기출의 파급효과

과탐영역 | 물리학Ⅰ(상)

smart is sexy
Orbi.kr

기출의 파급효과

물리학 Ⅰ (상)

기출의 파급효과

물리학 I (상)

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과 물리팀입니다. 수학 교재의 인기에 이어 2020년 여름, 물리학Ⅰ까지 팀을 확장하게 되었습니다. 집필한 지 3년째가 된 물리학Ⅰ 교재입니다. 지난 2년간 너무 과분한 사랑을 받았음에 감사드리고, 올해 교재를 기대해 주신 분들께 너무나도 감사한 마음입니다. 바로 교재 소개를 해 보겠습니다.

저희는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 물리학Ⅰ 기출을 푸는 데 필요한 모든 개념과 실전개념, 도구와 태도를 담았습니다.

수능 물리학Ⅰ의 성격에 정확히 맞게끔, 실력과 점수 향상을 위한 도구와 태도를 모두 담았습니다. 이 교재를 소화한다면 물리학1의 기본 개념과 실전 개념과 태도를 정리할 수 있습니다.
원리의 깊은 이해를 바탕으로 실전적 도구들을 더하여 실력을 완성하는 것을 추구합니다. 따라서 실전 개념서지만 그 어떤 교재보다 교과서의 기본 원리를 바탕으로 자세하게 설명되어 있으며, 더욱 깊은 이해를 위해서 필요하다면 순서를 재구성하여 교재를 설계하였습니다. 학습 효율을 높이기 위해 실전적인 개념이나 실전적 도구들은 따로 정리하여 편하게 학습할 수 있도록 하였습니다.

각 챕터의 칼럼, 예제, 예제의 해설과 분석을 통해 학습하신 내용을 유제를 통해 점검하시면 더욱 큰 학습 효과를 기대할 수 있습니다.

2. 필연적인 사고 과정의 가이드라인을 상세히 제시합니다.

올해 치러질 수능을 대비하기 위해서는 모든 문항에 적용되는 기본에 충실한 굵직한 실력을 키우셔야 합니다. 이를 위해 본 책은 문항 출제 의도 파악과 기본기에 충실하게 설계되었습니다. 물리 학습에서 많은 학생들에게 가장 큰 걸림돌이 되는 부분입니다. "어떻게/왜 이렇게 풀었지?" 그 필연성의 가이드라인을 담았습니다.

3. 수능/평가원/교육청 주요 351문항을 선별하여 수록하였습니다.

이 책에는 예제, 유제에 수능/평가원/교육청 주요 기출문항을 수록하였습니다. 예제는 도구와 태도를 바로바로 확인하기 좋은 문항들로, 가장 중요한 기출문제들을 선별하여 수록하였습니다. 본문과 함께 있는 예제들은 물리학Ⅰ 교재의 경우 (상) 64문제, (하) 74문제입니다.

예제에 있는 문제 수만으로 부족함을 느끼실 분들을 위해 기출에 대한 태도와 도구를 체화시키기 위해 유제를 충분히 넣었습니다. 유제는 예제에 넣기에는 우선순위가 밀렸으나 꼭 수록할 필요성이 있는 주요 문항들을 선별하여 수록하였습니다. 유제의 경우, 물리학Ⅰ 교재의 경우 (상) 85문제, (하) 128문제입니다.

본문 속 예제뿐만 아니라 유제들도 단순 단원별로 분리된 것이 아니라 기출에 대한 태도와 도구를 기준으로 분리되었습니다.

4. 해설이 학생 중심적이고 또 실전적입니다.

물리학Ⅰ의 과목 특성상, 해설을 쓰는 사람 입장에서 쓰기 편한 풀이와, 학생 입장에서 문항을 맞닥뜨렸을 때 좋은 풀이가 다른 경우가 많습니다. 교재의 해설을 쓸 때 번거로움과 어려움을 감수하고서라도, 학생 입장에서의 최고의 풀이를 수록하려고 노력했습니다. 그 해설을 할 수밖에 없는 필연적 이유와 함께, 시험장에서 풀 수 있는 일관적이고 현실적이며 실전적인 풀이를 수록하였습니다.

이 책의 해설은 다른 책과 달리, 처음 문제를 보고 문제의 방향성을 잡는 것부터 시작해서, 넘버링을 통해 단계를 나누어 정리되어 있습니다. 예제와 유제의 해설 모두 실전적이고 학생 중심적으로 작성되어 있으며, 예제의 경우 해설을 정말 자세하게 작성했습니다. 예제와 유제의 해설까지 꼼꼼히 학습하신다면 생각의 틀이 올바로 잡힐 것입니다.

예제 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 가독성이 좋아 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다. 유제는 칼럼과 예시들을 잘 학습했다면 무리 없이 풀 수 있는 수준입니다.

물리학Ⅰ 50점, 아직 늦지 않았습니다. 한 번쯤 더 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

파급의 기출효과

cafe.naver.com/spreadeffect
파급의 기출효과 NAVER 카페

기출의 파급효과 시리즈는 기출 분석서입니다. 기출의 파급효과 시리즈는 국어, 수학, 영어, 물리학Ⅰ, 화학Ⅰ, 생명과학Ⅰ, 지구과학Ⅰ, 사회·문화가 예정되어 있습니다.

준킬러 이상 기출에서 얻어갈 수 있는 '꼭 필요한 도구와 태도'를 정리합니다.
'꼭 필요한 도구와 태도' 체화를 위해 관련도가 높은 준킬러 이상 기출을 바로바로 보여주며 체화 속도를 높입니다. 단시간 내에 점수를 극대화할 수 있도록 교재가 설계되었습니다.

학습하시다 질문이 생기신다면 '파급의 기출효과' 카페에서 질문을 할 수 있습니다.

교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

기출의 파급효과 팀 소속 오르비 저자분들이 올리시는 학습자료를 받아보실 수 있습니다.
위 저자분들의 컨텐츠 질문 답변도 교재 인증 시 가능합니다.

더 궁금하시다면 https://cafe.naver.com/spreadeffect/15에서 확인하시면 됩니다.

역학적 에너지 보존

계의 역학적 에너지는 운동 에너지 E_{K}와 퍼텐셜 에너지 E_{P}의 합으로 다음과 같다. 여기서 퍼텐셜 에너지는 중력 퍼텐셜 에너지와 탄성 퍼텐셜 에너지를 모두 지칭하는 것이다.

$$E_{\text{역}} = E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{P}}$$

만약 외부에서 가해지는 힘이 없으며, 계에 비보존력이 작용하지 않고, 계에 에너지 전환을 일으키는 힘이 오직 보존력만 작용할 때, 계의 역학적 에너지의 변화를 살펴보도록 하자.

보존력 $F_{\text{보존}}$가 일 W을 할 때 힘은 계의 퍼텐셜 에너지와 운동 에너지 사이의 에너지 전환을 일으키고 $W = \Delta E_{\mathrm{K}}$, $W = -\Delta E_{\mathrm{P}}$이다. (보존력만이 작용하는 상황이므로 알짜힘이 곧 보존력이다)
두 식 $W = \Delta E_{\mathrm{K}}$, $W = -\Delta E_{\mathrm{P}}$을 결합시키면 $\Delta E_{\mathrm{K}} = -\Delta E_{\mathrm{P}}$이 된다.
따라서 $\Delta E_{\mathrm{K}} + \Delta E_{\mathrm{P}} = \Delta E_{\text{역}} = 0$이다.
이를 요약하면 아래와 같다.

> 보존력만 작용하는 계에서, 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지는 변할 수 있지만,
> 역학적 에너지는 변하지 않고 일정한 값을 유지한다.

조금 다른 관점으로 살펴보면 다음과 같다.
$\Delta E_{\mathrm{K}} = -\Delta E_{\mathrm{P}}$를 해석해 보면, **운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 변화량이 부호가 반대이고 크기가 같다**는 이야기다.
'운동 에너지가 줄어든 만큼 퍼텐셜 에너지가 증가한다'/'퍼텐셜 에너지가 감소한 만큼 운동 에너지가 증가한다' 따위로 생각하는 것도 좋다. 만약 탄성 퍼텐셜 에너지까지 등장한다면, 감소한 에너지들의 합은 증가한 에너지들의 합과 크기가 같다고 사고하면 된다.

> 증가하는 에너지만큼 감소하는 에너지도 있다. 따라서 총 역학적 에너지가 변하지 않는다!

☞ TIP! 중간 과정은 신경 쓰지 않아도 된다.

역학적 에너지 보존 법칙은 **한 순간의 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 합인 역학적 에너지**를 **다른 순간의 역학적 에너지**와 같다고 할 수 있다.
이처럼 역학적 에너지 보존 법칙을 **서로 다른 두 순간에 대해 적용할 때, 중간 운동 과정은 신경 쓰지 않아도 된다.**

☞ TIP! 공식 $v = \sqrt{2gh}$

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$를 정리해 나온 공식이다. 처음 속력 또는 나중 속력이 0일 때 쓸 수 있는 공식이다.

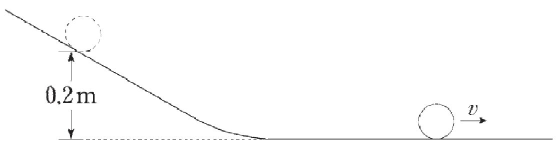
처음 또는 나중 속력 중 하나가 0이라서 운동 에너지의 변화량이 $\frac{1}{2}mv^2$인 경우에 쓸 수 있다.

높이 h대신 높이 변화량 Δh를 사용해도 된다.

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

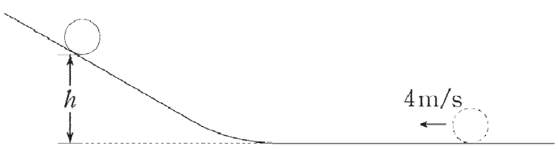
예시를 들어 어떤 식으로 사용하는지 살펴보도록 하자.

물체를 지면으로부터의 높이가 0.2m인 빗면상의 점에 가만히 두었더니 물체는 빗면을 따라 내려와 수평면상에서 속력 v로 등속도 운동하였다. 이때 v를 구하자.
(단, 중력 가속도는 $10\mathrm{m/s^2}$이고, 모든 마찰은 무시한다.)



퍼텐셜 에너지가 모조리 운동 에너지로 전환되는 상황이다. 이때 초기 속도는 0이다.
따라서 공식 $v = \sqrt{2gh}$를 적용하면, $g = 10\mathrm{m/s^2}$, $h = 0.2\mathrm{m}$이므로 $v = \sqrt{4}\mathrm{m/s} = 2\mathrm{m/s}$이다.

물체가 수평면에서 속력 $4\mathrm{m/s}$로 등속 운동하다가 빗면을 따라 올라가 수평면으로부터 높이가 h인 지점에서 정지하였다. 이때 h를 구하자. (단, 중력 가속도는 $10\mathrm{m/s^2}$이다.)



운동 에너지가 모조리 퍼텐셜 에너지로 전환되는 상황이다. 이때 최종 속도는 0이다.
따라서 공식 $v = \sqrt{2gh}$를 적용하면, $g = 10\mathrm{m/s^2}$, $v = 4\mathrm{m/s}$이므로 $h = 0.8\mathrm{m}$이다.

☞ TIP! 역학적 에너지 말장난

다음처럼 생긴 비슷한 선지들을 자주 만나게 될 것이다.

'A의 퍼텐셜 에너지 감소량은 B의 역학적 에너지 증가량과 같다.'
'A의 역학적 에너지 변화량은 B의 운동 에너지 증가량보다 작다.'

이는 각각의 에너지 변화량을 구해서 정말 크기가 (같고/크고/작음)을 비교하라는 것이 아니다.

i) 먼저 계의 에너지 변화를 체크하고
(변화량까지 구체적으로 구할 필요는 없고, (증가/감소/변화 없음) 정도까지만 알아두면 된다)

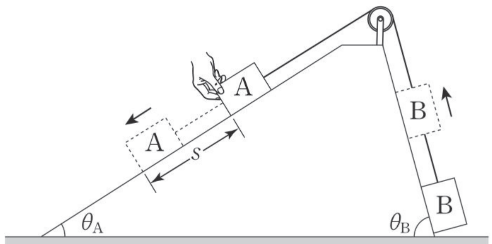
ii) 에너지 변화량 사이의 관계를 역학적 에너지 보존 법칙을 통해 파악한다.
예를 들어, 바로 아래 예시 문항에서 관계를 파악한 것은 다음과 같다.
'A운↑ + B운↑ + B퍼↑ = A퍼↓'
이런 식으로 에너지 변화량들의 관계를 파악하면 된다.
증가한 것끼리, 감소한 것끼리 나누어 관찰하면 조금 더 수월하게 관계를 파악할 수 있을 것이다.

iii) 이렇게 하면 선지들의 참/거짓이 쉽게 판단된다.

공부할 때에는 거짓인 선지들이 틀린 이유까지 정확히 판단하며 학습해보는 걸 권한다.

예제(2) 14학년도 예비시행 20번

그림과 같이 질량이 서로 다른 물체 A, B가 실로 연결되어 각각 경사각 θ_A, θ_B인 경사면에 정지해 있다. θ_A는 θ_B보다 작다. A를 가만히 놓았더니 A가 경사면을 따라 등가속도 직선 운동을 하며 내려갔다.



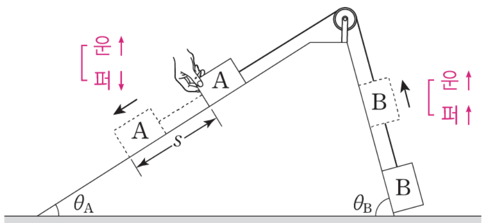
A가 s만큼 이동했을 때, 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

〈보 기〉

ㄱ. A의 운동량의 크기는 B의 운동량의 크기보다 크다.
ㄴ. B의 역학적 에너지 증가량은 A의 역학적 에너지 감소량과 같다.
ㄷ. A의 중력에 의한 퍼텐셜 에너지 감소량은 B의 중력에 의한 퍼텐셜 에너지 증가량과 같다.

0. 문항 파악 및 분석

A, B는 계를 이루어 운동하므로, 시간에 따른 속도와 가속도가 동일하다. 경사각이 $\theta_A < \theta_B$인데도 왼쪽으로 계가 가속된다는 것은, 알짜힘의 방향이 왼쪽이라는 것이고 A의 질량>B의 질량임을 유추할 수 있다.



A는 운동 에너지가 증가, 중력 퍼텐셜 에너지가 감소하며, B는 운동 에너지가 증가, 중력 퍼텐셜 에너지가 증가한다. A와 B는 계를 이루어 운동하고 외부에서 계에 힘이 가해지지 않으므로, 계의 역학적 에너지가 보존된다. 위의 그림처럼 에너지의 증가와 감소를 표시하면 다음과 같이 각 에너지 변화량의 관계를 쉽게 알 수 있다.

$$\text{A운}\uparrow + \text{B운}\uparrow + \text{B퍼}\uparrow = \text{A퍼}\downarrow$$

1. 보기 판단하기

ㄱ. $m_A > m_B$이고, 계를 이루어 운동하므로 속도의 크기가 같다. 따라서 A의 운동량의 크기는 B의 운동량의 크기보다 크다. **(ㄱ 맞음)**

ㄴ. 계의 역학적 에너지가 보존되는 상황이므로, A와 B의 역학적 에너지 변화량의 합은 0이므로 옳다. **(ㄴ 맞음)**

ㄷ. A운↑ + B운↑ + B퍼↑ = A퍼↓가 올바른 관계이므로 A퍼↓ = B퍼↑라고 주장하는 ㄷ 보기는 옳지 않다. **(ㄷ 틀림)**

정답 : ㄱ, ㄴ

일 에너지 문항에서의 도구

1. 계 운동에서의 에너지

(1) 운동 에너지 비 $=$ 질량비

계를 이루어서 운동하는 물체들의 경우, 운동 상태가 동일하므로 **속력이 동일**하다. 예를 들어 질량이 m_{A}인 물체 A와 질량이 m_{B}인 물체 B가 계를 이루어 속도 v로 운동하고 있다고 하면, A의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v^2$이고, B의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v^2$이다.

두 물체의 운동 에너지의 비 $\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v^2 : \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v^2$는 질량비인 $m_{\mathrm{A}} : m_{\mathrm{B}}$임을 알 수 있다.

일반화하면, n개의 물체에 대해서도 똑같이 적용될 것이므로,
계를 이루어 운동하는 물체들의 운동 에너지 비율은 질량비에 비례한다는 결론을 얻을 수 있다.

> 계를 이루어 운동하는 경우처럼 물체들의 **속력이 같은 경우,**
> **'운동 에너지비=질량비'이다.**

이때, 주의할 점은 정말 그 물체들이 계를 이루어 운동하고 있는지 정확히 되짚어 보아야 한다는 점이다. '운동 에너지비$=$질량비'라고만 외우면 큰코다칠 수 있다.
이 상황은 물체들의 **'속력이 같은 상황'에서만 적용**되며, 특히 **계를 이루어 운동하는 물체들**의 경우에 속력이 같다. 항상 이 전제를 확인한 이후에만 '운동 에너지비$=$질량비'라는 결론을 내릴 수 있음에 주의하자.

2. 운동 에너지와 운동량의 관계

이 도구는 '(1) 운동 에너지비=질량비'와 달리 일반적인 경우에도 쓸 수 있다.
'(1) 운동 에너지비=질량비'는 두 개 이상의 물체에 대해 비율을 구하는 것이었다면,
아래 내용은 한 물체의 실제 값을 꺼낼 수 있는 도구이므로 일반적인 경우에도 적용이 가능하다.

(1) 운동량을 통해 운동 에너지 구하기

운동량의 크기(p)를 알고 있고 운동 에너지(E_{K})를 구하고 싶을 때를 생각해 보자.

질량과 속력을 모두 구하여 운동 에너지 식 $E_{\mathrm{K}}=\frac{1}{2}mv^2$에 대입하여 운동 에너지를 구해도 되지만, 질량 m과 속력 v 중 하나만 알고 있는 경우에도 운동량의 크기 p와 같이 결합하여 운동 에너지를 구할 수 있다.

$$\boxed{E_{\mathrm{K}}=\frac{p^2}{2m},\ E_{\mathrm{K}}=\frac{pv}{2}}$$

먼저, **질량을 알고 있는 경우,** 식 $E_{\mathrm{K}}=\frac{1}{2}mv^2$는 $E_{\mathrm{K}}=\frac{(mv)^2}{2m}$으로 쓸 수 있다.

여기서 mv 대신 p를 넣어 식을 완성하면, $E_{\mathrm{K}}=\frac{p^2}{2m}$이다.

또는, 질량 대신 **속력을 알고 있는 경우,** 식 $E_{\mathrm{K}}=\frac{1}{2}mv^2$는 $E_{\mathrm{K}}=\frac{(mv)v}{2}$으로 쓸 수 있다.

여기서 mv 대신 p를 넣어 식을 완성하면, $E_{\mathrm{K}}=\frac{pv}{2}$이다.

실수 주의!

운동 에너지 변화량 $\varDelta E_{\mathrm{K}}$에 대해, $\varDelta E_{\mathrm{K}}\neq\frac{(\varDelta p)^2}{2m}$임에 주의하자.

$\varDelta E_{\mathrm{K}}=\frac{\varDelta(p^2)}{2m}$이 맞는 식이기 때문이다.
문항에서 $\varDelta p$가 주어졌다고 해서 $\varDelta p$를 별 생각 없이 p 대신 넣는 실수를 범하지 말자.

(2) 운동 에너지를 통해 운동량 구하기

운동 에너지(E_K)를 알고 있고 운동량의 크기(p)를 구하고 싶을 때를 생각해 보자.
질량과 속력을 모두 구하여 둘을 곱해 운동량의 크기를 꺼내도 되지만, 둘 중 하나만 알고 있는 경우에도 운동 에너지 식 $E_\mathrm{K} = \frac{1}{2}mv^2$에서, 운동량의 크기를 바로 구할 수 있다.

$$p = \sqrt{2mE_\mathrm{K}}\,,\ p = \frac{2E_\mathrm{K}}{v}$$

먼저, **질량을 알고 있는 경우,**
식 $E_\mathrm{K} = \frac{1}{2}mv^2$에서 양변에 $2m$를 곱하면 $2mE_\mathrm{K} = p^2$이므로, $p = \sqrt{2mE_\mathrm{K}}$이다.

또는, 질량 대신 **속력을 알고 있는 경우,**
식 $E_\mathrm{K} = \frac{1}{2}mv^2$에서 양변에 $\frac{2}{v}$를 곱하면 $\frac{2E_\mathrm{K}}{v} = p$이므로, $p = \frac{2E_\mathrm{K}}{v}$이다.

3. 가속도와 에너지 변화량 비율 사이 관계

연직 방향에서의 가속도와 에너지 변화량 비율 사이 관계는 꽤나 많이 유용한 도구이므로 잘 알아 두도록 하자.

먼저, 이 도구는 **연직 방향(중력과 나란한 방향)에서 운동하는 물체의 에너지와 가속도에 관한 관계**이다. 빗면을 따라 운동하는 물체에는 적용할 수 없다는 점에 주의하도록 하자.

> **연직 방향(중력의 방향과 나란한 방향) 운동에서,**
> **물체의 가속도 a를 알고 있다면, '운동 에너지 변화량과 중력 퍼텐셜 에너지 변화량의 비율 ($\Delta E_{\mathrm{K}} : \Delta E_{\mathrm{P}}$)'을 알 수 있다.**
> 거꾸로,
> **연직 방향(중력의 방향과 나란한 방향) 운동에서,**
> **물체의 '운동 에너지 변화량과 중력 퍼텐셜 에너지 변화량의 비율 ($\Delta E_{\mathrm{K}} : \Delta E_{\mathrm{P}}$)'을 알고 있다면, 가속도 a를 알 수 있다.**

질량 m인 물체가 연직 방향으로 가속도 a로 거리 s만큼 운동하는 상황에서,

① ΔE_{K} 의 크기 $= mas$ (운동 에너지 변화량의 크기 = 알짜힘 ma가 한 일)
② ΔE_{P} 의 크기 $= mgs$ (중력 퍼텐셜 에너지 변화량의 크기 = 중력 mg가 한 일)

이므로, ①을 ②로 나누어 주면, 아래 식을 얻게 된다.

$$\frac{\Delta E_{\mathrm{K}} \text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}} \text{ 의 크기}} = \frac{a}{g}$$

가속도를 g를 이용해서 표시하게 되면, $a = \dfrac{\Delta E_{\mathrm{K}} \text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}} \text{ 의 크기}} g$이므로, 가속도에서 g앞에 곱해진 수를 $\dfrac{\Delta E_{\mathrm{K}} \text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}} \text{ 의 크기}}$라고 읽을 수 있다. ($\dfrac{\Delta E_{\mathrm{K}} \text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}} \text{ 의 크기}}$가 소제목에서 말한 '에너지 변화량 비율'이다.)

예를 들면,

연직 아래 방향으로 운동하고, **가속도**는 아래 방향으로 $\frac{1}{3}g$인 물체 A는 $\frac{\Delta E_{\mathrm{K}} \text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}} \text{ 의 크기}}$가 $\frac{1}{3}$이므로

운동 에너지 증가량을 E, 중력 퍼텐셜 에너지 감소량을 $3E$라고 상댓값을 이용해서 설정할 수 있다.

이처럼 연직 방향으로 운동하는 물체의 가속도를 아는 경우, 운동 에너지와 중력 퍼텐셜 에너지의 변화량 비율을 알 수 있다.

반대로, 연직 방향으로 운동하는 물체의 운동 에너지와 중력 퍼텐셜 에너지의 변화량 비율을 알고 있다면, $\frac{\Delta E_{\mathrm{K}} \text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}} \text{ 의 크기}}$값 뒤에 g를 곱해 주어 물체의 가속도의 크기를 결정할 수 있다.

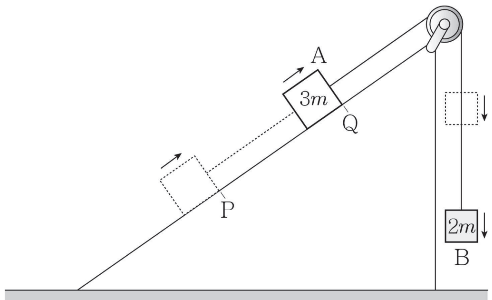
연직 방향으로 운동하는 물체의 $\frac{\Delta E_{\mathrm{K}} \text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}} \text{ 의 크기}}$ 값이 $\frac{1}{3}$이라면, 가속도의 크기는 $\frac{1}{3}g$가 되는 것이다.

즉, 두 에너지의 변화량 비율은 가속도 a에 의해 결정되며, 그 역도 성립한다.
이는 물체가 다른 물체와 연결되어 있든, 단독으로 운동하든 상관이 없다.
한 물체에 대해 관찰하는 것이므로 모두 적용이 가능하다.

A의 E_{K}변화량, B의 E_{P}변화량 주는 문제 Ⅰ: 틀 잡고 전체 비교
A의 E_{K}변화량, A의 E_{P}변화량 주는 문제 Ⅰ: 앗싸 같은 물체!
일단 가속도 공짜로 얻었다!
틀 잡고 전체 비교!

예제(3) 13년 3월 교육청 20번

그림은 물체 A가 물체 B와 실로 연결된 채 경사면을 따라 등가속도 운동을 하는 모습을 나타낸 것이다. A, B의 질량은 각각 $3m$, $2m$이고, A가 P점에서 Q점까지 운동했을 때 B의 퍼텐셜 에너지 감소량은 B의 운동 에너지 증가량의 10배이다.



A의 가속도의 크기는? (단, 중력 가속도는 g이다.) [3점]

① $\frac{1}{10}g$ ② $\frac{1}{5}g$ ③ $\frac{2}{5}g$ ④ $\frac{1}{2}g$ ⑤ $\frac{3}{5}g$

앞서 배운 '가속도와 에너지 변화량 비율 사이 관계'를 알고 있다면, 이 문제는 문제를 읽자마자 답을 알 수 있다.

연직 방향(중력의 방향과 나란한 방향) 운동에서, 물체의 가속도 a를 알고 있다면, 운동하는 동안의 '운동 에너지 변화량과 중력 퍼텐셜 에너지 변화량의 비율 ($\Delta E_{\mathrm{K}} : \Delta E_{\mathrm{P}}$)'을 알 수 있다.

역으로 '운동 에너지 변화량과 중력 퍼텐셜 에너지 변화량의 비율 ($\Delta E_{\mathrm{K}} : \Delta E_{\mathrm{P}}$)'을 알고 있다면,
가속도 a를 알 수도 있다.

$a = \dfrac{\Delta E_{\mathrm{K}}\text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}}\text{ 의 크기}} g$이므로,

$\dfrac{\Delta E_{\mathrm{K}}\text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}}\text{ 의 크기}}$값 뒤에 g를 곱하여 물체의 가속도 $a = \dfrac{\Delta E_{\mathrm{K}}\text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}}\text{ 의 크기}} g$를 결정할 수 있다.[19)]

주의할 점은, 이 풀이는 연직 방향으로 운동하는 물체에만 적용이 가능하다는 것이다. 만약 문제에서 'A의 퍼텐셜 에너지 감소량은 A의 운동 에너지 증가량의 10배이다.'라고 했다면 이 풀이를 쓰지 못했을 것이다.

이를 적용하면, $\dfrac{\Delta E_{\mathrm{K}}\text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}}\text{ 의 크기}} = \dfrac{1}{10}$이므로 가속도는 $a = \dfrac{1}{10} g$임을 바로 알 수 있다.

답 : ① $\dfrac{1}{10} g$

19) 에너지의 증감은 속도의 크기 변화, 상승/하강으로 직접 판단하면 되므로, −는 무시한다.

에너지 상댓값 풀이

에너지 문항의 90% 정도에 이 아이디어가 쓰일 정도로 상댓값 풀이는 중요하다. **상댓값 풀이**라는 것은 **상대적 비례 관계**를 이용해 각 **에너지를 비교**하는 풀이이다.

상댓값은 실제 값 계산과는 차이가 있다. 실제 값 계산은 $\frac{1}{2}mv^2$, mgh등의 에너지 값을 실제로 구하는 식들을 이용하여 m, v를 식에 대입하여 실제 값을 구하는 풀이이지만, 상댓값 풀이는 높이비가 $1:2$인 두 지점의 중력 퍼텐셜 에너지를 각각 E, $2E$로 두는 것처럼 비례상수 E를 도입하여 비율 관계를 보기 쉽게 나타내는 풀이를 말한다.

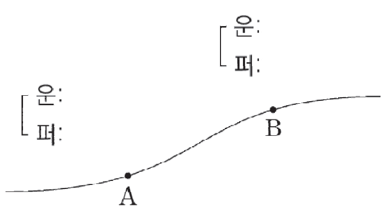
1. 에너지 상댓값 비교하기

공식적인 용어는 아니지만, 에너지 상댓값 비교 틀이라는 것을 소개해 보겠다. 에너지 문항을 깔끔하고 정확하게 효율적으로 풀기 위한 일종의 정리법 같은 것이라고 생각하자.

에너지 상댓값 비교 틀은 크게 두 가지가 있는데. 첫째로는 **에너지 '값' 비교 틀**이 있고, 둘째는 **에너지 '변화량' 비교 틀**이 있다.
꽤나 간단하다. 문제에서 운동 에너지와 중력 퍼텐셜 에너지가 등장했으면 비교할 부분 위에 꺾은선 하나를 그려 주고 꺾은선의 오른쪽 윗부분에는 '운', 오른쪽 아래에 '퍼'를 적어 주면 준비가 끝난다. 이 틀을 그린 뒤, 세부 값들을 틀에 맞추어 적어가며 문제를 풀어가면 되는 것이다. 만약 탄성 퍼텐셜 에너지까지 등장한다면 맨 아래에 '탄'까지 적어 주면 되는 것이다.

(1) 에너지 '값' 비교 틀

첫째 틀에 대해 소개한다. **에너지 '값' 비교 틀**이란, **'값'**을 비교하는 것이다. 더 정확하게는 **각 지점에서의 에너지 상댓값**을 비교하는 것이다. 다음 그림이 바로 에너지 값 비교 틀이다.

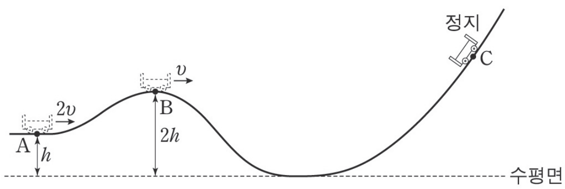


에너지 값을 비교해야 할 지점 A, B 근처에 꺾은선을 먼저 그리고, 위쪽엔 운동 에너지 값, 아래쪽엔 중력 퍼텐셜 에너지 값을 적는 것이다.

그냥 $(E_{\mathrm{K}}, E_{\mathrm{P}})$처럼 순서쌍으로 적어도 될 텐데 굳이 이렇게 꺾은선을 그리는 이유는 뒤이어 나올 **에너지 '변화량' 비교 틀**에서 그 이유를 알 수 있을 것이다. 지금은 설득당한 척이라도 해 주며 따라오길 부탁한다.

예제(4) 14학년도 9월 평가원 7번

그림은 높이가 h인 A점에서 속력 $2v$로 운동하던 수레가 B점을 지나 최고점 C에 도달하여 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. B에서 수레의 속력은 v이고 높이는 $2h$이다.



최고점 C의 높이는? (단, 수레는 동일 연직면 상에서 궤도를 따라 운동하고, 수레의 크기와 마찰, 공기 저항은 무시한다.) [3점]

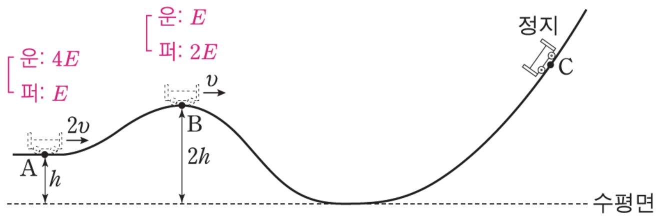
① $\frac{7}{3}h$　② $\frac{8}{3}h$　③ $3h$　④ $\frac{10}{3}h$　⑤ $\frac{11}{3}h$

0. 문항 파악 및 분석

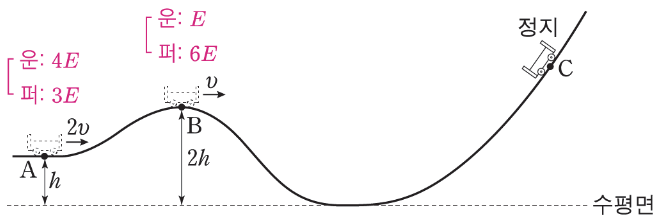
전체 궤도를 따라 운동할 때 비보존력이 일을 하지 않기 때문에 역학적 에너지가 보존되며, 세 지점 A, B, C 에서의 운동 에너지와 중력 퍼텐셜 에너지 값을 비교해 주어야 함을 알 수 있다. C에서는 물체가 정지하므로, C는 역학적 에너지가 모두 중력 퍼텐셜 에너지인 지점이다.

1. 각 지점에서의 에너지 틀 채우기

A와 B에서의 높이 조건, 속력 조건을 함께 활용하면 운동 에너지 비와 중력 퍼텐셜 에너지 비를 동시에 찾을 수 있다. 먼저, 두 지점의 속력 비율이 2 : 1이므로 운동 에너지의 비율은
A운 : B운 = 4 : 1이다.
두 지점의 높이 비율이 1 : 2이므로 중력 퍼텐셜 에너지의 비율은 A퍼 : B퍼 = 1 : 2이다.



A운 : B운 = 4 : 1, A퍼 : B퍼 = 1 : 2을 이용해서 이대로 위처럼 에너지 비교 틀을 채워 넣는다면 역학적 에너지 보존이 성립치 않는다는 걸 확인할 수 있다. 운동 에너지 비율과 중력 퍼텐셜 에너지 비율이 호환되지 않기 때문이다.
이런 경우에는 A퍼 : B퍼 = 3 : 6으로 고쳐 준다면 운동 에너지 비율과 중력 퍼텐셜 에너지 비율이 호환된다. 두 지점에서 운동 에너지와 중력 퍼텐셜 에너지의 합이 같아야 하므로, 4 : 1에서 4와 1의 차이값이 3이므로, 운동 에너지가 3만큼 줄어들었다고 생각하면, 그만큼 줄어든 운동 에너지는 중력 퍼텐셜 에너지가 되었을 것이므로 A지점보다 B지점에서 중력 퍼텐셜 에너지가 3만큼 커야 한다. 따라서 A퍼 : B퍼 = 3 : 6로 보는 것은 타당한 생각이다.
아래 그림은 이런 아이디어를 이용해 비율을 맞추어 에너지 상댓값을 이용해 에너지 비교 틀을 채워 준 것이다.



2. C의 높이 찾기

A와 B지점에서의 에너지 값 비교를 마쳤다. 두 지점에서의 역학적 에너지는 모두 $7E$이므로, C에서의 중력 퍼텐셜 에너지는 $7E$이다.

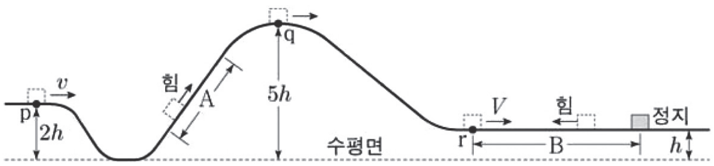
따라서 세 지점에서의 중력 퍼텐셜 에너지의 비와 높이 비를 비교하면, 최고점 C의 높이는 $\frac{7}{3}h$이다.

정답 : ① $\frac{7}{3}h$

방금 풀었던 문제는 꽤나 난이도가 쉬운 문항이었다. 조금 더 난이도 있는 문항을 살펴보자.

예제(5) 20학년도 수능 17번

그림과 같이 레일을 따라 운동하는 물체가 점 p, q, r를 지난다. 물체는 빗면 구간 A를 지나는 동안 역학적 에너지가 $2E$만큼 증가하고, 높이가 h인 수평 구간 B에서 역학적 에너지가 $3E$만큼 감소하여 정지한다. 물체의 속력은 p에서 v, B의 시작점 r에서 V이고, 물체의 운동 에너지는 q에서가 p에서의 2배이다.



V는? (단, 물체의 크기, 마찰과 공기 저항은 무시한다.)

① $\sqrt{2}v$　　② $2v$　　③ $\sqrt{6}v$　　④ $3v$　　⑤ $2\sqrt{3}v$

0. 문제 상황 파악하기

문항을 살펴보니 '각 지점에서의 에너지 E_{K}, E_{P} 값 비교' 문항이다.

우리가 지금 에너지 값을 비교해야 하는 지점은 크게 세 지점 p, q, r이다. (세 지점에서의 운동 에너지, 중력 퍼텐셜 에너지를 구해야 한다.)

1. 퍼텐셜 에너지의 기준선 잡기

발문에서 퍼텐셜 에너지 값을 확정할 수 있는 정보가 등장하지 않았다. 이때는 지점 간의 퍼텐셜 에너지 차이만으로 풀 것인지, 기준선을 우리가 직접 설정해서 풀 것인지 생각해보아야 한다.

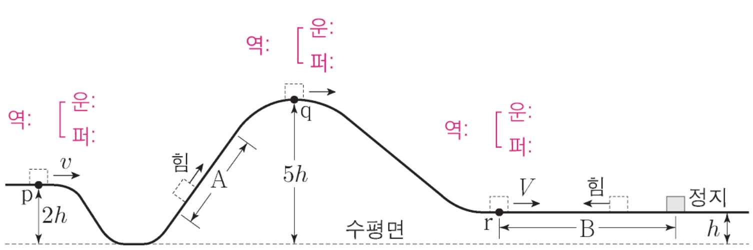
이 문항에서는 에너지 비교를 할 지점들이 꽤 많으므로 각 지점 간의 퍼텐셜 에너지 차이만을 보는 것보다는 아예 기준선을 설정해서 각 지점의 값을 설정해 두고 푸는 게 편할 것이다.

p지점 또는 q지점에 기준선을 설정하면, 퍼텐셜 에너지가 음수가 되는 지점들이 생기므로 여기에 기준선을 잡는 건 그리 좋은 선택은 아니다.
수평면을 기준으로 잡는 것보다는 r지점을 퍼텐셜 에너지가 0인 기준선으로 잡는 게 더 계산상 편리하다. 만약 r지점을 퍼텐셜 에너지가 0인 기준선으로 잡는다면, r지점의 퍼텐셜 에너지가 0이 되어 계산에 포함되지 않기 때문에 r에서의 역학적 에너지를 그대로 r지점에서의 운동 에너지로 쓸 수 있기 때문이다.

따라서 수평면에서 높이 h인 지점을 퍼텐셜 에너지가 0인 기준선으로 잡자. (기준선을 쭉 그림에 그어 주고 $E_{\mathrm{P}}=0$정도를 간단히 표시해 주는 게 나중에 실수를 방지하기에 좋다.)
그럼 자동으로 기준선에 따른 p점과 q점의 높이는 각각 h, $4h$가 된다. ($2h$, $5h$를 그대로 사용해서는 안 된다. 우리는 기준선을 수평면으로 두지 않았다.)

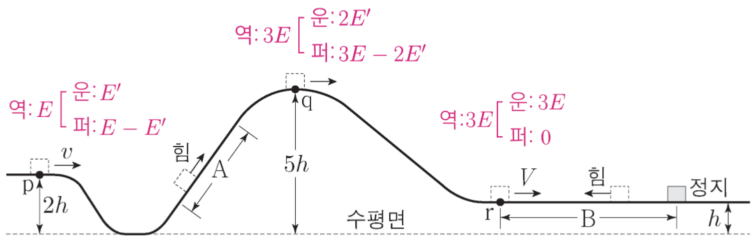
2. 각 지점에서의 에너지 비교하기

에너지 상댓값 비교 틀을 그리고 분석을 시작해보자.



상댓값 비교를 하려고 하는데 문제점이 하나 있다. 이미 문제에서 E라는 값을 쓰고 있다는 것이 그것이다. 이럴 때는 E' 같은 대체 상댓값 상수를 이용해 주면 된다. 물론 E'은 우리가 도입한 상수이므로 나중에 E에 대해 나타내어 정리해 주어야 한다.

마지막 정지 상황에서 초기 상황으로 거슬러 올라가면서 점 p, q, r에서의 역학적 에너지를 구해 보자. 각각 E, $3E$, $3E$이다.
문제 조건에 의해 p, q에서의 운동 에너지를 각각 E', $2E'$으로 놓으면, 두 지점 p, q에서의 중력 퍼텐셜 에너지는 자동으로 $E-E'$, $3E-2E'$이 된다.



3. E'을 E에 대해 나타내기

앞서 수평면에서 높이 h인 지점을 퍼텐셜 에너지가 0인 기준선으로 잡자고 했다.
두 점 p와 q의 기준선으로부터의 높이는 각각 h, $4h$이므로, 높이비에 따른 중력 퍼텐셜 에너지 비를 나타낸 식 $E-E' : 3E-2E' = 1:4$를 통해 E'을 구하면, $E' = \frac{1}{2}E$이다.

4. V 구하기

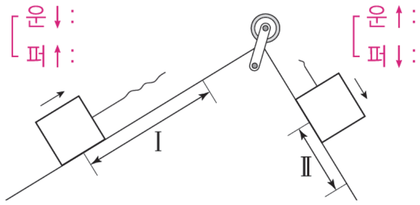
이제 상댓값 비교 틀의 모든 칸을 E에 대해 나타낸 식으로 채울 수 있다. 문제에서 요구하는 속도 V는 p점과 r점의 운동 에너지 비율 $1:6$을 이용하면, 속력 비는 두 지점에서 $1:\sqrt{6}$이 된다는 것을 이용해서 구하면 된다.

따라서 $V=\sqrt{6}\,v$이다.

정답 : ③ $\sqrt{6}\,v$

(2) 에너지 변화량 비교 틀

둘째 틀에 대해 소개한다. **에너지 변화량 비교 틀**이란, 값이 아닌 **'변화량'**을 비교하는 것으로, 에너지의 증가한 정도와 감소한 정도를 상댓값을 이용하여 비교하는 틀이다. 다음 그림이 바로 에너지 변화량 비교 틀이다.



에너지 변화량을 비교해야 할 두 구간 I, II 근처에 꺾은선을 먼저 그리고, 위쪽엔 운동 에너지 변화량, 아래쪽엔 퍼텐셜 에너지 변화량을 적는 것이다.

문항에서 구간이라고 이름 붙인 것들에만 적용되는 것이 아닌, 물체가 이동하는 동안 에너지 변화량을 비교해야 할 필요가 있는 모든 경우에 쓸 수 있는 것이다.

변화량 비교를 할 때는 중요한 것이 하나 있다. 물체의 속도의 증감, 높이 변화를 눈으로 확인하여 **위/아래 화살표를 꼭 표시**해 주는 것이다. 이는 나중에 역학적 에너지 보존이 바로바로 보이는지와 연결되므로 필수적으로 표시하는 게 좋다.

☞ 주의점!

이 두 가지 틀 대신 운동 에너지와 중력 퍼텐셜 에너지의 변화량을 순서쌍을 쓰듯이 $(+2E, -3E)$처럼 쓰는 게 더 편하다고 생각하는 학생들이 있을 수 있다. 그게 지금은 더 편할지 몰라도, 시험장에서는 그렇게 표시하게 된다면 꼭 보여야 할 것들이 잘 보이지 않을 수 있다.

꼭 보여야 하는 것 중 가장 중요한 것이 앞서 배운 '가속도와 에너지 변화량 비율 사이 관계'이다.

$$= \frac{\Delta E_k \text{ 의 크기}}{\Delta E_p \text{ 의 크기}}$$

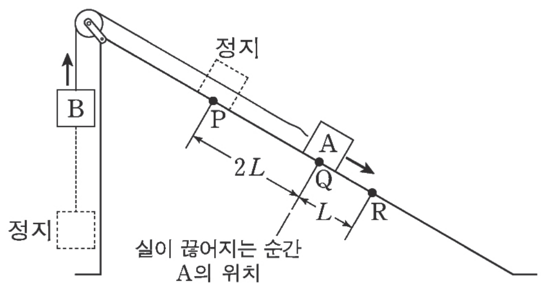
$$\left[\begin{array}{l} \text{운}\uparrow : 2E \\ \text{퍼}\downarrow : 3E \end{array}\right. \qquad \frac{2E}{3E}$$

어떤 물체가 연직 아래 방향으로 운동하며 위 그림처럼 운동 에너지 증가량이 $2E$이고 퍼텐셜 에너지 감소량이 $3E$인 상황이 있다. 그런데 문제에서 가속도를 구하라고 요구하고 있다.
이런 상황에서 만약 $(E_{\mathrm{K}}, E_{\mathrm{P}})$처럼 순서쌍으로 에너지 변화량을 썼다면 가속도를 바로 구하지 못하였을 것이다.
안 그래도 정신없는 시험장에서 그렇게 적어뒀다면 가속도가 보이지 않았을 것이기 때문이다.
만약 변화량 비교 틀에 맞추어 적어두었다면, $\frac{2E}{3E}$라는 값이 시각적으로 눈에 잘 띌 것이다.
이 값이 $\frac{\Delta E_{\mathrm{K}} \text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}} \text{ 의 크기}}$인 것이고 $\frac{\Delta E_{\mathrm{K}} \text{ 의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}} \text{ 의 크기}}$이므로 $\frac{2}{3}$에 g만 곱하면 $\frac{2}{3}g$가 물체의 가속도인 것이다.

이처럼 표시하는 사소한 습관이 시험장에서는 큰 도움이 될 수 있다는 것을 기억하길 바란다.

예제(6) 19학년도 6월 평가원 20번

그림과 같이 물체 A, B를 실로 연결하고 빗면의 점 P에 A를 가만히 놓았더니 A, B가 함께 등가속도 운동을 하다가 A가 점 Q를 지나는 순간 실이 끊어졌다. 이후 A는 등가속도 직선 운동을 하여 점 R를 지난다. A가 P에서 Q까지 운동하는 동안, A의 운동 에너지 증가량은 B의 중력 퍼텐셜 에너지 증가량의 $\frac{4}{5}$배이고, A의 운동 에너지는 R에서가 Q에서의 $\frac{9}{4}$배이다.



A, B의 질량을 각각 m_A, m_B라 할 때, $\frac{m_A}{m_B}$는? (단, 물체의 크기, 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

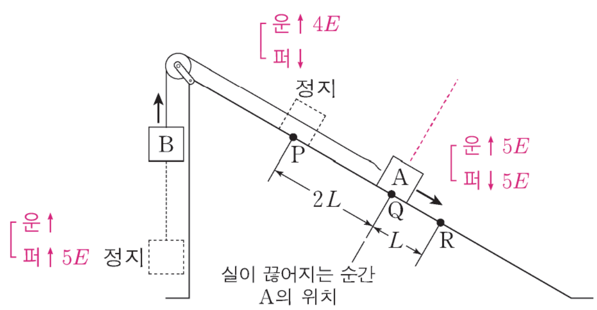
① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

1. 문제 조건 분석하기

실이 끊어지기 전과 후를 나누어 에너지 변화량에 신경을 쓰면서 풀어야 할 것이다. 발문에서의 조건 'A의 운동 에너지 증가량은 B의 중력 퍼텐셜 에너지 증가량의 $\frac{4}{5}$배'를 우리는 실이 끊어지기 전, A운 $\uparrow = 4E$, B퍼 $\uparrow = 5E$라고 읽으면 된다.

발문의 또 다른 조건 'A의 운동 에너지는 R에서가 Q에서의 $\frac{9}{4}$배'는 실이 끊어진 후 A운 $\uparrow = 5E$이라고 볼 수 있다. 그래야 Q에서와 R에서의 운동 에너지가 $4E$, $9E$가 될 테니까.

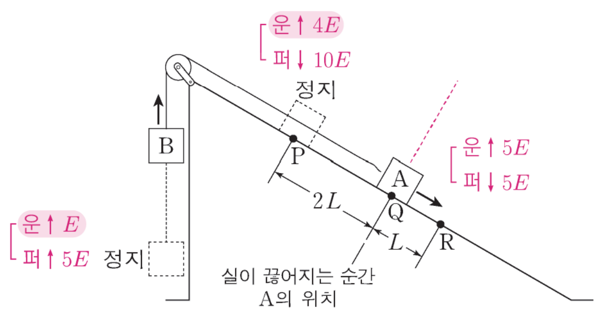
이를 바탕으로 에너지 변화량 비교 틀을 채우면, 아래 그림과 같다.



2. 에너지 변화량 비교 틀 완성하기

실이 끊어진 이후 A와 B는 각각 역학적 에너지가 보존되므로, Q~R에서 A의 중력 퍼텐셜 에너지 감소량은 $5E$가 된다.

중력 퍼텐셜 에너지 감소량은 높이 변화량에 비례하므로, P~Q에서와 Q~R에서의 A의 중력 퍼텐셜 에너지 변화량은 $2L : L$이 되어야 한다. 따라서 P~Q에서 A의 중력 퍼텐셜 에너지 감소량은 $10E$이다. 실이 끊어지기 전 계 A와 B의 역학적 에너지가 보존되므로, B의 운동 에너지 증가량은 E이다. 따라서 아래처럼 에너지 변화량 비교가 완성된다.



3. 질량비 구하기

계를 이루어 운동할 때, 운동 에너지비는 질량비와 같다는 개념을 이용하면, $m_A : m_B = 4 : 1$이다. (두 물체의 처음 운동 에너지가 0이므로 운동 에너지 변화량의 비율도 질량비에 비례한다)

정답 : ② 4

특강 1. 에너지의 변화는 힘의 공간적 효과이다

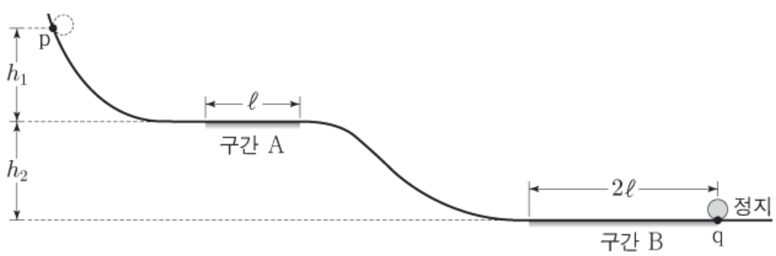
앞서 나왔던 Chapter 3의 **'특강 2. 운동량의 변화는 힘의 시간적 효과이다'**와 비교하여 보도록 하자.

1. 일정한 힘을 일정한 거리만큼 받는 경우에 대한 고찰

힘 조건과 거리 조건이 함께 묶여 등장하는 경우가 있다. 예를 들어, 아래 문항의 발문에서 밑줄 친 부분에 주목해 보자.

예제(7) 20학년도 6월 평가원 18번

그림은 점 p에 가만히 놓은 물체가 궤도를 따라 운동하여 점 q에서 정지한 모습을 나타낸 것이다. 길이가 각각 ℓ, 2ℓ인 수평 구간 A, B에서는 물체에 같은 크기의 일정한 힘이 운동 방향의 반대 방향으로 작용한다. p와 A의 높이 차이 차는 h_1, A와 B의 높이 차는 h_2이다. 물체가 B를 지나는 데 걸린 시간은 A를 지나는 데 걸린 시간의 2배이다.



$\dfrac{h_1}{h_2}$은? (단, 물체의 크기, 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{3}{5}$　③ $\dfrac{3}{4}$　④ $\dfrac{4}{5}$　⑤ $\dfrac{5}{6}$

이런 식으로 힘 조건과 거리 조건이 동시에 묶여 등장하는 경우에, 두 조건이 융합되었을 때의 의미를 파악할 줄 알아야 한다.[20]

결론을 먼저 말하자면, **힘 조건**과 힘을 받은 **거리 조건**이 함께 등장한 것은 두 조건을 합친 것의 차원은 **'일, 에너지 차원'**이며, 힘을 받은 구간의 **에너지 변화량**에 관한 조건을 구해야 할 것이라는 걸 미리 눈치채라는 이야기이다.[21]

앞 페이지 문항을 예시로 들어 밑줄 친 부분을 어떻게 파악해야 하는지 살펴보자.

구간 A와 구간 B에서 같은 크기의 힘을 각 ℓ, 2ℓ의 거리만큼 받았다는 것은, $\Delta E = W = F\Delta x$에서 F의 크기가 두 구간에서 같고 Δx가 $1:2$임을 의미하므로, 두 구간에서의 에너지 변화량이 $1:2$임을 의미한다. 두 구간이 수평면이므로 받는 힘이 곧 알짜힘이고, ΔE는 운동 에너지 변화량을 의미한다.
두 구간에서 운동하는 물체는 하나의 물체이므로 두 구간에서의 운동 에너지 변화량이 같다는 것을 속도의 제곱의 변화량 $\Delta(v^2)$이 $1:2$라는 것으로 해석 가능하다.[22]

20) '묶여 등장한다'라는 표현을 쓴 이유는, 서로 연관성이 크게 없는 힘 조건과 시간 조건을 이야기하고자 하는 게 아님을 말하기 위해서이다.

21) '차원'이라는 단어가 중요한 건 아니다. 잘 모르겠다면 '에너지 관점'이라는 말로 대체해서 이해해도 된다.

22) $(\Delta v)^2$가 아님에 주의하라!

구간 A와 B에 대하여, 문제에 조건 두 가지가 주어졌다.

1. 길이가 각각 ℓ, 2ℓ인 수평 구간 A, B에서는 물체에 같은 크기의 일정한 힘이 운동 방향의 반대 방향으로 작용한다.
2. 물체가 B를 지나는 데 걸린 시간은 A를 지나는 데 걸린 시간의 2배이다.

첫 번째 조건을 통해 두 구간에서의 운동 에너지 변화량이 $1:2$이고, 이로 인해 '속력 제곱'의 변화량이 $1:2$라는 것을 얻는다.
(두 구간에서 $v_{\text{나중}}^2 - v_{\text{처음}}^2$이 $1:2$이다) $\cdots i)$

두 번째 조건을 통해 두 구간에서의 운동량의 변화량이 $1:2$이고 (일정한 크기의 힘이 같은 시간만큼 작용하였으므로 Ft가 $1:2$이다.) 이로 인해 속도 변화량이 $1:2$라는 것을 얻는다.
(두 구간에서 $v_{\text{나중}} - v_{\text{처음}}$이 $1:2$다.) $\cdots ii)$

$i)$과 $ii)$를 통해, $v_{\text{나중}} + v_{\text{처음}}$이 같다는 것을 알 수 있다. $\cdots iii)$
(합차 공식 적용이라는 수식적 센스가 필요했다.)
$v_{\text{나중}} + v_{\text{처음}}$이 같다는 것은 '두 구간에서의 평균 속도'가 같다는 것이다.
즉, 두 구간의 양 끝 속도값의 중간값이 서로 같다는 이야기이다.

$ii)$와 $iii)$을 이용해서 그림으로 가서 실제 속도값을 구해 보도록 하자. (문제에 속도 관련 얘기가 없으므로 v를 도입해서 상대적 비율을 표현하기로 하자.
$ii)$의 속도 변화량이 동일하다는 것보다 $iii)$의 속도 중간값(평균 속도)가 동일하다는 것을 먼저 사용하는 게 더욱 속도값을 찾는 데에는 빠르다는 센스가 있으면 좋다.
두 구간의 평균 속도를 v, v라고 두자. (다른 어떤 숫자로 둬도 상관 없다.)
구간 B는 최종 속도를 알기 때문에 초기 속도를 바로 구할 수 있다.(초기 속도 $2v$, 최종 속도 0)
따라서 속도 변화량은 구간A에서 v, 구간 B에서 $2v$라는 것을 얻는다.
구간 A의 평균 속도가 v이므로, 초기 속도와 최종 속도는 각각 $1.5v$, $0.5v$라는 것을 얻는다.
이로써 모든 속도 값을 찾아내게 되었다.

h_1과 h_2의 비율을 구하기 위해서는 두 빗면을 관찰하며 속도 조건을 높이 조건으로 바꿀 수 있어야 한다. 이를 위해 역학적 에너지 보존을 적용하면,

운동 에너지 변화량=퍼텐셜 에너지 변화량 ($\Delta(\frac{1}{2}mv^2) = mg\Delta h$)이고 질량과 중력 가속도는 상수이므로 $\Delta h \propto \Delta(v^2)$이다.

첫 번째 빗면에서는 $\Delta(v^2)$이 $\frac{9}{4}v^2$이고, 두 번째 빗면에서는 $\Delta(v^2)$이 $\frac{15}{4}v^2$으로 두 빗면에서의 $\Delta(v^2)$값이 $3:5$이다. 따라서 $\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{5}$이다.

용수철에 대한 분석

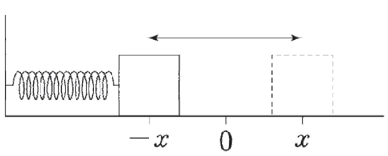
1. 변형과 변화의 구분

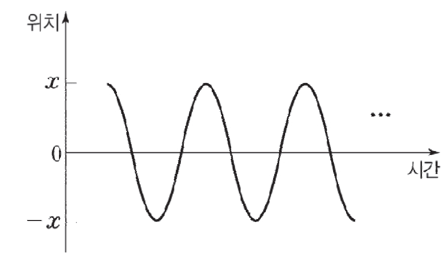
보통 두 단어를 명확히 구분해서 쓰지는 않지만, 의미가 완전히 다르므로 우리 교재에서는 아래처럼 변형과 변화의 의미를 엄격히 구분하여 사용하겠다.

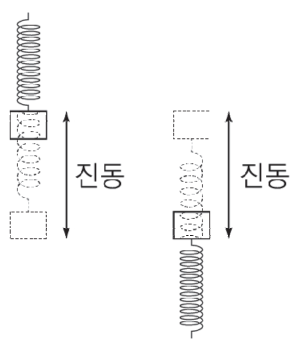
원래 길이로부터 x_1만큼 용수철을 압축시켰다.
$\rightarrow$ **변형**된 길이가 x_1이다.
용수철이 변형된 길이가 x_1, x_2인 두 순간이 있다.
$\rightarrow$ **변화**된 길이가 $x_2 - x_1$이다.

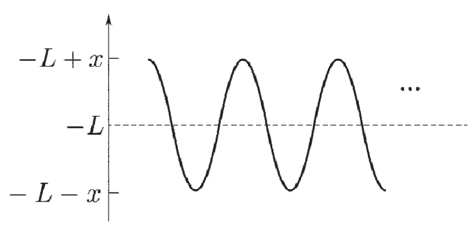
2. 진동의 형태

탄성력 외에 다른 힘들이 일정하다면, 용수철에 매달린 채 진동하는 물체는 어떤 한 지점을 중심으로 대칭된 진동을 하게 된다.
수평면에서의 진동과 연직 방향으로 매달린 상태에서의 진동은 중력의 영향(파동이 중력 방향으로 평행이동)을 받는지의 차이만 있을 뿐, 진동의 형태는 완벽히 동일한 모양을 그리게 된다.[23)]









23) 증명은 미분방정식 $-kx = mx''(a = x'')$의 풀이를 통해 가능하다.

3. 용수철 문제를 푸는 기본 루틴

용수철 문제 풀이는 아래 3가지 단계로 이루어진다.

(1) 힘의 평형을 이용한 관계식을 얻어낸다.

$F = k\Delta x$를 이용하여 힘의 평형식을 세운다.
이때 훅의 법칙에서 부호는 고려하지 않고, 크기만을 구한 이후에 방향은 나중에 처리한다.

(2) 역학적 에너지 보존을 적용한다.

용수철의 탄성 퍼텐셜 에너지가 $\frac{1}{2}kx^2$임을 이용하여 역학적 에너지 보존 식을 쓴다.
운동 에너지, 탄성 퍼텐셜 에너지, 필요하다면 중력 퍼텐셜 에너지를 고려하여
역학적 에너지가 보존되는 운동의 경우 에너지의 총합이 같음을 적용하자.
앞서 썼던 역학적 에너지 보존과 똑같다. $E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{P}} + E_{\text{탄}} = \text{일정}$임을 이용하고, 에너지 변화량 비교 틀을 이용하면 더욱 편할 것이다.
마찬가지로 각 에너지의 증감은 눈으로 한 번 더 판단하여 화살표로 꼭 표시하도록 한다.

(3) 평형점을 이용한다.

위 1, 2번으로 문제 풀이는 끝난다. 그런데 어려운 문제들은 위 1, 2번이 호락호락하게 바로 나오지 않거나, 나오더라도 식이 굉장히 복잡할 때가 있다.

바로 **중력 퍼텐셜 에너지와 탄성 퍼텐셜 에너지를 모두 고려해야 하는 경우**이다.
이럴 때는 평형점 풀이를 이용하면 굉장히 편해진다.

평형점이 무엇인지 알기 위해 다음 페이지로 넘어가자.

4. 진동에서의 평형점 풀이

앞서 중력 퍼텐셜 에너지를 설명할 때, 퍼텐셜 에너지를 운동 에너지의 창고라고 생각하자고 했었다.
하지만 용수철이 있다면 중력 퍼텐셜 에너지 외에도 탄성력에 의한, 탄성 퍼텐셜 에너지를 고려해 주어야 하기에 퍼텐셜 에너지 창고가 2개가 된다.

중력 퍼텐셜 에너지 창고와 탄성 퍼텐셜 에너지 창고 중 하나만 고려하면 문제를 풀 때 식이 그닥 복잡하지는 않다.

1) 만약 연직 방향으로 운동하는 물체가 용수철과 연결되어 있지 않다면, 중력 퍼텐셜 에너지 창고에서 꺼내는 것만을 고려하면 되어 문제를 풀 때 무리가 없을 것이다.
2) 반대로 용수철에 연결된 물체가 수평 방향으로 운동한다면, 이 역시 탄성 퍼텐셜 에너지 창고만을 고려하면 되어 문제를 풀 때 큰 무리가 없을 것이다.

그런데 위 두 상황이 겹쳐지면 상당히 복잡해진다.

용수철에 연결되어 대각선 혹은 연직 방향으로 운동하는 물체의 경우, 역학적 에너지 보존을 쓰기 위해서는 운동 에너지, 중력 퍼텐셜 에너지, 탄성 퍼텐셜 에너지 이렇게 3개의 에너지를 모두 고려해야 한다.
에너지가 창고 하나에서만 나왔다 들어가는 경우에 비해, 창고 두 개를 모두 고려하면 풀이의 길이가 너무 길어지게 되어 불편해진다.

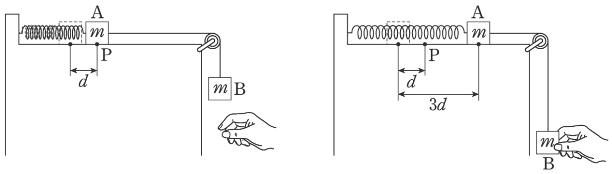
이런 상황에서의 해결책이 평형점 풀이이다.

어차피 중력 퍼텐셜 에너지 창고와 탄성 퍼텐셜 에너지 창고 모두 퍼텐셜 에너지 창고에 속한다.
그러므로 두 창고를 어떤 방법으로 잘 합쳐서 **하나의 에너지 창고**로 만들면 참 편할 듯하다.

이렇게 두 개로 분리되어 복잡해진 창고를 커다란 하나로 만들기 위해 등장한 것이 **평형점 풀이**이다.

예제(8) 13학년도 수능 19번

그림 (가)와 같이 마찰이 없는 수평면에서 용수철과 연결된 물체 A를 물체 B와 실로 연결하였더니, 용수철이 원래 길이에서 d만큼 늘어나 A가 점 P에 평형 상태로 정지해 있었다. 그림 (나)는 (가)에서 B를 중력 방향으로 당겨 용수철이 원래 길이에서 $3d$만큼 늘어나도록 잡고 있는 모습을 나타낸 것이다. (나)에서 B를 가만히 놓으면 A는 P를 v의 속력으로 지난다. A와 B의 질량은 m으로 같다.



(가) (나)

v는? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기, 용수철과 실의 질량, 도르래의 마찰, 공기 저항은 무시한다.) [3점]

① $\sqrt{gd}$ ② $\sqrt{2gd}$ ③ $\sqrt{3gd}$ ④ $\sqrt{6gd}$ ⑤ $3\sqrt{gd}$

일반적인 풀이

(가)에서 힘의 평형이 이루어져 있으므로, $mg = kd$이다. (나)에서 물체를 손으로 놓을 때부터 P를 지나는 순간까지 비보존력이 작용하지 않으므로 전체 역학적 에너지가 보존되며, 에너지의 변화량은 다음과 같다.

$$\text{운} \uparrow : \frac{1}{2}(2m)v^2$$

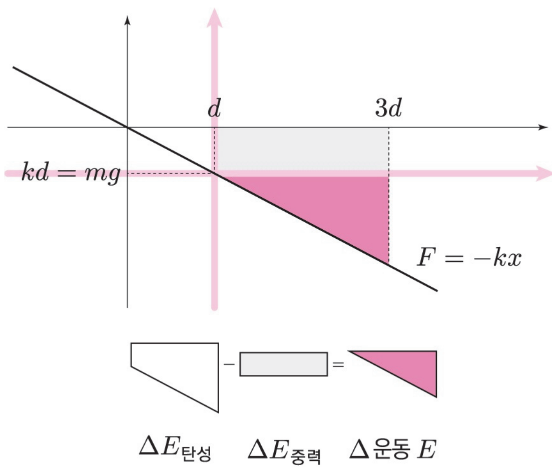
$$\text{퍼} \uparrow : 2mgd$$

$$\text{탄} \downarrow : \frac{1}{2}k\left(8d^2\right)$$

$mg = kd$를 이용하면 $\frac{1}{2}k\left(8d^2\right) = 4mgd$이다. 역학적 에너지 보존에 의해 $\frac{1}{2}(2m)v^2 = 2mgd$이다.

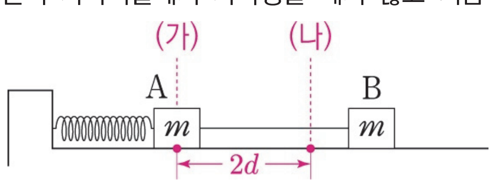
따라서 $v = \sqrt{2gd}$ 이다.

다른 풀이(평형점 이용하기)



위 그래프를 보면, 운동 에너지를 사다리꼴에서 직사각형을 빼 삼각형을 만들어서 구하는 것을 확인할 수 있다. 중력은 언제나 x축에 평행하게 그어지므로, 중력 퍼텐셜 에너지 변화량은 무조건 직사각형이다. 탄성 퍼텐셜 에너지 변화량은 원래 길이로 돌아가는 게 아닌 이상 무조건 사다리꼴이다. 따라서 모든 상황에서, 사다리꼴에서 사각형을 빼는 꼴이 된다.

그러니 운동 에너지를 구할 때, 굳이 사다리꼴에서 사각형을 빼지 않고 처음부터 삼각형을 구할 수도 있겠다.



중력과 탄성력이 평형을 이루는 지점을 그래프의 새로운 원점으로 잡고, 중력을 머릿속에서 모두 없애버린 뒤 새롭게 xy축을 긋자. (가)에서 처음부터 용수철은 원래 길이였고, (나)에서는 원래 길이로부터 $2d$ 늘어난 상황이 된다. 중력 퍼텐셜 에너지를 탄성 퍼텐셜 에너지에 포함하는 것이다.

정답 : ② $\sqrt{2gd}$

〈 평형점의 특징 〉

1. **평형점을 지날 때 속력이 최대이다.**

   평형점은 앞서 중력 퍼텐셜 에너지를 탄성 퍼텐셜 에너지에 포함한 것이라 했고, 우리는 문제를 풀 때 평형점이 마치 용수철의 원래 길이인 것처럼 생각하기로 했다.

   따라서 물체가 평형점을 지날 때는 퍼텐셜 에너지가 최소이므로 운동 에너지는 최대가 된다.

2. **알짜힘이 0인 지점이다. 즉, 중력 = 탄성력이 된다.** (빗면에서는 빗면 방향 중력과 크기가 같다.)

3. **물체는 평형점을 중심으로 진동한다.**

   평형점을 기준으로 좌우 대칭인 진동을 하게 된다. 곧 평형점은 진동의 중심점이다. (진동의 양 끝 지점이 평형점을 기준으로 좌우 대칭이다.)

   ‘평형점 = 진동의 중심 = **정지 to 정지 상황에서 중점**’

힘의 평형점 = 진동의 중심점 = 속력이 최대인 지점

5. 진동에서의 최대 속력

속력이 최대가 되는 지점은 진동의 중심점(=평형점)이다. 그럼 속력의 최댓값은 어떻게 구할까?

일반적으로는 속력의 최댓값은 진동의 중심점에서의 운동 에너지를 구한 뒤, 운동 에너지에서 속력값을 꺼내어 구하는 방식으로 구할 수밖에 없다. 왜냐하면 가속도의 크기가 일정하지 않으므로, 앞서 Chapter 1에서 다루었던, 속력을 구할 수 있는 방법들을 쓸 수 없기 때문이다.

그런데, 만약 진동이 수평면에서의 진동으로 한정된다면, 아래 방식으로 최대 속력을 구할 수 있다. (사실 바로 위 문단에서 설명한 것과 완전 같은 내용이지만 더 단순화가 가능하다.)

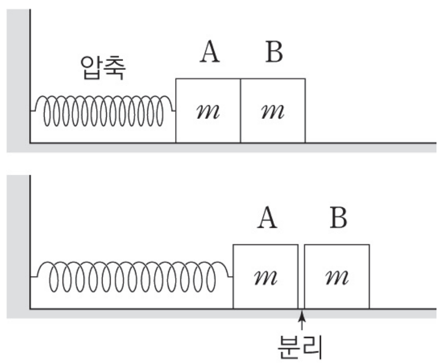
진동의 중심점에서의 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2$과 진동의 양 끝점에서의 탄성 퍼텐셜 에너지 $\frac{1}{2}kA^2$에 대해, 역학적 에너지 보존에 의해 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2$이 성립하고 최대 속력 $v = \sqrt{\frac{k}{m}}A$로 정리된다.

> 진동의 중심점에서의 E_{K}를 구한 후, 최대 속력 v를 구한다.
>
> 수평 진동의 경우 최대 속력 $v = \sqrt{\frac{k}{m}}A$를 쓸 수 있다.

6. 압축된 두 물체는 용수철의 원래 길이에서 분리된다.

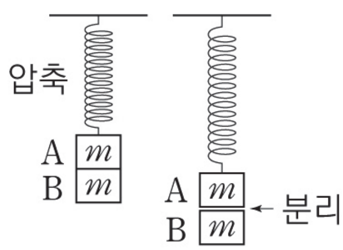
아래 이어 나올 네 가지 경우처럼 압축된 용수철에 하나의 물체가 연결되어 있고, 또 다른 물체가 맞닿아 있다. 용수철이 펼쳐지면서 두 물체는 속도가 변하는 운동을 하게 될 것이다. 두 물체가 분리되는 순간을 생각해 보자. 붙어서 함께 이동할 때에는 속도와 가속도가 동일하지만,
앞서가는 물체의 가속도가 뒤따라가는 물체보다 커지는 순간 두 물체의 속도가 달라지며 분리될 것이다.
이를 이용해서 두 물체가 분리되는 지점에 대해 알아보기로 하자.

Case 1)



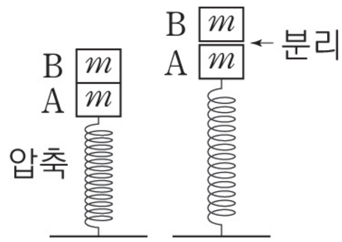
분리되는 순간 두 물체의 알짜힘을 체크해 보자. 오른쪽 방향을 (+)로 설정하면,
A : 탄성력 $= ma$
B : 0
$a \leq 0$일 때 두 물체가 분리되므로, 탄성력의 크기가 0이 되며 방향이 바뀌는 지점인 **용수철이 원래 길이가 되는 지점**에서 두 물체가 분리된다.

Case 2)



분리되는 순간 두 물체의 알짜힘을 체크해 보자. 아래 방향을 (+)로 설정하면,
A : $mg +$ 탄성력 $= ma$
B : mg
$a \leq g$일 때 두 물체가 분리되므로, 탄성력의 크기가 0이 되며 방향이 바뀌는 지점인 **용수철이 원래 길이가 되는 지점**에서 두 물체가 분리된다.

$Case\,3)$



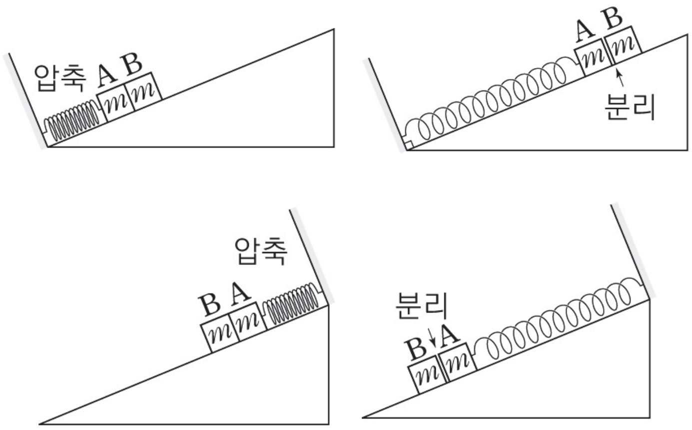
분리되는 순간 두 물체의 알짜힘을 체크해 보자. 아래 방향을 (+)로 설정하면,

A : $mg+\text{탄성력}=ma$

B : mg

$a \geq g$일 때 두 물체가 분리되므로, 탄성력의 크기가 0이 되며 방향이 바뀌는 지점인 **용수철이 원래 길이가 되는 지점**에서 두 물체가 분리된다.

$Case\,4)$



분리되는 순간 두 물체의 알짜힘을 체크해 보자.

빗면 아래 방향을 (+)로 설정하고 빗면 방향으로 질량이 m인 물체가 받는 빗면힘을 f라 하면,

A : $f+\text{탄성력}=ma$

B : f

$a \leq \text{빗면 가속도}$일 때 두 물체가 분리되므로, 탄성력의 크기가 0이 되며 방향이 바뀌는 지점인 **용수철이 원래 길이가 되는 지점**에서 두 물체가 분리된다.

네 가지 경우 모두 두 물체는 용수철이 **원래 길이가 되는 지점**에서 물체가 분리된다는 결론을 얻었다. 이제 이런 문제 상황이 등장했을 때 우리는 분리 지점을 직접 찾을 필요가 없이 이미 아는 내용으로 시간을 줄이고 앞서 나가면 되는 거다.

예제(9) 21년 10월 교육청 20번

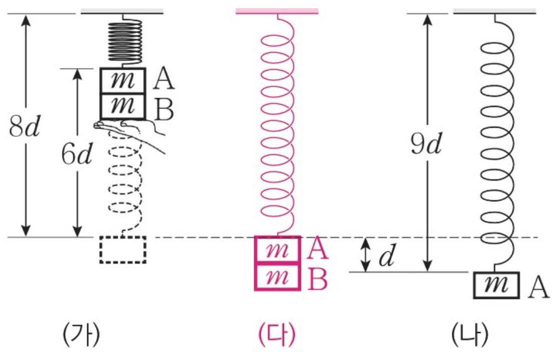
그림 (가)와 같이 원래 길이가 $8d$인 용수철에 물체 A를 연결하고, 물체 B로 A를 $6d$만큼 밀어 올려 정지시켰다. 용수철을 압축시키는 동안 용수철에 저장된 탄성 퍼텐셜 에너지의 증가량은 A의 중력 퍼텐셜 에너지 증가량의 3배이다. A와 B의 질량은 각각 m이다. 그림 (나)는 (가)에서 B를 가만히 놓았더니 A가 B와 함께 연직선상에서 운동하다가 B와 분리된 후 용수철의 길이가 $9d$인 지점을 지나는 순간을 나타낸 것이다.

(가) (나)

(나)에서 A의 운동 에너지는? (단, 중력 가속도는 g이고, 용수철의 질량, 물체의 크기, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

① $\frac{29}{2}mgd$ ② $\frac{31}{2}mgd$ ③ $\frac{63}{4}mgd$ ④ $\frac{65}{4}mgd$ ⑤ $\frac{33}{2}mgd$

우리는 두 물체가 '용수철이 원래 길이가 되는 지점'에서 분리됨을 알고 있다.
분리되는 순간을 그리면 아래와 같다. 이 순간을 (다)라고 하자.



(가)~(다) 동안에는 A, B가 계를 이루어 운동하고, (다)~(나) 동안에는 서로 별개의 계로 나누어진다.
먼저 (가)~(다) 동안, 계의 에너지 변화는 아래와 같다.

$E_{\mathrm{K}} \uparrow$
$E_{\mathrm{P}} \downarrow 12mgd$
$E_{탄} \downarrow 18kd^2 = 18mgd$

문제 조건에 의해 $18kd^2$는 $18mgd$와 같다.
역학적 에너지 보존에 의해 운동 에너지 증가량은 $30mgd$이다.
(다) 순간 두 물체는 운동 에너지를 $15mgd$씩 나누어 가지게 된다.

(다)~(나) 동안에는 A만 고려하면 답을 구할 수 있겠다. A의 에너지 변화는 아래와 같다.

$E_{\mathrm{K}} \uparrow$
$E_{\mathrm{P}} \downarrow mgd$
$E_{탄} \uparrow \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mgd$

따라서 운동 에너지 증가량은 $\frac{1}{2}mgd$이다.

결국 (나) 순간 A의 운동 에너지는 $15mgd + \frac{1}{2}mgd = \frac{31}{2}mgd$이다.

정답 : ② $\frac{31}{2}mgd$

7. 물체 양쪽에 용수철이 연결된 경우

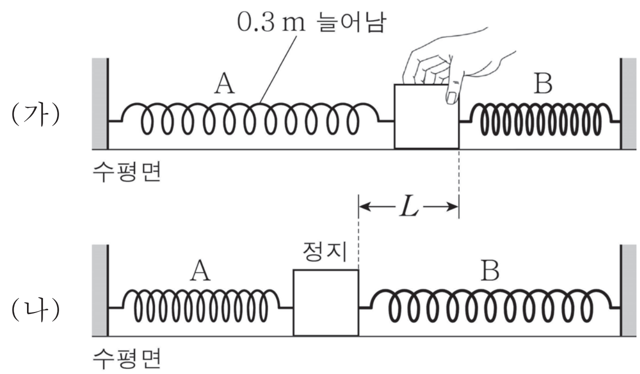
굉장히 당황하기 쉬울 것이다. 한쪽에만 용수철이 달린 경우만 공부했는데, 물체 양쪽에 용수철이 달려 있는 경우는 본 적이 없기 때문이다.
하지만 생각해 보면 진동의 형태는 용수철이 하나일 때와 동일하다.
왜냐하면 용수철이 가하는 힘은 일차식이고, 두 개의 용수철이 가하는 힘의 합 또한 일차식이기 때문이다. 따라서 물체는 용수철이 하나일 때와 마찬가지로 사인파의 형태를 띠는 단진동을 하게 된다.

그래서 다음 성질을 그대로 사용할 수 있다.

힘의 평형점 = 진동의 중심점 = 속력이 최대인 지점

예제(10) 21년 3월 교육청 20번

그림 (가)와 같이 수평면에서 용수철 A, B가 양쪽에 수평으로 연결되어 있는 물체를 손으로 잡아 정지시켰다. A, B의 용수철 상수는 각각 100 N/m, 200 N/m이고, A의 늘어난 길이는 0.3 m이며, B의 탄성 퍼텐셜 에너지는 0이다. 그림 (나)와 같이 (가)에서 손을 가만히 놓았더니 물체가 직선 운동을 하다가 처음으로 정지한 순간 B의 늘어난 길이는 L이다.



L은? (단, 물체의 크기, 용수철의 질량, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

① 0.05 m ② 0.1 m ③ 0.15 m ④ 0.2 m ⑤ 0.3 m

0. 문제 상황 파악하기

(가)에서 (나)로 진행할 때 변한 것이 무엇인지 생각해보자. (가)와 (나)에서 물체는 모두 정지 상태이므로 운동 에너지는 0으로 동일하다. 중력 퍼텐셜 에너지 또한 차이가 없으므로 총 탄성 퍼텐셜 에너지도 동일하다. 용수철 A와 B사이에 탄성 퍼텐셜 에너지를 나눠 가지게 되는 것이다.

1, L의 범위 파악하기(이 문제 풀이에는 필수적이지 않지만 센스를 익혀두라.)

센스가 있는 사람들이라면 바로 알았을 수도 있다. 용수철 상수가 $\mathrm{A}>\mathrm{B}$이므로 L은 $0.3\mathrm{m}$보다 작을 수밖에 없다. 왜냐하면, (가)에서 탄성 퍼텐셜 에너지는 A : $4.5\mathrm{J}$, B : $0\mathrm{J}$인데, 만약 L이 $0.3\mathrm{m}$라면 (나)에서 A의 탄성 퍼텐셜 에너지는 0이 되지만. B의 탄성 퍼텐셜 에너지는 $9\mathrm{J}$이 되므로(용수철 상수의 크기비가 $1:2$이므로 탄성 퍼텐셜 에너지비도 $1:2$가 된다.) 탄성 퍼텐셜 에너지가 (가)보다 커지게 된다. 따라서 L은 $0.3\mathrm{m}$이 될 수 없다.

그렇다면 만약 L이 $0.3\mathrm{m}$보다 크면 어떻게 될까? 잠시 생각해 보면 역시나 말이 안 된다는 것을 알 수 있다. $L=0.3\mathrm{m}$일 때보다도 A와 B 모두 탄성 퍼텐셜 에너지가 증가하기 때문이다.

따라서 L은 $0.3\mathrm{m}$보다 작다는 결론에 도달한다.

2. L구하기

(나)에서 A가 늘어난 길이를 $0.3\mathrm{m}-L$이라 하자.

그렇다면 (나)에서의 탄성 퍼텐셜 에너지는 $\frac{1}{2}(100)(0.3\mathrm{m}-L)^2+\frac{1}{2}(200)L^2$이 된다.

이 값이 $4.5\mathrm{J}$이 되어야 하므로, $150L^2-30L=0$에서 $L=0.2\mathrm{m}$가 된다.

정답 : ④ $0.2\mathrm{m}$

또다른 풀이

(가)와 (나)는 모두 물체가 정지했다는 공통점이 있다. 이 말인즉슨, (가) 상태에서 왼쪽으로 물체가 가속하여 평형점을 지나고, 감속하여 (나) 상태가 된 것이다. 즉, (가)와 (나)는 각각 진동의 오른쪽 끝과 왼쪽 끝인 것이다. 따라서, 진동의 양 끝점의 중심점(진동의 중심점)은 힘이 평형을 이루는 지점임을 이용하면, L을 구할 수 있다.

평형점에서 두 용수철 A, B의 늘어난 길이를 x_1, x_2라고 하면, 평형점에서 두 물체에 가해지는 힘의 평형식 $100x_1=200x_2$를 얻는다.

또한, 용수철의 늘어난 길이의 합은 항상 $0.3\mathrm{m}$이므로, x_1+x_2는 $0.3\mathrm{m}$이다.

따라서 $x_1=0.2\mathrm{m}$, $x_2=0.1\mathrm{m}$이다.

즉, L은 $2x_2$와 같으므로 $0.2\mathrm{m}$이다.

정답 : ④ $0.2\mathrm{m}$

8. 평균 탄성력의 활용

증명은 한 번 이해해두고 넘어가고, 결론(아래 박스)을 외우자.

용수철 상수가 k인 용수철에 연결된 물체에 대해, 변위24)가 x_1, x_2인 두 순간이 있다.

평균 탄성력은 $\frac{1}{2}k(x_1+x_2)$이다.

식 '$\text{평균 탄성력} = \frac{1}{2}k(x_1+x_2)$'의 양변에 (x_2-x_1)를 곱해 주면 아래와 같은 공식을 얻는다.

$(\text{평균 탄성력})\times(x_2-x_1)=\frac{1}{2}k\left(x_2^2-x_1^2\right)$

(평균 탄성력) × (변화한 길이) = (탄성 퍼텐셜 에너지 변화량)

9. 평균 알짜힘의 활용

증명은 한 번 이해해두고 넘어가고, 결론(아래 박스)을 외우자.

용수철 상수가 k인 용수철에 연결된 물체에 대해, 용수철의 변위가 x_1, x_2인 두 순간이 있다. 탄성력 이외의 힘을 f라 하면(f는 변하지 않는 힘이어야 한다.), 두 순간의 알짜힘은 각각 kx_1+f, kx_2+f일 것이다.

두 순간의 알짜힘의 평균은 $\frac{1}{2}\{(kx_1+f)+(kx_2+f)\}$이다.

식 '$\text{평균 알짜힘} = \frac{1}{2}\{(kx_1+f)+(kx_2+f)\}$'의 양변에 (x_2-x_1)를 곱해 주면 아래와 같은 공식을 얻는다.25)

$(\text{평균 알짜힘})\times(x_2-x_1)=\frac{1}{2k}\left\{(kx_2+f)^2-(kx_1+f)^2\right\}$

$(\text{평균 알짜힘})\times(x_2-x_1)=\int_{x_1}^{x_2}(kx+f)dx$

알짜힘 $kx+f$를 적분하면 두 순간 사이의 알짜힘이 한 일이 되며 이는 운동 에너지 변화량이므로 아래가 성립한다.

(평균 알짜힘) × (변화된 길이) = (운동 에너지 변화량)

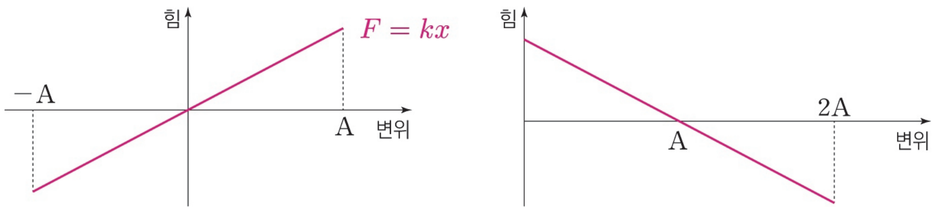
24) 여기서는 탄성력의 방향(부호)를 고려해야 하기에 방향이 있는 길이(=변위)로 생각하자!

25) $x_2-x_1=\frac{1}{k}\{(kx_2+f)-(kx_1+f)\}$이다.

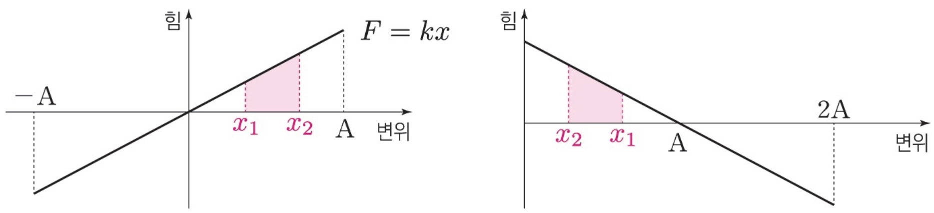
10. 힘-변위 그래프

선택 사항이다. 힘-변위 그래프를 이용하는 방법을 아예 몰라도 전혀 문제 없다. 그래프를 통해 문제 풀기를 좋아한다면 사용하는 것을 추천한다. 단, 에너지의 변화를 따질 때는 직접 눈으로 증감 여부를 확인하는 것을 잊지 말자. 여기서 실수가 꽤 나온다.

용수철 상수가 k인 용수철이 x만큼 변형되어 물체에 작용하는 탄성력 F에 대해, $F = kx$이고, 가로축이 x이고, 세로축이 F인 좌표평면에 그래프를 나타낸다면 일차함수의 꼴이 될 것이고 k는 직선의 기울기가 될 것이다(왼쪽 그래프). 용수철의 진동의 중심이 아닌 진동의 끝을 세로축에 맞닿게 그리는 식으로 그려 주면 아래처럼 그릴 수도 있다(오른쪽 그래프). 의미는 똑같으니 편한 방식으로 그리도록 하자.

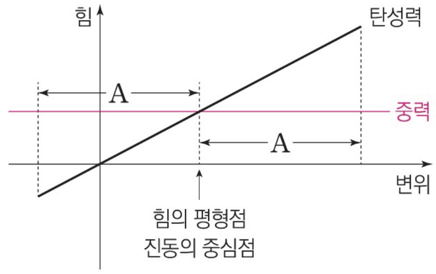


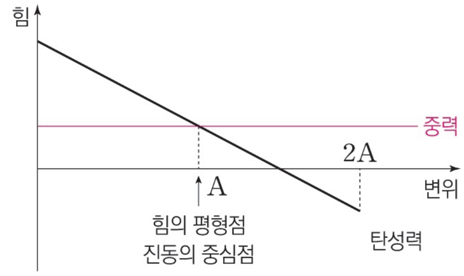
수평면 위에서 수평 방향으로 진동하는 경우에는 중력을 신경 쓰지 않아도 되므로 위 그래프가 곧 알짜힘의 그래프이기도 하다.



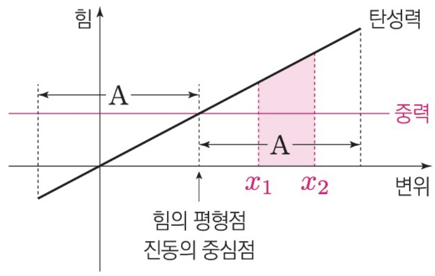
탄성 퍼텐셜 에너지 변화량은 변위 x_1에서 x_2까지 F를 적분하여 구한다. 즉, 밑넓이의 넓이를 구하면 된다는 것이다. 운동 에너지 변화량은 F가 곧 알짜힘이므로, F를 적분하여 구한 값과 크기가 같고 부호가 다르다.

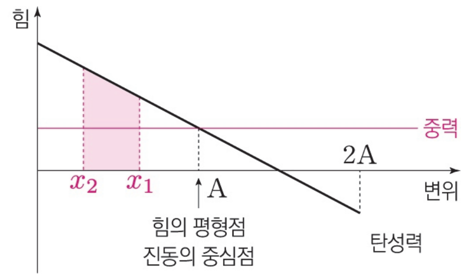
그런데 수평 방향 진동이 아닌 수직 방향 진동의 경우 중력을 고려해 주어야 한다.
따라서 우리는 위의 탄성력-변위 그래프에 중력을 추가로 그려 줄 텐데, 여기서 한 가지 주의점이 있다. 실제 중력 그래프의 부호를 반대로 하여 그려 주도록 한다. 그러면 중력은 이렇게 그려지게 된다.



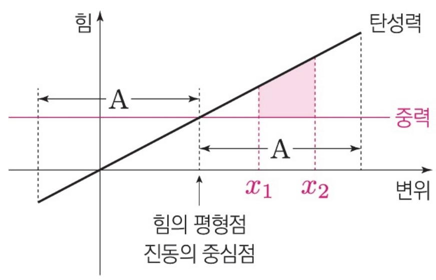


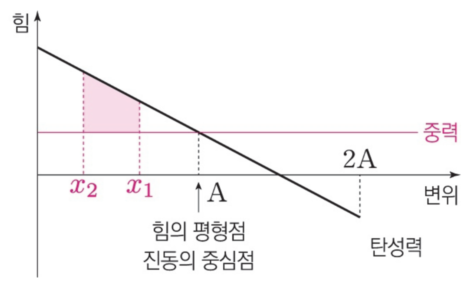
두 그래프가 교차하는 지점이 바로 중력과 탄성력의 크기가 같은 지점이며 힘의 평형을 이루는 지점이다. (중력 그래프를 위로 뒤집어 올렸기에 그래프 상에서의 부호는 같게 나타나지만 실제 방향은 반대이다.) 이 지점이 힘의 평형점이기도 하지만 진동의 중심점이자 속도가 최대인 지점이기도 하다.





탄성 퍼텐셜 에너지 변화량은 마찬가지로 변위 x_1에서 x_2까지 F를 적분하여 구한다. 즉, 탄성력 그래프의 밑넓이(위 그림의 색칠된 넓이)를 구하면 된다는 것이다.



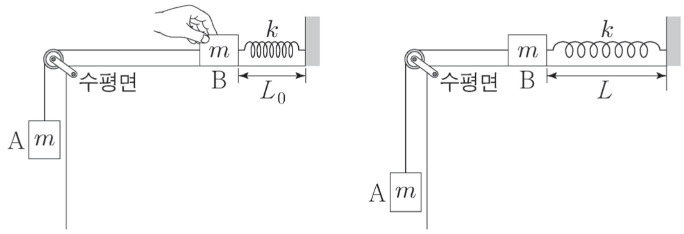


운동 에너지 변화량의 경우 중력 그래프를 가로축처럼 생각하여 밑넓이를 구하면 된다. 탄성력 그래프와 중력 그래프 사이의 (위 그림의 색칠된)넓이를 구하면 된다는 것이다.

그래프를 이용해서 최대 운동 에너지를 구하기는 간단하다.
위 그래프에서 힘의 평형점부터 최대 변위까지, 탄성력 그래프와 중력 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이가 최대 운동 에너지가 된다.

예제(11) 21학년도 9월 평가원 20번

그림 (가)는 물체 A와 실로 연결된 물체 B를 원래 길이가 L_0인 용수철과 수평면 위에서 연결하여 잡고 있는 모습을, (나)는 (가)에서 B를 가만히 놓은 후, 용수철의 길이가 L까지 늘어나 A의 속력이 0인 순간의 모습을 나타낸 것이다. A, B의 질량은 각각 m이고, 용수철 상수는 k이다.



(가) (나)

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 가속도는 g이고, 실과 용수철의 질량 및 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

〈보 기〉

ㄱ. $L-L_0=\dfrac{2mg}{k}$이다.

ㄴ. 용수철의 길이가 L일 때, A에 작용하는 알짜힘은 0이다.

ㄷ. B의 최대 속력은 $\sqrt{\dfrac{m}{k}}\,g$이다.

0. 문항 파악 및 분석

(가)에서 손을 놓아 (나)의 상황까지 변할 때, (나)에서 힘의 평형이 성립하는 것으로 오해하기 쉽다.
하지만 그렇지 않다. 용수철의 진동 형태에서, 용수철이 가장 많이 늘어난 위치를 나타낸 그림이 (나)인 것이다.
따라서 속력은 0이 맞지만, 용수철이 위쪽으로 가속되는 중임에 주의해야 한다. **(ㄴ 틀림)**

1. (가), (나) 비교 분석

A와 B를 계로 보고 (가)와 (나)의 차이를 보면, 계의 운동 에너지의 차이는 없고, 계의 중력 퍼텐셜 에너지와 탄성 퍼텐셜 에너지만 변했다. (가)에서 (나)로 변하는 도중에 외부에서 가한 힘은 없으므로 전체 역학적 에너지가 보존된다.

(가)에서 (나)로 변할 때 계의 중력 퍼텐셜 에너지 감소량 $mg(L-L_0)$와 계의 탄성 퍼텐셜 에너지 증가량 $\frac{1}{2}k(L-L_0)^2$가 같으므로, $L-L_0=\frac{2mg}{k}$를 얻는다. **(ㄱ 맞음)**

2. 최대 속력 구하기

에너지 변화량을 체크해 보면서 최대 속력을 구해보자.
속력이 최대일 때 늘어난 길이를 x라 하면, x는 진동의 중심점이자 힘의 평형점일 것이다.

x는 진동의 중심점이므로 $x=\frac{L-L_0}{2}$이고, 힘의 평형점이므로 $kx=mg$이고 $x=\frac{mg}{k}$이다.

(가)에서 속력이 최대인 시점까지 계의 중력 퍼텐셜 에너지가 $mgx=\frac{(mg)^2}{k}$만큼 감소하고,

운동 에너지가 $\frac{1}{2}(2m)v^2$만큼 증가하며, 탄성 퍼텐셜 에너지가 $\frac{1}{2}kx^2=\frac{(mg)^2}{2k}$만큼 증가한다.

세 에너지의 변화량의 합이 0이어야 하므로, $\frac{(mg)^2}{k}=mv^2+\frac{(mg)^2}{2k}$이고 $\frac{(mg)^2}{2k}=mv^2$이다.

따라서 $v=\sqrt{\frac{m}{2k}}g$이다. **(ㄷ 틀림)**

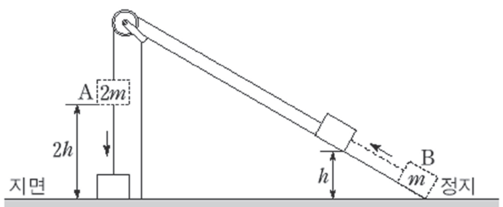
정답 : ㄱ

Chapter

04 유제

01 12학년도 수능 8번

그림과 같이 질량이 각각 $2m$, m인 물체 A, B를 실로 연결한 후 A를 정지 상태에서 가만히 놓았더니, A가 $2h$만큼 낙하하는 동안 B는 마찰이 없는 빗면을 따라 높이 h만큼 올라갔다.



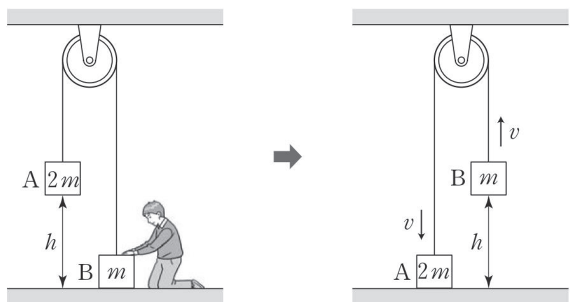
A가 지면에 닿는 순간, A의 속력은? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기, 실의 질량, 도르래의 마찰, 공기 저항은 무시한다.) [3점]

① $\sqrt{\frac{gh}{2}}$ ② $\sqrt{gh}$ ③ $\sqrt{2gh}$

④ $\sqrt{3gh}$ ⑤ $2\sqrt{gh}$

02 13학년도 9월 평가원 7번

그림 (가)와 같이 질량이 각각 $2m$, m인 물체 A, B를 줄로 연결한 후, B를 지면에 닿도록 눌렀더니 A가 지면으로부터 높이 h인 곳에 정지해 있었다. 그림 (나)는 B를 가만히 놓은 후 A가 지면에 닿는 순간, A와 B가 v의 속력으로 운동하고 있는 모습을 나타낸 것이다.



(가) (나)

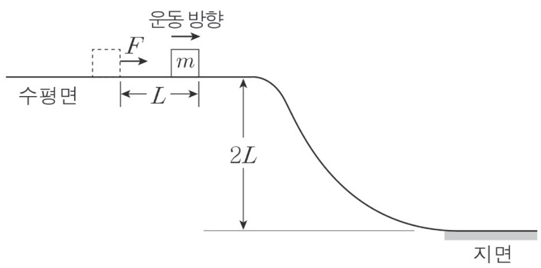
v는? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기, 줄의 질량, 도르래의 마찰, 공기 저항은 무시한다.) [3점]

① $\sqrt{\frac{gh}{3}}$ ② $\sqrt{\frac{gh}{2}}$ ③ $\sqrt{\frac{2gh}{3}}$

④ $\sqrt{gh}$ ⑤ $\sqrt{2gh}$

03 13년 10월 교육청 16번

그림과 같이 높이가 $2L$인 수평면에 정지해 있던 질량 m인 물체에 수평 방향의 일정한 힘 F를 물체가 거리 L만큼 이동할 때까지만 작용하였다.



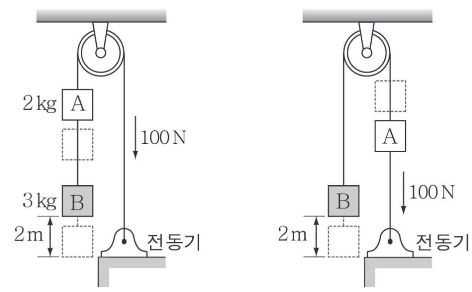
지면에서의 물체의 운동 에너지가 경사면을 내려오기 직전의 2배일 때, F는? (단, 중력 가속도는 g이고, 물체의 크기와 모든 마찰, 공기 저항은 무시한다.) [3점]

① $\frac{mg}{2}$ ② $\frac{2mg}{3}$ ③ mg

④ $2mg$ ⑤ $3mg$

04 14년 3월 교육청 19번

그림 (가), (나)와 같이 줄로 연결되어 정지해 있던 두 물체 A, B를 전동기가 100N의 일정한 힘으로 당겨 연직 방향으로 이동시켰다. A, B의 질량은 각각 2kg, 3kg이다.



(가) (나)

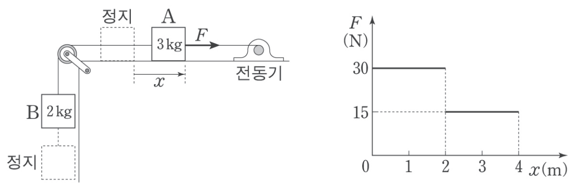
(가), (나)에서 전동기가 줄을 2m만큼 당긴 순간 B의 운동 에너지를 각각 E_1, E_2라고 할 때, $E_1 : E_2$는? (단, 중력 가속도는 10m/s^2이고, 줄의 질량, 마찰과 공기 저항은 무시한다.) [3점]

① 1:3 ② 2:3 ③ 2:5

④ 3:7 ⑤ 5:9

05 15학년도 6월 평가원 8번

그림 (가)는 B와 실로 연결되어 수평면에 정지해 있던 A를 전동기가 수평 방향으로 힘 F로 당기고 있는 것을 나타낸 것이다. 그림 (나)는 A가 4m 이동하는 동안 F의 크기를 A의 위치 x에 따라 나타낸 것이다. A, B의 질량은 각각 3kg, 2kg이다.



(가) (나)

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 가속도는 10m/s^2이고, 모든 마찰과 공기 저항, 실의 질량은 무시한다.) [3점]

<보 기>

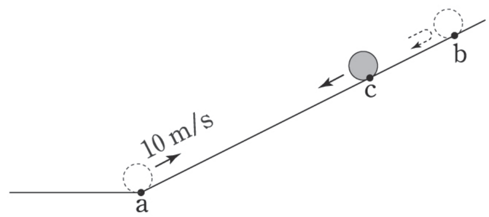
ㄱ. $x = 3\text{m}$일 때, 실이 B를 당기는 힘의 크기는 18N이다.

ㄴ. F가 한 일은 B의 역학적 에너지 증가량과 같다.

ㄷ. A의 최대 속력은 2m/s이다.

06 15학년도 9월 평가원 19번

그림은 질량 1kg인 물체가 마찰이 없는 빗면의 점 a를 지나 점 c를 통과하여 최고점 b에 도달한 후, 다시 c를 지나는 순간의 모습을 나타낸 것이다. 물체가 a에서 b를 거쳐 c에 도달하는 데 걸린 시간은 3초이고, a에서 물체의 속력은 10m/s이며, c에서 물체의 중력에 의한 퍼텐셜 에너지는 운동 에너지의 3배이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a에서 중력에 의한 퍼텐셜 에너지는 0이며, 공기 저항과 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. c에서 물체의 속력은 5m/s이다.

ㄴ. b에서 물체의 가속도 크기는 5m/s^2이다.

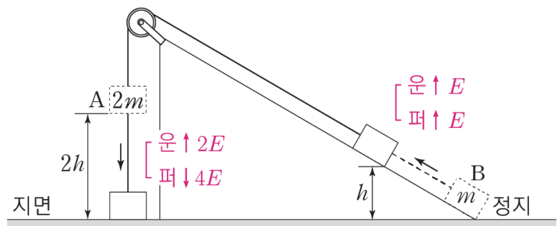
ㄷ. a와 c 사이의 거리는 7m이다.

Chapter 04 일과 에너지 그리고 역학적 에너지 보존

01 12학년도 수능 8번

정답 : ③ $\sqrt{2gh}$

계 A, B의 전체 역학적 에너지는 보존된다. A는 빨라지므로 운동 에너지가 증가하며, 아래로 내려가므로 중력 퍼텐셜 에너지가 감소한다. B는 빨라지므로 운동 에너지가 증가하며, 위로 올라가므로 중력 퍼텐셜 에너지가 증가한다. 구간을 따라 운동하는 동안 A와 B의 운동 에너지와 중력 퍼텐셜 에너지의 변화량을 에너지 변화량 비교 틀을 이용해 비교하면 아래 그림과 같다.



A와 B는 계를 이루어 운동하므로 속력이 항상 같고, 운동 에너지 변화량 비는 질량비와 같다. 따라서 운동 에너지 변화량의 크기를 $2E$, E라고 할 수 있다. 중력 퍼텐셜 에너지 변화량 비는 물체의 질량의 크기와 높이 변화량의 크기 비를 동시에 고려해야 한다. 질량비가 $2:1$이고 높이 변화량의 크기 비가 $2:1$이므로 퍼텐셜 에너지 변화량의 크기 비는 $4:1$이다. 따라서 중력 퍼텐셜 에너지 변화량의 크기를 $4E'$, E'이라 할 수 있다. 역학적 에너지 보존 법칙에 의해
A퍼↓ $=$ A운↑ $+$B운↑ $+$B퍼↑ 이고, $E' = E$이다. 따라서 위 그림과 같이 에너지 변화량을 모두 찾을 수 있다.

A는 연직 방향으로 운동하므로, $\dfrac{\Delta E_{\mathrm{K}}\text{의 크기}}{\Delta E_{\mathrm{P}}\text{의 크기}}$가 $\dfrac{1}{2}$임을 이용하면 가속도의 크기가 $\dfrac{1}{2}g$임을 알 수 있다. 따라서 공식 $2a\Delta x = v^2 - v_0^2$을 이용하면 $v = \sqrt{2gh}$ 임을 얻는다.

또는, B의 중력 퍼텐셜 에너지의 증가량은 $E' = mgh$이고, B의 운동 에너지의 증가량이 $E = \dfrac{1}{2}mv^2$이다. $E' = E$이므로 $v = \sqrt{2gh}$ 이다. 따라서 정답은 ③ $\sqrt{2gh}$ 이다.

다른풀이

질량이 $3m$인 계로 생각하면, 운동 에너지 증가량은 $\dfrac{1}{2}(3m)v^2$, 중력 퍼텐셜 에너지 증가량은 $3mgh$이다. $3mgh = \dfrac{1}{2}(3m)v^2$을 풀면, $v = \sqrt{2gh}$ 이다.

따라서 정답은 ③ $\sqrt{2gh}$ 이다.

02 13학년도 9월 평가원 7번

정답 : ③ $\sqrt{\frac{2gh}{3}}$

역학적 에너지 보존을 이용해서 풀어 보자.
(가)에서 (나)로 되는 과정에서는 비보존력이 작용하지 않으므로 전체 역학적 에너지가 보존된다.

(가)에서 (나)로 될 때 계의 중력 퍼텐셜 에너지는 mgh만큼 감소하고, 운동 에너지는 $\frac{1}{2}(3m)v^2$만큼 증가한다.

따라서 $mgh=\frac{3}{2}mv^2$이고 $v=\sqrt{\frac{2gh}{3}}$이다.

03 13년 10월 교육청 16번

정답 : ④ $2mg$

경사면을 내려오기 직전의 운동 에너지와 지면에서의 운동 에너지를 각각 E, $2E$라 하자.

경사면을 내려오는 동안 비보존력이 작용하지 않으므로 물체의 역학적 에너지가 보존된다.
지면에서의 중력 퍼텐셜 에너지를 0이라 하면, 경사면을 내려오기 직전의 중력 퍼텐셜 에너지는 E이다. 따라서 $mg(2L)=E$를 얻는다.

F는 비보존력인 동시에 물체의 알짜힘이므로,
FL은 알짜힘이 한 일이며 운동 에너지 변화량인 E와 같다. 따라서 $F=2mg$임을 알 수 있다.

04 14년 3월 교육청 19번

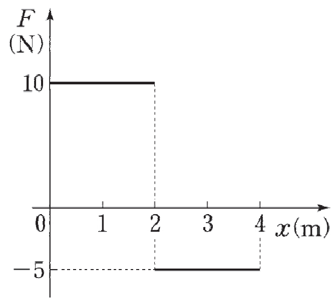
정답 : ⑤ $5:9$

(가)에서 계의 알짜힘은 시계 방향으로 $50\mathrm{N}$이고, (나)에서 계의 알짜힘은 $90\mathrm{N}$이다.
힘이 작용한 거리가 $2\mathrm{m}$로 같으므로, (가)와 (나)에서 알짜힘이 한 일의 크기 비는 $5:9$이다.
따라서 운동 에너지 변화량의 크기도 $5:9$이며, 처음엔 정지 상태였으므로 $E_1:E_2=5:9$이다.

05 15학년도 6월 평가원 8번

정답 : ㄱ

계의 알짜힘은 $F-20\mathrm{N}$ 이므로, 위치 x에 따른 알짜힘의 그래프를 그리면 다음과 같이 그려진다.



ㄱ. $x=3\mathrm{m}$ 일 때 계의 알짜힘은 $-5\mathrm{N}$ 이며, B의 알짜힘은 $-2\mathrm{N}$ 이다. 중력이 $-20\mathrm{N}$ 이므로, 장력은 $18\mathrm{N}$ 이어야 한다. **(ㄱ 맞음)**

ㄴ. F가 한 일은 A의 운동 에너지 증가량과 B의 역학적 에너지 증가량의 합과 같다. A는 힘을 받은 이후 속력이 0이 되지 않으므로 운동 에너지는 0이 아니다. 따라서 옳지 않다. **(ㄴ 틀림)**

ㄷ. 알짜힘의 그래프를 보면, 물체는 $x=2\mathrm{m}$ 일 때 운동 에너지가 최대가 됨을 알 수 있다. $x=2\mathrm{m}$ 까지 계의 알짜힘은 $10\mathrm{N}$ 이고 $2\mathrm{m}$ 동안 작용하므로, 계의 최대 운동 에너지는 $20\mathrm{J}$ 이다. 따라서 A의 최대 속력을 v라 할 때, $20=\frac{1}{2}\times5\times v^2$에서 $v=2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$ 이다. **(ㄷ 틀림)**

06 15학년도 9월 평가원 19번

정답 : ㄱ, ㄴ

a에서 b까지 운동할 때 이동한 길이에 비례하여 운동 에너지가 중력 퍼텐셜 에너지로 전환되기 때문에, 발문의 'c에서 물체의 중력에 의한 퍼텐셜 에너지는 운동 에너지의 3배이다.'를 통해, c는 a와 b의 3 : 1내분점이란 것을 알 수 있다.

따라서 c에서의 속력은 5m/s이고, 운동하는 순서대로 각 구간을 이동하는 데 걸리는 시간은 a~c : 1초, c~b : 1초, b~c : 1초이다.

각 구간에서 1초 동안의 속도 변화량의 크기가 5m/s이므로 가속도의 크기는 5m/s^2이다.

ㄱ. 앞서 구했듯이 c에서의 속력은 5m/s이다. **(ㄱ 맞음)**

ㄴ. 앞서 구했듯이 가속도의 크기는 5m/s^2이다. **(ㄴ 맞음)**

ㄷ. c가 a와 b의 3 : 1내분점이므로 a와 c 사이의 거리는 $\frac{15}{2}\text{m}$이다.

또는, a와 c 사이의 평균 속도의 크기가 $\frac{15}{2}\text{m/s}$이므로 $\frac{15}{2}\text{m}$이다. **(ㄷ 틀림)**

다른풀이

ㄱ. a에서 물체의 운동 에너지는 50J이고, 중력 퍼텐셜 에너지는 0J이다.

그러므로 c에서 물체의 운동에너지는 $50\times\frac{1}{4}=12.5\text{J}$이고, 속력은 5m/s이다. **(ㄱ 맞음)**

ㄴ. a에서 b를 거쳐 c로 돌아오는 3초 동안 물체의 속도 변화량의 크기는 15m/s이므로 가속도의 크기는 5m/s^2이다. **(ㄴ 맞음)**

ㄷ. a와 c 사이의 거리를 s라 하면 $2as=v^2-{v_0}^2$에 $a=5$, $v^2=100$, ${v_0}^2=25$를 대입하여 $s=7.5\text{m}$을 얻는다. **(ㄷ 틀림)**