
구간 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=f(f(x))$는 곡선 $y=f(x)$의 아래쪽에 있다.
$\beta>1$일 때, $f(\beta)<f(f(\beta))$이므로
구간 $(1,\ \infty)$에서 곡선 $y=f(f(x))$는 곡선 $y=f(x)$의 위쪽에 있다.
이때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(f(x))$ 모두 아래로 볼록임을 알 수 있다.

(2) 접선의 기울기를 이용한 오목볼록의 판단
함수 $f(x)=x+\sin x$ $(0\le x\le\pi)$에 대하여 합성함수 $(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



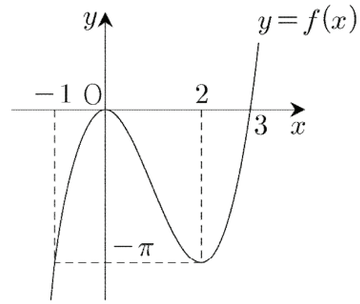
세 점 P, Q, R은 각각
$\mathrm{P}(t,\ f(t))$, $\mathrm{Q}(f(t),\ f(f(t)))$, $\mathrm{R}(t,\ f(f(t)))$
이다.
기하적으로
(곡선 $y=f(f(x))$ 위의 점 R에서의 접선의 기울기)
=(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기)
×(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기)
이다.

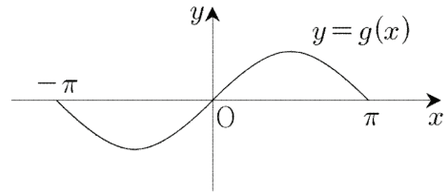
곡선 $y=f(f(x))$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 4이고, 곡선 $y=f(f(x))$ 위의 점 $(\pi,\ \pi)$에서의 접선의 기울기는 0이므로 구간 $[0,\ \pi]$에서 곡선 $y=f(f(x))$는 위로 볼록일 수밖에 없다. 왜냐하면 구간 $[0,\ \pi]$에서 두 접선 $y=4x$, $y=\pi$에 동시에 접하도록 곡선을 그리면 위로 볼록이기 때문이다.

예제 1

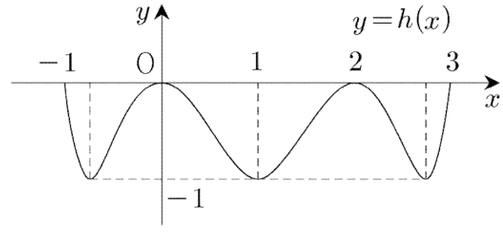
두 함수 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}x^2(x-3)$, $g(x)=\sin x$에 대하여 함수 $g(f(x))$의 그래프를 그리시오.

풀이
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는





x: -1 ⇨ 0, $f(x)$: $-\pi$ ⇨ 0, $g(f(x))$: 0 ⇨ -1 ⇨ 0
x: 0 ⇨ 2, $f(x)$: 0 ⇨ $-\pi$, $g(f(x))$: 0 ⇨ -1 ⇨ 0
x: 2 ⇨ 3, $f(x)$: $-\pi$ ⇨ 0, $g(f(x))$: 0 ⇨ -1 ⇨ 0
함수 $h(x)$의 그래프는



답 풀이 참조

예제 2

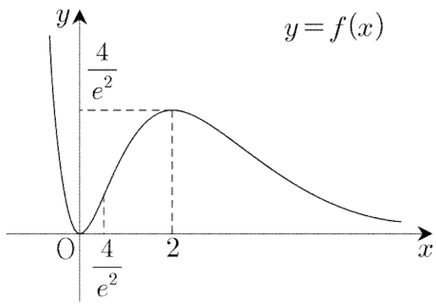
함수 $f(x)=x^2e^{-x}$에 대하여 함수 $f(f(x))$의 그래프를 그리시오.

풀이

$f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 극솟값은 0이고, 극댓값은 $\frac{4}{e^2}$이다.

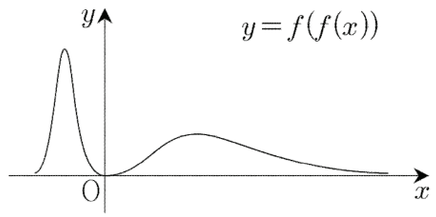


x: $-\infty$ ⇨ 0, $f(x)$: ∞ ⇨ 0, $f(f(x))$: (0) ⇨ 극대 ⇨ 0

x: 0 ⇨ 2, $f(x)$: 0 ⇨ $\frac{4}{e^2}$, $f(f(x))$: 0 ⇨ $f\left(\frac{4}{e^2}\right)$ (극대)

x: 2 ⇨ ∞, $f(x)$: $\frac{4}{e^2}$ ⇨ (0), $f(f(x))$: $f\left(\frac{4}{e^2}\right)$(극대) ⇨ (0)

함수 $f(f(x))$의 그래프는



답 풀이 참조

H207

○○ (2008-가형27)

함수 $f(x)=x+\sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(f\circ f)(x)$로 정의할 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록하다. ㄴ. 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ \pi)$에서 증가한다. ㄷ. $g'(x)=1$인 실수 x가 열린구간 $(0,\ \pi)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H208

●●● (2011(9)-가형29)

다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	+		+	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $g'(3)=-1$ ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다. ㄷ. 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H209

●●● (2021–가형30)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2\pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.

(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

H210

★★★ (2019(9)–가형30)

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
(나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
(다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$) [4점]

H211

●●● (2023(6)–미적분28)

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$
④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

H212

★★★ (2023–미적분30)

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와
함수 $g(x)=e^{\sin\pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
(나) 열린구간 $(0,\ 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의
서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

H. 초월함수의 미분가능성: 합성함수

• 합성함수의 미분가능성

〈합성함수의 미분가능성〉
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고,
함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 미분가능하면
함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다.

증명

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),$$

$$\lim_{x\to f(a)}\frac{g(x)-g(f(a))}{x-f(a)}=g'(f(a))$$

이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad\cdots(*)$$

$$=\lim_{t\to f(a)}\frac{g(t)-g(f(a))}{t-f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

($\because$ $t=f(x)$로 두면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로
$x\to a$일 때, $t\to f(a)$이다.)

$=g'(f(a))\times f'(a)$

미분계수의 정의에 의하여
함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다. ■

위의 명제와 이 명제의 역과 대우를 쓰면 다음과 같다.

❶ (참)
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고,
함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 미분가능하면
함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다.

그런데 $f'(a)$ 또는 $g'(f(a))$가 존재하지 않아도 (*)의 극한값이 존재하면 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다. (이에 대해서는 추후에 자세하게 설명한다.)

❷ (거짓) ⇦ ❶의 역명제
함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 미분가능하면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고,
함수 $g(x)$는 $x=f(a)$에서 미분가능하다.

❸ (참) ⇦ ❶의 대우명제
함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 미분가능하지 않으면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않거나,
함수 $g(x)$는 $x=f(a)$에서 미분가능하지 않다.

이상을 표로 정리하면 다음과 같다.

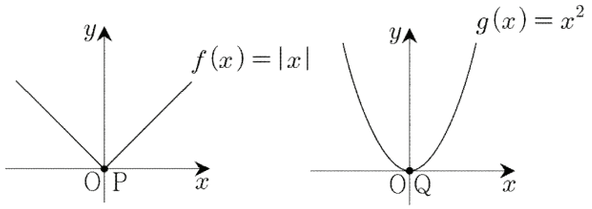
$f(x)$가 $x=a$에서	$g(x)$가 $x=f(a)$에서	$g(f(x))$가 $x=a$에서
미분○	미분○	미분○
미분○	미분×	?
미분×	미분○	?
미분×	미분×	?

(?=미분가능할 수도 있고, 가능하지 않을 수도 있다.)

몇 가지의 예를 들어보자.

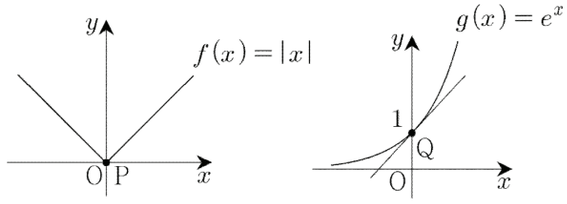
• 합성함수의 미분가능성을 기하적으로 판단할 수 있는 경우

(1) $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$일 때, 합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분가능하다.



$x\to0-$일 때, $g'(f(x))\times f'(x)=0\times(-1)=0$,
$x\to0+$일 때, $g'(f(x))\times f'(x)=0\times1=0$
이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분가능하다.

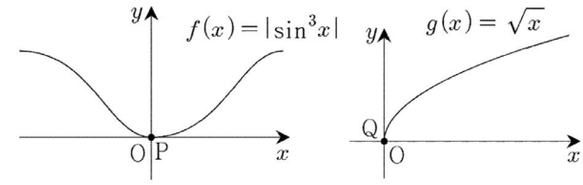
(2) $f(x)=|x|$, $g(x)=e^x$일 때, 합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분불가능하다.



$x\to0-$일 때, $g'(f(x))\times f'(x)=1\times(-1)=-1$,
$x\to0+$일 때, $g'(f(x))\times f'(x)=1\times1=1$
이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분불가능이다.

• 합성함수의 미분가능성을 기하적으로 판단할 수 없는 경우 (즉, 대수적으로 판단해야 하는 경우)

(1) $f(x)=|\sin^3x|$, $g(x)=\sqrt{x}$일 때,
합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분가능하다.



$x\to0$일 때, $f'(x)\to0$, $g'(f(x))\to\infty$이므로
$g'(f(x))\times f'(x)=\infty\times0$이다.
이때, 극한값의 존재유무는 대수적으로 판단해야 한다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{|\sin^3x|}}{x}=\lim_{x\to0+}\sqrt{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\sin x}$$

$$=\sqrt{1^2\times0}=0$$

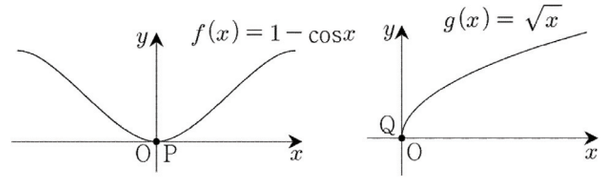
$$\lim_{x\to0-}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{|\sin^3x|}}{x}=\lim_{x\to0-}-\sqrt{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times(-\sin x)}$$

$$=-\sqrt{1^2\times0}=0$$

미분계수의 정의에 의하여 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(2) $f(x)=1-\cos x$, $g(x)=\sqrt{x}$일 때,
합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분불가능하다.



$x\to0$일 때, $f'(x)\to0$, $g'(f(x))\to\infty$이므로
$g'(f(x))\times f'(x)=\infty\times0$이다.
이때, 극한값의 존재유무는 대수적으로 판단해야 한다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to0+}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0-} -\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

미분계수의 정의에 의하여 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분불가능하다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $g(f(x))$가 정의된다고 하자.

$$\lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \boxed{\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \quad \cdots(*)$$

❶ 만약 $x\to a$일 때, 사각형 안의 함수의 극한값이 존재하면 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다. 즉, $f'(a)$ 또는 $g'(f(a))$가 존재하지 않아도 (*)의 극한값이 존재하면 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다. ($\because$ 미분계수의 정의)

❷ 만약 $f'(a)$, $g'(f(a))$의 값이 존재하면

$$(*) = \lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{t\to f(a)} \frac{g(t)-g(f(a))}{t-f(a)} \times \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

($\because$ $t=f(x)$로 두면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 $x\to a$일 때, $t\to f(a)$이다.)

$$= g'(f(a))f'(a)$$

이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다.

따라서 합성함수의 미분가능성을 판단할 때에는 ❶, ❷의 경우를 모두 생각해야 한다.

H222

●●● (2021-가형28)

두 상수 a, $b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)\|h(x)\|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$

H223

★★★ (2017(9)-가형30)

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

H224

★★★ (2019(6)-가형21)

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$

(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은? [4점]

① 96 ② 97 ③ 98
④ 99 ⑤ 100

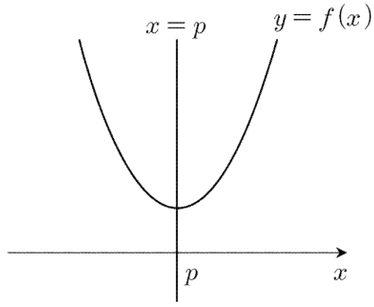
I. 정적분: 선대칭

선대칭 함수와 점대칭 함수는 정적분의 치환적분법을 적용해 볼 수 있는 좋은 소재들이다.

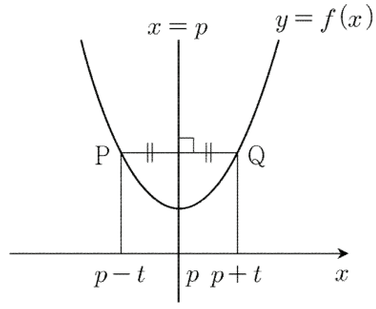
선대칭 함수 중에서 y축에 대칭인 함수는 우함수,
점대칭 함수 중에서 원점에 대칭인 함수는 기함수라고 한다.

• 선대칭 함수

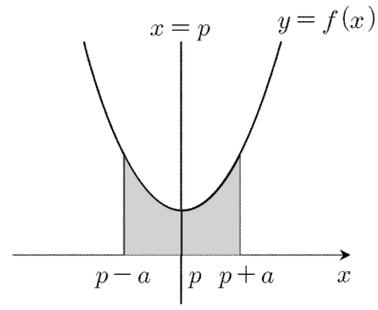
함수 f의 정의역에 속하는 모든 x에 대해서
$f(p+x)=f(p-x)$ ($\Leftrightarrow f(x)=f(2p-x)$)
가 성립하면 함수 f의 그래프는 직선 $x=p$에 대칭이다.



예를 들어 양수 t에 대하여
두 점 $\mathrm{P}(p-t,\ f(p-t))$, $\mathrm{Q}(p+t,\ f(p+t))$는
직선 $x=p$에 대하여 대칭임을 관찰할 수 있다.



$t=0$, $t<0$인 경우도 마찬가지이다.
함수 f의 정의역의 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(2p-x)$이면 $\displaystyle\int_{p-a}^{p+a}f(x)dx=2\int_{p}^{p+a}f(x)dx$
이다.
이 명제가 참임을 그래프를 이용하여 확인할 수도 있고, 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명할 수도 있다.



위의 그림에서 색칠된 두 도형 ◣와 ◢는 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다. 즉,

$$\int_{p-a}^{p}f(x)dx=\int_{p}^{p+a}f(x)dx$$

이므로

$$\int_{p-a}^{p+a}f(x)dx=\int_{p-a}^{p}f(x)dx+\int_{p}^{p+a}f(x)dx$$

$$=2\int_{p}^{p+a}f(x)dx$$

이제 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명하자.
$2p-x=t$로 두면 $-dx=dt$이고,
$x=p-a$일 때 $t=p+a$, $x=p$일 때 $t=p$이다.

$$\int_{p-a}^{p}f(x)dx$$

$$=\int_{p-a}^{p}f(2p-x)dx$$

(⇦ ❶ 문제에서 주어진 항등식 적용)

$$=-\int_{p+a}^{p}f(t)dt$$

(⇦ ❷ 정적분의 치환적분법 적용)

$$=\int_{p}^{p+a}f(t)dt$$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_{p-a}^{p+a}f(x)dx=\int_{p-a}^{p}f(x)dx+\int_{p}^{p+a}f(x)dx$$

(⇦ ❸ 정적분의 성질 적용)

$$=\int_{p}^{p+a}f(t)dt+\int_{p}^{p+a}f(x)dx=2\int_{p}^{p+a}f(x)dx$$

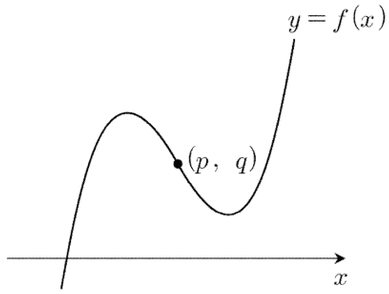
위의 증명과정은 ❶, ❷, ❸의 세 과정으로 나눌 수 있다. 수능에는 이 세 과정을 의식적으로 적용해서 풀어야 하는 문제가 자주 출제된다.

• 점대칭 함수

함수 f의 정의역에 속하는 모든 x에 대해서

$\dfrac{f(p+x)+f(p-x)}{2}=q$ ($\Leftrightarrow f(x)+f(2p-x)=2q$)

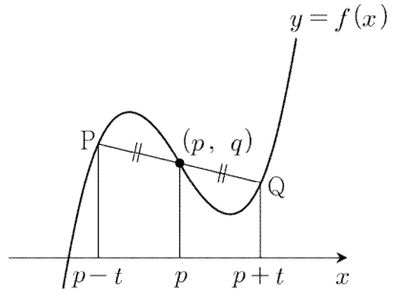
가 성립하면 함수 f의 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대칭이다.



예를 들어 양수 t에 대하여

두 점 $\mathrm{P}(p-t,\ f(p-t))$, $\mathrm{Q}(p+t,\ f(p+t))$이

점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭임을 관찰할 수 있다.

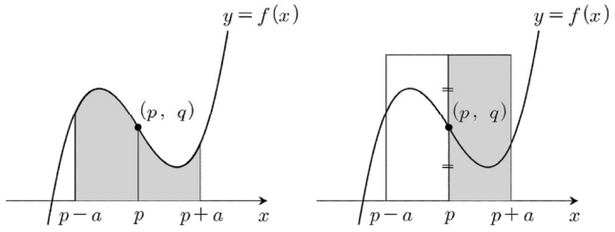


$t=0$, $t<0$인 경우도 마찬가지이다.

함수 f의 정의역의 모든 실수 x에 대하여

$f(x)+f(2p-x)=2q$이면 $\displaystyle\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx=2aq$이다.

이 명제가 참임을 그래프를 이용하여 확인할 수도 있고, 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명할 수도 있다.



위의 그림에서 색칠된 도형 을 점 $(p,\ q)$를 중심으로 180° 회전시켜서 색칠된 도형 의 위에 붙이면 직사각형이 만들어진다. 이때, 직사각형의 밑변과 높이는 각각 a, $2q$이다. (또는 '$2aq=2a\times q$=(밑변의 길이)×높이' 인 직사각형을 생각할 수도 있다.)

따라서

$\displaystyle\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx=2aq$

이제 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명하자.

$2p-x=t$로 두면 $-dx=dt$이고,

$x=p-a$일 때 $t=p+a$, $x=p$일 때 $t=p$이다.

$$\int_{p-a}^{p} f(x)dx$$

$$=\int_{p-a}^{p}\{2q-f(2p-x)\}dx$$

(⇦ ❶ 문제에서 주어진 항등식 적용)

$$=-\int_{p+a}^{p}\{2q-f(t)\}dt$$

(⇦ ❷ 정적분의 치환적분법 적용)

$$=\int_{p}^{p+a}\{2q-f(t)\}dt$$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx=\int_{p-a}^{p} f(x)dx+\int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

(⇦ ❸ 정적분의 성질 적용)

$$=\int_{p}^{p+a}\{2q-f(t)\}dt+\int_{p}^{p+a} f(x)dx=\int_{p}^{p+a} 2qdx$$

$$=2aq$$

위의 증명과정은 ❶, ❷, ❸의 세 과정으로 나눌 수 있다. 수능에는 이 세 과정을 의식적으로 적용해서 풀어야 하는 문제가 자주 출제된다.

예제 1

다음 명제들이 참임을 그래프를 이용하여 확인하시오. (단, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.)

(1) $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$이다.

(2) $f(x)$가 우함수이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx$이다.

(3) $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$이다.

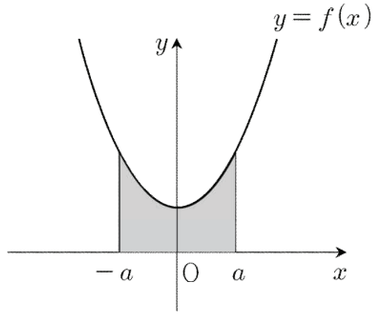
(4) $f(x)$가 기함수이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx=-\int_{-b}^{-a} f(x)dx$이다.

(5) 함수 f의 정의역의 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(2p-x)$이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx$이다.

(6) 함수 f의 정의역의 모든 실수 x에 대하여
$f(x)+f(2p-x)=2q$이면
$\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx=2(b-a)q$이다.

풀이

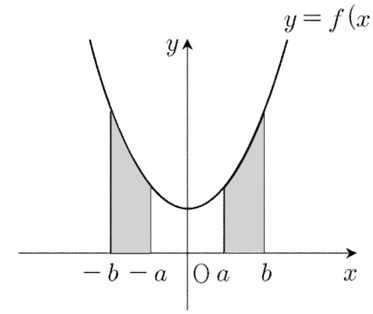
(1) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

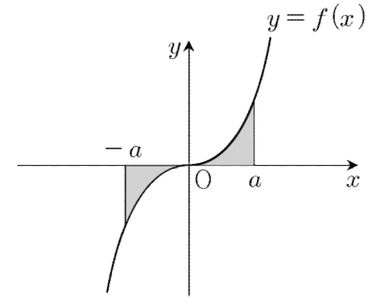
(2) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$\therefore \int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx$

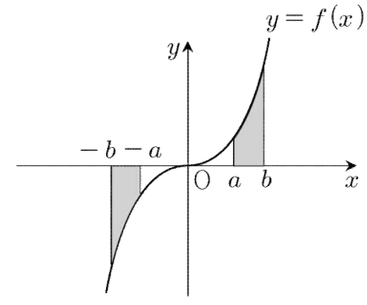
(3) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

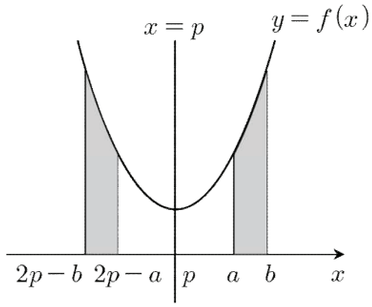
(4) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$\therefore \int_{a}^{b} f(x)dx=-\int_{-b}^{-a} f(x)dx$

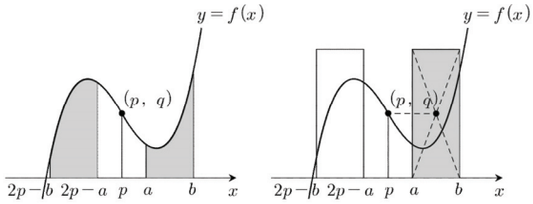
(5) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=\int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx$$

(6) (참)



위의 그림에서 색칠된 도형 을 점 $(p,\ q)$를 중심으로 180° 회전시켜서 색칠된 도형 의 위에 붙이면 직사각형이 만들어진다. 이때, 직사각형의 밑변과 높이는 각각 $b-a$, $2q$이다.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx+\int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx=2(b-a)q$$

답 풀이 참조

참고

미분법과 관련된 기함수, 우함수의 명제들은 다음과 같다. (단, 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$는 미분가능하다.)

1. $f(x)$가 기함수이면 $f'(x)$는 우함수이다. (참)
2. $f(x)$가 우함수이면 $f'(x)$는 기함수이다. (참)
3. $f(x)$가 기함수이면 $f'(0)=0$이다. (거짓)

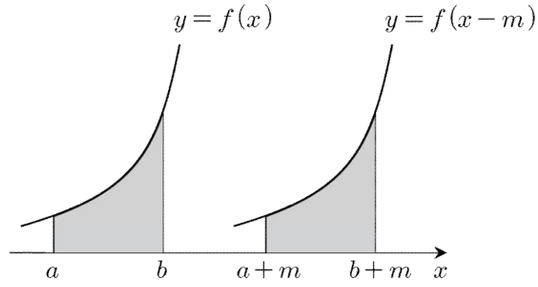
(반례: $f(x)=x^3-3x$)

4. $f(x)$가 우함수이면 $f'(0)=0$이다. (참)

• 평행이동

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{a+m}^{b+m} f(x-m)dx=\int_a^b f(x)dx$$



정적분의 치환적분법을 이용하여 위의 등식을 증명하자.

$x-m=t$로 두면 $dx=dt$이고,

$x=a+m$일 때, $t=a$, $x=b+m$일 때, $t=b$이다.

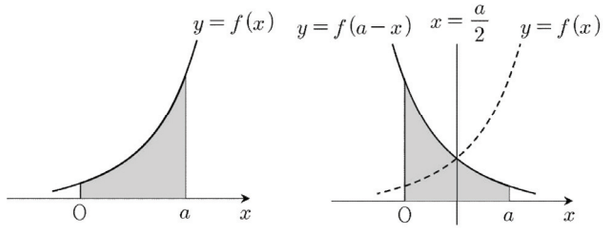
$$\int_{a+m}^{b+m} f(x-m)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$$

• 대칭이동

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^a f(a-x)dx=\int_0^a f(x)dx$$

이 명제가 참임을 그래프를 이용하여 확인할 수도 있고, 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명할 수도 있다.



함수 $f(x)$의 그래프를 직선 $x=\frac{a}{2}$에 대하여 대칭이동시키면 함수 $f(a-x)$의 그래프와 일치하므로, 위의 그림에서 주어진 명제가 참임을 확인할 수 있다.

이제 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명하자.

$a-x=t$로 두면 $-dx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=a$, $x=a$일 때 $t=0$이다.

$$\int_0^a f(a-x)dx=-\int_a^0 f(t)dt=\int_0^a f(x)dx$$

예제 2

다음 명제들이 참임을 그래프를 이용하여 확인하시오. (단, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.)

(1) $\int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(-x)dx$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_{-b}^{-a} -f(-x)dx$

(3) $\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^a f(-x)dx$

$=\int_0^a \{f(x)+f(-x)\}dx=\int_{-a}^0 \{f(x)+f(-x)\}dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx=\int_{2p-b}^{2p-a} f(2p-x)dx$

(5) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

$=\int_a^{\frac{a+b}{2}} \{f(x)+f(a+b-x)\}dx$

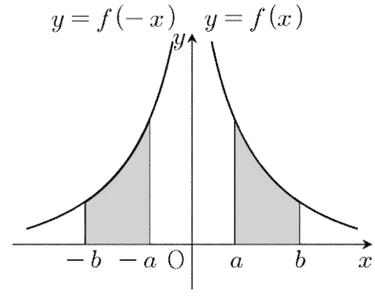
$=\int_{\frac{a+b}{2}}^b \{f(x)+f(a+b-x)\}dx$

(6) $\int_a^b f(x)dx+\int_{2p-b}^{2p-a} \{2q-f(2p-x)\}dx$

$=2(b-a)q$

풀이

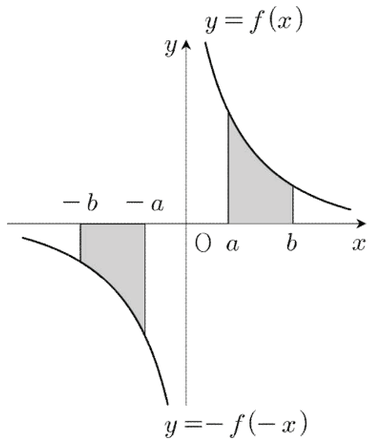
(1) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$\therefore \int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(-x)dx$

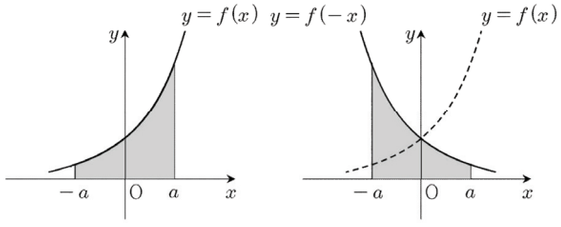
(2) (참)



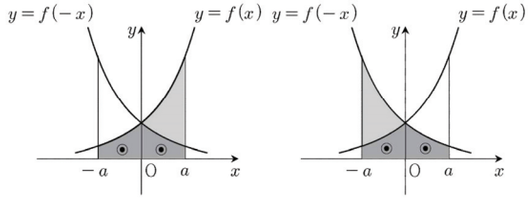
위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=-\int_{-b}^{-a}-f(-x)dx$$

(3) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.



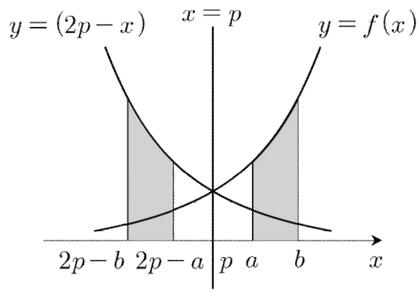
위의 그림에서 색칠된 네 도형(◉)은 모두 합동이므로 문제에서 주어진 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{a} f(-x)dx$$

$$=\int_0^a \{f(x)+f(-x)\}dx$$

$$=\int_{-a}^{0} \{f(x)+f(-x)\}dx$$

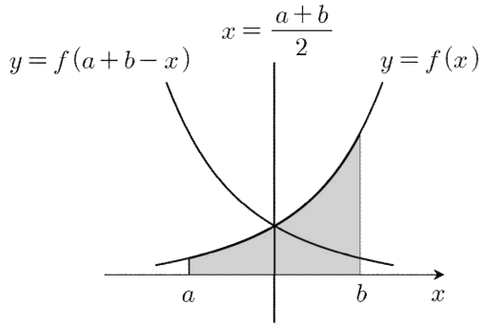
(4) (참)

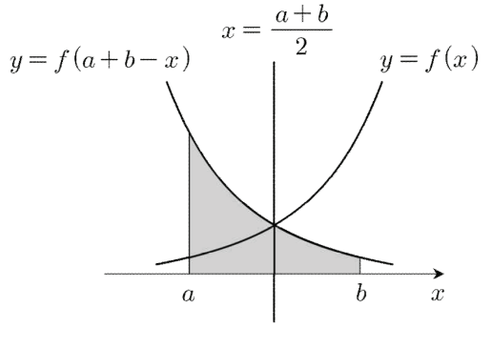


위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

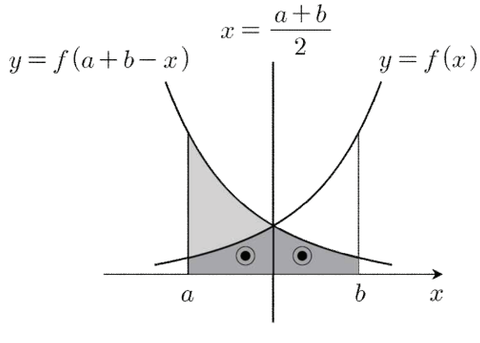
$$\int_a^b f(x)dx=\int_{2p-b}^{2p-a} f(2p-x)dx$$

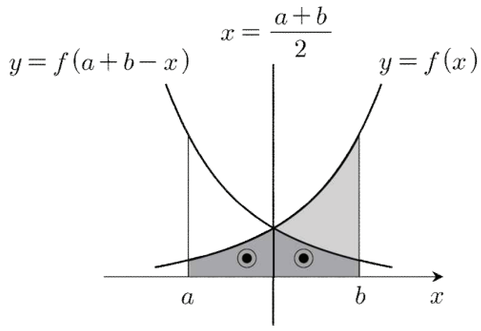
(5) (참)





위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.





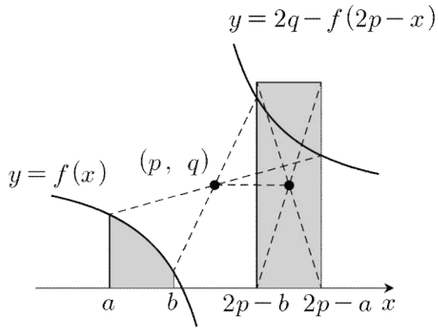
위의 그림에서 색칠된 네 도형(◉)은 모두 합동이므로 문제에서 주어진 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\{f(x)+f(a+b-x)\}dx$$

$$=\int_{\frac{a+b}{2}}^b\{f(x)+f(a+b-x)\}dx$$

(6) (참)



위의 그림에서 색칠된 도형 ◣을 점 $(p,\ q)$를 중심으로 180° 회전시켜서 색칠된 도형 ◥의 위에 붙이면 직사각형이 만들어진다. 이때, 직사각형의 밑변과 높이는 각각 $b-a$, $2q$이다.

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{2p-b}^{2p-a}\{2q-f(2p-x)\}dx=2(b-a)q$$

답 풀이 참조

• 확대축소

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(kx)dx=\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb}f(x)dx\ \ (\text{단},\ k\neq 0)$$

정적분의 치환적분법을 이용하여 위의 명제가 참임을 증명하자.

$kx=t$로 두면, $kdx=dt$이고,

$x=a$일 때 $t=ka$, $x=b$일 때 $t=kb$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_a^b f(kx)dx=\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb}f(t)dt=\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb}f(x)dx$$

예제 3

다음 명제가 참임을 증명하시오. (단, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.)

$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^{b-a}f(x+a)dx$$

$$=(b-a)\int_0^1 f((b-a)x+a)dx$$

증명

$x+a=t$로 두면 $dx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=a$, $x=b-a$일 때 $t=b$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_0^{b-a}f(x+a)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$$

$(b-a)x+a=t$로 두면 $(b-a)dx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=a$, $x=1$일 때 $t=b$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$(b-a)\int_0^1 f((b-a)x+a)dx=\int_a^b f(t)dt$$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

따라서 주어진 명제는 참이다.

답 풀이 참조

참고

ㄱ에서 적분구간 $[a,\ b]$: $\int_a^b f(x)dx$

ㄴ에서 적분구간 $[0,\ b-a]$: $\int_0^{b-a} f(x+a)dx$

ㄷ에서 적분구간 $[0,\ 1]$: $(b-a)\int_0^1 f((b-a)x+a)dx$

ㄱ을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 ㄴ이다.

ㄴ을 (원점을 기준으로) x축의 방향으로 $\frac{1}{b-a}$배 하면 ㄷ이다.

I036

(2021-가형20)

함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0,\ 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $\int_{-1}^{1} h(x)dx=2,\ \int_{-1}^{1} xh(x)dx=-\frac{1}{32}$
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

Ⅰ. 정적분: 점대칭

예제 1

실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 다음의 조건이 성립한다. (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.)

(가) 임의의 실수 x에 대하여

$f(x)=f(a-x)$

(나) 임의의 실수 x에 대하여

$g(x)+g(a-x)=b$

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\int_0^a f(x)dx=2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$

ㄴ. $\int_0^a f(x)g(x)dx=b\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$

ㄷ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi x-2x^2)\dfrac{\cos 2x+1}{2}dx=\dfrac{\pi^3}{48}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=\dfrac{a}{2}$에 대하여 대칭이고,

곡선 $y=g(x)$는 점 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

ㄱ. (참)

정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(a-x)dx\ (\because \text{(가)})\cdots(*)$$

$t=a-x$로 두면 $dt=-dx$,

$x=\dfrac{a}{2}$일 때 $t=\dfrac{a}{2}$이고, $x=a$일 때 $t=0$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_{\frac{a}{2}}^a f(a-x)dx=-\int_{\frac{a}{2}}^0 f(t)dt=\int_0^{\frac{a}{2}} f(t)dt$$

이를 (*)에 대입하면

$$\therefore\ \int_0^a f(x)dx=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx+\int_0^{\frac{a}{2}} f(t)dt$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$$

ㄴ. (참)

정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=\int_0^a f(x)\{b-g(a-x)\}dx$$

$(\because \text{(나)})$

$$=b\int_0^a f(x)dx-\int_0^a f(x)g(a-x)dx$$

$$=b\int_0^a f(x)dx+\int_a^0 f(a-t)g(t)dt$$

(∵ 정적분의 치환적분법)

$$=b\int_0^a f(x)dx-\int_0^a f(x)g(x)dx\ (\because \text{(가)})$$

정리하면

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{b}{2}\int_0^a f(x)dx$$

$$\therefore\ \int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{b}{2}\times 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$$

$$=b\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx\ (\because \text{ㄱ})$$

ㄷ. (참)

곡선 $y=\pi x-2x^2$은 직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=\dfrac{1}{2}\cos 2x$가 점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로,

곡선 $y=\dfrac{\cos 2x+1}{2}$은 점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

$f(x)=\pi x-2x^2$, $g(x)=\dfrac{\cos 2x+1}{2}$로 두면

$a=\dfrac{\pi}{2}$, $b=1$

ㄴ의 결과에 의하여

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi x-2x^2)\frac{\cos 2x+1}{2}dx$$

$$=1\times\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\pi x-2x^2)dx=\left[\frac{\pi}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^3}{48}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

ㄱ. (참)

곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=\frac{a}{2}$에 대하여 대칭이므로 주어진 등식이 참임을 기하적으로 알 수 있다.

ㄴ. (참)

조건 (나)에서 주어진 등식에서

$g(x)=b-g(a-x)$

이므로 이를 보기 ㄴ에서 주어진 등식의 좌변에 대입한다.

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=\int_0^a f(x)\{b-g(a-x)\}dx$$

이처럼 정적분 계산이 더 이상 진행되지 않을 때에는 피적분함수를 전개해야 한다. (그래서 조건 (나)에서 주어진 등식을 변형하여 대입한 것이다.)

$$=b\int_0^a f(x)dx-\int_0^a f(x)g(a-x)dx$$

$$=b\int_0^a f(x)dx+\int_a^0 f(a-t)g(t)dt$$

($a-x=t$로 치환하면 $f(x)$는 $f(a-t)$로 바뀌고 조건 (가)에 의하여 다시 $f(a-t)$를 $f(t)$로 바꿀 수 있다. 그리고 $g(a-x)$는 $g(t)$로 바뀐다. 보기 ㄴ의 좌변의 피적분함수가 $f(x)g(x)$이므로 이와 같은 식 변형을 하는 것이다.)

$$=b\int_0^a f(x)dx-\int_0^a f(x)g(x)dx\ (\because \text{(가)})$$

정리하면

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{b}{2}\int_0^a f(x)dx$$

$$\therefore\ \int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{b}{2}\times 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$$

$$=b\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx\ (\because \text{ㄱ})$$

이처럼 수능에서 출제되는 참, 거짓 판단 문제의 경우 앞선 보기의 참인 결과로 뒤에 오는 보기의 참, 거짓을 판단해야 한다.

ㄷ. (참)

좌변에서 주어진 함수 $y=\pi x-2x^2$이 선대칭함수이므로 $f(x)=\pi x-2x^2$으로 두어야 한다는 생각을 할 수 있어야 한다. 이제 함수 $y=\frac{\cos 2x+1}{2}$이 점대칭함수임을 확인한 후 이를 $g(x)$로 두고 보기 ㄴ의 결과를 이용하여 정적분의 값을 구하면 된다.

I037

○○○ (1997-자연11)

모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

$$f(1-x)=1-f(x)$$

다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은? [3점]

① $f(0)+f(1)=1$ ② $f'(0)=f'(1)$

③ $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$ ④ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

⑤ $f(0)=0$

I038

★★★
(2018(6)-가형30)

실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c(c>0$인 상수$)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdots$, α_m(m은 자연수)이다.

$a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

(나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=k\alpha_m\int_0^1 |f(x)|dx$

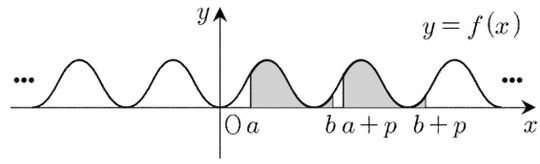
$mk\times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

I. 정적분: 주기성

• 주기

연속함수 $f(x)$의 주기가 p일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$$



정적분의 치환적분법을 이용하여 위의 명제가 참임을 증명하자.

$x+p=t$로 두면, $dx=dt$이고,

$x=a$일 때 $t=a+p$, $x=b$일 때 $t=b+p$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x+p)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(t)dt$$

$$=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$$

그리고 함수 $f(x)$가 주기가 p이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x+np)=f(x)$이다. 이때, 아래의 등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x+np)dx \text{ (단, } n\text{은 자연수)}$$

예제 1

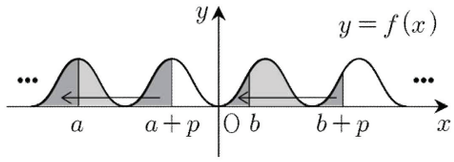
다음 명제들이 참임을 그래프를 이용하여 확인하시오. (단, 연속함수 $f(x)$의 주기는 p이고, n은 자연수이다.)

(1) $\int_a^{a+p} f(x)dx = \int_b^{b+p} f(x)dx$

(2) $\int_a^{a+np} f(x)dx = n\int_0^p f(x)dx$

풀이

(1) (참)

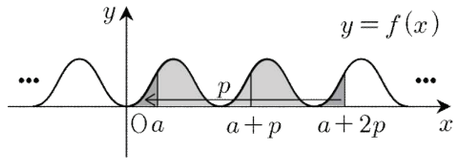


평행이동의 관점에서 문제에서 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.

$\therefore \int_a^{a+p} f(x)dx = \int_b^{b+p} f(x)dx$

(2) (참)

예를 들어 $n=2$인 경우는 아래 그림과 같다.



평행이동의 관점에서 문제에서 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.

$\therefore \int_a^{a+np} f(x)dx = n\int_0^p f(x)dx$

답 풀이 참조

예제 2

함수 $f(x)$는 다음을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le 1$일 때, $f(x) = \sin \pi x$

(나) 모든 실수 x에 대하여

$f(x+1) = f(x)$

이때, $\int_1^3 xf(x)dx$의 값을 구하시오.

풀이

정적분의 치환적분법, 부분적분법을 적용하여 문제를 해결하자.

$$\int_0^3 xf(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx + \int_1^2 xf(x)dx + \int_2^3 xf(x)dx$$

$$= \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 (x+1)f(x+1)dx + \int_0^1 (x+2)f(x+2)dx$$

$$= \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 (x+1)f(x)dx + \int_0^1 (x+2)f(x)dx$$

$$= \int_0^1 (3x+3)f(x)dx$$

$$= \left[-(3x+3)\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{3}{\pi}\cos \pi x dx$$

$$= \frac{9}{\pi}$$

답 $\frac{9}{\pi}$

I039

★★★
(2022(9)-미적분30)

최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=0$

(나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이다.

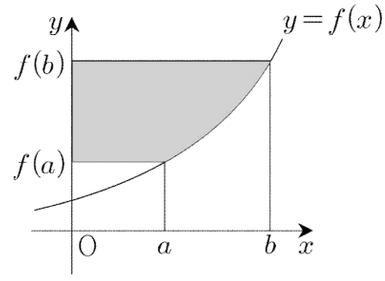
$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,

$\displaystyle\int_0^5 xg(x)dx=\frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

I. 정적분: 역함수

도함수가 연속인 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 일대일 함수일 때(즉, 단조증가 또는 단조감소일 때), 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 두 직선 $y=f(a)$, $y=f(b)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라고 하면

$$S=\int_a^b x|f'(x)|dx$$



증명

정적분의 치환적분법을 적용하자.

(1) $f(x)$가 단조증가인 경우 (즉, $f'(x)>0$)

$f(x)=y$로 두면 $x=f^{-1}(y)$, $f'(x)dx=dy$,

$x=a$일 때 $y=f(a)$, $x=b$일 때 $y=f(b)$

$$S=\int_a^b xf'(x)dx=\int_{f(a)}^{f(b)}f^{-1}(y)dy$$

(2) $f(x)$가 단조감소인 경우 (즉, $f'(x)<0$)

$f(x)=y$로 두면 $x=f^{-1}(y)$, $f'(x)dx=dy$,

$x=a$일 때 $y=f(a)$, $x=b$일 때 $y=f(b)$

$$S=\int_a^b x\{-f'(x)\}dx=-\int_{f(a)}^{f(b)}f^{-1}(y)dy$$

$$=\int_{f(b)}^{f(a)}f^{-1}(y)dy$$

(1), (2)에서 증명 끝.

I053

●●● (2021(9)-가형18)

함수

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0)\end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$$

라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a)\ge 1$인 실수 a가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

I. 불연속 함수의 정적분

• 불연속함수의 정적분

불연속함수의 정적분은 교육과정 외이다. 하지만 이 방법을 적용하면 빠르게 풀리는 문제가 수능 시험에 심심치 않게 출제되고 있다.

이 주제에 대한 실전이론은 아래의 예제로 대신한다.

예제 1

함수 $f_0(x)$의 방정식은

$$f_0(x)=\begin{cases}0 & (x\le -1,\ x\ge 1)\\ x+1 & (-1<x\le 0)\\ -x+1 & (0<x<1)\end{cases}$$

이고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$f(x)=f_0(x-t)$,

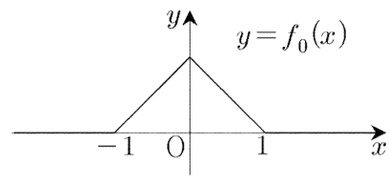
$g(x)=\sin\pi x$

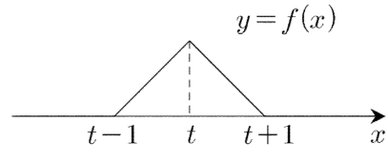
이다.

함수 $h(t)=\int_0^2 f(x)g'(x)dx$의 최솟값을 구하시오.

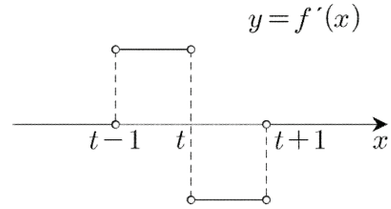
풀이

두 함수 $f_0(x)$, $f(x)$의 그래프는





함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프는



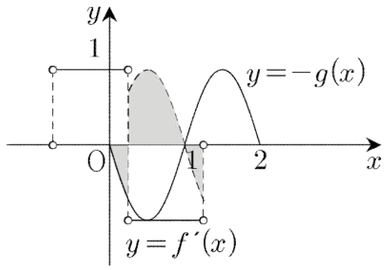
정적분의 부분적분법에 의하여

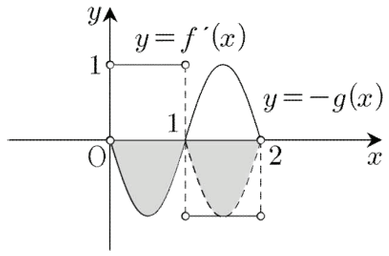
$$h(t)=\int_0^2 f(x)g'(x)dx$$

$$=[f(x)g(x)]_0^2-\int_0^2 f'(x)g(x)dx$$

$$=\int_0^2 f'(x)(-\sin\pi x)dx \qquad \cdots(*)$$

t의 값을 변화시키면서 (*)의 값을 구하면 다음과 같다. (아래의 그림에서 어둡게 칠한 정적분의 값)





이상에서 $t=1$일 때 (*)은 최솟값(극솟값)을 가진다.

따라서 최솟값은 $-\frac{\pi}{4}$이다.

답 $-\frac{\pi}{4}$

I054

★★★ (2018-가형30)

실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}1-|x-t| & (|x-t|\le 1)\\ 0 & (|x-t|>1)\end{cases}$$

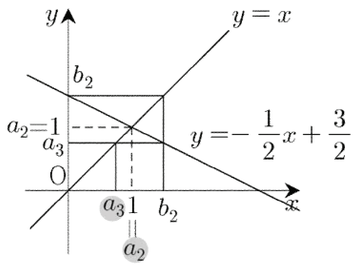
이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

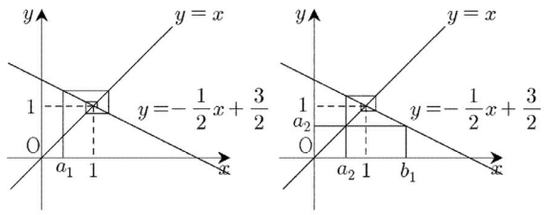
> 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]



위의 그림처럼 $a_3 < a_2$인 경우가 있으므로 주어진 부등식이 항상 성립하는 것은 아니다.

▸ ㄷ. (참)



위의 그림과 같이 a_1, b_1의 값이 주어졌을 때,

$n \to \infty$일 때, $a_n \to 1$임을 알 수 있다.

마찬가지의 방법으로

$n \to \infty$일 때, $b_n \to 1$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

G033 | 답 15

[풀이1]

주어진 부등식의 각 변에 양수 $\frac{5}{n^2+2n}$를 곱하면

$$\frac{15n^2+10n}{n^2+2n} < \frac{5a_n}{n^2+2n} < \frac{15n^2+15n}{n^2+2n}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{15n^2+10n}{n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{15+\frac{10}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 15$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{15n^2+15n}{n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{15+\frac{15}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 15$$

수열의 극한값에 대한 대소 관계에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{5a_n}{n^2+2n} = 15$$

답 15

[풀이2] 시험장

어차피 '수렴하는 수열의 극한에 대한 대소 관계(즉, 샌드위치 법칙)' 을 사용하여 문제를 해결해야 하므로

$a_n = 3n^2+3n$ (또는 $a_n = 3n^2+2n$)

으로 두자.

$n \to \infty$일 때, $\frac{5a_n}{n^2+2n} = \frac{15n^2+15n}{n^2+2n} \to 15$

답 15

G034 | 답 ④

[풀이1]

문제에서 주어진 부등식의 각 변은 모두 양수(+)이므로

$9n^2+4 < na_n < (3n+2)^2$

각 변을 n^2으로 나누면

$$\frac{9n^2+4}{n^2} < \frac{a_n}{n} < \frac{(3n+2)^2}{n^2}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+4}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(9+\frac{4}{n^2}\right) = 9+0 = 9$$이고,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+12n+4}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(9+\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}\right) = 9+0+0 = 9$$이므로

수렴하는 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 9$$

답 ④

[참고] 시험장

다음과 같은 빠른 계산도 가능하다.

$n \to \infty$일 때, $9n^2+4 \approx 9n^2$이므로

$$\frac{9n^2+4}{n^2} \approx \frac{9n^2}{n^2} \to 9$$

$n \to \infty$일 때, $(3n+2)^2 \approx (3n)^2 \approx 9n^2$이므로

$$\frac{(3n+2)^2}{n^2} \approx \frac{9n^2}{n^2} \to 9$$

[풀이2]

문제에서 주어진 부등식의 각 변을 n으로 나누어 정리하면

$$\sqrt{9+\frac{4}{n^2}} < \sqrt{\frac{a_n}{n}} < 3+\frac{2}{n}$$

$n \to \infty$일 때,

$\sqrt{9+\frac{4}{n^2}} \to 3$이고 $3+\frac{2}{n} \to 3$이므로

수렴하는 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{a_n}{n}}=3$

여기서 $b_n=\sqrt{\frac{a_n}{n}}$ 으로 두면 $\lim_{n\to\infty} b_n=3$이므로

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty} b_n^2=3^2=9$

답 ④

G035 | 답 ③

[풀이1]

조건 (가), (나)에서 주어진 두 부등식에서

$5-\frac{1}{n}<b_n<5+\frac{1}{n}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=5$

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n=5$

답 ③

[풀이2]

조건 (가)에서

$\lim_{n\to\infty}\left(20-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(20+\frac{1}{n}\right)=20$이므로

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=20$ …㉠

조건 (나)에서

$\lim_{n\to\infty}\left(10-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(10+\frac{1}{n}\right)=10$이므로

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=10$ …㉡

㉠, ㉡에서 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n-(a_n-b_n)}{2}=\frac{20-10}{2}=5$

답 ③

[풀이3] 시험장

세 수열

$\{b_n\}$, $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$

이 모두 수렴하므로 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하는 값을 각각 α, β라고 하면

(가) $\Rightarrow \alpha+\beta=20$

(나) $\Rightarrow \alpha-\beta=10$

$\alpha=15$, $\beta=5$

답 ③

G036 | 답 ⑤

[풀이]

▸ 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$이 x축과 만나므로

이차방정식

$x^2-(n+1)x+a_n=0$ …㉠

은 실근을 가져야 한다.

(㉠의 판별식)$=(n+1)^2-4a_n\geq 0$

정리하면

$a_n\leq\frac{(n+1)^2}{4}$

▸ 곡선 $y=x^2-nx+a_n$이 x축과 만나지 않으므로

이차방정식

$x^2-nx+a_n=0$ …㉡

은 허근을 가져야 한다.

(㉡의 판별식)$=n^2-4a_n<0$

정리하면

$a_n>\frac{n^2}{4}$

모든 자연수 n에 대하여

$\frac{n^2}{4}<a_n\leq\frac{(n+1)^2}{4}$

양변을 $n^2(>0)$으로 나누면

$\frac{1}{4}<\frac{a_n}{n^2}\leq\frac{(n+1)^2}{4n^2}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{4}$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{4}$

답 ⑤

G037 | 답 ④

[풀이]

$a_1 = \frac{\pi}{4}$

$a_1 + \pi < a_2 < \frac{3}{2}\pi$

$a_2 + \pi < a_3 < \frac{5}{2}\pi$

$\vdots$

$a_{n-1} + \pi < a_n < \frac{2n-1}{2}\pi$

(단, $n \geq 2$)

위의 부등식을 변변히 모두 더하면

$(n-1)\pi + \frac{\pi}{4} < a_n$

2 이상의 자연수 n에 대하여

$(n-1)\pi + \frac{\pi}{4} < a_n < \frac{2n-1}{2}\pi$

각 변을 n으로 나누면

$\frac{4n-3}{4n}\pi < \frac{a_n}{n} < \frac{2n-1}{2n}\pi$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-3}{4n}\pi = \pi$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n}\pi = \pi$

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \pi$

답 ④

G038 | 답 ②

[풀이1]

주어진 부등식에서

$1 < a_1 < 2$

$2 < a_2 < 3$

$3 < a_3 < 4$

$\vdots$

$n < a_n < n+1$

자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$\frac{n^2+n}{2} < a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \frac{n^2+3n}{2}$

각 변이 모두 양수이므로

$\frac{2}{n^2+3n} < \frac{1}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} < \frac{2}{n^2+n}$

각 변에 양수 n^2을 곱하면

$\frac{2n^2}{n^2+3n} < \frac{n^2}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} < \frac{2n^2}{n^2+n}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{3}{n}} = 2$

수열의 극한에 대한 대소 관계에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 2$

답 ②

[풀이2] 시험장

어차피 '수렴하는 수열의 극한의 대소 관계'로 문제를 해결해야 하므로 $a_n = n$으로 두고 극한값을 구하자.

(또는 $a_n = n+1$로 두어도 좋다.)

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

답 ②

G039 | 답 ①

[풀이]

$a_n = \sin\frac{n}{2}\pi$로 두자.

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \cdots$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \cdots$

모든 자연수 n에 대하여

$0 \leq S_n \leq 1$

각 변을 n으로 나누면

$0 \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$이므로

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{2}\pi\right)=0$$

답 ①

G040 | 답 ④

[풀이1]

▸ ㄱ. (수렴×)

등차수열의 합의 공식에 의하여

$$a_1+a_2+\ \cdots\ +a_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ \cdots\ +a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=\infty$$

▸ ㄴ. (수렴○)

등비수열의 합의 공식에 의하여

$$a_1+a_2+\ \cdots\ +a_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ \cdots\ +a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=0$$

▸ ㄷ. (수렴○)

등비수열의 합의 공식에 의하여

$$a_1+a_2+\ \cdots\ +a_n=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n$$

한편 모든 자연수 n에 대하여

$$-\frac{1}{2n}\le\frac{(-1)^n}{2n}\le\frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=0$$

수열의 극한값에 대한 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n}=0$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ \cdots\ +a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2n}+\frac{(-1)^n}{2n}\right\}=0$$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

[풀이2] 시험장

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

▸ ㄱ. (수렴×)

a_n이 일차식이므로 S_n은 이차식이다.

$n\to\infty$일 때, $\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{2\text{차}}{1\text{차}}$는 발산한다.

▸ ㄴ. (수렴○)

$S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ \cdots\ \to1$이므로

$n\to\infty$일 때, $\dfrac{S_n}{a_n}\approx\dfrac{\text{상수}}{1\text{차}}$는 수렴한다.

▸ ㄷ. (수렴○)

S_n은 -1(n이 홀수) 또는 0(n이 짝수)이므로

$n\to\infty$일 때,

$\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{-1}{1\text{차}}$($n$이 홀수), $\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{0}{1\text{차}}$($n$이 짝수)

는 수렴한다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

G041 | 답 12

[풀이1]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

$(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+a_5$

$=-d-d+(a_1+4d)=4+2d=28$

풀면

$d=12$

일반항 a_n은

$a_n=a_1+(n-1)d=12n-8$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n-8}{n}=12$$

답 12

[풀이2]

등차중항의 정의에 의하여

$2a_3=a_1+a_5=a_2+a_4$

이므로, 문제에서 주어진 등식은

$a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=2a_3-2a_3+a_3=a_3=28$

즉, $a_3=28$

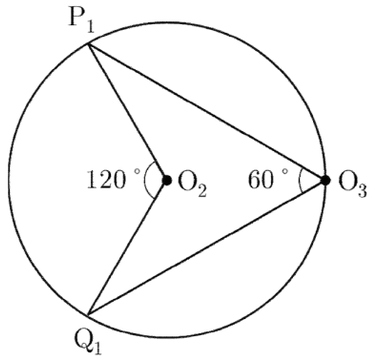
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$$d=\frac{a_3-a_1}{3-1}=\frac{28-4}{2}=12$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n-8}{n}=12$$

답 12



자연수 n에 대하여 $\angle P_nO_{n+1}Q_n = a_n{}^\circ$ 이라 하자.

$a_1{}^\circ = \angle P_1O_2Q_1 = 120^\circ$

원주각과 중심각 사이의 관계에 의하여

$$\angle P_2O_3Q_2 = \angle P_1O_3Q_1 = \frac{1}{2} \times \angle P_1O_2Q_1$$

즉, $a_2{}^\circ = \frac{1}{2}a_1{}^\circ$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}{}^\circ = \frac{1}{2}a_n{}^\circ$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1{}^\circ = 120^\circ$, $a_{n+1}{}^\circ = \frac{1}{2}a_n{}^\circ$

부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S_n = \pi \times 1^2 \times \frac{a_n}{360} = \frac{\pi}{360}a_n$$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

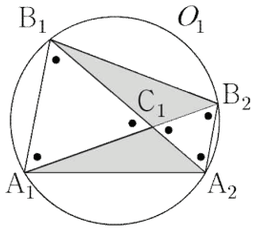
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\pi$$

답 ②

G153 | 답 ②

[풀이]



(단, ●$= 60^\circ$)

원주각의 성질에 의하여

$\angle A_1B_2A_2 = \angle A_1B_1A_2 (= ●)$

그리고 $A_1B_1 // A_2B_2$이므로

평행선의 성질에 의하여

$\angle B_2A_2B_1 = \angle A_1B_1A_2 (= ●)$,

$\angle B_2A_1B_1 = \angle A_1B_2A_2 (= ●)$

삼각형의 세 내각의 합은 180°이므로

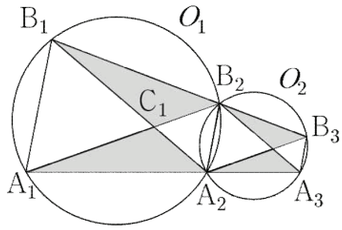
$\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_1B_2 (= ●)$

이상에서 두 삼각형 $A_1C_1B_1$, $A_2C_2B_2$는 정삼각형이다.

이때, 전자의 한 변의 길이는 2, 후자의 한 변의 길이는 1이다.

$S_1 = (\triangle A_1C_1A_2$의 넓이$) + (\triangle B_2C_1B_2$의 넓이$)$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \sin 120^\circ\right) = \sqrt{3}$$



두 원 O_1, O_2에 그려지는 모양의 도형의 닮음비는

$2 : 1 (= \overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2})$

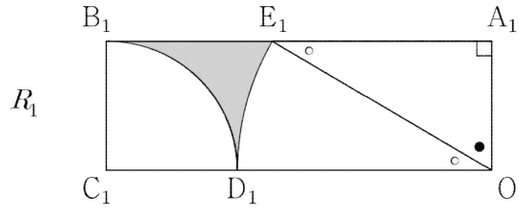
이므로

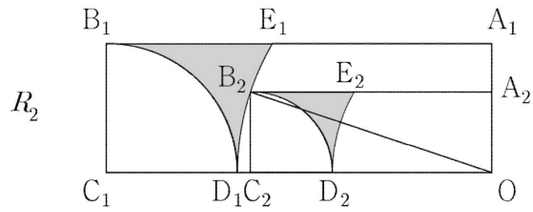
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\sqrt{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

답 ②

G154 | 답 ②

[풀이1]





(단, ●$= 60^\circ$, ○$= 30^\circ$)

그림 R_1의 직각삼각형 A_1OE_1에서

$\overline{A_1O}:\overline{OE_1}=1:2$

이므로 위의 그림과 같이 각(●, ○)이 결정된다.

$S_1=$(□$A_1B_1C_1O$의 넓이)−(▽$B_1C_1D_1$의 넓이)

−(▽OE_1D_1의 넓이)−(△OA_1E_1의 넓이)

$=3-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=3-\frac{7}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

직사각형 $A_2B_2C_2O$의 짧은 변의 길이를 x로 두자.

직각삼각형 OB_2C_2에서

$2^2=x^2+(3x)^2,\ x=\frac{2}{\sqrt{10}}$

그림 R_2에서 두 직사각형 $A_1B_1C_1O$, $A_2B_2C_2O$의 닮음비가

$1:\frac{2}{\sqrt{10}}$

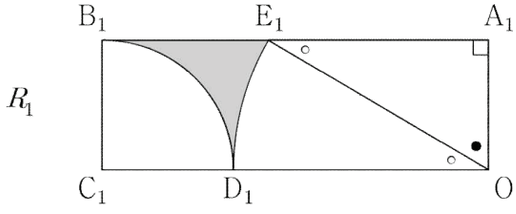
이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3-\frac{7}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2}=5-\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{35}{36}\pi$

답 ②

[풀이2]

그림 R_n에서 새롭게 그려진 도형 ▽의 넓이를 a_n이라고 하자.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

원의 정의에 의하여

$\overline{C_1D_1}=\overline{B_1C_1}=1$이므로

$\overline{D_1O}=\overline{C_1O}-\overline{C_1D_1}=2$

원의 정의에 의하여

$\overline{E_1O}=\overline{D_1O}=2$

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{E_1A_1}=\sqrt{\overline{E_1O}^2-\overline{OA_1}^2}=\sqrt{3}$

특수각의 삼각비에 의하여

$\angle A_1E_1O=30^\circ$

평행사변형의 정의에 의하여 두 쌍의 대변 A_1B_1, OC_1은 서로 평행하므로

$\angle E_1OD_1=\angle A_1E_1O=30^\circ$ (엇각)

부채꼴, 삼각형, 사각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$a_1=S_1=$(□$OA_1B_1C_1$의 넓이)−(▽$B_1C_1D_1$의 넓이)

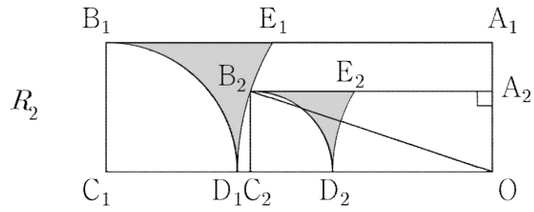
−(▽E_1D_1O의 넓이)−(△OA_1E_1의 넓이)

$=\overline{OA_1}\times\overline{A_1B_1}-\frac{1}{2}\times\overline{B_1C_1}^2\times\frac{\pi}{2}$

$-\frac{1}{2}\times\overline{E_1O}^2\times\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\overline{OA_1}\times\overline{A_1E_1}$

$=3-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=3-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{12}\pi$

$\overline{OA_2}=x$로 두면 $\overline{A_2B_2}=3x$이다.



원의 정의에 의하여

$\overline{B_2O}=\overline{D_1O}=2$

직각삼각형 OA_2B_2에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{OB_2}^2=\overline{OA_2}^2+\overline{A_2B_2}^2$ 즉, $2^2=x^2+(3x)^2$

풀면

$x=\frac{2}{\sqrt{10}}$

두 직사각형 $OA_1B_1C_1$, $OA_2B_2C_2$의 닮음비가 $1:x$이므로 그림 R_1에서 새롭게 그려진 ▽ 모양의 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진 ▽ 모양의 도형의 넓이의 비는 $1^2:x^2$이다.

즉,

$a_2=x^2a_1=\frac{2}{5}a_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$a_{n+1}=\frac{2}{5}a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=3-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{12}\pi,$

$a_{n+1}=\frac{2}{5}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $3-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{12}\pi$이고, 공비가 $\frac{2}{5}$인 등비수열이다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{12}\pi}{1-\frac{2}{5}}$

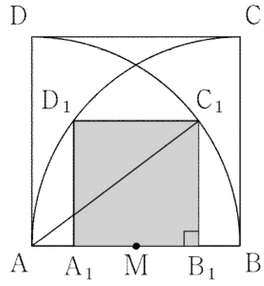
$=5-\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{35}{36}\pi$

답 ②

G155 | 답 ②

[풀이1]

선분 AB의 중점을 M, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이를 x라고 하자.



위의 그림에서

$\overline{AB_1}=\overline{AM}+\overline{MB_1}=\frac{1}{2}+\frac{x}{2}$

직각삼각형 C_1AB_1에서 피타고라스의 정리에 의하여

$1^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)^2+x^2,\ 5x^2+2x-3=0,$

$(5x-3)(x+1)=0,\ x=\frac{3}{5}$

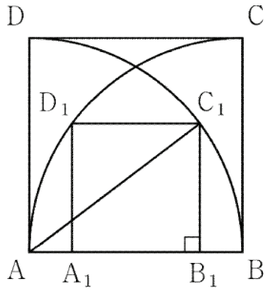
두 직각삼각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$의 닮음비는 $1:x$이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{9}{16}$$

답 ②

[풀이2]

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이를 x라고 하자.



원의 정의에 의하여

$\overline{AC_1}=\overline{AB}=1$

정사각형의 정의에 의하여

$\angle AB_1C_1=90^\circ$

직각삼각형 AB_1C_1에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB_1}=\sqrt{\overline{AC_1}^2-\overline{C_1B_1}^2}=\sqrt{1-x^2}$

이므로

$\overline{AA_1}=\sqrt{1-x^2}-x$

마찬가지의 방법으로

$\overline{BB_1}=\sqrt{1-x^2}-x$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{AB}=\overline{AA_1}+\overline{A_1B_1}+\overline{B_1B}$

$=2\sqrt{1-x^2}-x=1$

정리하면

$2\sqrt{1-x^2}=x+1$

양변을 제곱하여 정리하면

$5x^2+2x-3=0$

좌변을 인수분해하면

$(5x-3)(x+1)=0$

x는 양수이므로 $x=\frac{3}{5}$

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이가 $\frac{3}{5}$이므로

정사각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S_1=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

두 정사각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$의 닮음비가 $5:3$이므로

두 정사각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$의 넓이의 비는 $25:9$이다.

마찬가지의 방법으로 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{9}{25}$

수열 $\{S_n\}$의 귀납적 정의는

$S_1=\frac{9}{25},\ S_{n+1}=\frac{9}{25}S_n$

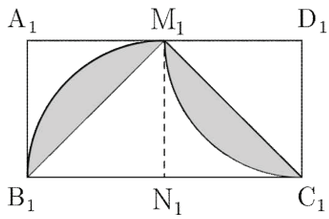
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9}{16}$$

답 ②

G156 | 답 ③

[풀이1]

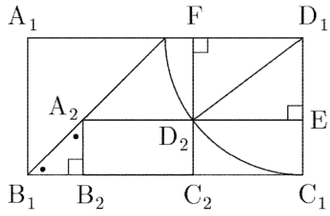


R_1

$\frac{S_1}{2}$=(▽$B_1N_1M_1$의 넓이)−(△$B_1N_1M_1$의 넓이)

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$, $S_1=\frac{\pi}{2}-1$

점 D_2에서 두 선분 C_1D_1, D_1A_1에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자.



R_2

(단, ●$=45^\circ$)

$\overline{A_2B_2}=x$로 두자.

$\overline{D_2E}=\overline{B_1C_1}-\overline{B_1B_2}-\overline{B_2C_2}$

$=2-x-2x=2-3x$

$\overline{ED_1}=\overline{C_1D_1}-\overline{B_2A_2}=1-x$

직각삼각형 D_1D_2E에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{D_1D_2}=\sqrt{(2-3x)^2+(1-x)^2}=1$

양변을 제곱하여 정리하면

$5x^2-7x+2=0$, $(5x-2)(x-1)=0$

풀면 $x=\frac{2}{5}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

답 ③

[풀이2]

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

a_n=(그림 R_n에서 새롭게 그려진 ◠ 모양의 도형 한 개의 넓이)

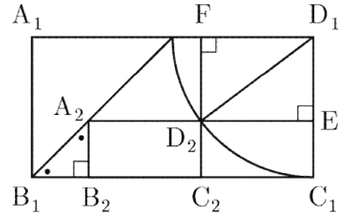
부채꼴과 삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$\frac{a_1}{2}$=(부채꼴 $N_1M_1B_1$의 넓이)−(△$N_1M_1B_1$의 넓이)

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$이므로 $a_1=\frac{\pi}{2}-1$

점 D_2에서 두 선분 A_1D_1, D_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 F, E라고 하자.

그리고 $\overline{A_2B_2}=x$로 두자. (단, $0<x<1$)



△$A_2B_1B_2$는 $\overline{B_1B_2}=\overline{B_2A_2}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{B_1B_2}=x$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{B_2C_2}=2x$

$\overline{D_2E}=\overline{C_2C_1}=\overline{B_1C_1}-\overline{B_1B_2}-\overline{B_2C_2}=2-3x$ …㉠

$\overline{ED_1}=\overline{C_1D_1}-\overline{C_1E}=1-x$ …㉡

원의 정의에 의하여

$\overline{D_1D_2}=1$ …㉢

직각삼각형 D_1D_2E에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{D_1D_2}^2=\overline{D_1E}^2+\overline{ED_2}^2$

㉠, ㉡, ㉢을 대입하면

$1=(1-x)^2+(2-3x)^2$

정리하면

$5x^2-7x+2=0$

좌변을 인수분해하면

$(5x-2)(x-1)=0$

$0<x<1$이므로 $x=\frac{2}{5}$

서로 닮음인 두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는

$1:\frac{2}{5}$이므로

$a_2=\left(\frac{2}{5}\right)^2a_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$a_{n+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^2a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=\frac{\pi}{2}-1$, $a_{n+1}=\frac{4}{25}a_n(n\geq1)$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 a_n은

$a_n=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(\frac{4}{25}\right)^{n-1}\ (n\geq 1)$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로 일반항 S_n은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}-1$이고 공비가 $\frac{4}{25}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

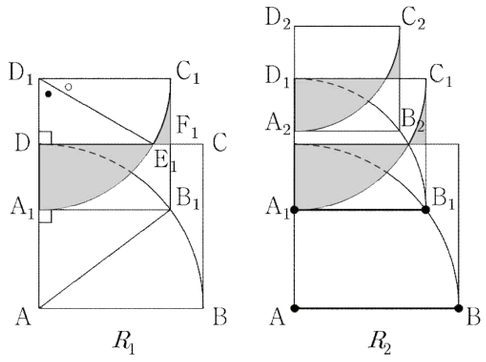
등비급수의 합의 공식에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

답 ③

G157 | 답 ⑤

[풀이]



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

점 A_1은 선분 AD의 3 : 2 내분점이므로

$\overline{AA_1}=3,\ \overline{A_1D}=2$

직각삼각형 AB_1A_1에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{A_1B_1}=4$

즉, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이는 4이다.

$\overline{DD_1}=\overline{A_1D_1}-\overline{A_1D}=2,\ \overline{D_1E_1}=4$($\because$ 원의 정의)

이므로 직각삼각형 D_1DE_1에서

$\angle E_1D_1D=60^\circ$($\angle C_1D_1F_1=30^\circ$), $\overline{DE_1}=2\sqrt{3}$

$S_1=$(▽$D_1A_1E_1$의 넓이)+(□$D_1DF_1C_1$의 넓이)

$-2\times$(△D_1DE_1의 넓이)−(▽$D_1E_1C_1$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{3}+2\times4$

$-2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{6}$

$=\frac{4}{3}\pi+8-4\sqrt{3}$

그림 R_1의 모양의 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진 모양의 도형의 닮음비는

$\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=5:4$

이므로, 넓이의 비는 25 : 16이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi+8-4\sqrt{3}}{1-\frac{16}{25}}$

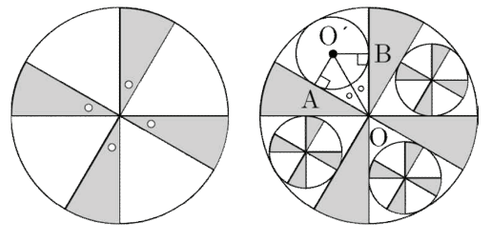
$=\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

답 ⑤

G158 | 답 ③

[풀이1]

아래 그림처럼 [그림1]의 원의 중심을 O, [그림2]에서 새롭게 그려진 작은 원 중에서 한 원의 중심을 O′, 점 O′에서 두 지름에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 하자. 그리고 [그림2]에서 새롭게 그려진 작은 원들의 반지름의 길이를 r이라고 하자.



[그림1] [그림2]

(단, ○$=30^\circ$)

$S_1=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$

위의 그림처럼

$\angle O'OA=\angle O'OB=30^\circ$

이므로 직각삼각형 O′AO에서

$\frac{\overline{O'A}}{\overline{OO'}}=\sin\frac{\pi}{6}$, 즉 $\frac{r}{1-r}=\frac{1}{2},\ r=\frac{1}{3}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot4}=\frac{3}{5}\pi$

답 ③

[풀이2]

자연수 n에 대하여 [그림n]에서 새롭게 그려진 모양의 도형의 4개의 부채꼴의 중심각을 모두 30°로 두어도 풀이의 일

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\theta\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta - \frac{7}{10}\theta}{\sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left(2\cos^2\theta \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}} - \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{7}{10}\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}} \right)$$

$$= 2\times 1^2 \times \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\times 1 - \frac{7}{10}\times\frac{1}{1}$$

$$= \frac{4}{5}$$

$\therefore\ 50a = 40$

답 40

[참고]

다음과 같이 극한값을 빠르게 계산할 수 있다.

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S_1 - S_2}{\overline{OH}}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\theta\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta - \frac{7}{10}\theta}{\sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{7}{10}\theta}{\theta}$$

($\because\ \theta\to 0$일 때, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$)

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{7}{10} = \frac{4}{5}$$

H076 | 답 2

[풀이]

원 C가 x축에 접하므로, 원 C의 반지름의 길이는 $\sin t$이다.

$\overline{OR} = \overline{OP} - \overline{RP} = \sqrt{t^2 + \sin^2 t} - \sin t$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{t \to 0+} \frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \sin^2 t} - \sin t}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} - \frac{\sin t}{t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1^2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

$a = b = 1$이므로

$\therefore\ a + b = 2$

답 2

[참고]

함수의 극한을 근사적인 계산으로 빠르게 구할 수도 있다.

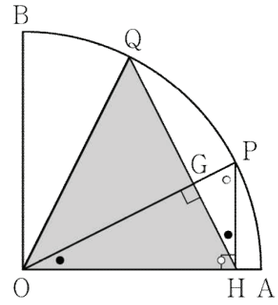
$t \to 0+$일 때, $\sin t \approx t$이므로

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}} \approx \frac{t}{\sqrt{2t^2} - t} \to \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

H077 | 답 ①

[풀이1]

두 선분 OP, HQ의 교점을 G라고 하자.



(단, ●$= \theta$, ○$= \frac{\pi}{2} - \theta$)

삼각형 POH의 세 내각의 합은 π이므로

$\angle HPO = \frac{\pi}{2} - \theta$

삼각형 HPG의 세 내각의 합은 π이므로

$\angle PGH = \frac{\pi}{2}$

$\angle HGO = \pi - \angle PGH = \frac{\pi}{2}$이므로

두 선분 OP, HQ는 서로 수직으로 만난다.

직각삼각형 POH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{OH} = \cos\theta$, $\overline{PH} = \sin\theta$

직각삼각형 HPG에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{PG} = \sin^2\theta$, $\overline{GH} = \sin\theta\cos\theta$

직각삼각형 GOH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{OG} = \cos^2\theta$

(또는 다음의 방법으로 유도해도 좋다.

$\overline{OG} = \overline{OP} - \overline{GP} = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$)

직각삼각형 QOG에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{QG} = \sqrt{1^2 - \cos^4\theta} = \sqrt{(1+\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)}$

$= \sqrt{(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta} = \sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}$

($\because\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta > 0$이다.)

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(\theta) = (\triangle QOG$의 넓이$) + (\triangle GOH$의 넓이$)$

$$= \frac{1}{2}\overline{OG}\,\overline{GQ} + \frac{1}{2}\overline{OG}\,\overline{GH}$$

$= \frac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta(\sqrt{1+\cos^2\theta}+\cos\theta)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$

$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\cos^2\theta(\sqrt{1+\cos^2\theta}+\cos\theta)}{2}$

$= 1\times\frac{\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

답 ①

[참고]

$S(\theta)$의 방정식을 다음과 같이 유도해도 좋다.

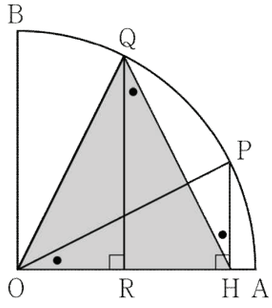
$S(\theta) = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{HO}}\,\overline{\mathrm{HQ}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$= \frac{1}{2}\cos\theta(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta})\cos\theta$

$= \frac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta(\cos\theta+\sqrt{1+\cos^2\theta})$

[풀이2]

점 Q에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 R, $\overline{\mathrm{QR}} = x$로 두자.



(단, ●$=\theta$)

두 직선 PH, QR은 서로 평행하므로

$\angle \mathrm{HQR} = \theta = \angle \mathrm{QHP}$(엇각)

직각삼각형 POH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OH}} = \cos\theta$

직각삼각형 QRH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{RH}} = x\tan\theta$

$\overline{\mathrm{OR}} = \overline{\mathrm{OH}} - \overline{\mathrm{RH}} = \cos\theta - x\tan\theta$

직각삼각형 QOR에서 피타고라스의 정리에 의하여

$1^2 = (\cos\theta - x\tan\theta)^2 + x^2$

정리하면

$(1+\tan^2\theta)x^2 - 2x\sin\theta - \sin^2\theta = 0$

그런데 $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}(=\sec^2\theta)$이므로

$\frac{x^2}{\cos^2\theta} - 2x\sin\theta - \sin^2\theta = 0$

양변에 $\cos^2\theta(\neq 0)$를 곱하면

$x^2 - 2x\sin\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta = 0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x = \sin\theta\cos^2\theta \pm \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta(\cos^2\theta+1)}$

$= \sin\theta\cos\theta(\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta+1})$

($\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이다.)

그런데 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때,

$\sqrt{\cos^2\theta+1} > \cos\theta$이므로

$x = \sin\theta\cos\theta(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+1})$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(\theta) = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{OH}}\,\overline{\mathrm{QR}}$

$= \frac{1}{2}\sin\theta\cos^2\theta(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+1})$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$

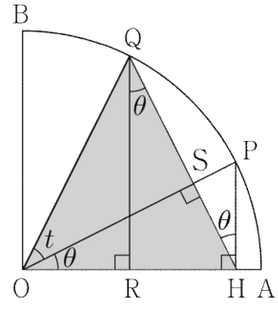
$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\cos^2\theta(\cos\theta+\sqrt{1+\cos^2\theta})}{2}$

$= 1\times\frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

답 ①

[풀이3] 시험장

점 Q에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 R, 두 선분 OP, HQ의 교점을 S라고 하자.



$\angle \mathrm{QOP} = t$로 두면 $\theta\to 0+$일 때, $t\to 0+$이다.

왜냐하면 $\theta\to 0+$일 때,

세 점 H, P, S는 정점 A에 한없이 가까워지므로

$\overline{\mathrm{OS}} \approx \cos^2\theta \approx \cos t$이기 때문이다.

이제부터 모든 근사($\approx$)는 '$t\to 0+$일 때' 이다.

$\cos t \approx \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$, 즉

$1-\frac{1}{2}t^2 \approx 1-\theta^2$, $t \approx \sqrt{2}\,\theta$

$\overline{\mathrm{QR}} = \sin(t+\theta) = \sin t\cos\theta + \sin\theta\cos t$

$\approx (1+\sqrt{2})\theta$

$S(\theta) \approx \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\theta$

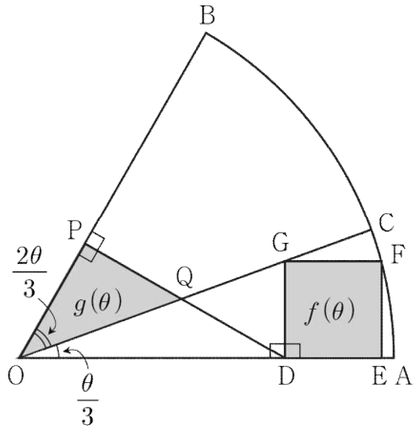
따라서 $\theta \to 0+$일 때,

$\dfrac{S(\theta)}{\theta} \to \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

답 ①

H078 | 답 20

[풀이]



정사각형 DEFG의 한 변의 길이를 $x(\theta)$로 두자.

직각삼각형 ODG에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{OD} = \dfrac{\overline{DG}}{\tan\dfrac{\theta}{3}} = \dfrac{x(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{3}}$

직각삼각형 DOP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{OP} = \overline{DO}\cos\theta = \dfrac{x(\theta)\cos\theta}{\tan\dfrac{\theta}{3}}$

직각삼각형 OPQ에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{PQ} = \overline{OP}\tan\dfrac{2\theta}{3} = \dfrac{x(\theta)\cos\theta\tan\dfrac{2\theta}{3}}{\tan\dfrac{\theta}{3}}$

사각형과 삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$f(\theta) = \{x(\theta)\}^2$,

$g(\theta) = \dfrac{1}{2}\overline{OP}\,\overline{PQ} = \dfrac{\{x(\theta)\}^2\cos^2\theta\tan\dfrac{2\theta}{3}}{2\tan^2\dfrac{\theta}{3}}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$k = \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)} = \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2\tan^2\dfrac{\theta}{3}}{\theta\cos^2\theta\tan\dfrac{2\theta}{3}}$

$= \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2\cos\dfrac{2\theta}{3}}{\cos^2\theta\cos^2\dfrac{\theta}{3}}\times\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{3}}{\theta\sin\dfrac{2\theta}{3}}$

$= \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\cos\dfrac{2\theta}{3}}{3\cos^2\theta\cos^2\dfrac{\theta}{3}}\times\left(\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{3}}{\dfrac{\theta}{3}}\right)^2\times\dfrac{1}{\dfrac{\sin\dfrac{2\theta}{3}}{\dfrac{2\theta}{3}}}$

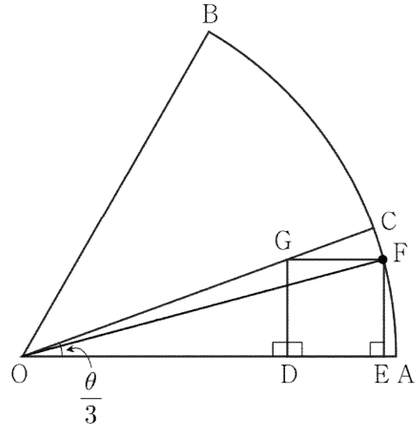
$= \dfrac{1}{3}\times 1^2\times\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ 60k = 20$

답 20

[참고1]

문제에서 주어진 조건인 '반지름의 길이가 1'을 이용하여 함수 $x(\theta)$의 방정식을 구하자.



정사각형 DEFG의 한 변의 길이를 $x(\theta)$로 두자.

직각삼각형 ODG에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{OD} = \dfrac{\overline{DG}}{\tan\dfrac{\theta}{3}} = \dfrac{x(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{3}}$이므로 $\overline{OE} = \dfrac{x(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{3}} + x(\theta)$

직각삼각형 OEF에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{OF}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{EF}^2$

대입하면

$1^2 = \left\{\dfrac{x(\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{3}} + x(\theta)\right\}^2 + \{x(\theta)\}^2$

정리하면

$x(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{3}}+1\right)^2+1}}$

[참고2]

k의 값을 다음과 같은 방법으로 구해도 좋다.

$\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}=1$이므로

$$k=\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$$

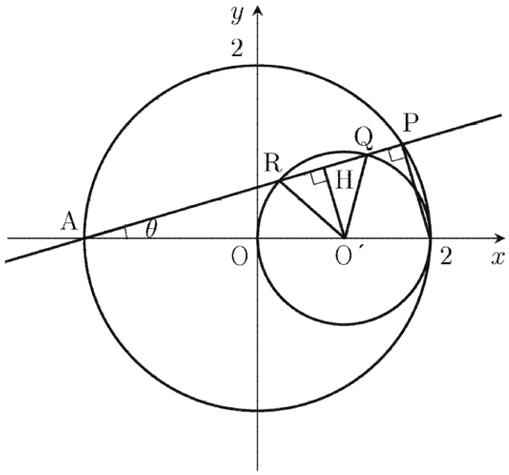
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{3\cos^2\theta}\times\left(\frac{\tan\frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3}}\right)^2\times\frac{1}{\frac{\tan\frac{2\theta}{3}}{\frac{2\theta}{3}}}$$

$$=\frac{1}{3}\times 1^2\times\frac{1}{1}=\frac{1}{3}$$

H079 | 답 ④

[풀이1]

직선 AP와 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 두 교점 중에서 점 Q가 아닌 점을 R이라고 하자. 그리고 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 중심을 O′, 점 O′에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



직각삼각형 O′AH에서

$\overline{AH}=3\cos\theta$, $\overline{O'H}=3\sin\theta$

직각삼각형 O′QH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{HQ}=\sqrt{\overline{O'Q}^2-\overline{O'H}^2}=\sqrt{1-9\sin^2\theta}$

위의 그림에서

$\overline{PQ}=\overline{AP}-\overline{AH}-\overline{HQ}$

$=4\cos\theta-3\cos\theta-\sqrt{1-9\sin^2\theta}$

$=\cos\theta-\sqrt{1-9\sin^2\theta}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{PQ}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\cos\theta-\sqrt{1-9\sin^2\theta}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{8\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta+\sqrt{1-9\sin^2\theta})}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\frac{8}{\cos\theta+\sqrt{1-9\sin^2\theta}}$$

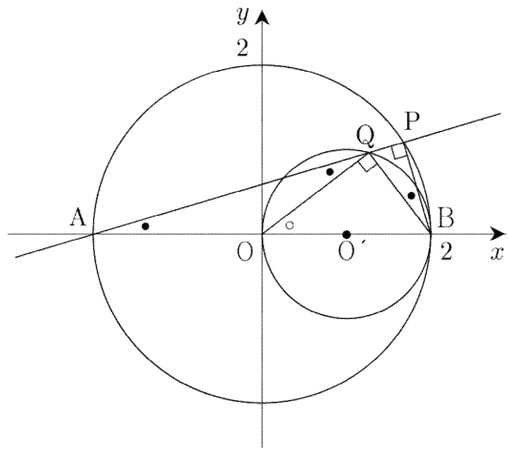
$=1\times 4=4$

답 ④

[풀이2] 시험장

다음과 같이 빠르게 문제를 해결할 수도 있다.

큰 원에 내접하는 작은 원의 중심을 O′이라고 하자.



(단, ●$=\theta(\approx\theta)$, ○$\approx 2\theta$, B$(2,\ 0)$)

$\theta\to 0+$일 때, 두 점 P, Q는 점 $(2,\ 0)$에 한없이 가까워지므로

$\angle OQA\approx\theta$, $\angle QOO'\approx 2\theta$, $\angle QBP=\theta$

$\overline{PB}=4\sin\theta\approx 4\theta$,

$\overline{PQ}\approx 4\theta\tan\theta=4\theta^2$

따라서 $\theta\to 0+$일 때,

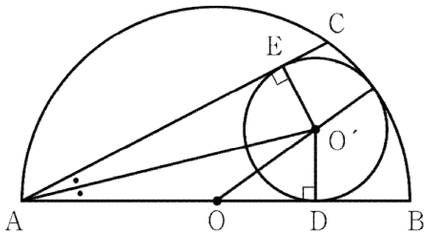
$$\frac{\overline{PQ}}{\theta^2}\approx\frac{4\theta^2}{\theta^2}\to 4$$

답 ④

H080 | 답 25

[풀이1]

반원의 중심을 O, 반원에 내접하는 원의 중심을 O′이라고 하자. 그리고 점 O′에서 두 선분 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 하자.



원의 정의에 의하여

$\overline{O'D}=\overline{O'E}$

두 직각삼각형 ADO′, AEO′는 RHS합동이므로

$\angle O'AD=\angle O'AE=\frac{\theta}{2}$

직각삼각형 ADO′에서

$\overline{AD}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}$이므로 $\overline{OD}=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}$

반원 O에 원 O'가 내접하므로

$\overline{OO'}=$(반원 O의 반지름의 길이)−(원 O′의 반지름의 길이)

$=\frac{1}{2}-f(\theta)$

직각삼각형 O′OD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{O'O}^2=\overline{OD}^2+\overline{DO'}^2$

대입하면

$$\left\{\frac{1}{2}-f(\theta)\right\}^2=\left\{\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}\right\}^2+\{f(\theta)\}^2$$

정리하면

$$f(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\alpha=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\frac{1}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}=1^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

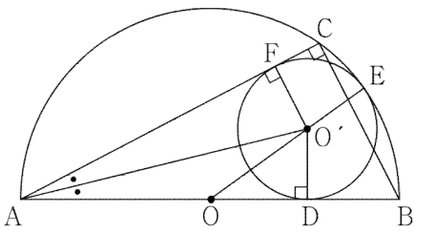
$\therefore\ 100\alpha=25$

답 25

[풀이2] 시험장

다음과 같은 빠른 풀이도 가능하다.

내접원의 중심을 O′, 점 O′에서 두 선분 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 D, F, 반원과 원의 교점을 E라고 하자. 이때, 세 점 O, O′, E는 한 직선 위에 있다.



(단, $\bullet=\frac{\theta}{2}$)

$\theta\to0+$일 때, 점 O′는 삼각형 ABC의 내심으로 근사할 수 있으므로

$\angle O'AD=\frac{\theta}{2}$

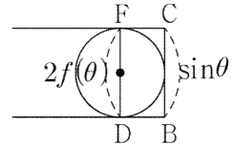
$\theta\to0+$일 때, $\overline{AO'}+\overline{O'E}\approx\overline{AB}$이므로

$\overline{AO'}\approx1-f(\theta)$

직각삼각형 O′AD에서

$\frac{f(\theta)}{1-f(\theta)}\approx\sin\frac{\theta}{2}$, 즉

$$\sin\frac{\theta}{2}-f(\theta)\approx\frac{\theta}{2}f(\theta)\qquad\cdots㉠$$



위의 그림처럼 $\theta\to0+$일 때,

$\overline{FO'}+\overline{O'D}\approx\overline{CB}$이므로

$$2f(\theta)\approx\sin\theta,\ \text{즉}\ f(\theta)\approx\frac{1}{2}\sin\theta\qquad\cdots㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\sin\frac{\theta}{2}-f(\theta)\approx\frac{\theta}{4}\sin\theta,\ \text{즉}\ f(\theta)\approx\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^2}{4}$$

따라서 $\theta\to0+$일 때,

$$\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}\approx\frac{\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}\approx\frac{\frac{\theta^2}{4}}{\theta^2}\to\frac{1}{4}$$

$\therefore\ 100\alpha=25$

답 25

H081 | 답 50

[풀이1]

점 P의 좌표는

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$

주어진 원 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$x\cos\theta+y\sin\theta=1$

$y=0$을 대입하여 점 Q의 좌표를 구하면

$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$

직선 AP의 방정식은

$(1-\sin\theta)x+y\cos\theta=\cos\theta$

$y=0$을 대입하여 점 R의 좌표를 구하면

$\mathrm{R}\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ 0\right)$

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{OR}}-\overline{\mathrm{OQ}}=\tan\theta$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}\times(\text{점 P의 } y\text{좌표})=\frac{1}{2}\tan\theta\sin\theta$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$

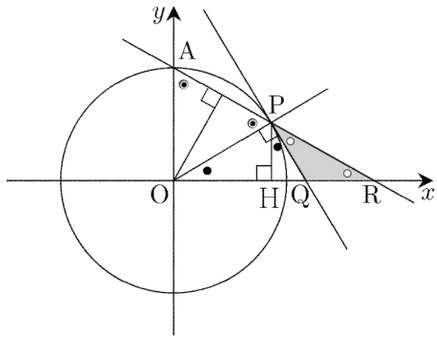
$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{2\cos\theta}=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 100\alpha=50$

답 50

[풀이2]

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, ●$=\theta$, ◉$=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$, ○$=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$)

우선 각을 결정하자.

이등변삼각형 AOP에서

$\angle\mathrm{PAO}=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}(=◉)$

서로 닮음인 두 직각삼각형 POH, QOP에서

$\angle\mathrm{QPH}=\theta(=●)$

위의 그림에서

◉$+\frac{\pi}{2}-$●$+$●$+$○$=\pi$이므로

$○=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}(=\angle\mathrm{RPQ})$

그런데

$\angle\mathrm{PRQ}=\pi-○-●=○$

이므로 $\triangle\mathrm{PQR}$은 이등변삼각형이다.

이제 함수 $S(\theta)$의 방정식을 구하자.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\tan\theta$이고, $\angle\mathrm{PQR}=\frac{\pi}{2}+\theta$

이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\tan^2\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)^2\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 100\alpha=50$

답 50

H082 | 답 ②

[풀이1]

삼각형 ABC의 세 내각의 합은 π이므로

$\angle\mathrm{BCA}=\frac{\pi}{2}-\theta$

그러므로

$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{DCA}=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}(=•)$

두 직각삼각형 ABC, CBD에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{\cos\theta},\ \overline{\mathrm{CB}}=\tan\theta,$

$\overline{\mathrm{DB}}=\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

두 선분 AD, EC의 길이는 각각

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{DB}}=1-\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AE}}=\frac{1}{\cos\theta}-1+\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

($\because$ 원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AD}}$이다.)

부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}}^2\theta=\frac{1}{2}\left(1-\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^2\theta$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$T(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CB}}\,\overline{\mathrm{CE}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\tan\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-1+\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)\cos\theta$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-1+\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{\frac{1}{4}\left(1-\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^4\theta^2}{\frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-1+\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{1}{2}\times \frac{\left(1-\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^4}{\frac{\sin\theta}{\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{1}{2}\times \frac{\left(1-\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^4}{\frac{\sin\theta}{\theta}\left(\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\frac{\theta}{\cos\theta(1+\cos\theta)}+\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1^4}{1\times(1^2\times 0+1\times 1)} = \frac{1}{2}$$

답 ②

[참고] 시험장 ★

극한의 근사적 계산을 이용하면 극한값을 빠르게 구할 수 있다.

$\theta\to 0+$일 때,

$\tan\theta\approx\theta$, $\tan\frac{\theta}{2}\approx\frac{\theta}{2}$, $\frac{1}{\cos\theta}\approx 1$

가 성립함을 이용하자.

$\theta\to 0+$일 때,

$\overline{BC}=\tan\theta\approx\theta$,

$\overline{DB}=\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\approx\theta$,

$\overline{AD}=1-\overline{DB}$

$=1-\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\approx 1-\theta\approx 1$,

$\overline{EC}=\overline{AC}-\overline{AE}$

$=\frac{1}{\cos\theta}-1+\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\approx\theta$

이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{AD}^2\theta\approx\frac{1}{2}\theta$,

$T(\theta)=\frac{1}{2}\overline{CB}\,\overline{CE}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\approx\frac{\theta^2}{2}$

에서

$$\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}\approx\frac{\frac{\theta^2}{4}}{\frac{\theta^2}{2}}\to\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}=\frac{1}{2}$$

[풀이2] 교육과정 외 (각의 이등분선 정리)

각의 이등분선 정리를 이용하여 문제를 해결할 수도 있다.

삼각형 ABC의 세 내각의 합은 π이므로

$\angle BCA=\frac{\pi}{2}-\theta$

직각삼각형 ABC에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{AC}=\frac{1}{\cos\theta}$, $\overline{CB}=\tan\theta$

각의 이등분선 정리에 의하여

$\overline{CA}:\overline{AD}=\overline{CB}:\overline{BD}$

즉, $\frac{1}{\cos\theta}:\overline{AD}=\tan\theta:\overline{BD}$

정리하면

$\overline{BD}=\overline{AD}\times\sin\theta$

위의 등식과 등식

$\overline{AD}+\overline{DB}=1(\overline{AB})$

을 연립하면

$\overline{AD}=\frac{1}{1+\sin\theta}$, $\overline{BD}=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$

선분 EC의 길이는

$\overline{EC}=\overline{AC}-\overline{AE}$

$=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}(\because \overline{AE}=\overline{AD})$

부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{AD}^2\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^2\theta$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$T(\theta)=\frac{1}{2}\overline{CB}\,\overline{CE}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\tan\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\cos\theta$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^4\theta^2}{\frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^4(\cos\theta(1+\sin\theta))}{\frac{\sin\theta}{\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\theta}\right)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^4(\cos\theta(1+\sin\theta))}{\frac{\sin\theta}{\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}+\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\frac{\theta}{1+\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1^4 \times 1}{1 \times (1 + 1^2 \times 0)} = \frac{1}{2}$$

답 ②

H083 | 답 30

[풀이1]

점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

점 Q는 곡선 $y = e^x - 1$과 직선 $y = \sin\theta$의 교점이다.

$e^x - 1 = \sin\theta$에서 $x = \ln(1 + \sin\theta)$

점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(\ln(1 + \sin\theta),\ \sin\theta)$

점 R은 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발이다.

점 R의 좌표는

$\mathrm{R}(\ln(1 + \sin\theta),\ 0)$

$\overline{\mathrm{OR}} = \ln(1 + \sin\theta)$

직각삼각형 ORT에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{RT}} = \overline{\mathrm{OR}} \times \tan\theta = \tan\theta \times \ln(1 + \sin\theta)$

혹은 다음과 같이 선분 RT의 길이를 구해도 좋다.

점 T는 직선 $y = (\tan\theta)x$ 위에 있다.

두 점 R, T의 x좌표는 같으므로

$\overline{\mathrm{RT}}$ = (점 T의 y좌표) $= \tan\theta \times \ln(1 + \sin\theta)$

삼각형 ORT의 넓이는

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OR}} \times \overline{\mathrm{RT}}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(\sin\theta + 1))^2 \tan\theta$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{2\cos\theta} \frac{\sin\theta}{\theta} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \ln(1 + \sin\theta)^{\frac{1}{\sin\theta}} \right)^2$$

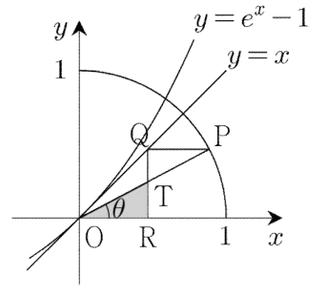
$$= \frac{1}{2} \times 1 \times (1 \times lne)^2 = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ 60a = 30$

답 30

[풀이2] 시험장

다음과 같은 빠른 풀이도 가능하다.



곡선 $y = e^x - 1$ 위의 원점에서의 접선은 $y = x$이므로

$\theta \to 0+$일 때, 곡선 $y = e^x - 1$을 직선 $y = x$로 근사할 수 있다.

네 점 P, Q, R의 (근사된) 좌표를 쓰면

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(\sin\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{R}(\sin\theta,\ 0)$

이므로

$$S(\theta) \approx \frac{1}{2}\sin^2\theta\tan\theta \approx \frac{1}{2}\theta^3$$

따라서 $\theta \to 0+$일 때,

$$\frac{S(\theta)}{\theta^3} \to \frac{1}{2}$$

$\therefore\ 60a = 30$

답 30

H084 | 답 30

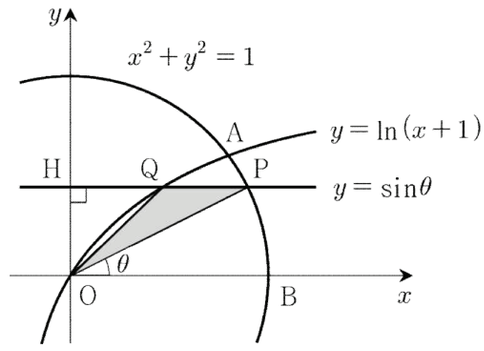
[풀이1]

삼각함수의 정의에 의하여 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

점 P를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은

$y = \sin\theta$



곡선 $y = \ln(x + 1)$과 직선 $y = \sin\theta$의 방정식을 연립하면

$x = e^{\sin\theta} - 1$

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(e^{\sin\theta} - 1,\ \sin\theta)$

삼각형의 넓이는 구하는 공식에 의하여

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PQ}} \times (\text{점 P에서 } y\text{좌표})$$

와 일치한다.
위의 두 함수의 방정식을 연립하면

$t^3 \ln x = 2e^{x+t-a}$, $\ln x = \dfrac{2}{t^3} e^{x+t-a}$,

$\ln x = e^{x+\ln\frac{2}{t^3}+t-a} \ (= ke^x)$ … (*)

(단, k는 상수)

두 곡선 $y = \ln x$, $y = ke^x$이 접할 때, 상수 k의 값은 유일하게 결정된다.
이제 접점의 x좌표를 α라고 하자. (α 역시 유일하게 결정되는 상수이다.)
접점: $\ln \alpha = ke^{\alpha}$

기울기: $\dfrac{1}{\alpha} = ke^{\alpha}$ … ㉠

위의 두 등식을 연립하면

$\ln \alpha = \dfrac{1}{\alpha}$, 즉 $e^{\frac{1}{\alpha}} = \alpha$

이를 ㉠에 대입하면

$k = \dfrac{1}{\alpha e^{\alpha}} = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{\alpha}+\alpha}} = e^{-\alpha-\frac{1}{\alpha}}$ … ㉡

㉡을 (*)과 비교하면

$e^{\ln\frac{2}{t^3}+t-a} = e^{-\alpha-\frac{1}{\alpha}} \ (= k)$

즉, $\ln \dfrac{2}{t^3} + t - a = -\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$

접할 때의 상황이므로 $a = f(t)$로 두면

$\ln \dfrac{2}{t^3} + t - f(t) = -\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$

양변을 t에 대하여 미분하면
(이때, α가 상수임을 명심하자.)

$-\dfrac{3}{t} + 1 - f'(t) = 0$, 즉 $f'(t) = 1 - \dfrac{3}{t}$

$\therefore \ \left\{f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}^2 = (-8)^2 = 64$

답 64

H172 | 답 ①

[풀이]
점 P의 x좌표를 t로 두자.
두 곡선이 점 P에서 만나므로

$ke^t + 1 = t^2 - 3t + 4$ … ㉠

문제에서 주어진 두 함수의 도함수는 각각

$y' = ke^x$, $y' = 2x - 3$

점 P에서 두 곡선에 접하는 두 직선이 서로 수직이므로

$ke^t \times (2t-3) = -1$

즉, $ke^t = \dfrac{1}{3-2t}$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{1}{3-2t} + 1 = t^2 - 3t + 4$

정리하면

$2t^3 - 9t^2 + 15t - 8 = 0$

(←여기서 $t = 1$이면 $2 - 9 + 15 - 8 = 0$이므로
이 방정식의 실근이 1임을 빠르게 알 수 있긴 하다.)

좌변을 인수분해하면

$(t-1)(2t^2 - 7t + 8) = 0$

풀면

$t = 1$

($\because$ 모든 실수 t에 대하여 $2t^2 - 7t + 8 > 0$)

이를 ㉡에 대입하면 (또는 ㉠에 대입하면)

$ke = 1$

$\therefore \ k = \dfrac{1}{e}$

답 ①

H173 | 답 ④

[풀이1] ★
함수 $f(x)$를 $f(x) = e^x$으로 두자.

• (1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$인 경우

구간 $[1-\tan x, \ 1-\sin x]$에서
함수 $f(x)$는 연속이고
구간 $(1-\tan x, \ 1-\sin x)$에서
함수 $f(x)$는 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(1-\tan x) - f(1-\sin x)}{\sin x - \tan x} = f'(c)$

인 c가 구간 $(1-\tan x, \ 1-\sin x)$에 적어도 하나 존재한다.

$x \to 0+$일 때, $c \to 1-$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}}{\tan x - \sin x} = \lim\limits_{c\to 1-} e^c = e$

• (2) $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$인 경우

구간 $[1-\sin x, \ 1-\tan x]$에서
함수 $f(x)$는 연속이고
구간 $(1-\sin x, \ 1-\tan x)$에서
함수 $f(x)$는 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1-\tan x)-f(1-\sin x)}{\sin x-\tan x}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(1-\sin x,\ 1-\tan x)$에 적어도 하나 존재한다.

$x\to 0-$일 때, $c\to 1+$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}=\lim_{c\to 1+}e^{c}=e$$

(1), (2)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}=e$$

답 ④

[풀이2]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}\times e^{1-\tan x}$$

$$=1\times e=e$$

$$\left(\because\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}\right.$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s}{\ln(1+s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{\ln(1+s)^{\frac{1}{s}}}$$

$$\left.=\frac{1}{\ln e}=1\right)$$

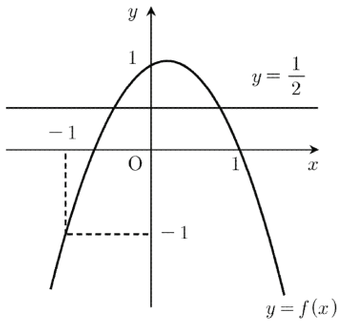
답 ④

H174 | 답 ②

[풀이] ★

함수 $f(x)$가 이계도함수를 가지므로 함수 $f(x)$는 미분가능하고 연속이며 함수 $f'(x)$는 미분가능하고 연속이다.

▸ ㄱ. (참)



함수 $f(x)$가 구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고

$f(-1)=-1<\frac{1}{2}<1=f(0)$이므로

사이값 정리에 의하여

$f(a_1)=\frac{1}{2}$

을 만족하는 a_1이 구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

함수 $f(x)$가 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

$f(0)=1>\frac{1}{2}>0=f(1)$이므로

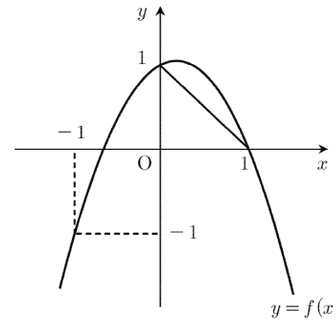
사이값 정리에 의하여

$f(a_2)=\frac{1}{2}$

을 만족하는 a_2가 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$a_1\neq a_2$이므로 $f(a)=\frac{1}{2}$인 실수 a가 구간 $(-1,\ 1)$에 두 개 이상 존재한다.

▸ ㄴ. (참)



함수 $f(x)$가 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=-1=f'(b)$$

인 b가 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f'(b)=-1$인 실수 b가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

세 점 $(-1,\ -1)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$을 모두 지나는 이차함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=-\frac{3}{2}x^{2}+\frac{1}{2}x+1$$

$f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=-3x+\frac{1}{2}$$

$f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=-3$

실수 전체의 집합에서

$f''(x)<0$

따라서 $f''(c)=0$인 실수 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 반드시 존재하는 것은 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

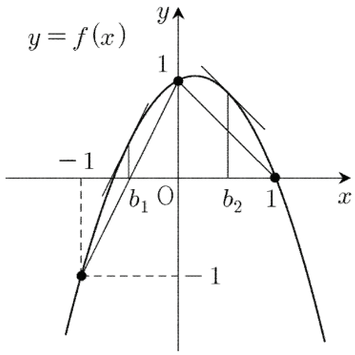
답 ②

[참고] ★

보기 ㄷ을 다음과 같이 바꾸면 참이다.

▸ ㄷ. $f''(c)<0$인 실수 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다. (참)

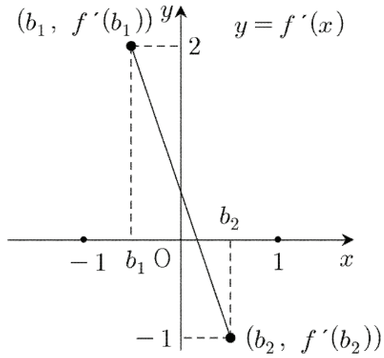
(증명)



평균값 정리에 의하여

$f'(b_1)=2$인 실수 b_1이 열린구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 한 개 존재하고,

$f'(b_2)=-1$인 실수 b_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.



함수 $f'(x)$가 닫힌구간 $[b_1,\ b_2]$에서 연속이고,

열린구간 $(b_1,\ b_2)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f'(b_2)-f'(b_1)}{b_2-b_1}=f''(c)$ 즉, $f''(c)<0$

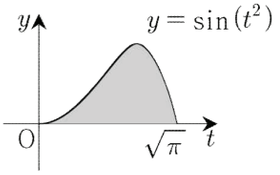
인 c가 열린구간 $(b_1,\ b_2)$에 적어도 한 개 존재한다.

따라서 $f''(c)<0$인 실수 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다. 왜냐하면 구간 $(-1,\ 1)$은 구간 $(b_1,\ b_2)$를 포함하기 때문이다.

H175 | 답 ⑤

[풀이] ★

▸ ㄱ. (참)



$f(\sqrt{\pi})=e^{-\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt$

$s=t^2$으로 두면

t가 닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에 속하는 실수일 때,

s는 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에 속하는 실수이다.

닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에서 $\sin(t^2)=\sin s\geq 0$이므로

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt\geq 0$

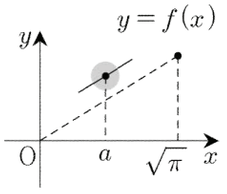
이때, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt$의 값이 0은 아니다.

왜냐하면 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 $\sin(t^2)>0$이기 때문이다.

$e^{-\sqrt{\pi}}>0$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt>0$이므로

$\therefore\ f(\sqrt{\pi})>0$

▸ ㄴ. (참)



• 함수 $f(x)$의 $x=0$, $x=\sqrt{\pi}$에서의 함숫값

$f(\sqrt{\pi})=p(>0)$로 두자.

$f(0)=e^0\displaystyle\int_0^0\sin(t^2)dt=1\times 0=0$

• $f(x)$의 연속성과 미분가능성

적분과 미분의 관계에 의하여

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x\sin(t^2)dt=\sin(x^2)$이므로

함수 $\displaystyle\int_0^x\sin(t^2)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

두 함수 e^{-x}, $\displaystyle\int_0^x\sin(t^2)dt$는 각각 x에 대하여

미분가능하므로 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

• 평균값 정리

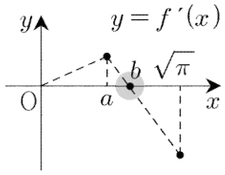
닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고
열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}-0}=\frac{p}{\sqrt{\pi}}=f'(a)$$

인 a가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $\frac{p}{\sqrt{\pi}}>0$이므로 주어진 명제는 참이다.

▸ ㄷ. (참)



함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=e^{-x}\left(\sin(x^2)-\int_0^x \sin(t^2)dt\right)$$

세 함수 e^{-x}, $\sin(x^2)$, $\int_0^x \sin(t^2)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
그러므로 실수 전체의 집합에서 $f'(x)$는 연속이다.
닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고

$$f'(a)=\frac{p}{\sqrt{\pi}}>0,$$

$$f'(\sqrt{\pi})=-e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt<0$$이므로

사이값 정리에 의하여 $f'(b)=0$을 만족시키는
b가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H176 | 답 ③

[풀이1] 시험장

(가): 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 1이다.

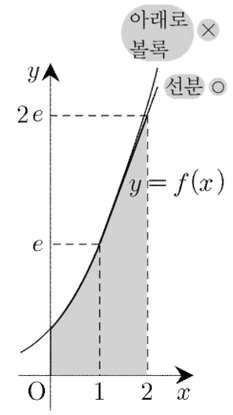
(나): 구간 $(0,\ 2)$에서 $f''(x)\geq 0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록이거나 직선의 일부(선분)이다.

(다): 구간 $(0,\ 1)$에서

$$f'(x)=e^x+C_1,\ f(x)=e^x+C_1x+C_2$$

(단, C_1, C_2는 적분상수이다.)

(가)+(다): $f'(x)=e^x$, $f(x)=e^x$



위의 그림처럼 구간 $(1,\ 2)$에서 함수 $f(x)$의 그래프가 직선의 일부(선분)이면 정적분 $\int_0^2 f(x)dx$의 값은 최소가 된다.

구하는 최솟값을 S라고 하면

$$S=\int_0^1 e^x dx+\int_1^2 exdx$$

$$=[e^x]_0^1+\frac{e+2e}{2}\times 1=\frac{5}{2}e-1$$

답 ③

[풀이2] ★

구간 $(0,\ 1)$에서

$$f'(x)=\int f''(x)dx=e^x+C_1$$ (단, C_1은 적분상수)

구간 $(0,\ 1)$에서

$$f(x)=\int f'(x)dx=e^x+C_1x+C_2$$ (단, C_2는 적분상수)

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
함수의 연속의 정의에 의하여

$$f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)=1+C_2=1$$ 즉, $C_2=0$

미분계수의 정의에 의하여

$$f'(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x+C_1x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{e^x-1}{x}+C_1\right)=1+C_1=1$$ 즉, $C_1=0$

구간 $[0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=e^x$$

그런데 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to 1-}f(x)=e$$

구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=e^x$$

조건 (나)에서 $a=1$을 대입하면

$1<b<2$일 때, $f'(b)\geq f'(1)=e$

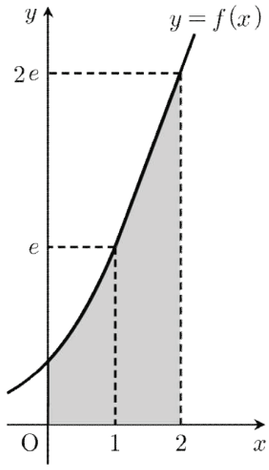
이제 $g(x)=f(x)-ex$로 두자.

구간 $(1,\ 2)$에서

$g'(x)=f'(x)-e\geq 0$이므로

함수 $g(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 증가한다.

따라서 구간 $(1,\ 2)$에서 $f(x)\geq ex$



$f(x)=\begin{cases}e^x & (0\leq x<1)\\ ex & (1\leq x\leq 2)\end{cases}$일 때,

$\int_0^2 f(x)dx$는 최솟값을 갖는다.

정적분의 성질과 정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_0^2 f(x)dx\geq \int_0^1 e^x dx+\int_1^2 ex\,dx$$

$$=\left[e^x\right]_0^1+\left[\frac{e}{2}x^2\right]_1^2=\frac{5}{2}e-1$$

답 ③

H177 | 답 35

[풀이1] 시험장

(나) $\Rightarrow f(0)=0,\ f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}$

$\Rightarrow f(0)=0,\ f'(x)\geq 0,\ f(x)\leq 2$

그리고 다음을 얻는다.

$f'(0)=\sqrt{4-2f(0)}=2,$

$f'(b)=0\ (\because f'(x)=2(x-b))$

$f(b)=2(=c)\ (\because f'(b)=\sqrt{4-2f(b)}=0)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

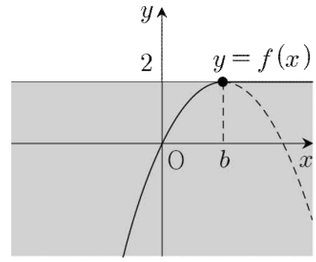
• 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 '증가하거나', '상수 함수의 일부'이다. 그리고 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=2$의 아래쪽에 그려진다. (만나는 경우까지 포함)

• 곡선 $y=f(x)$는 원점을 지나고 이 점에서의 접선의 기울기는 2이다.

• 곡선 $y=f(x)$는 점 $(b,\ 2)$를 지나고 이 점에서의 접선은 $y=2$이다.

• 그러므로 구간 $[b,\ \infty)$에서 $f(x)=2$일 수 밖에 없다.

함수 $f(x)$의 그래프는



$f(0)=ab^2+c=0$, 즉 $ab^2=-2$

$f'(0)=2a(-b)=2$, 즉 $ab=-1$

연립방정식을 풀면

$b=2,\ a=-\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x\leq 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^6 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 f(x)dx$$

$$=\int_0^2\left\{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\right\}dx+\int_2^6 2dx$$

$$=\left[-\frac{1}{6}(x-2)^3+2x\right]_0^2+2\times 4$$

$$=\frac{8}{3}+8=\frac{32}{3}$$

답 35

[참고]

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 유도해도 좋다.

(나) $\Rightarrow f(0)=0,\ f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}\ (\cdots(*))$

$\Rightarrow f(0)=0,\ f'(x)\geq 0,\ f(x)\leq 2$

$f(x)\neq 2$라고 하자.

(*): $\frac{-f'(x)}{\sqrt{4-2f(x)}}=-1$, 즉 $(\sqrt{4-2f(x)})'=-1$

양변을 적분하면

$$\int_0^x(\sqrt{4-2f(t)})'dt=\int_0^x(-1)dt=-x$$

즉, $\sqrt{4-2f(x)}-2=-x\ (\because f(0)=0)$

위의 등식을 정리하면

$f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$ (단, $x<2$)

조건 (가)에 의하여

$a=-\frac{1}{2},\ b=2,\ c=2$

임을 알 수 있다.
함수의 연속의 정의에 의하여
$f(b)=c$, 즉 $f(2)=2$이므로

$$f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2 \ (\text{단}, \ x\le 2)$$

모든 실수 x에 대하여
$f(x)\le 2$, $f'(x)\ge 0$
이므로 구간 $(2, \ \infty)$에서 $f'(x)=0$이어야 한다. 만약 이 구간에서 $f'(x)>0$이라고 하면 $f(x)>2$이고, 이는 가정에 모순이기 때문이다.
따라서 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x\le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$

[풀이2]
조건 (나)에서 적분과 미분의 관계에 의하여

$$f'(x)=\sqrt{4-2f(x)} \qquad \cdots(*)$$

(*)이 성립하기 위해서는
$f'(x)\ge 0$, $4-2f(x)\ge 0$
즉, $f(x)\le 2$이고 $f'(x)\ge 0$ $\cdots$㉠
(*)은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
조건 (나)에서

$$f(0)=\int_0^0 \sqrt{4-2f(t)}\,dt=0$$

즉, $f(0)=0$ $\cdots$㉡
$x\le b$일 때, 함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=2a(x-b)$
(*)의 양변을 제곱하면
$\{f'(x)\}^2=4-2f(x)$
$x\le b$일 때, 위의 등식이 성립하므로
$\{2a(x-b)\}^2=4-2a(x-b)^2-2c$
정리하면
$(4a^2+2a)(x-b)^2+2c-4=0$
항등식의 성질에 의하여

$$a=0 \ \text{또는} \ a=-\frac{1}{2}, \ c=2$$

• (1) $a=0$, $c=2$인 경우
조건 (가)에서
$x\le b$일 때, $f(x)=2$
b 보다 큰 x_1에 대하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[b, \ x_1]$에서 연속이고 열린구간 $(b, \ x_1)$에서 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b}=f'(p)$$

인 p가 열린구간 $(b, \ x_1)$에 적어도 하나 존재한다.
㉠에 의하여 $f'(p)\ge 0$이므로

$$\frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b}\ge 0$$

x_1-b가 양수이므로 $f(x_1)\ge f(b)=2$
㉠에 의하여
$f(x_1)=2$
다시 말하면 $x\ge b$일 때, $f(x)=2$이다.
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=2$
그런데 이는 ㉡에 모순이다.

• (2) $a=-\frac{1}{2}$, $c=2$인 경우
조건 (가)에서

$$x\le b\text{일 때, } f(x)=-\frac{1}{2}(x-b)^2+2$$

b 보다 큰 x_2에 대하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[b, \ x_2]$에서 연속이고 열린구간 $(b, \ x_2)$에서 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}=f'(q)$$

인 q가 열린구간 $(b, \ x_2)$에 적어도 하나 존재한다.
㉠에 의하여 $f'(q)\ge 0$이므로

$$\frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}\ge 0$$

x_2-b가 양수이므로 $f(x_2)\ge f(b)=2$
㉠에 의하여
$f(x_2)=2$
다시 말하면 $x\ge b$일 때, $f(x)=2$이다.
함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(x-b)^2+2 & (x\le b)\\ 2 & (x>b)\end{cases}$$

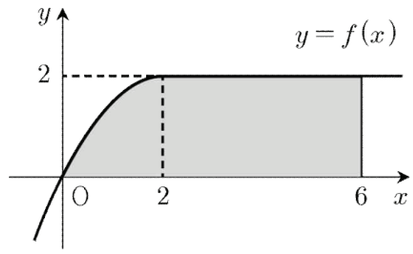
㉡에 의하여 $b\ge 0$이어야 한다.

$$f(0)=-\frac{1}{2}b^2+2=0$$

풀면
$b=2$
함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x\le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는



정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^6 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 f(x)dx$$

$$=\int_0^2\left\{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\right\}dx+\int_2^6 2dx$$

$$=\left[-\frac{1}{6}(x-2)^3+2x\right]_0^2+[2x]_2^6$$

$$=\frac{8}{3}+8=\frac{32}{3}$$

답 35

[풀이3] ★

조건 (나)에서 적분과 미분의 관계에 의하여

$f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}$ …(*)

(*)이 성립하기 위해서는

$f'(x)\geq 0,\ 4-2f(x)\geq 0$

즉, $f(x)\leq 2$이고 $f'(x)\geq 0$ …㉠

(*)은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

조건 (나)에서

$$f(0)=\int_0^0\sqrt{4-2f(t)}\,dt=0$$

즉, $f(0)=0$ …㉡

$x\leq b$일 때, 함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2a(x-b)$

(*)의 양변을 제곱하면

$\{f'(x)\}^2=4-2f(x)$

$x\leq b$일 때, 위의 등식이 성립하므로

$\{2a(x-b)\}^2=4-2a(x-b)^2-2c$

정리하면

$(4a^2+2a)(x-b)^2+2c-4=0$

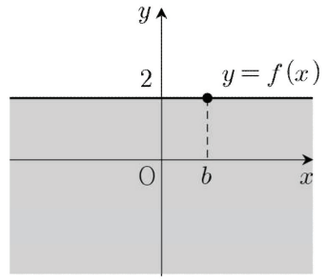
항등식의 성질에 의하여

$a=0$ 또는 $a=-\frac{1}{2},\ c=2$

• (1) $a=0,\ c=2$인 경우

조건 (가)에서

$x\leq b$일 때, $f(x)=2$



㉠에 의하여 $f'(x)\geq 0,\ f(x)\leq 2$이다.

함수 $f(x)$의 정의역의 어떤 구간에서

$f'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 증가하고,

$f'(x)=0$이면 함수 $f(x)$는 상수함수의 일부가 된다.

만약 $x>b$일 때, 함수 $f(x)$가 증가하면

$f(x)>f(b)=2$이다. 이는 가정에 모순이다.

따라서 $x>b$일 때,

함수 $f(x)$는 상수함수 $y=f(b)$의 일부이다.

다시 말하면 $x>b$일 때, $f(x)=2$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

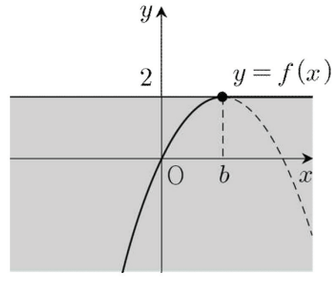
$f(x)=2$

그런데 이는 ㉡에 모순이다.

• (2) $a=-\frac{1}{2},\ c=2$인 경우

조건 (가)에서

$x\leq b$일 때, $f(x)=-\frac{1}{2}(x-b)^2+2$



(1)과 마찬가지의 방법으로

$x>b$일 때, $f(x)=2$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(x-b)^2+2 & (x\leq b)\\ 2 & (x>b)\end{cases}$$

㉡에 의하여 $b\geq 0$이어야 한다.

$f(0)=-\frac{1}{2}b^2+2=0$

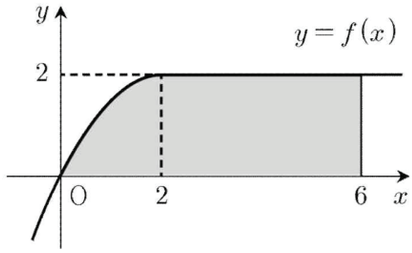
풀면

$b=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x\leq 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는



정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^6 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 f(x)dx$$

$$=\int_0^2\left\{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\right\}dx+\int_2^6 2dx$$

$$=\left[-\frac{1}{6}(x-2)^3+2x\right]_0^2+[2x]_2^6$$

$$=\frac{8}{3}+8=\frac{32}{3}$$

답 35

H178 | 답 ④

[풀이]

진수의 조건에서 $x>0$

함수 $f(x)$의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\sqrt{a}$

$x=\sqrt{a}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극솟값을 갖는다.

주어진 조건에서

$$f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}=0$$

정리하면

$$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}$$

방정식을 풀면

$\therefore\ a=e$

답 ④

H179 | 답 ②

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=(-x^2+2x+8)e^{-x+1}=-(x-4)(x+2)e^{-x+1}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

$x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은

$$a=f(-2)=-4e^3$$

$x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값을 갖는다. 이때, 극댓값은

$$b=f(4)=8e^{-3}$$

$\therefore\ ab=-32$

답 ②

H180 | 답 ②

[풀이]

함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=18\pi(x-1)^2+4\cos 6\pi(x-1)^2$$

함수 $g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 함수

$$g(x+1)=18\pi x^2+4\cos 6\pi x^2(=h(x))$$

의 그래프와 일치한다.

이제 $-1<x<1$에서 함수 $h(x)$가 극소가 되는 x의 개수를 구하면 된다.

이때, $h(x)$가 y축에 대칭임을 알자.

함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=36\pi x-48\pi x\sin 6\pi x^2$$

$$=48\pi x\left(\frac{3}{4}-\sin 6\pi x^2\right)$$

$$h'(x)=0\ \Leftrightarrow\ x=0\ \text{또는}\ \sin 6\pi x^2=\frac{3}{4}$$

• (1) $x=0$인 경우

$x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. 이때, $\frac{3}{4}-\sin 6\pi x^2=\frac{3}{4}(>0)$이다.

• (2) $\sin 6\pi x^2=\frac{3}{4}$인 경우

곡선 $y=\sin 6\pi x^2(0\le x<1)$과 직선 $y=\frac{3}{4}$을 한 평면 위에 그리면 다음과 같다.

답 ③

H205 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

$g(3)=1$, $f(1)=5$이므로

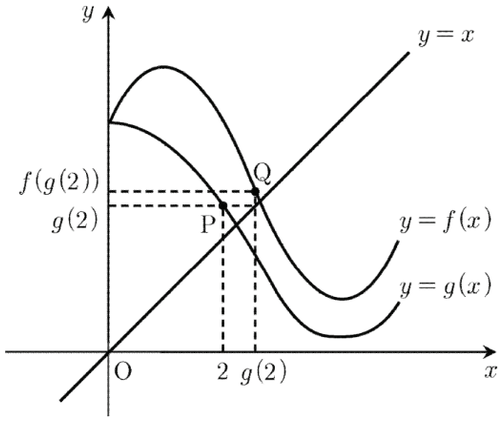
$h(3)=f(g(3))=f(1)=5$

▸ ㄴ. (참)

함수 $h'(x)$의 도함수는

$h'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$

두 점 P, Q는 아래 그림과 같다고 하자.



점 P에서 함수 $g(x)$는 감소하므로

$g'(2)<0$

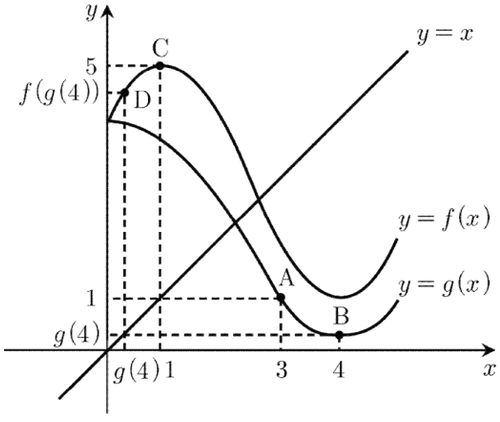
점 Q에서 함수 $f(x)$는 감소하므로

$f'(g(2))<0$

$\therefore\ h'(2)=f'(g(2))\times g'(2)\geq 0$

▸ ㄷ. (참)

네 점 A, B, C, D는 아래 그림과 같다고 하자.



곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $P(t,\ g(t))$가 점 A에서 점 B까지 움직일 때,

곡선 $y=f(g(x))$ 위의 점 $Q(g(t),\ f(g(t)))$는 점 C에서 점 D까지 움직인다.

구간 $(3,\ 4)$에서 함수 $g(x)$는 감소하므로

$g'(t)<0$

구간 $(g(4),\ 1)$에서 함수 $f(x)$가 증가하므로

$f'(g(t))>0$

구간 $(3,\ 4)$에서 $h'(t)<0$이므로

구간 $(3,\ 4)$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.

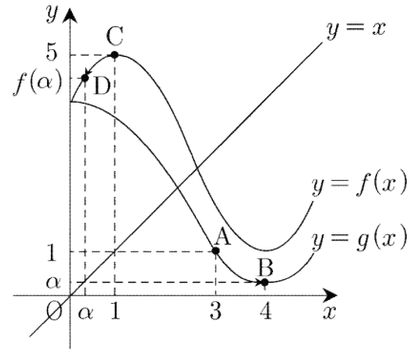
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고]

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 보일 수 있다.

▸ ㄷ. (참)



(단, $g(4)=\alpha$이다.)

x가 3에서 4까지 증가할 때,

$g(x)$는 1에서 α까지 감소하고, (A→B)

$f(g(x))$는 5에서 $f(\alpha)$까지 감소한다. (C→D)

따라서 구간 $(3,\ 4)$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.

H206 | 답 331

[풀이1] ★

함수 $g(x)$의 방정식을 변형하면

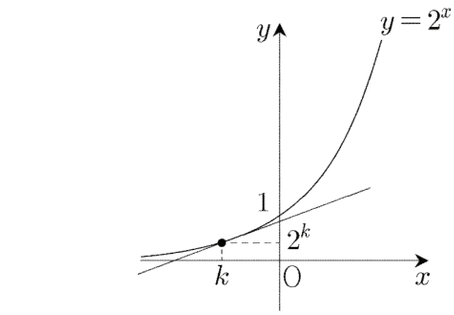
$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}\times\frac{2^{x+h}-2^x}{h}\right|$$

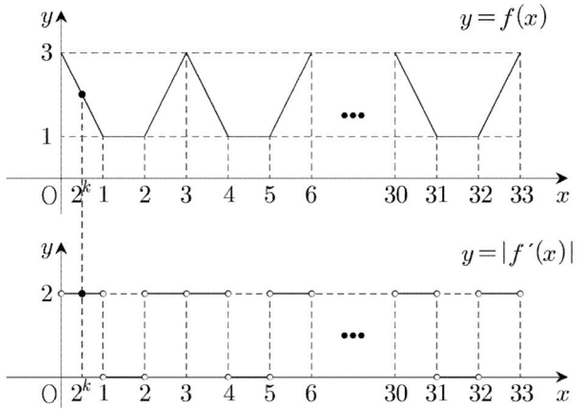
이때,

$\dfrac{2^{x+h}-2^x}{h}$=(함수 $y=2^x$의 $x=x$에서의 우미분계수),

$\dfrac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}$=(함수 $y=f(x)$의 $x=2^x$에서의 우미분계수)

세 함수 $y=2^x$, $y=f(x)$, $y=|f'(x)|$의 그래프는 다음과 같다.





$x=k$일 때의 함수 $g(x)$의 함숫값에 대하여 생각하자. 즉,

$$g(k)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{k+h})-f(2^k)}{2^{k+h}-2^k}\times\frac{2^{k+h}-2^k}{h}\right|$$

• $-5\le k<0\left(\frac{1}{32}\le 2^k<1\right)$일 때,

$h\to 0+$이면

$$\frac{2^{x+h}-2^x}{h}=2^k\ln 2,\quad \frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}=-2$$

이므로

$$g(k)=|-2\times 2^k\ln 2|=2^{k+1}\ln 2$$

• $0\le k<1(1\le 2^k<2)$일 때,

$h\to 0+$이면

$$\frac{2^{x+h}-2^x}{h}=2^k\ln 2,\quad \frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}=0$$

이므로

$$g(k)=|0\times 2^k\ln 2|=0$$

• $1\le k<\log_2 3(2\le 2^k<3)$일 때,

$h\to 0+$이면

$$\frac{2^{x+h}-2^x}{h}=2^k\ln 2,\quad \frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}=2$$

이므로

$$g(k)=|2\times 2^k\ln 2|=2^{k+1}\ln 2$$

⋮

마찬가지의 방법으로 다음의 결과를 얻는다.

x	2^x	$g(x)$
$[-5,\ 0)$	$\left[\frac{1}{32},\ 1\right)$	$2^{k+1}\ln 2$
$[0,\ 1)$	$[1,\ 2)$	0
$[1,\ \log_2 3)$	$[2,\ 3)$	$2^{k+1}\ln 2$
$[\log_2 3,\ 2)$	$[3,\ 4)$	$2^{k+1}\ln 2$
$[2,\ \log_2 5)$	$[4,\ 5)$	0
$[\log_2 5,\ \log_2 6)$	$[5,\ 6)$	$2^{k+1}\ln 2$
⋮	⋮	⋮

위의 표에서 어둡게 칠한 세 수가 반복해서 나타난다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때,

2^a, $g(a)$의 값을 모두 쓰면

$2^a=1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 31$(11개): $g(a)=0$

$2^a=2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 29$(10개): $g(a)=2^{a+1}\ln 2$

이때, $n=11+10=21$이므로

$$\therefore\ n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$$

$$=21+\frac{(2\ln 2)(2+5+8+\ \cdots\ +29)}{\ln 2}$$

$$=21+2\times\frac{2+29}{2}\times 10=331$$

답 331

[풀이2] ★

$-5\le x<0$일 때, $\frac{1}{32}\le 2^x<1$이므로

$f(2^x)=-2\times 2^x+3=3-2^{x+1}$

(이때, 도함수는 $-2^{x+1}\ln 2$)

$0\le x<1$일 때, $1\le 2^x<2$이므로

$f(2^x)=0$

(이때, 도함수는 0)

$1\le x<\log_2 3$일 때, $2\le 2^x<3$이므로

$f(2^x)=2\times(2^x-2)+1=2^{x+1}-3$

(이때, 도함수는 $2^{x+1}\ln 2$)

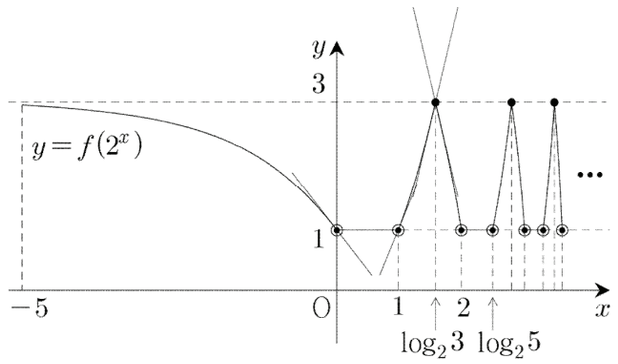
$\log_2 3\le x<2$일 때, $3\le 2^x<4$이므로

$f(2^x)=-2\times(2^x-4)+1=9-2^{x+1}$

(이때, 도함수는 $-2^{x+1}\ln 2$)

⋮

함수 $f(2^x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$g(x)=$|함수 $f(2^x)$의 $x=x$에서의 우미분계수|
이므로

$\lim_{x\to 0-} g(x)=2\ln 2\neq 0=g(0)$ (불연속)

$\lim_{x\to 1-} g(x)=0\neq 4\ln 2=g(1)$ (불연속)

$\lim_{x\to \log_2 3-} g(x)=6\ln 2=\lim_{x\to \log_2 3+} g(x)$ (연속)

(이때, $g(\log_2 3)=\lim_{x\to \log_2 3+} g(x)$)

위의 그림에서

•는 $g(x)$가 연속인 점이고,

◉는 $g(x)$가 불연속인 점이다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때,

2^a, $g(a)$의 값을 모두 쓰면

$2^a=1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 31$(11개): $g(a)=0$

$2^a=2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 29$(10개): $g(a)=2^{a+1}\ln 2$

이때, $n=11+10=21$이므로

$\therefore\ n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$

$=21+\frac{(2\ln 2)(2+5+8+\ \cdots\ +29)}{\ln 2}$

$=21+2\times\frac{2+29}{2}\times 10=331$

답 331

H207 | 답 ⑤

[풀이1]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=1+\cos x$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$

함수 $f(x)$는 증가함수이다.

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=-\sin x$

$f''(x)=0$에서 $x=n\pi$

(단, n은 정수)

$x=n\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=n\pi$에서 변곡점을 갖는다.

▸ ㄱ. (참)

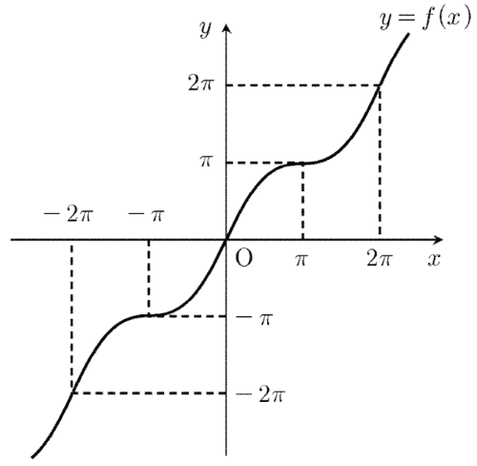
구간 $(0,\ \pi)$에서 $f''(x)<0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록이다.

구간 $(\pi,\ 2\pi)$에서 $f''(x)>0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(0,\ \pi)$에서 아래로 볼록이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는



▸ ㄴ. (참)

합성함수의 미분법에 의하여

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$

$=\{1+\cos(x+\sin x)\}(1+\cos x)$

구간 $(0,\ \pi)$에서

$0\leq x+\sin x\leq \pi$

$0\leq 1+\cos(x+\sin x)\leq 2$

$0\leq 1+\cos x\leq 2$

이므로, 구간 $(0,\ \pi)$에서

$g'(x)\geq 0$

함수 $g(x)$는 구간 $(0,\ \pi)$에서 증가한다.

▸ ㄷ. (참)

함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ \pi]$에서 연속이고

구간 $(0,\ \pi)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의해서

$\frac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=1=g'(c)$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0,\ \pi)$에 적어도 하나 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고]

사이값 정리를 이용하여 보기 ㄷ이 참임을 증명할 수도 있다.

▸ ㄷ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=1+\cos x$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$

$=\{1+\cos(x+\sin x)\}(1+\cos x)$

함수 $g'(x)$는 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 연속이고,

$g'(0)=4\neq 0=g'(\pi)$이므로

사이값 정리에 의하여

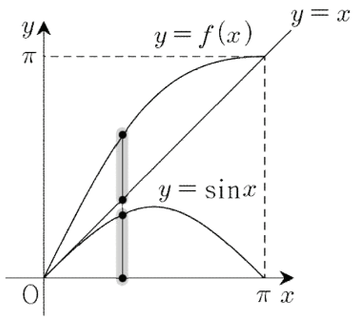
$g'(c)=1$인 c가 열린구간 $(0,\ \pi)$에 적어도 하나 존재한다.

[풀이2] 시험장

▸ ㄱ. (참)

$x=x$일 때, 두 함수 $y=x$, $y=\sin x$의 함숫값의 합은 함수 $y=f(x)$의 함숫값과 같다.

함수 $f(x)$의 그래프는



(단, 위의 그림에서 두 선분의 길이는 같다.)

위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록이다.

그리고 구간 $(0,\ \pi)$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=f(x)$의 볼록은 같을 수밖에 없다. 왜냐하면 직선 $y=x$의 이계도함수는 $y=0$이기 때문이다.

▸ ㄴ. (참)

x: $0\to\pi$ (증가)

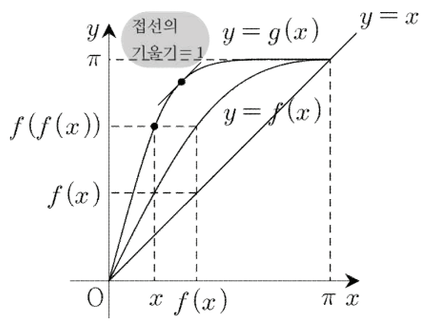
$f(x)$: $0\to\pi$ (증가)

$g(x)$: $0\to\pi$ (증가)

이므로 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\ \pi)$에서 증가한다.

▸ ㄷ. (참)

함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다. (함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.)



위의 그림에서 $g'(x)=1$인 실수 x가 구간 $(0,\ \pi)$에 존재함을 알 수 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H208 | 답 ③

[풀이1] ★

우선 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.

함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 두 점을 지난다.

$\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $(3,\ \pi)$

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 변곡점을 갖지 않는다.

다항함수 $f''(x)$는 연속함수이므로 $f''(1)$의 부호가 음일 수 없다. 즉, $f''(1)\geq 0$이다.

$x=1$에서 함수 $f(x)$가 아래로 볼록이고 $f'(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

문제에서 주어진 표를 완성하면

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	1
$f''(x)$	$+$	0 또는 $+$	$+$	0
$f(x)$	↘	$\frac{\pi}{2}$	↗	π

아래를 만족시키는 적당한 상수 $p(<1)$을 생각하자.

구간 $(p,\ 3)$에서 $f''(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(p,\ 3)$에서 아래로 볼록하다.

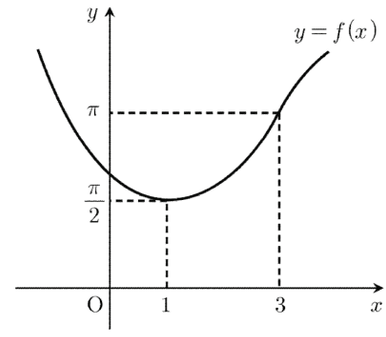
구간 $(p,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(p,\ 1)$에서 감소한다.

구간 $(1,\ 3)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(1,\ 3)$에서 증가한다.

점 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$는 함수 $f(x)$의 극소점이다.

$x>3$일 때, $f''(x)$의 부호에 대한 정보가 없으므로 점 $(3,\ \pi)$가 함수 $f(x)$의 변곡점이라고 단정할 수 없다.

이제 함수 $f(x)$의 그래프 중에서 가장 간단한 것을 그리면



▸ ㄱ. (참)

함수 $g(x)$의 도함수는

합성함수의 미분법에 의하여

$g'(x)=f'(x)\times\cos(f(x))$

$\therefore\ g'(3)=f'(3)\times\cos(f(3))$

$=1\times cos\pi=-1$

▸ ㄴ. (참)

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

구간 $(1,\ 3)$에서

$0<f'(x)<1$

$\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$에서

$-1<\cos(f(x))<0$

보기 ㄱ에서

$g'(x)=f'(x)\times\cos(f(x))$이므로

$-1<g'(x)<0$

함수 $g(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고

구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$

인 c가 구간 $(a,\ b)$에 존재한다.

구간 $(1,\ 3)$에서 $-1<g'(x)<0$이므로

$-1<g'(c)<0$

$\therefore\ -1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$

▸ ㄷ. (거짓)

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=-\{f'(x)\}^2\sin(f(x))+f''(x)\cos(f(x))$

충분히 작은 양수 h에 대하여

구간 $(1-h,\ 1+h)$에서

$|f'(x)|\geq 0,\ \sin(f(x))>0,$

$f''(x)\geq 0,\ \cos(f(x))\leq 0$이므로

구간 $(1-h,\ 1+h)$에서

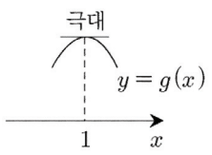
$g''(x)\leq 0$

(단, 등호는 $x=1$일 때 성립한다.)

구간 $(1-h,\ 1+h)$에서 함수 $g(x)$의 그래프는 위로 볼록이다.

따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$을 변곡점으로 갖지 않는다.

물론 합성함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 그리면 $x=1$에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 가짐을 알 수 있다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

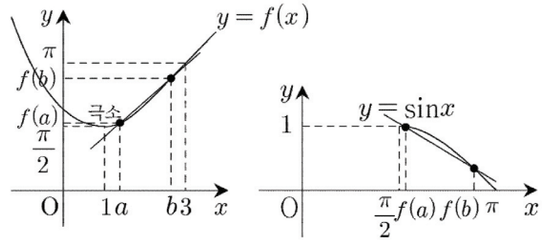
[풀이2] 시험장

▸ ㄱ. (참)

미분계수 $g'(3)$의 부호는 두 함수 $y=f(x)$, $y=\sin x$의 그래프의 개형을 그려서 두 미분계수 $f'(3)$(접선의 기울기), $\cos(f(3))$(접선의 기울기)의 부호로 결정하면 되지만, 미분계수 $g'(3)$의 값은 함수 $g(x)$의 도함수에 $x=3$을 대입해서 구해야한다. 즉, 대수적인 방법을 따라야 한다.

▸ ㄴ. (참)

두 함수 $y=f(x)$, $y=\sin x(\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림에서

(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기)

$<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

<(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ \pi)$에서의 접선의 기울기)

즉, $0<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ $\cdots$ ㉠

위의 그림에서

(곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선의 기울기)

$<\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$

<(곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기)

즉, $-1<\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}<0$ $\cdots$ ㉡

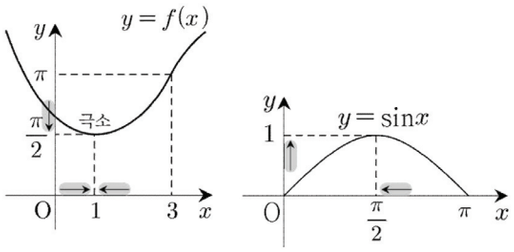
㉠, ㉡에 의하여

$-1<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}<0$

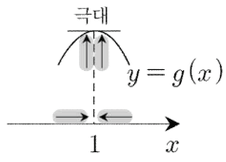
$\therefore\ -1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$

▸ ㄷ. (거짓)

두 함수 $y=f(x)$, $y=\sin x(0\leq x\leq\pi)$의 그래프는 다음과 같다.



$x=1$을 포함한 어떤 구간에서 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



점 $(1,\ 1)$은 곡선 $y=g(x)$의 극대점이므로 변곡점이 될 수 없다.

답 ③

H209 | 답 29

[풀이]

실수 전체의 집합에서 삼차함수 $f(x)$가 증가하면 조건 (가)는 성립하지 않는다.

왜냐하면

x : (0) ⇨ (1)

$\sin^2\pi x$: (0) ⇨ 1 ⇨ (0)

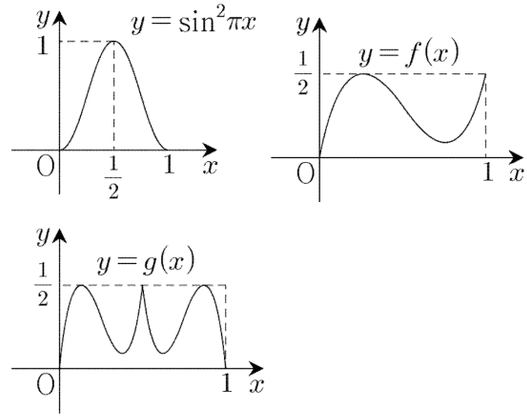
$g(x)$: ($f(0)$) ⇨ $f(1)$ ⇨ ($f(0)$)

즉, 구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $g(x)$는 극댓값을 오직 하나만 가지기 때문이다.

따라서 삼차함수 $f(x)$는 극값을 가져야 한다.

조건 (가)를 만족시키기 위해서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 한다.

문제에서 주어진 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키도록 세 함수 $y=\sin^2\pi x$, $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그리면 아래와 같다. (극대극소, 최대최소만을 판정하는 것이므로 함수 $g(x)$의 미분가능성은 고려하지 않아도 된다.)



위의 그림처럼 $f(0)=0$이고,

(함수 $f(x)$의 극댓값)$=f(1)=\dfrac{1}{2}$

이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는다고 하자.

인수정리에 의하여

$$f(x)-\frac{1}{2}=(x-a)^2(x-1)$$

그런데 $f(0)=0$이므로

$$f(0)-\frac{1}{2}=-a^2,\ a^2=\frac{1}{2},\ a=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(2)=\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=5-2\sqrt{2}$$

$$\therefore\ a^2+b^2=29$$

답 29

[참고1]

$f(0)=0$인 이유를 알아보자.

구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)\geq 0$이어야 한다. 만약 $f(x)<0$인 x가 존재하면 함수 $g(x)$의 최솟값은 음수이다. 즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

이제 $f(0)=0$ 또는 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이면 된다.

함수 $f(x)$의 극솟값이 0이라고 하자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=2(x-a)(x-1)+(x-a)^2$$
$$=(x-a)(3x-2-a)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=a \text{ 또는 } x=\frac{a+2}{3}$$

극솟값: $f\left(\dfrac{a+2}{3}\right)=\dfrac{4(a-1)^3}{27}+\dfrac{1}{2}=0$

풀면 $a=-\dfrac{1}{2}$

$0<a<1$임을 만족시키지 않으므로 귀류법에 의하여

$f(0)=0$이다.

[참고2]

구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하는 이유를 산술적으로 보이면 다음과 같다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=f'(\sin^2\pi x)\times 2\pi\sin\pi x\cos\pi x$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(\sin^2\pi x)=0$ 또는 $\cos\pi x=0$

$\Leftrightarrow f'(\sin^2\pi x)=0$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

조건 (가)에 의하여 방정식

$f'(\sin^2\pi x)=0$ (이때, $\sin^2\pi x$: (0) ⇨ 1 ⇨ (0))

은 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다. 이 중에서 크기가 작은 실근을 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{1}{2}\right)$라고 하면 나머지 한 실근은

$1-\alpha$이다. 왜냐하면

$f'(\sin^2\pi\alpha)=0$이면

$f'(\sin^2\pi(1-\alpha))=f'(\sin^2\pi\alpha)=0$

이기 때문이다.

$x=\alpha$의 좌우에서 ($\sin^2\pi x$의 값은 증가하므로) $f'(\sin^2\pi x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖는다. ($\because$ 점 $(\sin^2\pi\alpha,\ f(\sin^2\pi\alpha))$는 곡선 $y=f(x)$의 극대점이다.)

$x=1-\alpha$의 좌우에서 ($\sin^2\pi x$의 값은 감소하므로) $f'(\sin^2\pi x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖는다.

($\because$ 점 $(\sin^2\pi\alpha,\ f(\sin^2\pi\alpha))$는 곡선 $y=f(x)$의 극대점이다.)

$x=\dfrac{1}{2}$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖는다.

H210 | 답 30

[풀이1] 시험장

우선 함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 그리자.

$x\to 0$일 때, $g(x)\approx 2x^4$이므로 원점 부근에서

곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=2x^4$에 한없이 가까워진다.

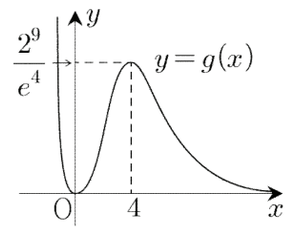
그리고 $x\to\infty$일 때, $g(x)\to 0$이므로 x축은 점근선이고,

$x\to-\infty$일 때, $g(x)$는 무한대로 발산한다.

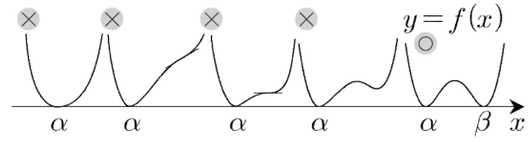
$g'(x)=2x^3(4-x)e^{-x}$

방정식 $g'(x)=0$을 풀면 $x=4$이다.

이상에서 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이제 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$의 최솟값이 0이 되도록 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리자. (큰 유형별로 나누어)



(단, $\alpha<\beta$, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$)

왼쪽의 네 개의 경우 각각에 대하여 방정식 $h(x)=0$을 정리하면

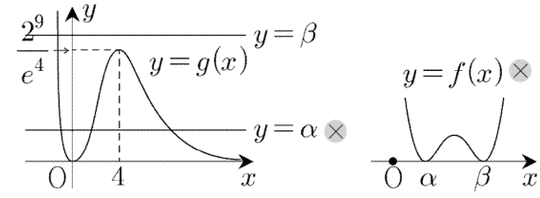
$f(\alpha)=0$, $g(x)=\alpha$

그런데 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\alpha$의 교점의 개수는 4일 수 없다.

따라서 맨 오른쪽의 경우만이 가능하다.

이제 다음의 두 경우를 생각하자.

• (1) $0<\alpha<\beta$인 경우



합성함수의 그래프의 개형의 관점에서

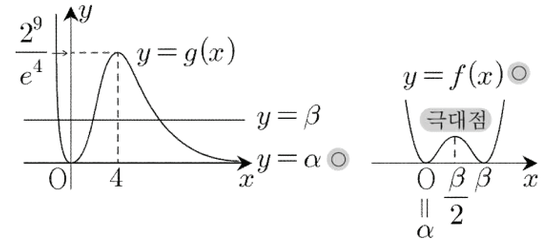
x: $0-$ ⇨ $0+$

$g(x)$: $0+$ ⇨ 0 ⇨ $0+$

$h(x)$: $f(0)-$ ⇨ $f(0)$ ⇨ $f(0)-$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

• (2) $0=\alpha<\beta$인 경우



합성함수의 그래프의 개형의 관점에서

x: $0-$ ⇨ $0+$

$g(x)$: $0+$ ⇨ 0 ⇨ $0+$

$h(x)$: $f(0)+$ ⇨ $f(0)$ ⇨ $f(0)+$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$

이제 함수 $f(x)$의 극댓값만 알면 함수 $f(x)$의 방정식을 결정할 수 있다.

아직 사용하지 않은 조건은 (다) 뿐이므로,

이 조건이 함수 $f(x)$의 극댓값에 대한 힌트를 주고 있음은 자명하다. 함수 $f(x)$의 극댓값을 8로 두고 풀이를 계속하자.

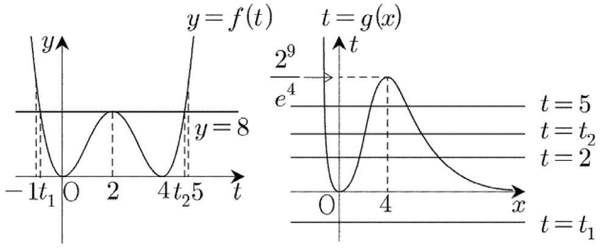
극대: $f\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\beta^4}{32}=8$ 풀면 $\beta=4$

함수 $f(x)$의 방정식을 다시 쓰면

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$

위의 방정식이 옳음을 증명하자.

(시험장에서는 아래의 증명까지 할 필요는 없다.)



(단, $f(-1)=f(5)>f(2)$)

위의 그림처럼 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=8$이 만나는 세 점 중에서 $(2,\ 8)$이 아닌 두 점의 x좌표를 각각 t_1, t_2라고 하자. 이때,

$-1<t_1<0,\ 4<t_2<5$

그런데 $2<e<3$이므로

$5<\frac{2^9}{3^4}<\frac{2^9}{e^4}<\frac{2^9}{2^4}=g(4)$, 즉 $5<g(4)$

따라서 조건 (다)는 성립한다.

$f'(x)=x(x-4)^2+x^2(x-4)$

$\therefore\ f'(5)=30$

답 30

[풀이2]

우선 함수 $g(x)$의 그래프를 그리자.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=2x^3e^{-x}(4-x)=2x^2e^{-x}\times x(4-x)$

방정식 $g'(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=4$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=2x^2e^{-x}(x-2)(x-6)$

(※ 이 문제를 해결하기 위하여 함수 $g(x)$의 변곡점을 반드시 찾아야 하는 것은 아니다. 하지만 정확한 그래프의 개형을 그리기 위하여 교과서의 전형적인 풀이를 적용하여 보자.)

방정식 $g''(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=6$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(x)$	−	0	+	+	+	0	−	−	−
$g''(x)$	+	0	+	0	−	−	−	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	극대	↘	변곡점	↘

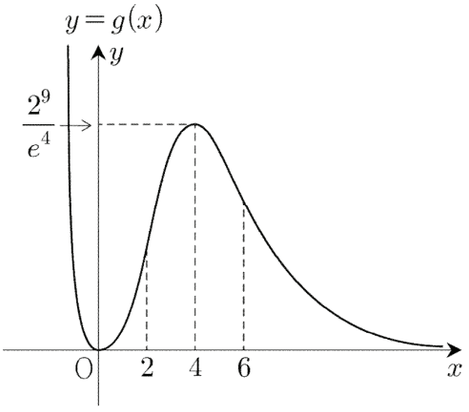
극솟값: $g(0)=0$, 극댓값: $g(4)=\frac{2^9}{e^4}$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\lim_{x\to\infty}g(x)=0$

이므로 x축은 점근선이다.

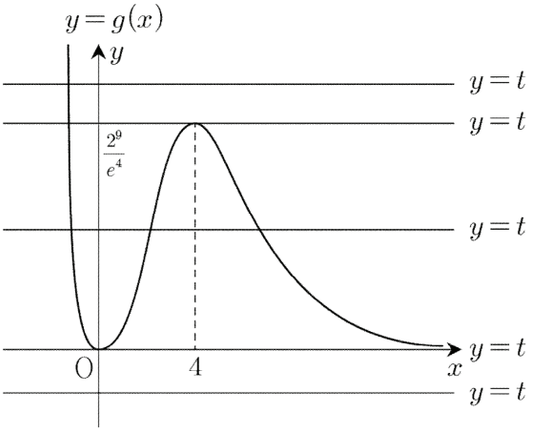
함수 $g(x)$의 그래프의 개형은



▸ 조건 (가)에 대하여 생각하자.

$h(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=t \\ f(t)=0 \end{cases}$

실수 t의 값에 따른 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 조사하자.



위의 그림에서

방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는

$t>\frac{2^9}{e^4}$이면 1개,

$t=\frac{2^9}{e^4}$이면 2개,

$0<t<\frac{2^9}{e^4}$이면 3개,

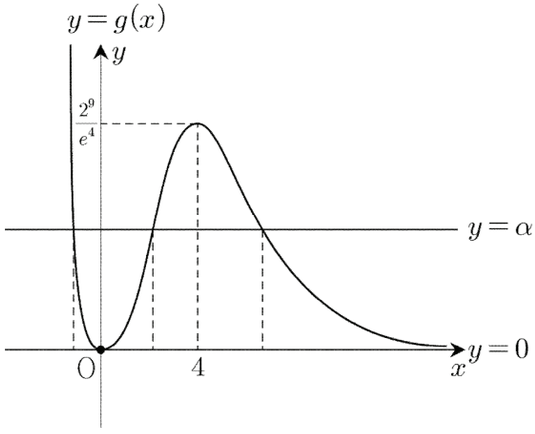
$t=0$이면 1개,

$t<0$이면 0개

이다. 이때, 각 경우에 대한 5개의 해집합 중에서 어느 두 집합도 교집합이 공집합이다. 그리고 각 경우에 대한 5개의 해집합의 합집합은 실수 전체의 집합이다.

방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되는 경우는 다음과 같이 두 가지이다.

• (경우1)



방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근 0, α를 가져야 한다.

(단, $0<\alpha<\frac{2^9}{e^4}$)

$f(0)=f(\alpha)=0$이므로

인수 정리에 의하여

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)p(x)$

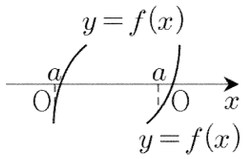
(단, $p(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

함수 $f(x)$의 도함수는

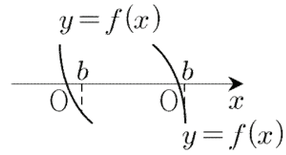
$f'(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)p(x)+\frac{1}{2}xp(x)$

$+\frac{1}{2}x(x-\alpha)p'(x)$

만약 $f'(0)>0$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 증가하므로 음수이면서 0에 아주 가까운 어떤 실수 a에 대하여 $f(a)<0$이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 0일 수 없으므로 이는 가정에 모순이다. 따라서 $f'(0)\le 0$이다.



만약 $f'(0)<0$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 감소하므로 양수이면서 0에 아주 가까운 어떤 실수 b에 대하여 $f(b)<0$이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 0일 수 없으므로 이는 가정에 모순이다. 따라서 $f'(0)=0$이다. (←귀류법)



$f'(0)=-\frac{1}{2}\alpha p(0)=0$에서 $p(0)=0$

($\because \alpha\neq 0$)

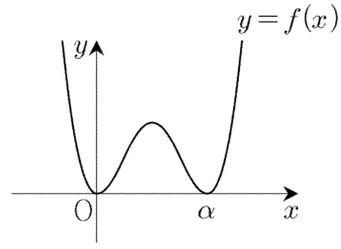
마찬가지의 방법으로 귀류법에 의하여

$f'(\alpha)=0$, $p(\alpha)=0$이다.

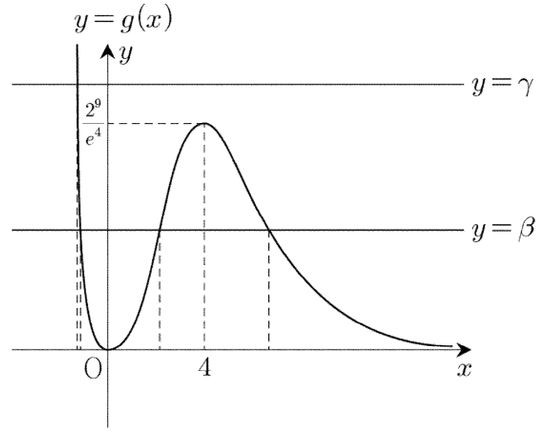
인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\alpha)^2$ (단, $0<\alpha<\frac{2^9}{e^4}$)

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



• (경우2)



방정식 $f(t)=0$이

$0<\beta<\frac{2^9}{e^4}<\gamma$

인 서로 다른 두 실근 β, γ를 가져야 한다.

$f(\beta)=f(\gamma)=0$이므로

인수 정리에 의하여

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

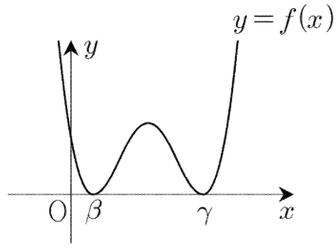
$f(x)=\frac{1}{2}(x-\beta)(x-\gamma)q(x)$

(단, $q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

(경우1)과 마찬가지의 방법으로 귀류법에 의하여
$f'(\beta)=f'(\gamma)=0$, $q(\beta)=q(\gamma)=0$이므로
함수 $f(x)$의 방정식은

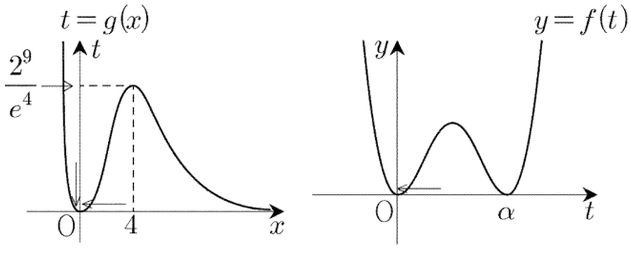
$f(x)=\frac{1}{2}(x-\beta)^2(x-\gamma)^2$ (단, $0<\beta<\frac{2^9}{e^4}<\gamma$)

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은

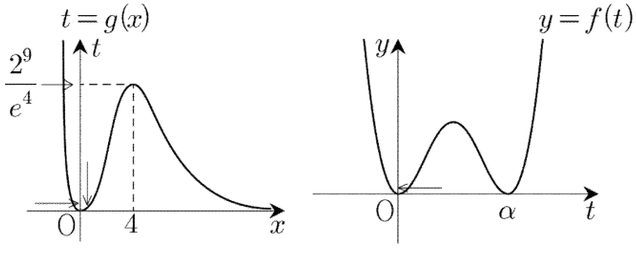


▸ 조건 (나)에 대하여 생각하자.
함수 $h(x)$의 도함수는
$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$
$h'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(0)\times 0=0$
이제 $\begin{cases}t=g(x)\\y=f(t)\end{cases}$로 두고 $x=0$의 좌우에서 함수 $h'(x)$의 부호의 변화를 관찰하자.

• (경우1)

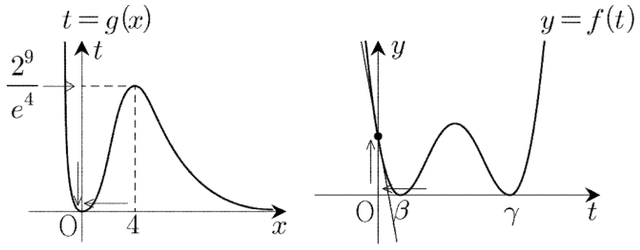


$x\to 0+$일 때 $t\to 0+$이고,
$t\to 0+$일 때 $f'(t)\to 0+$이다.
$x\to 0+$일 때 $g'(x)\to 0+$이다.
따라서 $x\to 0+$일 때, $h'(x)\to 0+$이다.

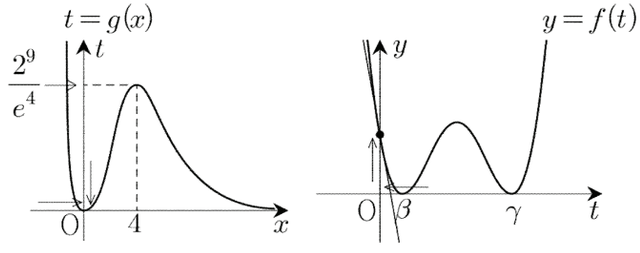


$x\to 0-$일 때 $t\to 0+$이고,
$t\to 0+$일 때 $f'(t)\to 0+$이다.
$x\to 0-$일 때 $g'(x)\to 0-$이다.
따라서 $x\to 0-$일 때, $h'(x)\to 0-$이다.
$x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
그러므로 (경우1)은 조건 (나)를 만족시킨다.

• (경우2)



$x\to 0+$일 때 $t\to 0+$이고,
$t\to 0+$일 때 $f'(t)\to f'(0)+$이다.
(이때, $f'(0)<0$)
$x\to 0+$일 때 $g'(x)\to 0+$이다.
따라서 $x\to 0+$일 때, $h'(x)\to 0-$이다.



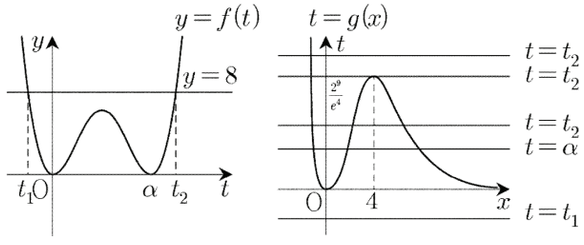
$x\to 0-$일 때 $t\to 0+$이고,
$t\to 0+$일 때 $f'(t)\to f'(0)+$이다.
(이때, $f'(0)<0$)
$x\to 0-$일 때 $g'(x)\to 0-$이다.
따라서 $x\to 0-$일 때, $h'(x)\to 0+$이다.
$x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
그러므로 (경우2)는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

▸ 조건 (다)에 대하여 생각하자.

$h(x)=8 \Leftrightarrow \begin{cases}g(x)=t\\f(t)=8\end{cases}$

실수 t의 값에 따른 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 조사하자.

• 함수 $f(x)$의 극댓값이 8보다 작은 경우



방정식 $f(t)=8$의 서로 다른 두 실근을 각각 t_1, t_2라고 하자.
(단, $t_1<t_2$)
방정식 $g(x)=t_1$의 서로 다른 실근의 개수는 0,
방정식 $g(x)=t_2$의 서로 다른 실근의 개수는 1 이상 3 이하이다.
따라서 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수가 6일 수

없다.

• 함수 $f(x)$의 극댓값이 8인 경우

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2x\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)(x-\alpha)$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\alpha$

$x=\frac{\alpha}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값은

$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha^4}{2^5}=8$ 풀면 $\alpha=4$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$

방정식 $f(x)=8$을 정리하면

$\{x(x-4)\}^2=4^2$

$x(x-4)=4$ 또는 $x(x-4)=-4$

$x^2-4x-4=0$ 또는 $(x-2)^2=0$

전자를 풀면

$x=2-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2+2\sqrt{2}$

후자를 풀면

$x=2$

이제

$t_1=2-2\sqrt{2}$, $t_2=2$, $t_3=2+2\sqrt{2}$

로 두자.

방정식 $g(x)=t_3$의 서로 다른 실근의 개수를 결정하기 위하여 두 수 t_3, $\frac{2^9}{e^4}$의 대소 관계를 밝히자.

$\frac{2^9}{e^4}-t_3=\frac{2^9}{e^4}-2-2\sqrt{2}$

$=\frac{2(2^8-e^4(1+\sqrt{2}))}{e^4}>0$

왜냐하면

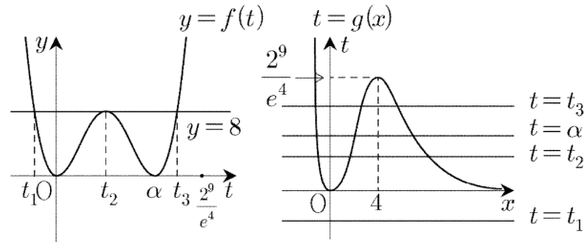
$2^8=256$이고,

$e^4<(2.8)^4=61.4656$, $1+\sqrt{2}<3$에서

$e^4(1+\sqrt{2})<184.3968$

이기 때문이다.

(※ $2<e<3$으로 두어도 동일한 결과를 얻는다.)



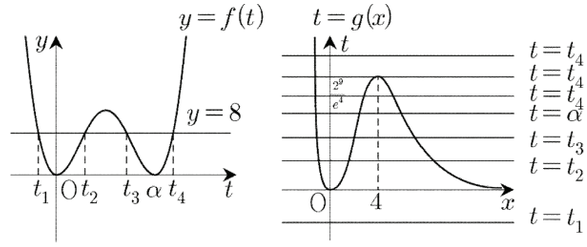
방정식 $g(x)=t_1$의 서로 다른 실근의 개수는 0,

방정식 $g(x)=t_2$의 서로 다른 실근의 개수는 3,

방정식 $g(x)=t_3$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

• 함수 $f(x)$의 극댓값이 8보다 큰 경우



방정식 $f(t)=8$의 서로 다른 네 실근을 각각 t_1, t_2, t_3, t_4라고 하자.

(단, $t_1<0<t_2<t_3<\alpha<t_4$)

방정식 $g(x)=t_1$의 서로 다른 실근의 개수는 0,

방정식 $g(x)=t_2$의 서로 다른 실근의 개수는 3,

방정식 $g(x)=t_3$의 서로 다른 실근의 개수는 3,

방정식 $g(x)=t_4$의 서로 다른 실근의 개수의 최솟값은 1이다.

따라서 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6일 수 없다.

문제에서 주어진 모든 조건을 만족시키는

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2x(x-2)(x-4)$

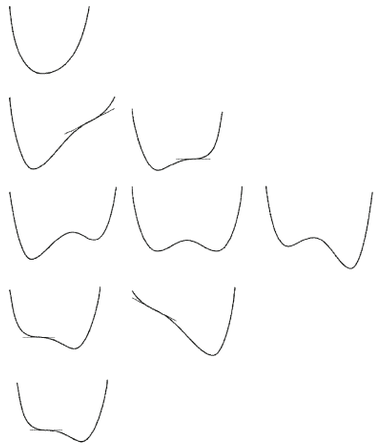
$\therefore\ f'(5)=30$

답 30

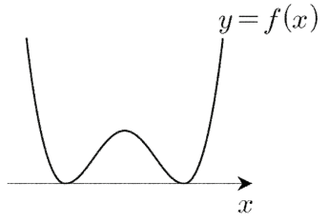
[참고1]

함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 다음과 같이 결정할 수도 있다.

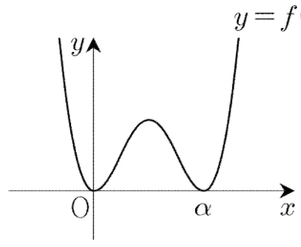
최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다.



조건 (가)에 의하여 방정식
$f(x)=0$ = (함수 $f(x)$의 최솟값이자 극솟값)
의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 아래와 같을 수밖에 없다.



[참고2]
함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.



방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 실근은 0, α 이외에는 없으므로

$$f(x)=\frac{1}{2}x^m(x-\alpha)^n$$

(단, m, n은 3 이하의 자연수이고, $m+n=4$)
만약 $m=1$, $n=3$이면

$$f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)^3$$

$x=0$의 좌우에서 x의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 변하고, $(x-\alpha)^3$의 부호는 음(−)으로 변함이 없으므로 $f(x)$의 부호는 양(+)에서 음(−)으로 변한다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0일 수 없다.
만약 $m=3$, $n=1$이면

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3(x-\alpha)$$

$x=0$의 좌우에서 x의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 변하고, $x-\alpha$의 부호는 음(−)으로 변함이 없으므로 $f(x)$의 부호는 양(+)에서 음(−)으로 변한다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0일 수 없다.
귀류법에 의하여 $m=n=2$이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\alpha)^2$$

[참고3]
방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 실근은 0, α 이외에는 없으므로

$$f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)k(x)$$

(단, $k(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.)
이차방정식

$$k(x)=0 \qquad \cdots(*)$$

의 판별식을 D라고 하자.
$D>0$인 경우: (*)의 두 근은 0, α이다. ⋯㉠
$D=0$인 경우: (*)의 중근은 0 또는 α이다. ⋯㉡
$D<0$인 경우: (*)는 실근을 갖지 않는다. ⋯㉢

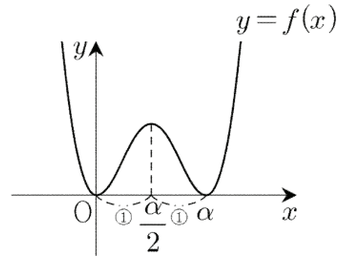
㉠: $f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\alpha)^2$

㉡: $f(x)=\frac{1}{2}x^3(x-\alpha)$ 또는 $f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)^3$

㉢: $f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)k(x)$

(단, 모든 실수 x에 대하여 $k(x)>0$이다.)
[참고2]에서 ㉡이 가능하지 않음을 산술적으로 보였다.
[참고2]에서와 마찬가지의 방법으로 ㉢이 가능하지 않음을 산술적으로 보일 수 있다.
귀류법에 의하여 ㉠만이 가능하다.

[참고4]
사차함수의 그래프에서의 비율에 대하여 생각해보자.



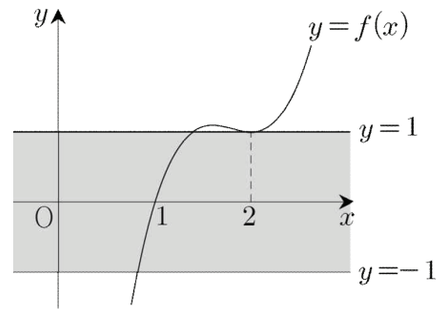
위의 그림처럼 사차함수 $f(x)$가 $x=0$과 $x=\alpha$에서 극소이고, 두 극솟값이 같을 때,
사차함수 $f(x)$는 $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극대이다.

[참고5]

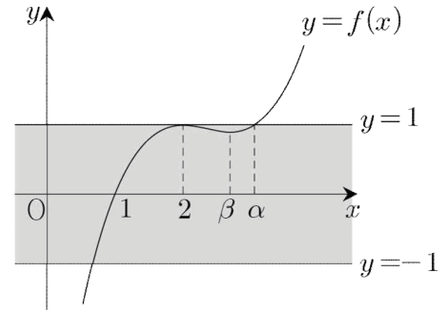
함수 $f(x)$가 (경우1)과 같을 때,
함수 $h(x)$의 이계도함수는
$h''(x)=f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)$
$h''(0)=f''(g(0))(g'(0))^2+f'(g(0))g''(0)$
$=f''(0)\times 0+0\times g''(0)=0$
$(\because g'(0)=0,\ g(0)=0,\ f'(0)=0)$
이므로 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 극소임을 이계도함수의 부호로 결정할 수 없다.
반면 함수 $f(x)$가 (경우2)와 같을 때,
함수 $h(x)$의 이계도함수는
$h''(x)=f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)$
$h''(0)=f''(g(0))(g'(0))^2+f'(g(0))g''(0)$
$=f''(0)\times 0+f'(0)\times g''(0)<0$
$(\because g'(0)=0,\ g(0)=0,$
$f'(0)<0,\ g''(0)>0)$
이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

H211 | 답 ⑤

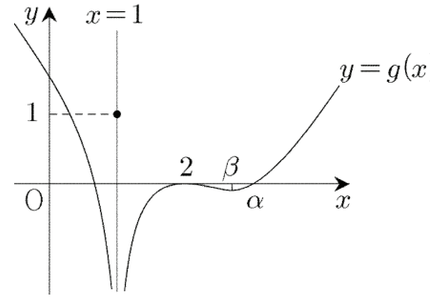
[풀이]
함수 $g(x)$에서 진수의 조건에 의하여
$f(x)\neq 0$
조건 (가)에서 $f(1)=0$ …㉠
(만약 $f(1)\neq 0$이면 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이기 때문이다.(귀류법))
이때, $f(x)=0$이 되는 x는 오직 1 뿐이다.
즉, 곡선 $y=f(x)$는 x축과 오직 점 $(1,\ 0)$에서만 만난다.
한편 함수 $g(x)$의 도함수는
$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (단, $f(x)\neq 0$)
조건 (나)에서
함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대:
$g'(2)=\dfrac{f'(2)}{f(2)}=0$, 즉 $f'(2)=0$ …㉡
함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소
(& 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대):
$g(2)\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq f(2)\leq 1\ (f(2)\neq 0)$ …㉢
조건 (다)에서
$g(x)=0 \Leftrightarrow \ln|f(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=\pm 1$
즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\pm 1$의
교점의 개수는 3이다. …㉣
(이때, 곡선 $y=f(x)$는 두 직선 $y=1$, $y=-1$ 중 오직 한 직선에 접해야 한다.)
㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 모두 만족시키는
함수 $f(x)$의 그래프를 그려보자.



위의 그림에서 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)(g'(x))$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. 이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



(단, $2<\beta<\alpha$에 대하여 $f'(\beta)=0$, $f(\alpha)=0$)
이때, 함수 $g(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)^2(x-\alpha)+1$
$f(1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\alpha+1=0$에서 $\alpha=3$
즉, $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$
$f'(x)=(x-2)\left(\dfrac{3}{2}x-4\right)$
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ 또는 $x=\dfrac{8}{3}(=\beta)$
따라서 함수 $g(x)$의 극솟값은
$g\left(\dfrac{8}{3}\right)=\ln\left|f\left(\dfrac{8}{3}\right)\right|=\ln\dfrac{25}{27}$
답 ⑤

H212 | 답 31

[풀이]

(가):

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$=e^{\sin\pi f(x)}\cos\pi f(x)\pi f'(x)$

$h'(0)=0$

$\Leftrightarrow \cos\pi f(0)=0$ 또는 $f'(0)=0$ …㉠

$h(0)=g(f(0))=e^{\sin\pi f(0)}-1=0$

$\Leftrightarrow e^{\sin\pi f(0)}=1 \Leftrightarrow \sin\pi f(0)=0$

$\Leftrightarrow f(0)=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ …㉡

(이때, $\cos\pi f(0)\neq 0$)

㉠, ㉡에서 $f(0)=\pm n$ (n은 정수), $f'(0)=0$

그리고 $f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$이므로

삼차함수 $f(x)$의 극대점과 극소점은 각각

$(0,\ n),\ \left(3,\ \frac{1}{2}\right)$

$f'(x)=3ax(x-3)$ (단, $a>0$)으로 두면

$f(x)=ax^3-\frac{9}{2}ax^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(3)=-\frac{27}{2}a+C=\frac{1}{2},\ C=\frac{27}{2}a+\frac{1}{2}$

$f(x)=ax^3-\frac{9}{2}ax^2+\frac{27}{2}a+\frac{1}{2}$

(이때, $\frac{27}{2}a+\frac{1}{2}=n$, n은 자연수)

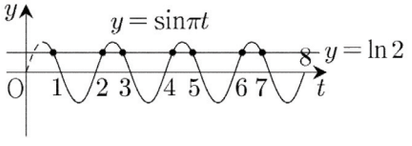
(나):

$h(x)=1 \Leftrightarrow e^{\sin\pi f(x)}=2 \Leftrightarrow \sin\pi f(x)=\ln 2$

$\Leftrightarrow \sin\pi t=\ln 2\ (<1)$ (단, $t=f(x)$)

구간 $(0,\ 3)$에서 함수 $f(x)\ (=t)$는 감소하고

$\frac{1}{2}<t<n$



위의 그림에서 $n=8$, $a=\frac{5}{9}$이므로

(만약 $n=7$(즉, $f(0)=7$)이면

$x=0$의 좌우에서

$h'(x)=\underbrace{e^{\sin\pi f(x)}}_{+}\underbrace{\cos\pi f(x)}_{-}\underbrace{\pi f'(x)}_{+\to-}$

의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.)

$f(x)=\frac{5}{9}x^3-\frac{5}{2}x^2+8$

$f(2)=\frac{22}{9}$

$\therefore\ p+q=31$

답 31

H213 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

방정식 $f'(x)=0$의 4가 아닌 두 실근을 각각 α, β라고 하자.

(단, $\alpha<0<\beta$)

$x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다.

$x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양(+)으로 일정하므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극값을 갖지 않는다.

$x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$는 서로 다른 두 점에서 극값을 갖는다.

▸ ㄴ. (참)

구간 $(4,\ 6)$에서 $f'(x)>0$이므로

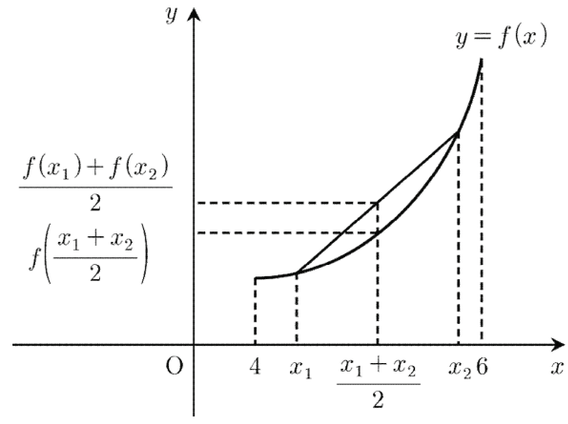
함수 $f(x)$는 구간 $(4,\ 6)$에서 증가한다.

구간 $(4,\ 6)$에서 함수 $f'(x)$가 증가하므로

구간 $(4,\ 6)$에서 $f''(x)>0$이다.

구간 $(4,\ 6)$에서 $f''(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 구간 $(4,\ 6)$에서 아래로 볼록이다.



위의 그림에서

$4<x_1<x_2<6$일 때,

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

▸ ㄷ. (참)

보기 ㄱ에서 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고, $x=\beta$

⋮

함수 $g(x)$의 방정식은

n이 3 이상의 홀수일 때,

$x>-1$이면

$g(x)=99f(x)-f(x^2)-f(x^3)-\cdots-f(x^n)$

$x\le-1$이면

$g(x)=-99f(x)-f(x^2)+f(x^3)-\cdots+f(x^n)$

n이 짝수일 때,

$x>-1$이면

$g(x)=99f(x)-f(x^2)-f(x^3)-\cdots-f(x^n)$

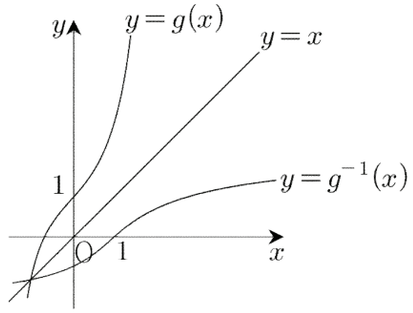
$x\le-1$이면

$g(x)=-99f(x)-f(x^2)+f(x^3)-\cdots-f(x^n)$

H222 | 답 72

[풀이]

두 함수 $g(x)$, $g^{-1}(x)$의 그래프는



위의 그림처럼 함수 $y=g^{-1}(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $(g^{-1})'(x)>0$이다.

$g^{-1}(p)=a$로 두면 $g(a)=p$이고,

역함수의 미분법에 의하여

$$(g^{-1})'(p)=\frac{1}{g'(a)}$$

이므로

$$\lim_{x\to p+}\frac{(x-1)|h(x)|}{x-p}$$

$$=\lim_{x\to p+}\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(p)}{x-p}(x-1)(g^{-1}(x)-b)^2$$

$$=\frac{(p-1)(a-b)^2}{g'(a)},$$

$$\lim_{x\to p-}\frac{(x-1)|h(x)|}{x-p}$$

$$=\lim_{x\to p-}\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(p)}{x-p}(1-x)(g^{-1}(x)-b)^2$$

$$=\frac{(1-p)(a-b)^2}{g'(a)}$$

조건 (가)에서 주어진 함수는 $x=p$에서 미분가능하므로

$$\frac{(p-1)(a-b)^2}{g'(a)}=\frac{(1-p)(a-b)^2}{g'(a)}\ (\text{이때, } a\ne b)$$

$p-1=1-p\ \therefore\ p=1$

맨 위의 그림에서 $g(a)=1$이면 $a=0$임을 알 수 있다.

(물론 방정식 $a^3+a+1=1$을 풀면

$a(a^2+1)=0,\ a=0$)

한편 함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$

이므로 조건 (나)에서

$h'(3)=f'(g^{-1}(3))(g^{-1})'(3)$

$=f'(1)(g^{-1})'(3)$

($\because g^{-1}(3)=q$로 두면 $g(q)=3,\ q^3+q-2=0,\ q=1$)

$$=\frac{1}{4}f'(1)$$

($\because (g^{-1})'(3)=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{4},\ g'(x)=3x^2+1$)

$$=\frac{(1-b)^2+2(1-b)}{4}$$

($\because f'(x)=(x-b)^2+2x(x-b)$)

$=2$

정리하면

$(1-b)^2+2(1-b)-8=0,$

$(1-b+4)(1-b-2)=0,$

$(b-5)(b+1)=0,\ b=5\ (\because b>a)$

$\therefore\ f(8)=8\times(8-5)^2=72$

답 72

[참고1]

다음과 같이 $a=0$임을 보여도 좋다.

$g^{-1}(p)=a$로 두면 $g(a)=p$이고,

역함수의 미분법에 의하여

$$(g^{-1})'(p)=\frac{1}{g'(a)}$$

조건 (가)에서 주어진 함수는

$(x-1)|h(x)|$

$=|(g^{-1}(x)-a)|\times(x-1)(g^{-1}(x)-b)^2$

이 함수의 도함수는

$((x-1)|h(x)|)'$

$=(|(g^{-1}(x)-a)|)'\times(x-1)(g^{-1}(x)-b)^2$

$+|(g^{-1}(x)-a)|\times((x-1)(g^{-1}(x)-b)^2)'$

조건 (가)에서 주어진 함수는 $x=p$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to p+}((x-1)|h(x)|)'=\lim_{x\to p-}((x-1)|h(x)|)'$

즉, $(g^{-1})'(p)\times(p-1)(g^{-1}(p)-b)^2$

$=-(g^{-1})'(p)\times(p-1)(g^{-1}(p)-b)^2$

정리하면

$\frac{(p-1)(a-b)^2}{g'(a)}=-\frac{(p-1)(a-b)^2}{g'(a)}$, $p-1=0$, $p=1$

$g(a)=1$, 즉 $a^3+a+1=0$, $a(a^2+1)=0$

$\therefore\ a=0$

[참고2] 시험장

인수정리의 관점에서 접근하면 빠른 풀이가 가능하다. (시험장에서는 아래와 같이 생각하는 것이 자연스럽다.)

조건 (가)에서 주어진 함수는

$(x-1)|h(x)|$

$=(x-1)\left|(g^{-1}(x)-a)(g^{-1}(x)-b)^2\right|$

$=\pm\left|(x-1)(g^{-1}(x)-a)\right|\times(g^{-1}(x)-b)^2$

(단, 앞에 붙은 부호 $+$는 $x\geq1$일 때이고, $-$는 $x<1$일 때이다.)

이 함수의 도함수는 $g^{-1}(x)-b$를 인수로 가지므로

$g^{-1}(t_1)=b$인 $x=t_1$에서 함수 $(x-1)|h(x)|$는 미분가능하다.

만약 $x\to1$일 때, $g^{-1}(x)-a\approx(x-1)\times$(함수)로 근사시킬 수 있다면

$(x-1)(g^{-1}(x)-a)\approx(x-1)^2\times$(함수)

이므로 $g^{-1}(t_2)=a$인 $x=t_2(=1)$에서 함수 $(x-1)|h(x)|$는 미분가능하다.

따라서 $g^{-1}(1)=a$, $g(a)=1$이므로

$\therefore\ a=0$

나머지 풀이는 앞선 풀이와 동일하다.

H223 | 답 48

[풀이1]

❶ 함수 $g(x)$의 그래프를 그린다.

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=\begin{cases}|2\sin3x+1| & (x\geq0)\\ |-2\sin x+1| & (x<0)\end{cases}$

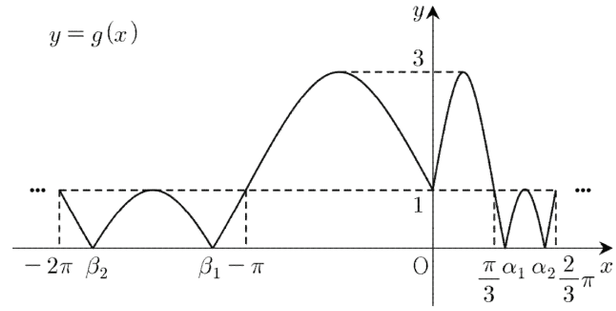
구간 $(0,\ \infty)$에서 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근을 가장 작은 수부터 작은 순서대로 각각 α_1, α_2, α_3, …이라고 하자. 그리고 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근을 가장 큰 수부터 큰 순서대로 각각 β_1, β_2, β_3, …이라고 하자.

구간 $\left[-2\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right]$에서 함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=\begin{cases}2\sin3x+1 & (0\leq x<\alpha_1,\ \alpha_2\leq x\leq\frac{2}{3}\pi)\\ -2\sin3x-1 & (\alpha_1\leq x<\alpha_2)\\ -2\sin x+1 & (-2\pi\leq x<\beta_2,\ \beta_1\leq x<0)\\ 2\sin x-1 & (\beta_2\leq x<\beta_1)\end{cases}$

(단, $\alpha_1=\frac{7}{18}\pi$, $\alpha_2=\frac{11}{18}\pi$, $\beta_1=-\frac{7}{6}\pi$, $\beta_2=-\frac{11}{6}\pi$)

함수 $g(x)$의 그래프는



문제에서 주어진 조건에 의하여 아래의 표가 성립한다.

	미분가능성	연속성
$h(x)$	○	○
$h'(x)$	○	○
$h''(x)$	알 수 없음	○

❷ $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f(g(x))-f(g(0))}{x}$

$=\lim_{x\to0+}\frac{f(g(x))-f(g(0))}{g(x)-g(0)}\times\frac{g(x)-g(0)}{x}$

$=\lim_{t\to1+}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\times\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$

$=f'(1)\times6=6f'(1)$

($\because$ 구간 $(0,\ \alpha_1)$에서 $g'(x)=6\cos3x$이다.)

$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f(g(x))-f(g(0))}{x}$

$=\lim_{x\to0-}\frac{f(g(x))-f(g(0))}{g(x)-g(0)}\times\frac{g(x)-g(0)}{x}$

$=\lim_{t\to1+}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\times\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}$

$=f'(1)\times(-2)=-2f'(1)$

($\because$ 구간 $(\beta_1,\ 0)$에서 $g'(x)=-2\cos x$이다.)

미분가능성의 정의에 의하여

$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}$

즉, $6f'(1)=-2f'(1)$이므로

$f'(1)=0$ …㉠

그리고 미분계수의 정의에 의하여

$h'(0)=0$

❸ $h(x)$는 $x=\alpha_1$에서 미분가능하다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\alpha_1+}\frac{h(x)-h(\alpha_1)}{x-\alpha_1}=\lim_{x\to\alpha_1+}\frac{f(g(x))-f(g(\alpha_1))}{x-\alpha_1}$$

$$=\lim_{x\to\alpha_1+}\frac{f(g(x))-f(g(\alpha_1))}{g(x)-g(\alpha_1)}\times\frac{g(x)-g(\alpha_1)}{x-\alpha_1}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{f(t)-f(0)}{t}\times\lim_{x\to\alpha_1+}\frac{g(x)-g(\alpha_1)}{x-\alpha_1}$$

$=f'(0)\times3\sqrt{3}=3\sqrt{3}f'(0)$

($\because$ 구간 $(\alpha_1,\ \alpha_2)$에서 $g'(x)=-6\cos3x$이다.)

$$\lim_{x\to\alpha_1-}\frac{h(x)-h(\alpha_1)}{x-\alpha_1}=\lim_{x\to\alpha_1-}\frac{f(g(x))-f(g(\alpha_1))}{x-\alpha_1}$$

$$=\lim_{x\to\alpha_1-}\frac{f(g(x))-f(g(\alpha_1))}{g(x)-g(\alpha_1)}\times\frac{g(x)-g(\alpha_1)}{x-\alpha_1}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{f(t)-f(0)}{t}\times\lim_{x\to\alpha_1-}\frac{g(x)-g(\alpha_1)}{x-\alpha_1}$$

$=f'(0)\times(-3\sqrt{3})=-3\sqrt{3}f'(0)$

($\because$ 구간 $(0,\ \alpha_1)$에서 $g'(x)=6\cos3x$이다.)

미분가능성의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to\alpha_1+}\frac{h(x)-h(\alpha_1)}{x-\alpha_1}=\lim_{x\to\alpha_1-}\frac{h(x)-h(\alpha_1)}{x-\alpha_1}$$

즉, $3\sqrt{3}f'(0)=-3\sqrt{3}f'(0)$이므로

$f'(0)=0$ …㉡

❹ $h'(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{h'(x)-h'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{h'(x)}{x}(\because h'(0)=0)$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{f'(g(x))g'(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{f'(g(x))-f'(g(0))}{x}\times g'(x)$$

($\because$ ㉠에서 $f'(1)=0$이다.)

$$=\lim_{x\to0+}\frac{f'(g(x))-f'(g(0))}{g(x)-g(0)}\times\frac{g(x)-g(0)}{x}\times g'(x)$$

$=f''(1)\times6\times6=36f''(1)$

($\because$ 구간 $(0,\ \alpha_1)$에서 $g'(x)=6\cos3x$이다.)

$$\lim_{x\to0-}\frac{h'(x)-h'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0-}\frac{h'(x)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f'(g(x))g'(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0-}\frac{f'(g(x))-f'(g(0))}{x}\times g'(x)$$

($\because$ ㉠에서 $f'(1)=0$이다.)

$$=\lim_{x\to0-}\frac{f'(g(x))-f'(g(0))}{g(x)-g(0)}\times\frac{g(x)-g(0)}{x}\times g'(x)$$

$=f''(1)\times(-2)\times(-2)=4f''(1)$

($\because$ 구간 $(\beta_1,\ 0)$에서 $g'(x)=-2\cos x$이다.)

미분가능성의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to0+}\frac{h'(x)-h'(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{h'(x)-h'(0)}{x}$$

즉, $36f''(1)=4f''(1)$이므로

$f''(1)=0$ …㉢

❺ 함수 $f'(x)$의 방정식을 구한다.

㉠, ㉡에서 인수 정리에 의하여

$f'(x)=4x(x-1)(x-\gamma)$(단, γ는 상수)

($\because$ $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.)

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=4(x-1)(x-\gamma)+4x(x-\gamma)+4x(x-1)$

㉢에 의하여

$f''(1)=4(1-\gamma)=0$에서 $\gamma=1$

함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=4x(x-1)^2$

$\therefore\ f'(3)=48$

답 48

[풀이2]

❶ 함수 $g(x)$의 그래프를 그린다.

함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}|\,2\sin3x+1\,| & (x\ge0)\\ |\,-2\sin x+1\,| & (x<0)\end{cases}$$

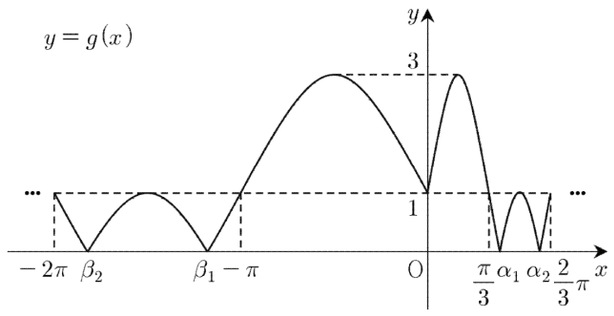
구간 $(0,\ \infty)$에서 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근을 가장 작은 수부터 작은 순서대로 각각 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots$이라고 하자. 그리고 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근을 가장 큰 수부터 큰 순서대로 각각 $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \cdots$이라고 하자.

구간 $\left[-2\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right]$에서 함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}2\sin3x+1 & (0\le x<\alpha_1,\ \alpha_2\le x\le\frac{2}{3}\pi)\\ -2\sin3x-1 & (\alpha_1\le x<\alpha_2)\\ -2\sin x+1 & (-2\pi\le x<\beta_2,\ \beta_1\le x<0)\\ 2\sin x-1 & (\beta_2\le x<\beta_1)\end{cases}$$

(단, $\alpha_1=\frac{7}{18}\pi,\ \alpha_2=\frac{11}{18}\pi,\ \beta_1=-\frac{7}{6}\pi,\ \beta_2=-\frac{11}{6}\pi$)

함수 $g(x)$의 그래프는



문제에서 주어진 조건에 의하여 아래의 표가 성립한다.

	미분가능성	연속성
$h(x)$	○	○
$h'(x)$	○	○
$h''(x)$	알 수 없음	○

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 함수 $g(x)$는 $x\neq 0$, $x\neq\alpha_i$, $x\neq\beta_j$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 합성함수 $f(g(x))$는 $x\neq 0$, $x\neq\alpha_i$, $x\neq\beta_j$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (단, i, j는 자연수이다.)

$x\neq 0$, $x\neq\alpha_i$, $x\neq\beta_j$일 때, 도함수 $h'(x)$는

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

❷ $x=0$에서 도함수 $h'(x)$는 연속이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 0+}h'(x)=\lim_{x\to 0+}f'(g(x))g'(x)$

$=f'(1)\times 6=6f'(1)$

($\because$ 구간 $(0,\ \alpha_1)$에서 $g'(x)=6\cos 3x$이다.)

$\lim_{x\to 0-}h'(x)=\lim_{x\to 0-}f'(g(x))g'(x)$

$=f'(1)\times(-2)=-2f'(1)$

($\because$ 구간 $(\beta_1,\ 0)$에서 $g'(x)=-2\cos x$이다.)

도함수 $h'(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x\to 0+}h'(x)=\lim_{x\to 0-}h'(x)$

즉, $6f'(1)=-2f'(1)$이므로

$f'(1)=0$ …㉠

❸ $x=\alpha_1$에서 도함수 $h'(x)$는 연속이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to\alpha_1+}h'(x)=\lim_{x\to\alpha_1+}f'(g(x))g'(x)$

$=f'(0)\times 3\sqrt{3}=3\sqrt{3}f'(0)$

($\because$ 구간 $(\alpha_1,\ \alpha_2)$에서 $g'(x)=-6\cos 3x$이다.)

$\lim_{x\to\alpha_1-}h'(x)=\lim_{x\to\alpha_1-}f'(g(x))g'(x)$

$=f'(0)\times(-3\sqrt{3})=-3\sqrt{3}f'(0)$

($\because$ 구간 $(0,\ \alpha_1)$에서 $g'(x)=6\cos 3x$이다.)

도함수 $h'(x)$는 $x=\alpha_1$에서 연속이므로

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x\to\alpha_1+}h'(x)=\lim_{x\to\alpha_1-}h'(x)$

즉, $3\sqrt{3}f'(0)=-3\sqrt{3}f'(0)$이므로

$f'(0)=0$ …㉡

마찬가지의 방법으로 $x=\alpha_i$, $x=\beta_j$에 대해서도 ㉡을 유도할 수 있다.

(단, i는 2 이상의 자연수, j는 자연수)

❹ 이계도함수 $h''(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

다항함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 두 함수 $g(x)$와 $g'(x)$는 $x\neq 0$, $x\neq\alpha_i$, $x\neq\beta_j$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $h'(x)$는 $x\neq 0$, $x\neq\alpha_i$, $x\neq\beta_j$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (단, i, j는 자연수이다.)

$x\neq 0$, $x\neq\alpha_i$, $x\neq\beta_j$일 때, 이계도함수 $h''(x)$는

$h''(x)=f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 0+}h''(x)$

$=\lim_{x\to 0+}\{f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)\}$

$=f''(1)\times 6^2+f'(1)\times 0=36f''(1)$

($\because$ 구간 $(0,\ \alpha_1)$에서

$g'(x)=6\cos 3x$이고 $g''(x)=-18\sin 3x$이다.)

$\lim_{x\to 0-}h''(x)$

$=\lim_{x\to 0-}\{f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)\}$

$=f''(1)\times(-2)^2+f'(1)\times 0=4f''(1)$

($\because$ 구간 $(\beta_1,\ 0)$에서

$g'(x)=-2\cos x$이고 $g''(x)=2\sin x$이다.)

이계도함수 $h''(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x\to 0+}h''(x)=\lim_{x\to 0-}h''(x)$

즉, $36f''(1)=4f''(1)$이므로

$f''(1)=0$ …㉢

❺ 함수 $f'(x)$의 방정식을 구한다.

㉠, ㉡에서 인수 정리에 의하여

$f'(x)=4x(x-1)(x-\gamma)$(단, γ는 상수)

($\because$ $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.)

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=4(x-1)(x-\gamma)+4x(x-\gamma)+4x(x-1)$

㉢에 의하여

$f''(1)=4(1-\gamma)=0$에서 $\gamma=1$

함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=4x(x-1)^2$

$\therefore\ f'(3)=48$

답 48

[참고1]

도함수 $h'(x)$는

$$h'(x)=\begin{cases} f'(g(x))g'(x) & (x\neq 0,\ x\neq \alpha_i,\ x\neq \beta_j) \\ 0 & (x=0 \text{ 또는 } x=\alpha_i \text{ 또는 } x=\beta_j) \end{cases}$$

(단, i, j는 자연수이다.)

이계도함수 $h''(x)$는

$$h''(x)=\begin{cases} f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x) & (x\neq 0,\ x\neq \alpha_i,\ x\neq \beta_j) \\ 0 & (x=0 \text{ 또는 } x=\alpha_i \text{ 또는 } x=\beta_j) \end{cases}$$

(단, i, j는 자연수이다.)

[참고2]

$h'(x)$가 $x=\alpha_1$에서 미분가능한 함수임을 증명하자.

$h'(x)$는 $x=\alpha_1$에서 연속이므로

$h'(\alpha_1)=\lim_{x\to\alpha_1+}h'(x)=\lim_{x\to\alpha_1+}f'(g(x))g'(x)$

$=f'(0)\times 3\sqrt{3}=0$

($\because$ ㉡에서 $f'(0)=0$이고,

구간 $(\alpha_1,\ \alpha_2)$에서 $g'(x)=-6\cos 3x$이다.)

$$\lim_{x\to\alpha_1+}\frac{h'(x)-h'(\alpha_1)}{x-\alpha_1}$$

$$=\lim_{x\to\alpha_1+}\frac{h'(x)}{x-\alpha_1}=\lim_{x\to\alpha_1+}\frac{f'(g(x))g'(x)}{x-\alpha_1}$$

$$=\lim_{x\to\alpha_1+}\frac{f'(g(x))-f'(g(\alpha_1))}{g(x)-g(\alpha_1)}\times\frac{g(x)-g(\alpha_1)}{x-\alpha_1}\times g'(x)$$

$=f''(0)\times 3\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}=27f''(0)$

($\because$ 구간 $(\alpha_1,\ \alpha_2)$에서 $g'(x)=-6\cos 3x$이다.)

$$\lim_{x\to\alpha_1-}\frac{h'(x)-h'(\alpha_1)}{x-\alpha_1}$$

$$=\lim_{x\to\alpha_1-}\frac{h'(x)}{x-\alpha_1}=\lim_{x\to\alpha_1-}\frac{f'(g(x))g'(x)}{x-\alpha_1}$$

$$=\lim_{x\to\alpha_1-}\frac{f'(g(x))-f'(g(\alpha_1))}{g(x)-g(\alpha_1)}\times\frac{g(x)-g(\alpha_1)}{x-\alpha_1}\times g'(x)$$

$=f''(0)\times(-3\sqrt{3})\times(-3\sqrt{3})=27f''(0)$

($\because$ 구간 $(0,\ \alpha_1)$에서 $g'(x)=6\cos 3x$이다.)

$$\lim_{x\to\alpha_1+}\frac{h'(x)-h'(\alpha_1)}{x-\alpha_1}=\lim_{x\to\alpha_1-}\frac{h'(x)-h'(\alpha_1)}{x-\alpha_1}$$

이므로 함수의 미분가능성에 대한 정의에 의하여

함수 $h'(x)$는 $x=\alpha_1$에서 미분가능하다.

마찬가지의 방법으로 $x=\alpha_i$, $x=\beta_j$에 대해서도

함수 $h'(x)$가 미분가능한 함수임을 증명할 수 있다.

(단, i는 2 이상의 자연수, j는 자연수)

[참고3]

이계도함수 $h''(x)$가 $x=\alpha_1$에서 연속임을 증명하자.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to\alpha_1+}h''(x)$

$=\lim_{x\to\alpha_1+}\{f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)\}$

$=f''(0)\times(3\sqrt{3})^2+f'(0)\times(-9)=27f''(0)$

($\because f'(0)=0$이고, 구간 $(\alpha_1,\ \alpha_2)$에서

$g'(x)=-6\cos 3x$이고 $g''(x)=18\sin 3x$이다.)

$\lim_{x\to\alpha_1-}h''(x)$

$=\lim_{x\to\alpha_1-}\{f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)\}$

$=f''(0)\times(-3\sqrt{3})^2+f'(0)\times 9=27f''(0)$

($\because f'(0)=0$이고, 구간 $(0,\ \alpha_1)$에서

$g'(x)=6\cos 3x$이고 $g''(x)=-18\sin 3x$이다.)

$\lim_{x\to\alpha_1+}h''(x)=\lim_{x\to\alpha_1-}h''(x)=h''(\alpha_1)(=27f''(0))$

($\because$ [참고2])

이므로 함수의 연속에 대한 정의에 의하여

이계도함수 $h''(x)$는 $x=\alpha_1$에서 연속이다.

마찬가지의 방법으로 $x=\alpha_i$, $x=\beta_j$에 대해서도

이계도함수 $h''(x)$가 연속임을 증명할 수 있다.

(단, i는 2 이상의 자연수, j는 자연수)

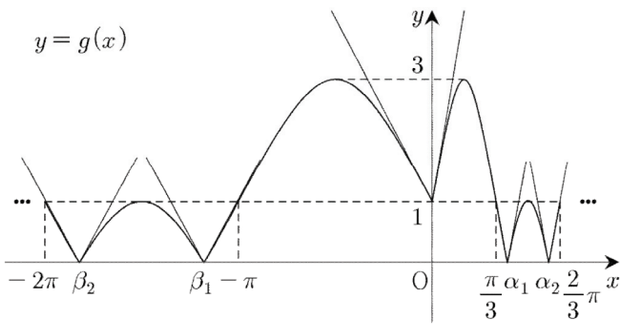
[풀이3] 시험장 ★

함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases} |2\sin 3x+1| & (x\geq 0) \\ |-2\sin x+1| & (x<0) \end{cases}$$

구간 $(0,\ \infty)$에서 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근을 가장 작은 수부터 작은 순서대로 각각 α_1, α_2, α_3, …이라고 하자. 그리고 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근을 가장 큰 수부터 큰 순서대로 각각 β_1, β_2, β_3, …이라고 하자.

함수 $g(x)$의 그래프는



연속함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=\alpha_i$, $x=\beta_j$일 때, 미분가능하지 않다.
(단, i, j는 자연수이다.)
함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 가지므로 아래의 표가 성립한다.

	미분가능성	연속성
$h(x)$	○	○
$h'(x)$	○	○
$h''(x)$	알 수 없음	○

$x\neq 0$, $x\neq\alpha_i$, $x\neq\beta_j$일 때, 함수 $h(x)$의 도함수는
$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$
두 함수 $h'(x)$, $f'(g(x))$는 연속이고,
함수 $g'(x)$는 $x=0$, $x=\alpha_i$, $x=\beta_j$에서 불연속이므로
$f'(g(0))=0$, $f'(g(\alpha_i))=0$, $f'(g(\beta_j))=0$
가 성립해야 한다. 정리하면
$f'(1)=0$, $f'(0)=0$ $\cdots$ ㉠
$x\neq 0$, $x\neq\alpha_i$, $x\neq\beta_j$일 때, 함수 $h(x)$의 이계도함수는
$h''(x)=f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)$
세 함수 $h''(x)$, $f''(g(x))$, $f'(g(x))g''(x)$는 연속이고,
($\because$ $x=0$, $x=\alpha_i$, $x=\beta_j$일 때, $f'(g(x))=0$이므로
함수 $f'(g(x))g''(x)$는 연속이다.)
함수 $\{g'(x)\}^2$은 $x=0$에서 불연속이므로
$f''(g(0))=0$
가 성립해야 한다. 정리하면
$f''(1)=0$ $\cdots$ ㉡
(반면 함수 $\{g'(x)\}^2$은 $x=\alpha_i$, $x=\beta_j$에서 연속이다.)
㉠, ㉡에서 인수정리에 의하여
$f'(x)=4x(x-1)^2$
$\therefore$ $f'(3)=48$
답 48

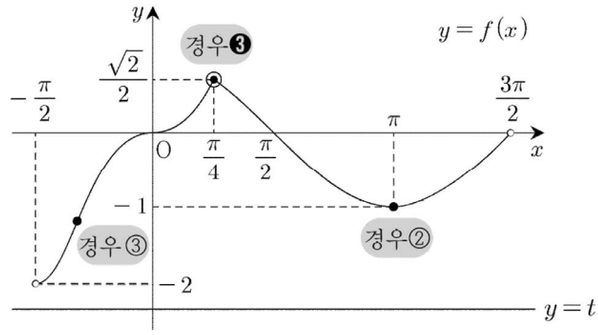
[참고4]
[풀이2], [풀이3]에서는 문제에서 주어진 조건 '함수 $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.' 를 이용하였지만, [풀이1]에서는 이 조건을 이용하지 않았다. 따라서 이 조건은 [풀이2], [풀이3]을 가능케 하기 위하여 준 것으로 이해해도 좋다.

H224 | 답 ④

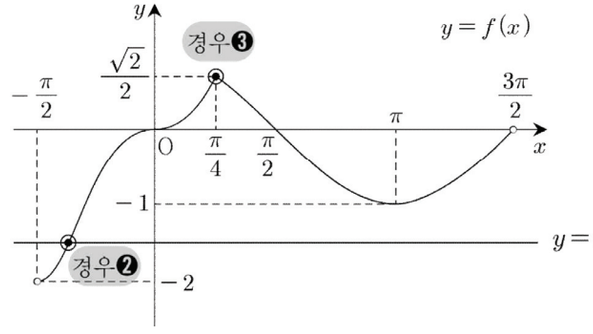
[풀이1] 시험장
조건 (나)에서 주어진 함수의 도함수는
$(\sqrt{|f(x)-t|})'=\dfrac{(|f(x)-t|)'}{2\sqrt{|f(x)-t|}}$ $\cdots$ (*)
(*)의 값의 존재 유무를 다음과 같이 표로 정리하자.

(*)의	(분자)$\to$0	(분자)$\to\beta$ ($\beta\neq 0$)	(분자)가 발산
(분모)$\to$0	수렴 ①		발산 ❷
	발산 ❶		
(분모)$\to\alpha$ ($\alpha\neq 0$)	수렴 ②	수렴 ③	발산 ❸

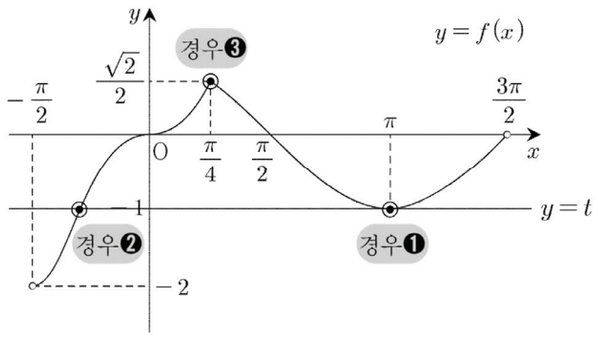
(단, '수렴' 은 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 미분가능한 경우이고, '발산' 은 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 미분가능하지 않은 경우이다.)
t의 값을 변화시키면서 $g(t)$의 값을 구해보자.
• (1) $t\leq -2$인 경우



(단, ◉는 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 미분가능하지 않은 경우이다.)
위의 그림에서 $g(t)=1$
• (2) $-2<t<-1$인 경우



(단, ◉는 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 미분가능하지 않은 경우이다.)
위의 그림에서 $g(t)=2$
• (3) $t=-1$인 경우



(단, ◉는 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 미분가능하지 않은 경우이다.)

위의 그림에서 $g(t)=3$

경우❶에 대한 증명은 다음과 같다.

$x\to\pi$일 때, $(*)=\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x+1}}$의 수렴, 발산 여부를 조사해야 한다.

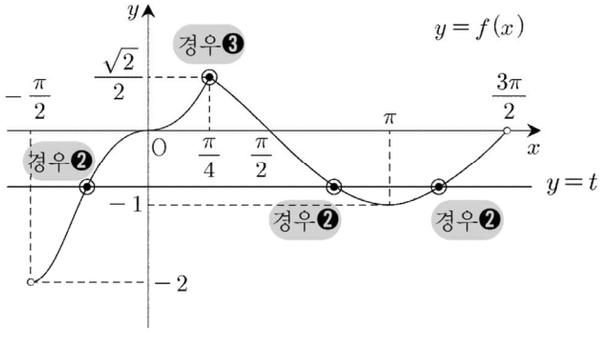
$x-\pi=t$로 두면

$t\to 0$일 때, $(*)=\dfrac{\sin t}{2\sqrt{1-\cos t}}\approx\dfrac{t}{2\times\dfrac{|t|}{\sqrt{2}}}$

$=\dfrac{t}{\sqrt{2}|t|}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & (t>0)\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & (t<0)\end{cases}$ 이므로 발산한다.

($\because$ $t\to 0$일 때, $\sin t\approx t$, $1-\cos t\approx\dfrac{1}{2}t^2$)

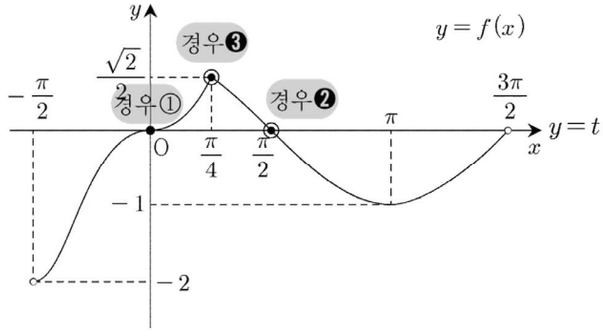
• (4) $-1<t<0$인 경우



(단, ◉는 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 미분가능하지 않은 경우이다.)

위의 그림에서 $g(t)=4$

• (5) $t=0$인 경우



(단, ◉는 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 미분가능하지 않은 경우이다.)

위의 그림에서 $g(t)=2$

경우①에 대한 증명은 다음과 같다.

$x\to 0$일 때, $(*)=\dfrac{(|2\sin^3 x|)'}{2\sqrt{|2\sin^3 x|}}$의 수렴, 발산 여부를 조사해야 한다.

$x\to 0-$일 때,

$(*)=\dfrac{-6\sin^2 x\cos x}{2\sqrt{-2\sin^3 x}}=\dfrac{-6\sin^2 x\cos x}{-2\sin x\sqrt{-2\sin x}}$

$=\dfrac{3\sin x\cos x}{\sqrt{-2\sin x}}=\dfrac{3\sqrt{-\sin x}\cos x}{\sqrt{2}}\to 0$

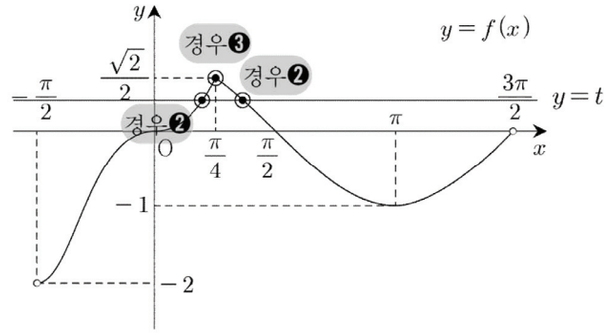
$x\to 0+$일 때,

$(*)=\dfrac{6\sin^2 x\cos x}{2\sqrt{2\sin^3 x}}=\dfrac{6\sin^2 x\cos x}{2\sin x\sqrt{2\sin x}}$

$=\dfrac{3\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin x}}=\dfrac{3\sqrt{\sin x}\cos x}{\sqrt{2}}\to 0$

즉, $x\to 0$일 때, $(*)\to 0$이다.

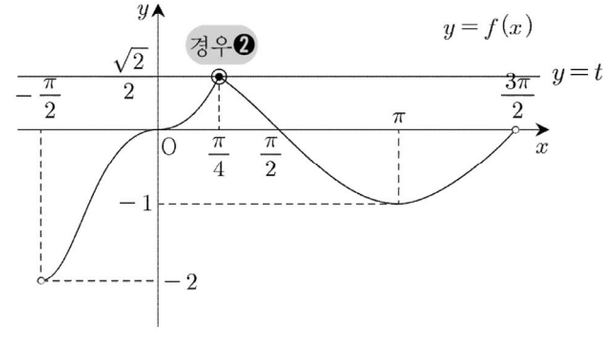
• (6) $0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 경우



(단, ◉는 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 미분가능하지 않은 경우이다.)

위의 그림에서 $g(t)=3$

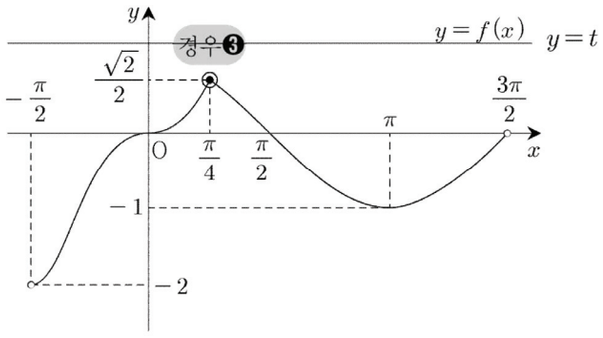
• (7) $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 경우



(단, ◉는 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 미분가능하지 않은 경우이다.)

위의 그림에서 $g(t)=1$

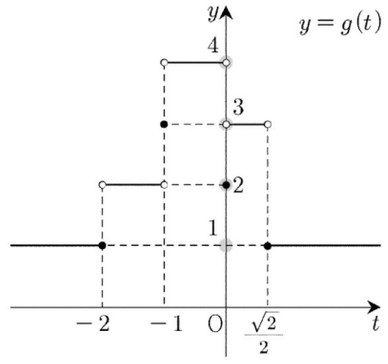
• (8) $t>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 경우



(단, ◉는 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 미분가능하지 않은 경우이다.)

위의 그림에서 $g(t)=1$

(1)~(8)에서 함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$는

$t=-2,\ -1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …㉠

에서 모두 불연속이다. 이때, 각각의 t의 값에 대한 좌우극한이 모두 다르다.

만약

$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+h(1)$

이면 ㉠의 각각의 t값에 대하여 $h(g(t))$의 극한값과 함숫값은 모두 $h(1)$이므로 함수 $h(g(t))$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

그런데 $a=1,\ b=2,\ c=3$이므로

$\therefore\ h(a+5)-h(b+3)+c$

$=h(6)-h(5)+3$

$=120-24+3=99$

답 ④

[풀이2] ★

$x\neq\dfrac{\pi}{4}$일 때, 함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}6\sin^2x\cos x & \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{4}\right)\\ -\sin x & \left(\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}f'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}f'(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않다.

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=0,\ x=\pi$

$x\neq\dfrac{\pi}{4}$일 때, 함수 $f(x)$의 이계도함수는

$$f''(x)=\begin{cases}6\sin x(3\cos^2x-1) & \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{4}\right)\\ -\cos x & \left(\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

방정식 $f''(x)=0$을 풀면

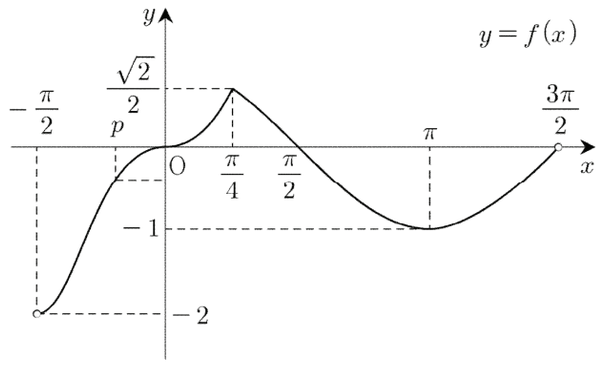
$x=p,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$

(단, $-\dfrac{\pi}{2}<p<0,\ \cos p=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{2}$	…	p	…	0	…
$f'(x)$		+	+	+	0	+
$f''(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗	변곡점	↱	변곡점	↗
$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	π	…	$\frac{3\pi}{2}$
	−	−	−	0	+	
	−	0	+	+	+	
극대, 변곡점	↘	변곡점	↳	극소	↗	

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)\neq t$이고, 함수 $|f(x)-t|$이 미분가능하면

조건 (나)에서 주어진 함수의 도함수는

$$(\sqrt{|f(x)-t|})'=\frac{(|f(x)-t|)'}{2\sqrt{|f(x)-t|}}$$

조건 (나)에서 주어진 함수의 $x=k$에서의 미분가능성을 표로 정리하자.

(단, $-\dfrac{\pi}{2}<k<\dfrac{3\pi}{2}$)

도함수의 분모	도함수의 분자	도함수	
(분모)=0 또는 (분모)≠0	함수 $\lvert f(x)-t\rvert$의 $x=k$에서의 미분가능성	함수 $\sqrt{\lvert f(x)-t\rvert}$의 $x=k$에서의 미분가능성	
$f(k)=t$	○	?	…경우1
	×	×	…경우2
$f(k)\neq t$	○	○	…경우3
	×	×	…경우4

(단, ○는 미분가능, ×는 미분불가능)

(경우2), (경우3), (경우4)에 대한 증명은 각각 [참고2], [참고3], [참고4]이다.

(경우1)은 다음의 두 경우로 구분할 수 있다.

▸ (1) $t=-1$, $k=\pi$인 경우

▸ (2) $t=0$, $k=0$인 경우

각각에 대하여 함수 $\sqrt{\lvert f(x)-t\rvert}$의 $x=k$에서의 미분가능성을 판단하자.

▸ (1) $t=-1$, $k=\pi$인 경우

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\pi+}\frac{\sqrt{\lvert\cos x+1\rvert}}{x-\pi}=\lim_{s\to0+}\frac{\sqrt{1-\cos s}}{s}$$

($x-\pi=s$로 두면 $x\to\pi+$일 때, $s\to0+$)

$$=\lim_{s\to0+}\sqrt{\frac{1-\cos s}{s^2}}=\lim_{s\to0+}\sqrt{\left(\frac{\sin s}{s}\right)^2\frac{1}{1+\cos s}}$$

$$=\sqrt{1^2\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{\sqrt{\lvert\cos x+1\rvert}}{x-\pi}=\lim_{s\to0-}\frac{\sqrt{1-\cos s}}{s}$$

($x-\pi=s$로 두면 $x\to\pi-$일 때, $s\to0-$)

$$=\lim_{s\to0-}-\sqrt{\frac{1-\cos s}{s^2}}=\lim_{s\to0-}-\sqrt{\left(\frac{\sin s}{s}\right)^2\frac{1}{1+\cos s}}$$

$$=-\sqrt{1^2\times\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to\pi+}\frac{\sqrt{\lvert\cos x+1\rvert}}{x-\pi}\neq\lim_{x\to\pi-}\frac{\sqrt{\lvert\cos x+1\rvert}}{x-\pi}$$

이므로 미분계수의 정의에 의하여 함수 $\sqrt{\lvert f(x)+1\rvert}$는 $x=\pi$에서 미분가능하지 않다.

▸ (2) $t=0$, $k=0$인 경우

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{\lvert2\sin^3x\rvert}}{x}=\lim_{x\to0+}\sqrt{2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\sin x}$$

$$=\sqrt{2\times1^2\times0}=0$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{\lvert2\sin^3x\rvert}}{x}=\lim_{x\to0-}-\sqrt{-2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\sin x}$$

$$=-\sqrt{-2\times1^2\times0}=0$$

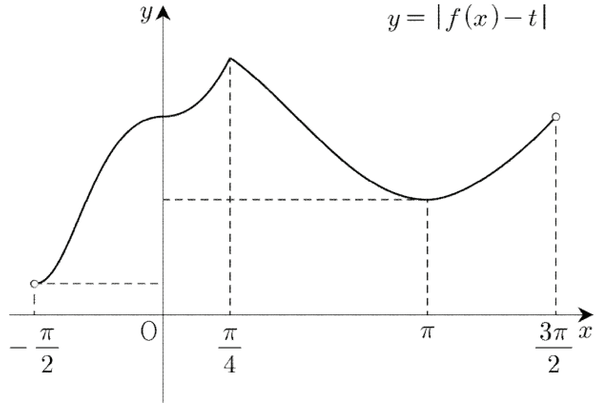
$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{\lvert2\sin^3x\rvert}}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{\lvert2\sin^3x\rvert}}{x}$$

이므로 미분계수의 정의에 의하여 함수 $\sqrt{\lvert f(x)\rvert}$는 $x=0$에서 미분가능하다.

이제 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 위치 관계에 따른 함수 $\sqrt{\lvert f(x)-t\rvert}$의 $x=k$에서의 미분가능성을 판단하자.

• $t\le-2$인 경우

함수 $\lvert f(x)-t\rvert$의 그래프는



함수 $\sqrt{\lvert f(x)-t\rvert}$는

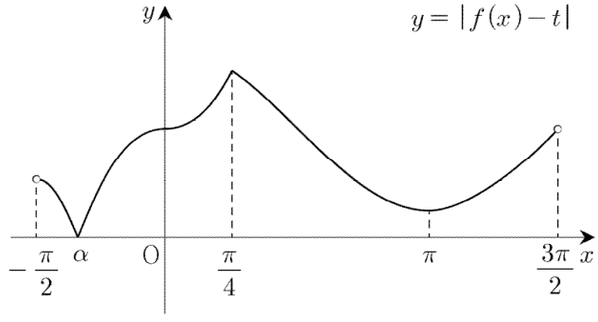
$x=\frac{\pi}{4}$(←경우4)

에서 미분가능하지 않다.

∴ $g(t)=1$

• $-2<t<-1$

함수 $\lvert f(x)-t\rvert$의 그래프는



(단, $f(\alpha)=t$이다.)

함수 $\sqrt{\lvert f(x)-t\rvert}$는

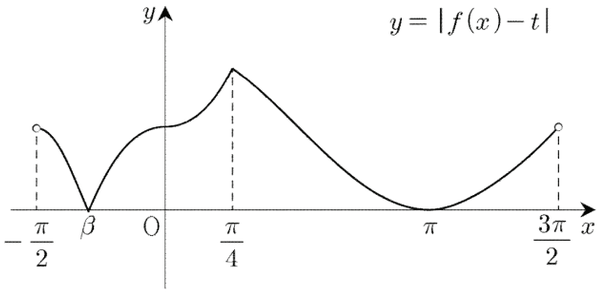
$x=\alpha$(←경우2), $x=\frac{\pi}{4}$(←경우4)

에서 미분가능하지 않다.

∴ $g(t)=2$

• $t=-1$인 경우

함수 $\lvert f(x)-t\rvert$의 그래프는



(단, $f(\beta)=t$이다.)

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는

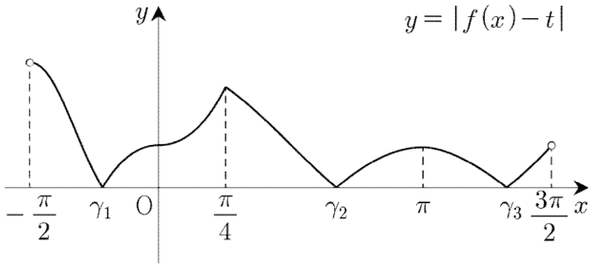
$x=\beta$(←경우2), $x=\frac{\pi}{4}$(←경우4), $x=\pi$(←경우1)

에서 미분가능하지 않다.

$\therefore\ g(t)=3$

• $-1<t<0$인 경우

함수 $|f(x)-t|$의 그래프는



(단, $i=1,\ 2,\ 3$에 대하여 $f(\gamma_i)=t$이다.)

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는

$x=\gamma_1$(←경우2), $x=\frac{\pi}{4}$(←경우4),

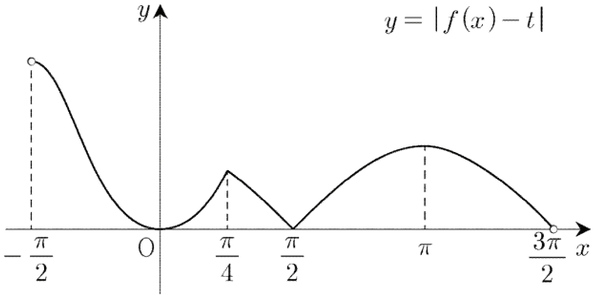
$x=\gamma_2$(←경우2), $x=\gamma_3$(←경우2)

에서 미분가능하지 않다.

$\therefore\ g(t)=4$

• $t=0$인 경우

함수 $|f(x)-t|$의 그래프는



함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는

$x=\frac{\pi}{4}$(←경우4), $x=\frac{\pi}{2}$(←경우2)

에서 미분가능하지 않다.

반면 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는

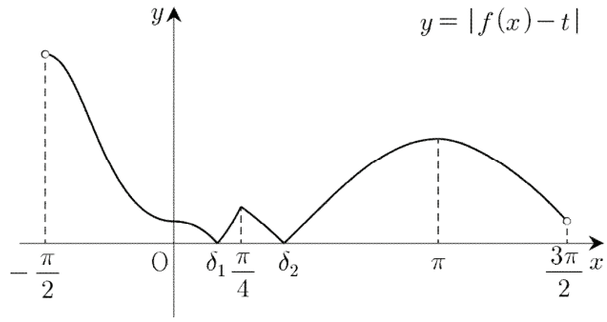
$x=0$(←경우1)

에서 미분가능하다.

$\therefore\ g(t)=2$

• $0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$인 경우

함수 $|f(x)-t|$의 그래프는



(단, $i=1,\ 2$에 대하여 $f(\delta_i)=t$이다.)

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는

$x=\delta_1$(←경우2), $x=\frac{\pi}{4}$(←경우4),

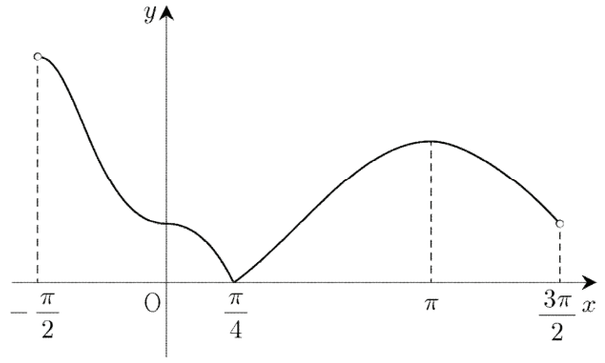
$x=\delta_2$(←경우2)

에서 미분가능하지 않다.

$\therefore\ g(t)=3$

• $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$인 경우

함수 $|f(x)-t|$의 그래프는



함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는

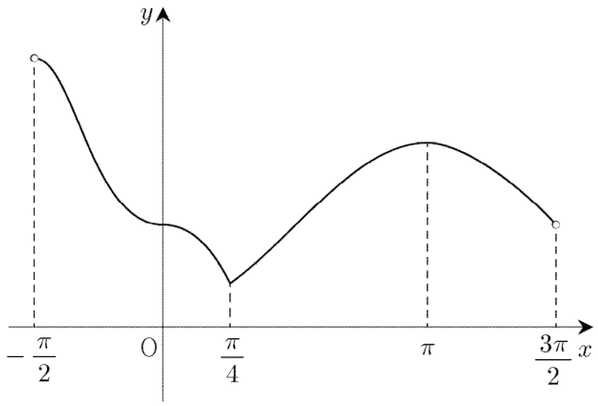
$x=\frac{\pi}{4}$(←경우2)

에서 미분가능하지 않다.

$\therefore\ g(t)=1$

• $t>\frac{\sqrt{2}}{2}$인 경우

함수 $|f(x)-t|$의 그래프는



함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는

$x=\frac{\pi}{4}$(←경우4)

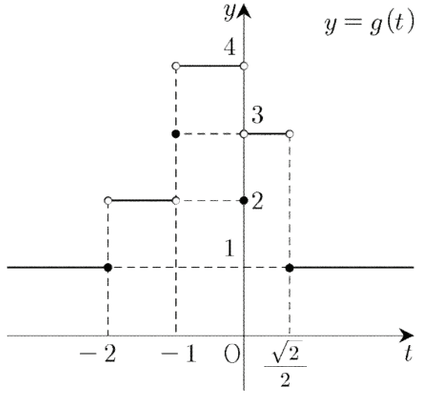
에서 미분가능하지 않다.

$\therefore\ g(t)=1$

이상에서 함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases}1 & \left(t\le -2,\ t\ge \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 2 & (-2<t<-1,\ t=0)\\ 3 & \left(t=-1,\ 0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 4 & (-1<t<0)\end{cases}$$

함수 $g(t)$의 그래프는



위의 그래프에서

$a=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1,\ b=g(0)=2,\ c=g(-1)=3$

함수 $h(g(t))$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $h(g(t))$는

$t=-2,\ t=-1,\ t=0,\ t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

에서 연속이어야 한다.

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{t\to -2+} h(g(t))=h(g(-2))$

즉, $h(2)=h(1)$

$\lim_{t\to -1+} h(g(t))=\lim_{t\to -1-} h(g(t))=h(g(-1))$

즉, $h(4)=h(2)=h(3)$

정리하면

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)$

$h(x)$는 사차함수이므로 인수정리에 의하여

$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+d$

(단, d는 상수이다.)

(←함수 $h(x)$의 방정식을 결정하였으므로

$t=0,\ t=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 함수 $h(g(t))$가 연속일 조건을 따져줄 필요는 없다.)

$\therefore\ h(a+5)-h(b+3)+c$

$=h(6)-h(5)+3$

$=5\times4\times3\times2+d-4\times3\times2\times1-d+3$

$=(5-1)\times4\times3\times2+3=96+3=99$

답 ④

[참고1]

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않음을 다음과 같이 보여도 좋다.

함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\frac{2\sin^3x-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$\times2\left(\sin^2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\times3=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

[참고2]

(경우2)에 대한 증명은 다음과 같다.

함수 $|f(x)-t|$의 좌미분계수와 우미분계수는 각각 존재하지만, 서로 같지 않다. 그리고 모두 0이 아니다.

$$\lim_{x\to k+}\frac{\sqrt{|f(x)-f(k)|}}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\sqrt{\left|\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\right|\times\frac{1}{x-k}}=\infty$$

($\because \lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$는 0이 아닌 상수에 수렴하지만,

$\lim_{x\to k+}\frac{1}{x-k}=\infty$이기 때문이다.)

$$\lim_{x\to k-}\frac{\sqrt{|f(x)-f(k)|}}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-}-\sqrt{\left|\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\right|\times\frac{1}{k-x}}=-\infty$$

($\because \lim_{x\to k-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$는 0이 아닌 상수에 수렴하지만,

$\lim_{x\to k-}\frac{1}{k-x}=\infty$이기 때문이다.)

미분계수의 정의에 의하여 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

[참고3]

(경우3)에 대한 증명은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to k}\frac{\sqrt{|f(x)-t|}-\sqrt{|f(k)-t|}}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k}\frac{|f(x)-t|-|f(k)-t|}{x-k}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{|f(x)-t|}+\sqrt{|f(k)-t|}}$$

=(함수 $|f(x)-t|$의 $x=k$에서의 미분계수)

$$\times\frac{1}{2\sqrt{|f(k)-t|}}$$

따라서 $f(k)\neq t$이고, 함수 $|f(x)-t|$이 $x=k$에서 미분가능하면 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하다.

[참고4]

(경우4)에 대한 증명은 다음과 같다.

함수 $|f(x)-t|$의 좌미분계수와 우미분계수는 각각 존재하지만, 서로 같지 않다.

함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to k+}\frac{\sqrt{|f(x)-t|}-\sqrt{|f(k)-t|}}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{|f(x)-t|-|f(k)-t|}{x-k}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{|f(x)-t|}+\sqrt{|f(k)-t|}}$$

=(함수 $|f(x)-t|$의 $x=k$에서의 우미분계수)

$$\times\frac{1}{2\sqrt{|f(k)-t|}}$$

마찬가지의 방법으로

$$\lim_{x\to k-}\frac{\sqrt{|f(x)-t|}-\sqrt{|f(k)-t|}}{x-k}$$

=(함수 $|f(x)-t|$의 $x=k$에서의 좌미분계수)

$$\times\frac{1}{2\sqrt{|f(k)-t|}}$$

만약 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=k$에서 미분가능하다고 하면 함수 $|f(x)-t|$은 $x=k$에서 미분가능하다. 이는 가정에 모순이므로 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $f(k)\neq t$이고, 함수 $|f(x)-t|$이 $x=k$에서 미분가능하지 않으면 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

[참고5]

$t=-1$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\pi$에서 미분가능하지 않음을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 방정식은

$$\sqrt{|f(x)-t|}=\sqrt{|f(x)+1|}$$

$$=\sqrt{\cos x+1}$$

두 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$, $\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$$(\sqrt{|f(x)-t|})'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x+1}}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\pi-}(\sqrt{f(x)-t})'=\lim_{x\to\pi-}\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x+1}}$$

$$=\lim_{t\to 0-}\frac{\sin t}{2\sqrt{1-\cos t}}=\lim_{t\to 0-}\frac{\frac{\sin t}{t}}{-2\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}}}$$

($x-\pi=t$로 두면 $x\to\pi-$일 때, $t\to 0-$)

$$=\frac{1}{-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\pi+}(\sqrt{f(x)-t})'=\lim_{x\to\pi+}\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x+1}}$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{2\sqrt{1-\cos t}} = \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{\sin t}{t}}{2\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}}}$$

$(x-\pi = t$로 두면 $x\to\pi+$일 때, $t\to 0+)$

$$= \frac{1}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$t=-1$일 때, $\lim_{x\to\pi-}(\sqrt{f(x)-t})' \neq \lim_{x\to\pi+}(\sqrt{f(x)-t})'$

이므로 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\pi$에서 미분가능하지 않다.

[참고6]

$t=0$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=0$에서 미분가능 함을 다음과 같이 보일 수도 있다.

구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 방정식은

$$\sqrt{|f(x)-t|} = \sqrt{|f(x)|}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{-2\sin^3 x} & \left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right) \\ \sqrt{2\sin^3 x} & \left(0 \le x < \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$$(\sqrt{|f(x)-t|})' = \frac{-6\sin^2 x\cos x}{2\sqrt{-2\sin^3 x}}$$

$$= \frac{3\sin x\cos x}{\sqrt{-2\sin x}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{-\sin x}\cos x$$

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$$(\sqrt{|f(x)-t|})' = \frac{6\sin^2 x\cos x}{2\sqrt{2\sin^3 x}}$$

$$= \frac{3\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin x}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin x}\cos x$$

$$\lim_{x\to 0-}(\sqrt{f(x)-t})' = 0 = \lim_{x\to 0+}(\sqrt{f(x)-t})'$$

따라서 $t=0$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=0$에서 미분가능하다.

[참고7]

$-2<t<-1$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않음을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 방정식은

$$\sqrt{|f(x)-t|} = \sqrt{|f(x)-f(\alpha)|}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2\sin^3\alpha - 2\sin^3 x} & \left(-\frac{\pi}{2} < x < \alpha\right) \\ \sqrt{2\sin^3 x - 2\sin^3\alpha} & \left(\alpha \le x < \frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{\cos x - 2\sin^3\alpha} & \left(\frac{\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \alpha\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$$(\sqrt{|f(x)-t|})' = (\sqrt{|f(x)-f(\alpha)|})'$$

$$= \frac{-3\sin^2 x\cos x}{\sqrt{2\sin^3\alpha - 2\sin^3 x}}$$

구간 $\left(\alpha,\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$$(\sqrt{|f(x)-t|})' = (\sqrt{|f(x)-f(\alpha)|})'$$

$$= \frac{3\sin^2 x\cos x}{\sqrt{2\sin^3 x - 2\sin^3\alpha}}$$

$$\lim_{x\to\alpha-}(\sqrt{|f(x)-t|})' = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\alpha+}(\sqrt{|f(x)-t|})' = \infty$$

이므로 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.

마찬가지의 방법으로 다음을 증명할 수 있다.

$t=-1$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

$-1<t<0$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\gamma_1$에서 미분가능하지 않다.

$0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\delta_1$에서 미분가능하지 않다.

[참고8]

$-1<t<0$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\gamma_2$에서 미분가능하지 않음을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 방정식은

$$\sqrt{|f(x)-t|} = \sqrt{|f(x)-f(\gamma_2)|}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\cos\gamma_2 - 2\sin^3 x} & \left(-\frac{\pi}{2} < x < \gamma_1\right) \\ \sqrt{2\sin^3 x - \cos\gamma_2} & \left(\gamma_1 \le x < \frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{\cos x - \cos\gamma_2} & \left(\frac{\pi}{4} \le x < \gamma_2\right) \\ \sqrt{\cos\gamma_2 - \cos x} & (\gamma_2 \le x < \gamma_3) \\ \sqrt{\cos x - \cos\gamma_2} & \left(\gamma_3 \le x < \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

구간 $\left(\frac{\pi}{4},\ \gamma_2\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$$(\sqrt{|f(x)-t|})' = (\sqrt{|f(x)-f(\gamma_2)|})'$$

$$= \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x - \cos\gamma_2}}$$

구간 $(\gamma_2,\ \gamma_3)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$(\sqrt{|f(x)-t|})'=(\sqrt{|f(x)-f(\gamma_2)|})'$

$=\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos\gamma_2-\cos x}}$

$\lim_{x\to\gamma_2-}(\sqrt{|f(x)-t|})'=-\infty$,

$\lim_{x\to\gamma_2+}(\sqrt{|f(x)-t|})'=\infty$

이므로 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\gamma_2$에서 미분가능하지 않다.

마찬가지의 방법으로 다음을 증명할 수 있다.

$-1<t<0$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\gamma_3$에서 미분가능하지 않다.

$t=0$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 미분가능하지 않다.

$0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\delta_2$에서 미분가능하지 않다.

[참고9]

$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$가 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않음을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 방정식은

$\sqrt{|f(x)-t|}=\sqrt{\left|f(x)-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|}$

$=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2\sin^3x} & \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{4}\right)\\ \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\cos x} & \left(\dfrac{\pi}{4}\le x<\dfrac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$

구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$(\sqrt{|f(x)-t|})'=\dfrac{-3\sin^2x\cos x}{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2\sin^3x}}$

구간 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$에서 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$의 도함수는

$(\sqrt{|f(x)-t|})'=\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\cos x}}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}(\sqrt{|f(x)-t|})'=-\infty$,

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}(\sqrt{|f(x)-t|})'=\infty$

이므로 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않다.

[참고10]

함수 $h(g(t))$가 $t=0$, $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 연속일 조건은 다음과 같다.

$\lim_{t\to0+}h(g(t))=\lim_{t\to0-}h(g(t))=h(g(0))$

즉, $h(3)=h(4)=h(2)$

$\lim_{t\to\frac{\sqrt{2}}{2}-}h(g(t))=h\left(g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

즉, $h(3)=h(1)$

[참고11]

합성함수의 미분가능성의 관점에서 이 문제를 재해석해보자.

$f_0(x)=|f(x)-t|$, $g(x)=\sqrt{x}$

(이때, $g(x)$는 문제에서 주어진 함수가 아니다.)

로 두면, 조건 (나)에서 주어진 함수는

$g(f_0(x))=\sqrt{|f(x)-t|}$

함수 $g(f_0(x))$의 $x=k$에서의 미분가능성을 조사하기 위하여 다음의 극한값의 존재 유무를 따지자.

$\lim_{x\to k}\dfrac{g(f_0(x))-g(f_0(k))}{x-k}$

$=\lim_{x\to k}\boxed{\dfrac{g(f_0(x))-g(f_0(k))}{f_0(x)-f_0(k)}\times\dfrac{f_0(x)-f_0(k)}{x-k}}$ …(*)

❶ 만약 $x\to k$일 때, 사각형 안의 함수의 극한값이 존재하면 함수 $g(f_0(x))$는 $x=k$에서 미분가능하다.

❷ 만약 $f_0'(k)$, $g'(f_0(k))$의 값이 존재하면

$(*)=\lim_{x\to k}\dfrac{g(f_0(x))-g(f_0(k))}{f_0(x)-f_0(k)}\cdot\lim_{x\to k}\dfrac{f_0(x)-f_0(k)}{x-k}$

$=g'(f_0(k))f_0'(k)$

이므로 함수 $g(f_0(x))$는 $x=k$에서 미분가능하다.

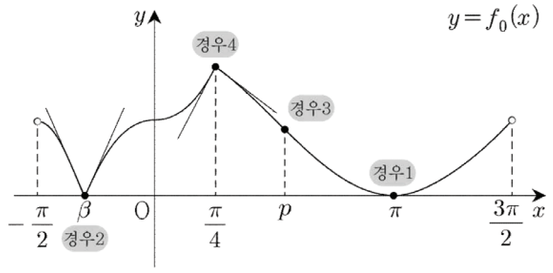
이제 다음의 네 가지의 경우를 생각하자.

	$f_0'(k)$	$g'(f_0(k))$
(경우1)	○	×
(경우2)	×	×
(경우3)	○	○
(경우4)	×	○

(단, ○는 존재한다, ×는 존재하지 않는다.)

• $t=-1$인 경우

함수 $f_0(x)$의 그래프는



▸ (경우1)

$x=\pi$에서 함수 $f_0(x)$의 좌미분계수와 우미분계수는 모두 0이다.

$x=f_0(\pi)(=0)$에서 함수 $g(x)$의 우미분계수는 무한대(∞)로 발산한다.

(*)은 $\infty\times 0$의 꼴이므로 계산하여 극한값의 존재 유무를 따져야한다.

그런데 계산해보면 극한값이 존재하지 않으므로

함수 $g(f_0(x))$은 $x=\pi$에서 미분가능하지 않다.

▸ (경우2)

$x=\beta$에서 함수 $f_0(x)$의 좌미분계수와 우미분계수는 절댓값이 같고 부호가 다르다. 이때, 전자는 음수(−)이고, 후자는 양수(+)이다.

$x=f_0(\beta)(=0)$에서 함수 $g(x)$의 우미분계수는 무한대(∞)로 발산한다.

(*)은

$x\to\beta+$일 때, ∞이고,

($\because$ ($f_0(x)$의 우미분계수)$\times\infty=\infty$)

$x\to\beta-$일 때, $-\infty$이므로

($\because$ ($f_0(x)$의 좌미분계수)$\times\infty=-\infty$)

함수 $g(f_0(x))$은 $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

▸ (경우3)

$x=p$에서 함수 $f_0(x)$의 미분계수가 존재하고, $x=f_0(p)$에서 함수 $g(x)$의 미분계수가 존재하므로

함수 $g(f_0(x))$은 $x=p$에서 미분가능하다.

▸ (경우4)

$x=\frac{\pi}{4}$에서 함수 $f_0(x)$의 좌미분계수와 우미분계수는 절댓값과 부호가 모두 다르다. 이때, 전자는 음수(+)이고, 후자는 양수(−)이다.

$x=f_0\left(\frac{\pi}{4}\right)$에서 함수 $g(x)$의 미분계수는 존재하고 양수(+)이다.

(*)은

$x\to\frac{\pi}{4}+$일 때, 음수(−)이고,

($\because$ ($f_0(x)$의 우미분계수)$\times g'\left(f_0\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)<0$)

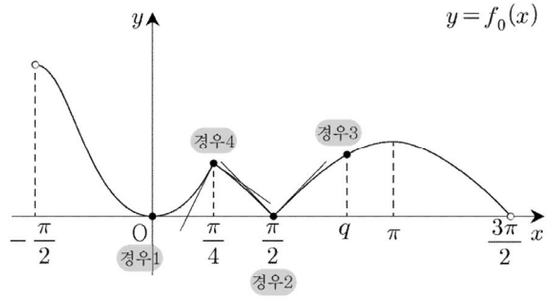
$x\to\frac{\pi}{4}-$일 때, 양수(+)이므로

($\because$ ($f_0(x)$의 좌미분계수)$\times g'\left(f_0\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)>0$)

함수 $g(f_0(x))$은 $x=\frac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않다.

• $t=0$인 경우

함수 $f_0(x)$의 그래프는



▸ (경우1)

$x=0$에서 함수 $f_0(x)$의 좌미분계수와 우미분계수는 모두 0이다.

$x=f_0(0)(=0)$에서 함수 $g(x)$의 우미분계수는 무한대(∞)로 발산한다.

(*)은 $\infty\times 0$의 꼴이므로 계산하여 극한값의 존재 유무를 따져야한다.

그런데 계산해보면 극한값이 존재하므로

함수 $g(f_0(x))$은 $x=0$에서 미분가능하다.

▸ (경우2)

$x=\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f_0(x)$의 좌미분계수와 우미분계수는 절댓값이 같고 부호가 다르다. 이때, 전자는 음수(−)이고, 후자는 양수(+)이다.

$x=f_0\left(\frac{\pi}{2}\right)(=0)$에서 함수 $g(x)$의 우미분계수는 무한대(∞)로 발산한다.

(*)은

$x\to\frac{\pi}{2}+$일 때, ∞이고,

($\because$ ($f_0(x)$의 우미분계수)$\times\infty=\infty$)

$x\to\frac{\pi}{2}-$일 때, $-\infty$이므로

($\because$ ($f_0(x)$의 좌미분계수)$\times\infty=-\infty$)

함수 $g(f_0(x))$은 $x=\frac{\pi}{2}$에서 미분가능하지 않다.

▸ (경우3)

$x=q$에서 함수 $f_0(x)$의 미분계수가 존재하고,

$x=f_0(q)$에서 함수 $g(x)$의 미분계수가 존재하므로

함수 $g(f_0(x))$은 $x=q$에서 미분가능하다.

▸ (경우4)

$x=\frac{\pi}{4}$에서 함수 $f_0(x)$의 좌미분계수와 우미분계수는 절댓값과 부호가 모두 다르다. 이때, 전자는 음수(+)이고, 후자는 양수(−)이다.

$x=f_0\left(\frac{\pi}{4}\right)$에서 함수 $g(x)$의 미분계수는 존재하고 양수(+)이다.

(*)은

$x\to\frac{\pi}{4}+$일 때, 음수(−)이고,

$(\because (f_0(x)$의 우미분계수$)\times g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)<0)$

$x\to\frac{\pi}{4}-$일 때, 양수(+)이므로

$(\because (f_0(x)$의 좌미분계수$)\times g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)>0)$

함수 $g(f_0(x))$은 $x=\frac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않다.

H225 | 답 ③

[풀이]

진수의 조건에 의하여

$p>0,\ 1-p>0$이므로 주어진 함수 S의 정의역은

$0<p<1$

함수 S의 도함수를 구하자.

$$-\frac{1}{k}\frac{dS}{dp}=\ln p+1-\ln(1-p)-1=\ln\frac{p}{1-p}$$

정리하면

$$\frac{dS}{dp}=k\ln\frac{1-p}{p}$$

$\frac{dS}{dp}=0$에서 $\frac{1-p}{p}=1$ 즉, $p=\frac{1}{2}$

함수 S의 이계도함수를 구하자.

$$-\frac{1}{k}\frac{d^2S}{dp^2}=\frac{1}{p(1-p)}$$

정리하면

$$\frac{d^2S}{dp^2}=\frac{k}{p^2-p}$$

$p=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{d^2S}{dp^2}=-4k<0$

함수 S는 $p=\frac{1}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

$$\lim_{p\to0+}p\ln p=\lim_{t\to-\infty}e^t t=\lim_{s\to\infty}-\frac{s}{e^s}=0$$

이므로

$\lim_{p\to0+}S=0$

마찬가지의 방법으로

$\lim_{p\to1-}S=0$

따라서 함수 S는 $p=\frac{1}{2}$에서 최댓값을 갖는다.

답 ③

H226 | 답 ④

[풀이1]

진수의 조건에서

$5-x>0,\ x+4>0$이므로 $-4<x<5$

함수 $f(x)$의 정의역은

$\{x\mid -4<x<5\}$ … (*)

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{1}{2\ln3}\times\frac{-1}{5-x}+\frac{1}{\ln3}\times\frac{1}{x+4}$$

$$=\frac{3x-6}{(2\ln3)(x-5)(x+4)}$$

$f'(x)=0$을 풀면 $x=2$

$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로

$f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

이때, 로그의 성질을 이용하여 극댓값을 구하면

$f(2)=\log_9108=\log_9(3^3\times4)$

$$=\frac{3}{2}\log_33+\log_94=\frac{3}{2}+\log_32$$

$\lim_{x\to-4+}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to5-}f(x)=-\infty$이므로

함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{3}{2}+\log_32$이다.

답 ④

[풀이2] 시험장

진수의 조건에서

$5-x>0,\ x+4>0$이므로 $-4<x<5$

함수 $f(x)$의 정의역은

$\{x\mid -4<x<5\}$ … (*)

로그의 성질에 의하여

$\log_9(5-x)+\log_3(x+4)=\log_9(5-x)(x+4)^2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\log_9(5-x)(x+4)^2$

정의역이 (*)인 함수 $g(x)$의 방정식을

$g(x)=(5-x)(x+4)^2$

$= \ln(x^2+1) - \frac{\ln 10}{2} - 4 - \frac{\ln 17}{8}$

x에 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3을 대입하면

$2\int_{-4}^{-3} f(t)dt - \int_{-4}^{-3} \{tf(t)\}'dt$

$= \ln 17 - \frac{\ln 10}{2} - 4 - \frac{\ln 17}{8}$

$2\int_{-3}^{-2} f(t)dt - \int_{-3}^{-2} \{tf(t)\}'dt$

$= \ln 10 - \frac{\ln 10}{2} - 4 - \frac{\ln 17}{8}$

$2\int_{-2}^{-1} f(t)dt - \int_{-2}^{-1} \{tf(t)\}'dt$

$= \ln 5 - \frac{\ln 10}{2} - 4 - \frac{\ln 17}{8}$

$2\int_{-1}^{0} f(t)dt - \int_{-1}^{0} \{tf(t)\}'dt$

$= \ln 2 - \frac{\ln 10}{2} - 4 - \frac{\ln 17}{8}$

$2\int_{0}^{1} f(t)dt - \int_{0}^{1} \{tf(t)\}'dt$

$= -\frac{\ln 10}{2} - 4 - \frac{\ln 17}{8}$

$2\int_{1}^{2} f(t)dt - \int_{1}^{2} \{tf(t)\}'dt$

$= \ln 2 - \frac{\ln 10}{2} - 4 - \frac{\ln 17}{8}$

$2\int_{2}^{3} f(t)dt - \int_{2}^{3} \{tf(t)\}'dt$

$= \ln 5 - \frac{\ln 10}{2} - 4 - \frac{\ln 17}{8}$

$2\int_{3}^{4} f(t)dt - \int_{3}^{4} \{tf(t)\}'dt$

$= \ln 10 - \frac{\ln 10}{2} - 4 - \frac{\ln 17}{8}$

변변히 더하면

$2\int_{-4}^{4} f(t)dt - \int_{-4}^{4} \{tf(t)\}'dt$

$= \ln 17 + 4\ln 10 - 4\ln 10 - 32 - \ln 17$

$= -32$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$\int_{-4}^{4} \{tf(t)\}'dt = [tf(t)]_{-4}^{4}$

$= 4f(4) + 4f(-4)$

이므로

$2\int_{-4}^{4} f(t)dt - 4\{f(4)+f(-4)\} = -32$

정리하면

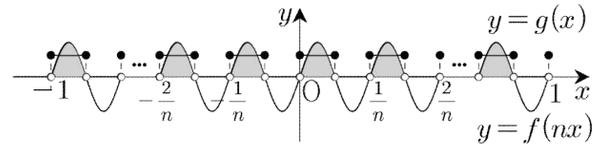
$\therefore\ 2\{f(4)+f(-4)\} - \int_{-4}^{4} f(x)dx = 16$

답 16

I036 | 답 ⑤

[풀이]

원점에 대하여 대칭이고, 주기가 $\frac{1}{n}\left(=\frac{2\pi}{2n\pi}\right)$인 함수 $f(nx)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



위의 그림처럼

$f(nx) \geq 0$인 x에 대하여 $g(x) = 1$,

$f(nx) < 0$인 x에 대하여 $g(x) = 0$

이면 문제에서 주어진 첫 번째 등식이 성립한다.

(만약 그렇지 않으면 문제에서 주어진 첫 번째 등식의 우변은 2보다 작다.)

계산해 보면 다음과 같다.

$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2n\int_{0}^{\frac{1}{2n}} \pi \sin 2\pi nx dx$

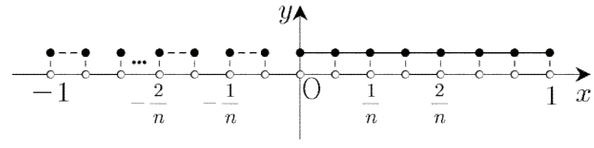
$= 2n\left[-\frac{1}{2n}\cos 2\pi nx\right]_{0}^{\frac{1}{2n}} = 2$

함수 $y = xh(x) = xf(nx) \times g(x)$에서

함수 $xf(nx)$는 y축에 대하여 대칭이고,

($\because$ (기함수)×(기함수)=(우함수))

구간 $[-1, 0)$에서 그려지는 함수 $g(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 구간 $[0, 1]$에서 상수함수 $y = 1$이 만들어지므로 (아래 그림)



(위의 그림처럼 함수 $y = xf(nx)$의 그래프의 개형은 그리지 않아도 좋다. 왜냐하면 정적분 값을 구할 때, 그래프의 개형이 반드시 필요한 것은 아니기 때문이다.)

정적분의 부분적분법에 의하여

$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \int_{0}^{1} xh(x)dx$

$= \int_{0}^{1} \pi x \sin 2n\pi x dx$

$$=\left[-\frac{1}{2n}x\cos 2n\pi x\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x dx$$

$$=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2n}=-\frac{1}{32}$$

$\therefore\ n=16$

답 ⑤

[참고]

함수 $y=xf(nx)$는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-b}^{-a}xf(nx)dx=\int_a^b xf(nx)dx$$

그러므로

$$\int_{-1}^{1}xh(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}xf(nx)dx$$

$$=\int_{-\frac{2n}{2n}}^{-\frac{2n-1}{2n}}xf(nx)dx+\int_{-\frac{2n-2}{2n}}^{-\frac{2n-3}{2n}}xf(nx)dx$$

$$+\cdots+\int_0^{\frac{1}{2n}}xf(nx)dx+\int_{\frac{2}{2n}}^{\frac{3}{2n}}xf(nx)dx$$

$$+\cdots+\int_{\frac{2n-2}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}}xf(nx)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2n}}xf(nx)dx+\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{2}{2n}}xf(nx)dx+\cdots+$$

$$\int_{\frac{2n-1}{2n}}^{\frac{2n}{2n}}xf(nx)dx$$

$$=\int_0^1 xf(nx)dx$$

I037 | 답 ⑤

[풀이1] ★

① (참)

주어진 등식에 $x=0$을 대입하여 정리하면

$\therefore\ f(0)+f(1)=1$

② (참)

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하자.

합성함수의 미분법에 의하여

$-f'(1-x)=-f'(x)$

정리하면

$f'(1-x)=f'(x)$

이 등식에 $x=1$을 대입하면

$\therefore\ f'(0)=f'(1)$

③ (참)

주어진 등식에서

$$\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1\{1-f(x)\}dx$$

정적분의 치환적분법에 의하여

$$(\text{좌변})=\int_0^1 f(1-x)dx$$

$$=-\int_1^0 f(t)dt=\int_0^1 f(x)dx$$

정적분의 성질에 의하여

$$(\text{우변})=\int_0^1\{1-f(x)\}dx$$

$$=[x]_0^1-\int_0^1 f(x)dx=1-\int_0^1 f(x)dx$$

$\int_0^1 f(x)dx=1-\int_0^1 f(x)dx$이므로

$$\therefore\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$$

④ (참)

주어진 등식에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1-f\left(\frac{1}{2}\right)$$

정리하면

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

⑤ (거짓)

(반례)

주어진 등식을 만족하는 함수 $f(x)=1-x$에 대하여

$f(0)=1\neq 0$

따라서 주어진 등식을 만족하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 항상 $f(0)=0$인 것은 아니다.

이상에서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

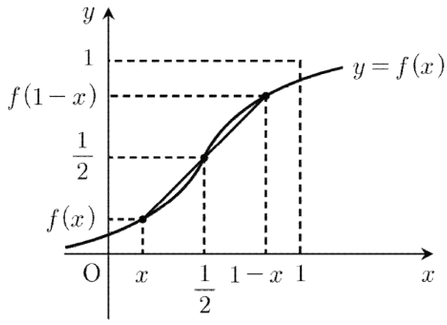
[풀이2] 시험장 ★

주어진 등식을 정리하면

$$\frac{f(x)+f(1-x)}{2}=\frac{1}{2}$$

내분점의 공식에 의하여 모든 실수 x에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(x,\ f(x))$, $(1-x,\ f(1-x))$의 중점은 항상 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다.

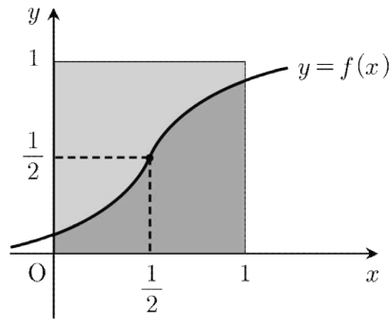
따라서 곡선 $y=f(x)$는 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.



위의 그림에서 ①, ④는 참이다.

하지만 곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이라고 해서 이 곡선이 반드시 원점을 지나는 것은 아니므로 ⑤는 거짓이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선과 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선은 서로 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로 이 두 접선의 기울기는 같다. 따라서 ②는 참이다.



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 합동이므로

$2\int_0^1 f(x)dx=1$에서 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$

즉, ③은 참이다.

이상에서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

I038 | 답 16

[풀이] ★

적분과 미분의 관계에 의하여

$g'(x)=f(x)$

조건 (가)에 의하여

미분가능한 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로

$g'(1)=f(1)=\ln 2-c=0$ 즉, $c=\ln 2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\ln(x^4+1)-\ln 2$

이제 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.

$f(-x)=f(x)$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$f(0)=-\ln 2$, $f(-1)=f(1)=0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 세 점

$(-1,\ 0)$, $(0,\ -\ln 2)$, $(1,\ 0)$을 지난다.

함수 $f(x)$의 도함수는

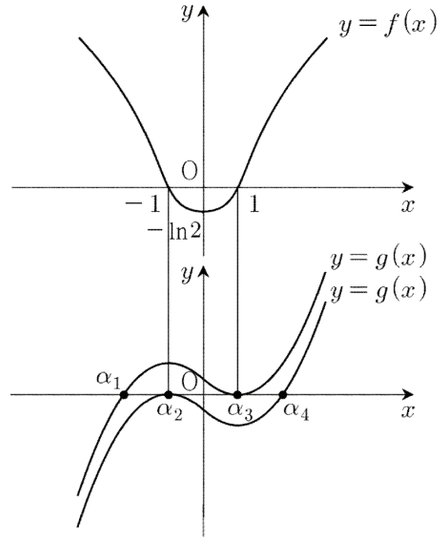
$$f'(x)=\frac{4x^3}{x^4+1}$$

$f'(x)=0$이면 $x=0$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)$는 $g(x)$의 도함수이므로 $f(x)$의 오목과 볼록, 변곡점에 대해서는 생각하지 않아도 좋다.

함수 $f(x)$의 그래프를 그리고, 그 아래에 'x축과 만나는 점의 개수가 2가 되도록' 함수 $g(x)$의 그래프를 그리자.



함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이다. (←[참고1])

문제에서 주어진 등식에서

$$g(a)=\int_a^a f(t)dt=0$$

이므로 함수 $g(x)$는 $(a,\ 0)$을 지난다.

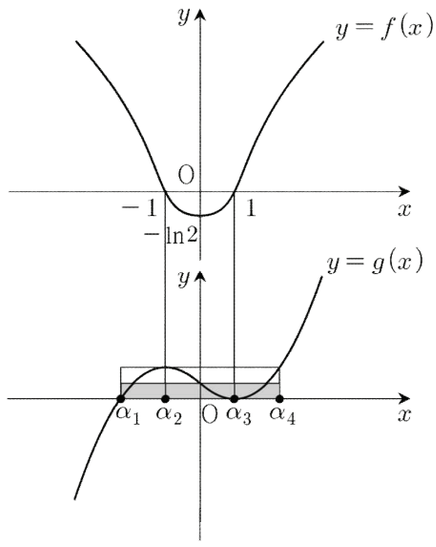
위의 그림에서 상수 a가 가질 수 있는 값은

α_1, $\alpha_2(=-1)$, $\alpha_3(=1)$, $\alpha_4(=-\alpha_1)$

이므로, $m=4$이다.

이제 문제에서 주어진 조건대로 α_1을 상수 a의 값으로 결정하자.

함수 $g(x)$의 그래프는



위의 그림에서 어두운 부분은 네 직선 $x=\alpha_1$, $x=\alpha_4$, $y=0$, $y=g(0)$으로 둘러싸인 직사각형이다.

함수 $g(x)$는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이므로

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx$$

$=$(어두운 직사각형의 넓이)

$=(\alpha_4-\alpha_1)g(0)=2\alpha_4 g(0)$ $\cdots$ ㉠

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$k\alpha_m\int_0^1 |f(x)|\,dx=k\alpha_4\int_0^1(-f(x))dx$$

$=k\alpha_4\left[-g(x)\right]_0^1=k\alpha_4(g(0)-g(1))$

$=k\alpha_4 g(0)$ $(\because\ g(1)=g(\alpha_3)=0)$ $\cdots$ ㉡

(이때, $\alpha_4 g(0)$은 이웃한 두 변의 길이가 각각 α_4, $g(0)$인 직사각형의 넓이이다.)

문제에서 주어진 조건에 의하여

㉠$=$㉡: $2\alpha_4 g(0)=k\alpha_4 g(0)$

$\alpha_4\neq 0$, $g(0)\neq 0$이므로 $k=2$이다.

로그의 정의에 의하여

$\therefore\ mk\times e^c=4\times 2\times e^{\ln 2}=16$

답 16

[참고1] ★

함수 $g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ g(0))$에 대칭임을 보이자.

정적분의 성질에 의하여

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_a^0 f(t)dt$$

함수 $h(x)=\int_0^x f(t)dt$의 그래프가 원점에 대하여 대칭임을 보이자.

$-X=t$로 두면 $-dX=dt$이고,

$t=0$일 때, $X=0$, $t=-x$일 때, $X=x$

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_0^{-x} f(t)dt=\int_0^x(-f(-X))dX$$

$$=-\int_0^x f(X)dX(\because\ f(x)\text{는 }y\text{축에 대하여 대칭})$$

$$=-\int_0^x f(t)dt$$

즉, $h(-x)=-h(x)$이므로 함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $h(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $\int_a^0 f(t)dt(=g(0))$만큼 평행이동시키면 함수 $g(x)$의 그래프와 일치하므로, 함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대칭이다.

[참고2] ★

함수 $g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ g(0))$에 대칭임을 보이자.

함수 $f(x)$에 대하여

$f(-x)=f(x)$

부정적분을 하면

$$\int f(-x)dx=\int f(x)dx+C(\text{단, }C\text{는 적분상수})$$

그런데 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로

$-g(-x)=g(x)+C$

$x=0$을 대입하여 정리하면 $C=-2g(0)$이므로

$-g(-x)=g(x)-2g(0)$

정리하면

$$\frac{g(x)+g(-x)}{2}=g(0)$$

함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이다.

[참고3]

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=2\alpha_4 g(0)$임을 아래와 같이 보일 수도 있다.

함수 $g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x)-g(0)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

정적분의 성질과 정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx$$

$$=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4}\{g(x)-g(0)+g(0)\}dx$$

$$=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4}\{g(x)-g(0)\}dx+\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(0)dx$$

$=0+(\alpha_4-\alpha_1)g(0)=2\alpha_4 g(0)(\because\ \alpha_1=-\alpha_4)$

[참고4]

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx = 2\alpha_4 g(0)$임을 아래와 같이 보일 수도 있다.

함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이므로

$\frac{g(x)+g(-x)}{2} = g(0)$ ($\because$ [참고2])

이제 아래와 같은 등식을 생각하자.

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} \frac{g(x)+g(-x)}{2}dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(0)dx$

정적분의 성질에 의하여

$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(-x)dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(0)dx$

$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx - \frac{1}{2}\int_{-\alpha_1}^{-\alpha_4} g(t)dt = (\alpha_4-\alpha_1)g(0)$

($\because$ 정적분의 치환적분법)

$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\alpha_4}^{-\alpha_1} g(t)dt = 2\alpha_4 g(0)$

($\because -\alpha_1 = \alpha_4$)

$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(t)dt = 2\alpha_4 g(0)$

($\because -\alpha_1 = \alpha_4,\ -\alpha_4 = \alpha_1$)

$\therefore\ \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx = 2\alpha_4 g(0)$

I039 | 답 115

[풀이]

조건 (가)에서

$x \to 0$일 때, (분모)$\to 0$, (분수식)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\sin(\pi f(0)) = 0$

이때, $f(0)$이 가질 수 있는 값은 정수이다.

미분계수의 정의에 의하여

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\times f(x)) - \sin(\pi\times f(0))}{x-0}$

$= \pi f'(0)\cos(\pi\times f(0)) = 0$

$f'(0) = 0$ ($\because\ \cos(\pi\times f(0)) \neq 0$)

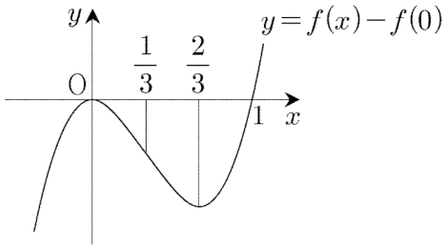
그런데 조건 (나)에 의하여

$f(1) = g(1) = g(0) = f(0)$이므로

($\because$ 함수 $g(x)$의 주기는 1이다.)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) - f(0) = 9x^2(x-1)$



삼차함수의 비율관계에 의하여

함수 $f(x)$는 $x = \frac{2}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

($f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 또는 $x = \frac{2}{3}$)

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은

$f(0)\times\left(f(0) - \frac{4}{3}\right) = 5$ ($\because$ (나))

풀면 $f(0) = 3$ ($\because f(0)$은 정수)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = 9x^2(x-1) + 3 = 9x^3 - 9x^2 + 3$

$(= g(x),\ 0 \le x \le 1)$

한편 정적분의 치환적분법에 의하여

모든 정수 n에 대하여

$\int_n^{n+1} xg(x)dx = \int_n^{n+1} xg(x-n)dx$

$= \int_0^1 (t+n)g(t)dt$

($x-n=t$로 두면 $dx=dt$이고,

$x=n$일 때 $t=0$, $x=n+1$일 때 $t=1$이다.)

이므로

$\therefore\ \int_0^5 xg(x)dx$

$= \int_0^1 xg(x)dx + \int_1^2 xg(x)dx + \int_2^3 xg(x)dx$

$+ \int_3^4 xg(x)dx + \int_4^5 xg(x)dx$

$= \int_0^1 xg(x)dx + \int_0^1 (x+1)g(x)dx$

$+ \int_0^1 (x+2)g(x)dx + \int_0^1 (x+3)g(x)dx$

$+ \int_0^1 (x+4)g(x)dx$

$= \int_0^1 (5x+10)g(x)dx$

$= \int_0^1 (5x+10)(9x^3 - 9x^2 + 3)dx$

$= \int_0^1 (45x^4 + 45x^3 - 90x^2 + 15x + 30)dx$

$$=\left[9x^5+\frac{45}{4}x^4-30x^3+\frac{15}{2}x^2+30x\right]_0^1$$

$$=\frac{111}{4}$$

$\therefore\ p+q=115$

답 115

I040 | 답 12

[풀이] ★

문제에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=t-f(x)$

함수 $F(x)$가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가지므로

$F'(\alpha)=0$, 즉 $f(\alpha)=t$에서 $f(g(t))=t$ … ㉠

정적분의 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하자.

$g(t)=x$로 두면 $g'(t)dt=dx$이고, … ㉡

$t=f(1)$일 때 $x=1$, $t=f(5)$일 때 $x=5$이다.

($\because$ ㉠에서 함수 f의 역함수는 g이므로,

㉡에서 $g(f(1))=1=x$, $g(f(5))=5=x$)

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(g(t))g'(t)=1$, 즉 $f'(x)g'(t)=1$에서

$$f'(x)=\frac{1}{g'(t)},\ f'(x)dx=dt(\because \text{㉡}) \quad \cdots \text{㉢}$$

$$\therefore\ \int_{f(1)}^{f(5)}\frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$$

$$=\int_1^5\frac{x}{1+e^x}f'(x)dx(\because g(t)=x,\ \text{㉢})$$

$$=\int_1^5 x dx(\because f'(x)=e^x+1)$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^5=12$$

답 12

I041 | 답 ⑤

[풀이] ★

우선 함수

$$y=\frac{(x^2-1)^2}{x^4+1} \quad \cdots (*)$$

의 그래프를 그리자.

모든 실수 x에 대하여

$$\frac{((-x)^2-1)^2}{(-x)^4+1}=\frac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$$

함수 (*)의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$y=0$이면 $x=1$ 또는 $x=-1$이므로

함수 (*)의 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$을 지난다.

$x=0$이면 $y=1$이므로

함수 (*)의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

(*)의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=2\ln|x^2-1|-\ln(x^4+1)$$

양변을 x에 대하여 미분하여 정리하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{4x(x^2+1)}{(x^2-1)(x^4+1)},\ y'=\frac{4x(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x^4+1)^2}$$

$y'=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

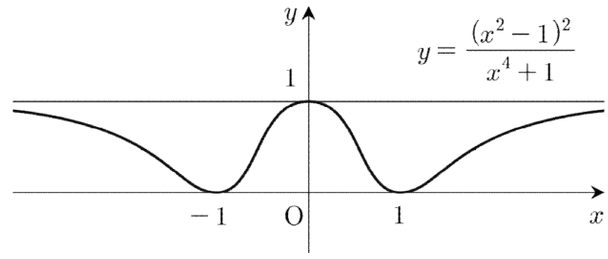
x	…	-1	…	0	…	1	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↗	1	↘	0	↗

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

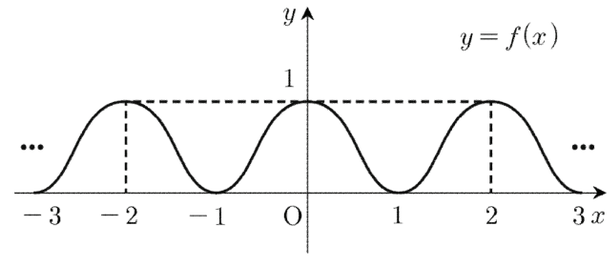
$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to-\infty}y=1$$

직선 $y=1$은 함수 (*)의 그래프의 점근선이다.

함수 (*)의 그래프를 그리면 다음과 같다.



조건 (가), (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는

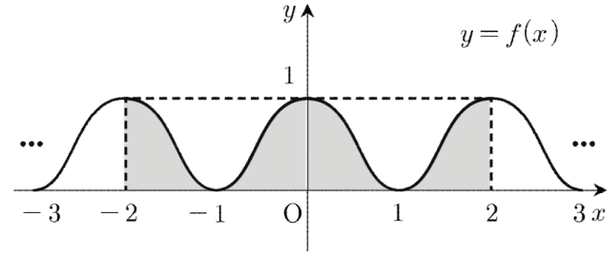


함수 $f(x)$의 그래프의 주기는 2이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 $x=n$(n은 정수)에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이며 미분가능하다.

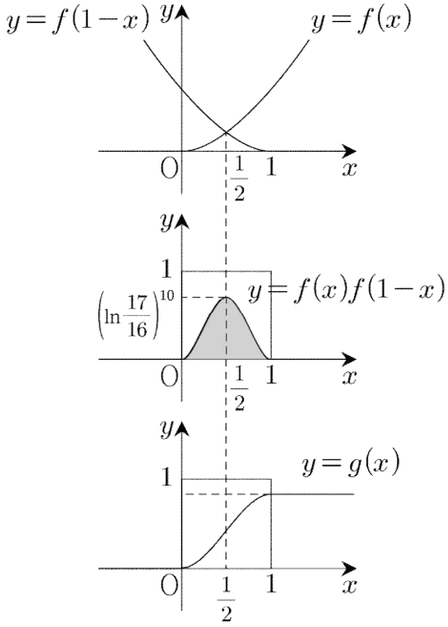
▸ ㄱ. (참)



정적분의 성질에 의하여

따라서 $g(a) \geq 1$인 실수 a는 존재하지 않는다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ②

[풀이2] 시험장 ★
네 함수
$f(x)$, $f(1-x)$, $y=f(x)f(1-x)$, $y=g(x)$
의 그래프는 아래 그림과 같다.

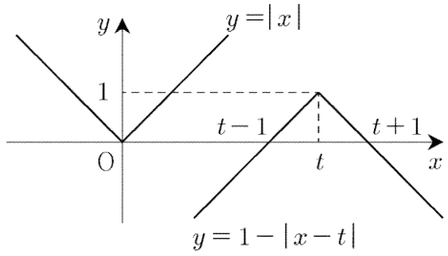


이제 그 이유를 알아보자.
• 함수 $y=\{\ln(1+x^4)\}^{10}$의 도함수는
$y'=10\{\ln(1+x^4)\}^9\dfrac{4x^3}{1+x^4}$
이고, $x>0$일 때, $y'>0$이므로
함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 증가한다.
• 함수 $y=f(x)f(1-x)$는 직선 $x=\dfrac{1}{2}$에 대하여 대칭이고, $x=\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값을 갖는다. 이때, 최댓값은 $\left(\ln\dfrac{17}{16}\right)^{10}$ (<1)이다.
▸ ㄱ. (참)
함수 $g(x)$의 그래프에서 이 명제가 참임을 알 수 있다.
▸ ㄴ. (참)
함수 $g'(x)=f(x)f(1-x)$가 직선 $x=\dfrac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로
함수 $g(x)$는 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$에 대하여 대칭이다.
증명은 다음과 같다.
$g'(x)=g'(1-x)$
$g(x)=-g(1-x)+C$ (단, C는 적분상수)
$x=0$을 대입하면
$g(0)=-g(1)+C,\ C=g(1)$
이를 다시 위의 등식에 대입하면
$\dfrac{g(x)+g(1-x)}{2}=\dfrac{g(1)}{2}$
곡선 $y=g(x)$는 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{g(1)}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.
그런데 이 점은 곡선 $y=g(x)$ 위에 있으므로
$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{g(1)}{2}$
$\therefore\ g(1)=2g\left(\dfrac{1}{2}\right)$
▸ ㄷ. (거짓)
$\left(\ln\dfrac{17}{16}\right)^{10}<1$이므로
$\left(\because \dfrac{17}{16}<e,\ e\approx 2.7\right)$
$\displaystyle\int_0^1 f(t)f(1-t)dt<1$=(한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이)
$x\geq 1$일 때, $g(x)=g(1)<1$
따라서 $g(a)\geq 1$인 실수 a는 존재하지 않는다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ②

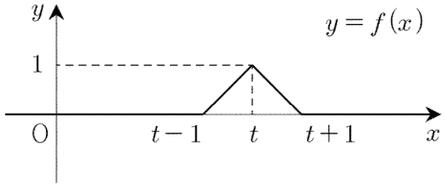
[참고]
함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가함을 다음과 같이 보여도 좋다. (합성함수의 관점)
x: $0 \Rightarrow \infty$ (증가)
$1+x^4$: $1 \Rightarrow \infty$ (증가)
$\ln(1+x^4)$: $0 \Rightarrow \infty$ (증가)
$\{\ln(1+x^4)\}^{10}$: $0 \Rightarrow \infty$ (증가)
따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가한다.

1054 | 답 21

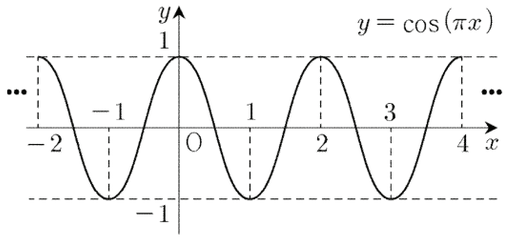
[풀이1] ★
• 함수 $g'(t)$의 방정식을 유도하자.
함수 $y=|x|$의 그래프를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동시키고, x축에 대하여 대칭이동시킨 후, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 함수 $y=1-|x-t|$의 그래프와 일치한다.



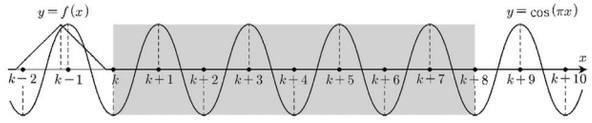
구간 $[t-1,\ t+1]$에서 $f(x)=1-|x-t|$이고,
구간 $(-\infty,\ t-1),\ (t+1,\ \infty)$에서 $f(x)=0$
이므로 함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $y=\cos(\pi x)$의 그래프는
(단, 함수 $y=\cos(\pi x)$의 주기는 2이고,
최댓값과 최솟값은 각각 1, −1이다.)



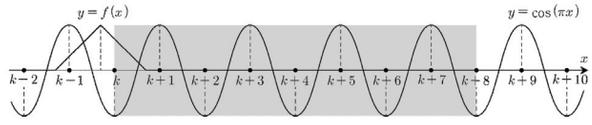
• (1) $t\le k-1$인 경우



구간 $[k,\ k+8]$에서 $f(x)=0$이므로

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx=\int_k^{k+8} 0dx=0$$

• (2) $k-1<t<k$인 경우



구간 $[k,\ t+1]$에서 $f(x)=-x+t+1$,
구간 $[t+1,\ k+8]$에서 $f(x)=0$이므로

$$g(t)=\int_k^{t+1}(-x+t+1)\cos(\pi x)dx+\int_{t+1}^{k+8}0dx$$

$$=\int_k^{t+1}(-x+1)\cos(\pi x)dx+t\int_k^{t+1}\cos(\pi x)dx$$

적분과 미분의 관계에 의하여

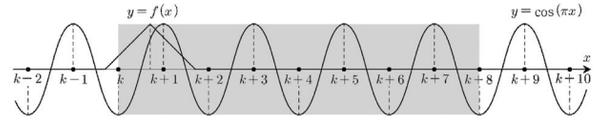
$$g'(t)=t\cos(\pi t)+\int_k^{t+1}\cos(\pi x)dx-t\cos(\pi t)$$

$$=\int_k^{t+1}\cos(\pi x)dx=\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_k^{t+1}$$

$$=-\frac{1}{\pi}(\sin(\pi t)+\sin(\pi k))=-\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)$$

($\because k$는 홀수이므로 $\sin(\pi k)=0$)

• (3) $k\le t<k+1$인 경우



구간 $[k,\ t]$에서 $f(x)=x-t+1$,
구간 $[t,\ t+1]$에서 $f(x)=-x+t+1$,
구간 $[t+1,\ k+8]$에서 $f(x)=0$이므로

$$g(t)=\int_k^{t}(x-t+1)\cos(\pi x)dx$$

$$+\int_t^{t+1}(-x+t+1)\cos(\pi x)dx+\int_{t+1}^{k+8}0dx$$

$$=\int_k^{t}(x+1)\cos(\pi x)dx-t\int_k^{t}\cos(\pi x)dx$$

$$+\int_t^{t+1}(-x+1)\cos(\pi x)dx+t\int_t^{t+1}\cos(\pi x)dx$$

적분과 미분의 관계에 의하여

$$g'(t)=(t+1)\cos(\pi t)-\int_k^{t}\cos(\pi x)dx-t\cos(\pi t)$$

$$+t\cos(\pi t)-(1-t)\cos(\pi t)+\int_t^{t+1}\cos(\pi x)dx$$

$$-2t\cos(\pi t)$$

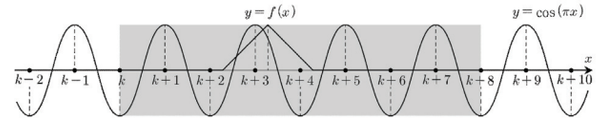
$$=-\int_k^{t}\cos(\pi x)dx+\int_t^{t+1}\cos(\pi x)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_k^{t}+\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_t^{t+1}$$

$$=-\frac{3}{\pi}\sin(\pi t)$$

($\because k$는 홀수이므로 $\sin(\pi k)=0$)

• (4) $k+1\le t\le k+7$인 경우



구간 $[k,\ t-1],\ [t+1,\ k+8]$에서 $f(x)=0$,
구간 $[t-1,\ t]$에서 $f(x)=x-t+1$,
구간 $[t,\ t+1]$에서 $f(x)=-x+t+1$이므로

$$g(t)=\int_k^{t-1}0dx+\int_{t-1}^{t}(x-t+1)\cos(\pi x)dx$$

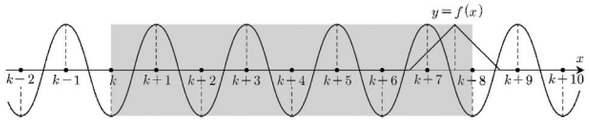
$$+\int_t^{t+1}(-x+t+1)\cos(\pi x)dx+\int_{t+1}^{k+8}0dx$$

$$=\int_{t-1}^{t}(x+1)\cos(\pi x)dx-t\int_{t-1}^{t}\cos(\pi x)dx$$
$$+\int_{t}^{t+1}(-x+1)\cos(\pi x)dx+t\int_{t}^{t+1}\cos(\pi x)dx$$

적분과 미분의 관계에 의하여

$$g'(t)=(2t+1)\cos(\pi t)-\int_{t-1}^{t}\cos(\pi x)dx-2t\cos(\pi t)$$
$$(2t-1)\cos(\pi t)+\int_{t}^{t+1}\cos(\pi x)dx-2t\cos(\pi t)$$
$$=-\int_{t-1}^{t}\cos(\pi x)dx+\int_{t}^{t+1}\cos(\pi x)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{t-1}^{t}+\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{t}^{t+1}$$
$$=-\frac{4}{\pi}\sin(\pi t)$$

• (5) $k+7<t\le k+8$인 경우



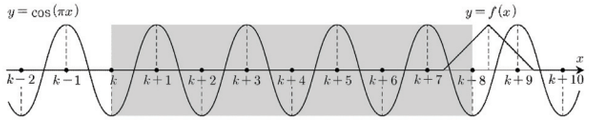
구간 $[k,\ t-1]$에서 $f(x)=0$,
구간 $[t-1,\ t]$에서 $f(x)=x-t+1$,
구간 $[t,\ k+8]$에서 $f(x)=-x+t+1$이므로

$$g(t)=\int_{k}^{t-1}0dx+\int_{t-1}^{t}(x-t+1)\cos(\pi x)dx$$
$$+\int_{t}^{k+8}(-x+t+1)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{t-1}^{t}(x+1)\cos(\pi x)dx-t\int_{t-1}^{t}\cos(\pi x)dx$$
$$+\int_{t}^{k+8}(-x+1)\cos(\pi x)dx+t\int_{t}^{k+8}\cos(\pi x)dx$$

적분과 미분의 관계에 의하여

$$g'(t)=(2t+1)\cos(\pi t)-\int_{t-1}^{t}\cos(\pi x)dx-2t\cos(\pi t)$$
$$+(t-1)\cos(\pi t)+\int_{t}^{k+8}\cos(\pi x)dx-t\cos(\pi t)$$
$$=-\int_{t-1}^{t}\cos(\pi x)dx+\int_{t}^{k+8}\cos(\pi x)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{t-1}^{t}+\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{t}^{k+8}$$
$$=-\frac{3}{\pi}\sin(\pi t)$$

• (6) $k+8<t<k+9$인 경우



구간 $[k,\ t-1]$에서 $f(x)=0$,
구간 $[t-1,\ k+8]$에서 $f(x)=x-t+1$이므로

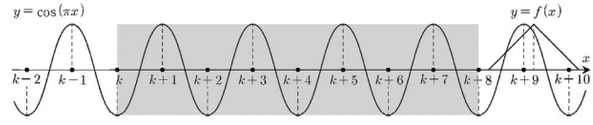
$$g(t)=\int_{k}^{t-1}0dx+\int_{t-1}^{k+8}(x-t+1)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{t-1}^{k+8}(x+1)\cos(\pi x)dx-t\int_{t-1}^{k+8}\cos(\pi x)dx$$

적분과 미분의 관계에 의하여

$$g'(t)=t\cos(\pi t)-\int_{t-1}^{k+8}\cos(\pi x)dx-t\cos(\pi t)$$
$$=-\int_{t-1}^{k+8}\cos(\pi x)dx=-\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{t-1}^{k+8}$$
$$=-\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)$$

($\because k$는 홀수이므로 $\sin(\pi k)=0$)

• (7) $t\ge k+9$인 경우



구간 $[k,\ k+8]$에서 $f(x)=0$이므로

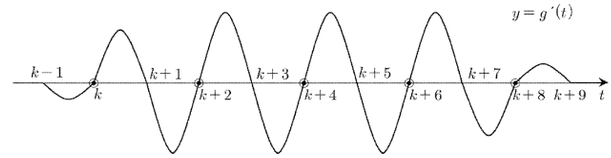
$$g(t)=\int_{k}^{k+8}f(x)\cos(\pi x)dx=\int_{k}^{k+8}0dx=0$$

(1)~(7)에서 함수 $g'(t)$의 방정식은

$$g'(t)=\begin{cases}0 & (t\le k-1)\\ -\frac{1}{\pi}\sin(\pi t) & (k-1<t<k)\\ -\frac{3}{\pi}\sin(\pi t) & (k\le t<k+1)\\ -\frac{4}{\pi}\sin(\pi t) & (k+1\le t\le k+7)\\ -\frac{3}{\pi}\sin(\pi t) & (k+7<t\le k+8)\\ -\frac{1}{\pi}\sin(\pi t) & (k+8<t<k+9)\\ 0 & (t\ge k+9)\end{cases}$$

• α, m, k의 값을 구하자.

함수 $g'(t)$의 그래프는



(이때, 함수 $g'(t)$의 그래프는 점 $(k+4,\ 0)$에 대하여 대칭이다.)

$t=k$, $t=k+2$, $t=k+4$, $t=k+6$, $t=k+8$

의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 음(−)에서 양(−)으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는

$t=k$, $t=k+2$, $t=k+4$, $t=k+6$, $t=k+8$

에서 극솟값을 갖는다. 따라서 $m=5$이고,

$\alpha_1 = k,\ \alpha_2 = k+2,\ \alpha_3 = k+4,$

$\alpha_4 = k+6,\ \alpha_5 = k+8$

등차수열의 합의 공식에 의하여

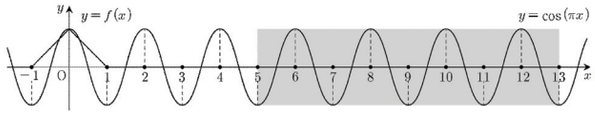
$$\sum_{i=1}^{5}\alpha_i = \frac{k+k+8}{2}\times 5 = 45 \text{ 풀면 } k=5$$

• $g(\alpha)$의 값을 구하자.

함수 $g'(t)$의 방정식을 다시 쓰면

$$g'(t)=\begin{cases}0 & (t\le 4)\\ -\frac{1}{\pi}\sin(\pi t) & (4<t<5)\\ -\frac{3}{\pi}\sin(\pi t) & (5\le t<6)\\ -\frac{4}{\pi}\sin(\pi t) & (6\le t\le 12)\\ -\frac{3}{\pi}\sin(\pi t) & (12<t\le 13)\\ -\frac{1}{\pi}\sin(\pi t) & (13<t<14)\\ 0 & (t\ge 14)\end{cases}$$

예를 들어 $t=0$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림에서 $g(0)=0$임을 알 수 있다. 마찬가지의 이유로 $t\le 4$ 또는 $t\ge 14$일 때,

구간 $[5,\ 13]$에서 $f(x)=0$이므로

$$g(t)=\int_5^{13} f(x)\cos(\pi x)dx=\int_5^{13}0dx=0$$

부정적분을 하면

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t\le 4)\\ \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t)+C_1 & (4<t<5)\\ \frac{3}{\pi^2}\cos(\pi t)+C_2 & (5\le t<6)\\ \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t)+C_3 & (6\le t\le 12)\\ \frac{3}{\pi^2}\cos(\pi t)+C_4 & (12<t\le 13)\\ \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t)+C_5 & (13<t<14)\\ 0 & (t\ge 14)\end{cases}$$

(단, $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5$은 적분상수)

함수 $g(t)$는 연속함수이므로

$$\lim_{t\to 4+} g(t)=\frac{1}{\pi^2}+C_1=0=g(4)$$

즉, $C_1=-\frac{1}{\pi^2}$

마찬가지의 방법으로

$$C_2=\frac{1}{\pi^2},\ C_3=0,\ C_4=\frac{1}{\pi^2},\ C_5=-\frac{1}{\pi^2}$$

함수 $g(t)$의 방정식을 다시 쓰면

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t\le 4)\\ \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t)-\frac{1}{\pi^2} & (4<t<5)\\ \frac{3}{\pi^2}\cos(\pi t)+\frac{1}{\pi^2} & (5\le t<6)\\ \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t) & (6\le t\le 12)\\ \frac{3}{\pi^2}\cos(\pi t)+\frac{1}{\pi^2} & (12<t\le 13)\\ \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t)-\frac{1}{\pi^2} & (13<t<14)\\ 0 & (t\ge 14)\end{cases}$$

$g(\alpha)$의 값을 쓰면

$$g(\alpha_1)=g(5)=-\frac{2}{\pi^2},$$

$$g(\alpha_2)=g(7)=-\frac{4}{\pi^2},$$

$$g(\alpha_3)=g(9)=-\frac{4}{\pi^2},$$

$$g(\alpha_4)=g(11)=-\frac{4}{\pi^2},$$

$$g(\alpha_5)=g(13)=-\frac{2}{\pi^2}$$

이므로

$$\therefore\ k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)=5-\pi^2\left(-\frac{2+4+4+4+2}{\pi^2}\right)=21$$

답 21

[참고1] ★

함수 $g(t)$의 그래프가 직선 $t=k+4$에 대하여 대칭임을 보이자.

함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동시키면 함수 $f_0(x)$의 그래프와 일치한다고 하자.

$$f_0(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\le 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

함수 $y=\cos(\pi x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동시키면 함수

$y=\cos(\pi x+\pi t)$

의 그래프와 일치한다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$g(t)=\int_{k-t}^{k-t+8} f_0(x)\cos(\pi x+\pi t)dx \qquad \cdots ㉠$$

t의 자리에 $2k+8-t$를 대입하면

$$g(2k+8-t)=\int_{-k+t-8}^{-k+t} f_0(x)\cos(\pi x-\pi t)dx$$

$$=\int_{-k+t-8}^{-k+t} f_0(-x)\cos(\pi x-\pi t)dx$$

(∵ 함수 $f_0(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
모든 실수 x에 대하여 $f_0(x)=-f_0(x)$이 성립한다.)
$x=-X$로 놓으면 $dx=-dX$,
$x=-k+t-8$일 때 $X=k-t+8$,
$x=-k+t$일 때 $X=k-t$이므로
정적분의 치환적분법에 의하여

$$g(2k+8-t)=-\int_{k-t+8}^{k-t} f_0(X)\cos(\pi X+\pi t)dX$$

$$=\int_{k-t}^{k-t+8} f_0(x)\cos(\pi x+\pi t)dx \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 모든 실수 t에 대하여
$g(t)=g(2k+8-t)$
따라서 함수 $g(t)$의 그래프는 직선 $t=k+4$에 대하여 대칭이다.
(∵ 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.
$\Leftrightarrow f(x)=f(2a-x)$)

[참고2] ★
함수 $g(t)$의 그래프가 직선 $t=k+4$에 대하여 대칭이므로
모든 실수 t에 대하여
$g(t)=g(2k+8-t)$
합성함수의 미분법에 의하여
$g'(t)=-g'(2k+8-t)$
정리하면

$$\frac{g'(t)+g'(2k+8-t)}{2}=0$$

모든 실수 t에 대하여 위의 등식이 성립하므로, 함수 $g'(t)$의 그래프는 점 $(k+4,\ 0)$에 대하여 대칭이다.
(∵ 곡선 $y=f(x)$가 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)+f(2a-x)}{2}=b)$$

따라서 [풀이1]에서 (5), (6), (7)의 계산 과정을 생략할 수 있다.

[참고3]
함수 $g'(t)$의 방정식을 유도한 후, 함수 $g(t)$의 그래프가 직선 $t=9$에 대하여 대칭임을 보이자.
함수 $g'(t)$의 그래프는 점 $(9,\ 0)$에 대하여 대칭이므로

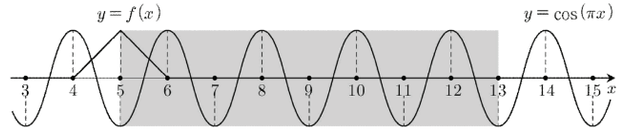
$$\frac{g'(t)+g'(18-t)}{2}=0 \text{ 즉, } g'(t)=-g'(18-t)$$

(∵ 곡선 $y=f(x)$가 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)+f(2a-x)}{2}=b)$$

부정적분을 하면
$g(t)=g(18-t)+C$
(단, C는 적분상수)
그런데 $g(0)=g(18)=0$이므로 $C=0$이다.
모든 실수 t에 대하여
$g(t)=g(18-t)$
이 성립하므로 함수 $g(t)$의 그래프는 직선 $t=9$에 대하여 대칭이다.
(∵ 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.
$\Leftrightarrow f(x)=f(2a-x)$)

[참고4]
$g(\alpha)$의 값을 다음과 같은 방법으로 구할 수도 있다.



정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$g(\alpha_1)=g(5)=\int_5^{13} f(x)\cos(\pi x)dx$$

$$=\int_5^6(-x+6)\cos(\pi x)dx+\int_6^{13}0dx$$

$$=-\int_1^0 X\cos(\pi X)dX$$

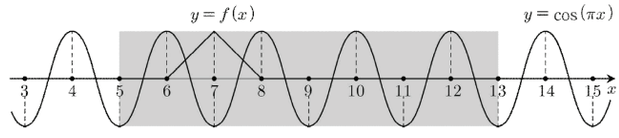
(∵ 정적분의 치환적분법: $-x+6=X$로 놓으면
$-dx=dX$, $x=5$일 때 $X=1$, $x=6$일 때 $X=0$)

$$=\int_0^1 X\cos(\pi X)dX$$

$$=\left[X\frac{1}{\pi}\sin(\pi X)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{\pi}\sin(\pi X)dX$$

(∵ 정적분의 부분적분법)

$$=-\left[-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi X)\right]_0^1=-\frac{2}{\pi^2}(<0) \qquad \cdots ㉢$$



정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$g(\alpha_2)=g(7)=\int_5^{13} f(x)\cos(\pi x)dx$$

$$=\int_5^6 0dx+\int_6^7(x-6)\cos(\pi x)dx$$

$$+\int_7^8(-x+8)\cos(\pi x)dx+\int_8^{13}0dx$$

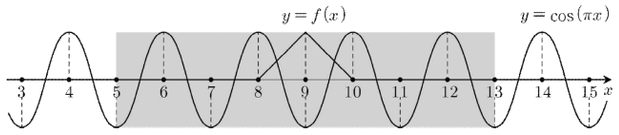
$$=\int_0^1 X\cos(\pi X)dX-\int_1^0 X\cos(\pi X)dX$$

(∵ 정적분의 치환적분법:
〈전자〉 $x-6=X$로 놓으면
$dx=dX$, $x=6$일 때 $X=0$, $x=7$일 때 $X=1$

〈후자〉 $-x+8=X$로 놓으면

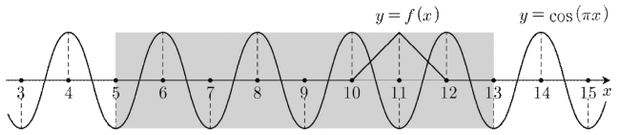
$-dx=dX$, $x=7$일 때 $X=1$, $x=8$일 때 $X=0$)

$$=2\int_0^1 X\cos(\pi X)dX=-\frac{4}{\pi^2}(<0)(\because ㉢)$$



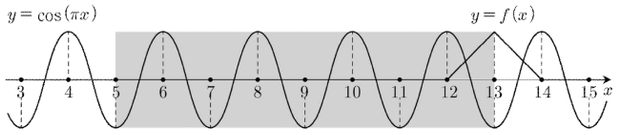
$g(\alpha_2)$의 값을 구했던 계산과정을 그대로 적용하면

$$g(\alpha_3)=-\frac{4}{\pi^2}(<0)$$



$g(\alpha_2)$의 값을 구했던 계산과정을 그대로 적용하면

$$g(\alpha_4)=-\frac{4}{\pi^2}(<0)$$



정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$g(\alpha_5)=g(13)=\int_5^{13} f(x)\cos(\pi x)dx$$

$$=\int_5^{12} 0dx+\int_{12}^{13}(x-12)\cos(\pi x)dx$$

$$=\int_0^1 X\cos(\pi X)dX$$

($\because$ 정적분의 치환적분법: $x-12=X$로 놓으면

$dx=dX$, $x=12$일 때 $X=0$, $x=13$일 때 $X=1$)

$$=-\frac{2}{\pi^2}(<0)\ (\because ㉢)$$

[풀이2] 교육과정 외 (불연속 함수의 정적분) 시험장

다음과 같은 방법으로 푸는 것이 실전에서는 현실적일 수 있다.

정적분의 부분적분법에 의하여

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}f(x)\sin(\pi x)\right]_k^{k+8}-\int_k^{k+8}\frac{1}{\pi}f'(x)\sin(\pi x)dx$$

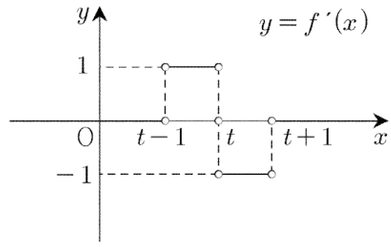
$$=-\frac{1}{\pi}\int_k^{k+8} f'(x)\sin(\pi x)dx$$

위의 등식에서

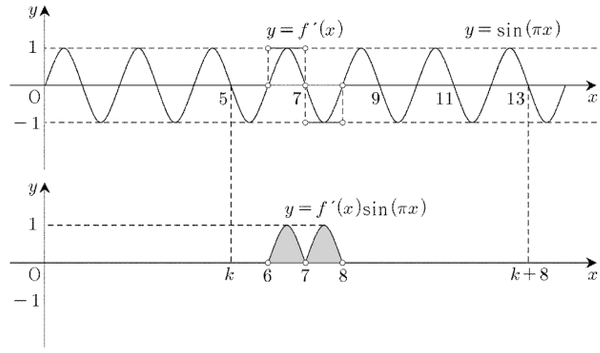
$$\int_k^{k+8} f'(x)\sin(\pi x)dx \qquad \cdots(*)$$

가 극대일 때, $g(t)$가 극소임을 알 수 있다.

함수 $f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



두 함수 $y=f'(x)$, $y=\sin(\pi x)$의 그래프를 한 평면 위에 그리면 다음과 같다.



t의 값을 변화시키면서 (*)의 값의 변화를 관찰하면

t가 홀수일 때, (*)가 극댓값(즉, $g(t)$가 극솟값)을 가짐을 알 수 있다. (위의 그림)

그런데

$45=5\times 9=5+7+9+11+13$

이므로 $m=5$이고,

$\alpha_1=5$, $\alpha_2=7$, $\alpha_3=9$,

$\alpha_4=11$, $\alpha_5=13$이다. 이때, $\alpha_5-\alpha_1=8$이다.

(*)의 적분구간은 $[k,\ k+8]$이므로

$k=5(5+8=13)$이면 문제에서 주어진 모든 조건을 만족시킨다. (위의 그림)

$g(\alpha_1)=g(5)$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_5^{13} f'(x)\sin(\pi x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_5^6 \sin(\pi x)dx=-\frac{2}{\pi^2}$$

마찬가지의 방법으로

$$g(\alpha_2)=g(\alpha_3)=g(\alpha_4)=-\frac{4}{\pi^2},$$

$$g(\alpha_5)=-\frac{2}{\pi^2}$$

$$\therefore\ k-\pi^2\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$$

$=5+(2+4+4+4+2)=21$

답 21