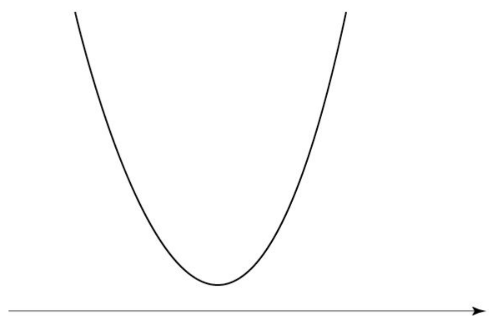
J&S 모의고사
0회 추가 해설

7. 등비수열
$(a_1)^2 = 3a_3$ 이고 $(a_3)^2 = a_1$ 이다.

$\dfrac{(a_1)^2}{(a_3)^2} = \dfrac{3a_3}{a_1}$ 로 둘 수 있고, 좌변의 값은 $\dfrac{1}{r^4}$ 이고, 우변의 값은 $3r^2$ 이다.

$\dfrac{1}{r^4} = 3r^2\ r^4 = \dfrac{3}{r^2}$ $\quad(\dfrac{a_3}{a_1} = r^2)$

8. 역행렬
$\begin{pmatrix} x+2n & -2 \\ 7n-20 & x \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재해야 하므로,
$x(x+2n)+2(7n-20) \neq 0$ 이어야 한다.
이를 함수로 해석하면 x 에 대하여 최고차항의 계수가 양수인 이차함수가 0 보다 커야 한다는 의미이다. 따라서 판별식이 0 보다 작아야 한다.



(위의 형태처럼 되어야 한다.)
$D = n^2 - 14n + 40 < 0$
$4 < n < 10$
만족하는 n 의 값은 5, 6, 7, 8, 9

9. 로그의 실생활 활용
$t = 2 - k\log_8\left(1 - \dfrac{n}{200}\right)$에서
5 분당 비누 150 개를 포장하는 데 걸리는 시간을 t_1 이라 하면,
$t_1 = 2 - k\log_8\left(1 - \dfrac{150}{200}\right) = 2 - k\log_8\left(\dfrac{1}{4}\right)$
5 분당 비누 50 개를 포장하는 데 걸리는 시간을 t_2라 하면,
$t_2 = 2 - k\log_8\left(1 - \dfrac{50}{200}\right) = 2 - k\log_8\left(\dfrac{3}{4}\right)$
t_1 은 t_2 의 2배 이므로, $2t_2 = t_1$
$4 - 2klog_8\left(\dfrac{3}{4}\right) = 2 - klog_8\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 에서 $k = 5$

10. 정규화
$\mathrm{P}(m - \dfrac{1}{2m} \le X \le m+2)$ 표준화시키면
$=\mathrm{P}(-\dfrac{1}{2} \le Z \le 2m)$ 따라서 $2m = 1.5$ 이어야 하므로 $100m = 75$

12. 등비수열의 합
함수 $f(x)$가 $x = n+3$와 만나는 점을 a_n이라 하고, $x = n+1$과 만나는 점을 b_n이라 한다.
$a_n = 3^n$, $\quad b_n = 1$ 이다.
따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(a_n + b_n) = 368$ 이다.

13. 확률분포표
$\mathrm{P}(-1 \le X \le m) = \mathrm{P}(0 \le X \le 3)$ 의 우변의 값은 $\dfrac{1}{2} + a$ 이다. 이를 만족하는 평균 m 의 값은 1 이다. (이산확률분포이므로 $m = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 등을 넣어보면 만족하는 m의 값은 $m = 1$밖에 될 수 없다.)
전체 확률의 총합이 1 이므로 $3a + b = \dfrac{1}{2}$ 이다.
또 평균이 1 이므로 $3a + 4b = \dfrac{5}{6}$.
둘을 연립하면 $a = \dfrac{7}{54},\ b = \dfrac{1}{9}$

14. 함수의 연속성
$g(x) = \dfrac{f(x) + |f(x)|}{2}$ 는 $x = -2,\ 2$ 에서 불연속이다. ($g(x)$ 는 $f(x) \ge 0$ 일 때는 $g(x) = f(x)$ 이고 $f(x) < 0$ 일 때는 $g(x) = 0$ 이다. 이 함수는 올 해 2015학년도 수능특강에 2번 이상 나왔던 함수이고, 위의 방식대로 그린다면 무리없이 식을 해석 할 수 있을 것이다.)
따라서 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면, $h(x)$가 $x = -2,\ 2$에서 근을 가져야 한다.
따라서 $h(x) = (x-2)(x+2)$

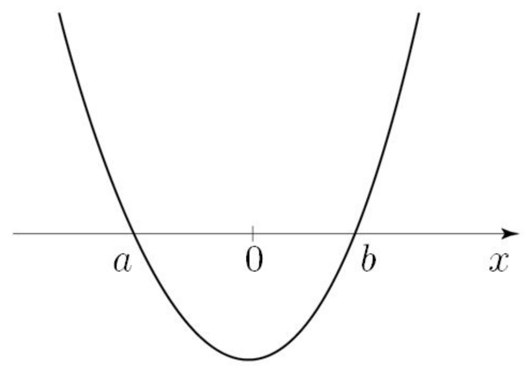
19. 조건부확률
우선 주사위의 약수의 개수가 2개 이상이 되어야 한다. 따라서 가능한 주사위 눈은 2, 3, 4, 5, 6 로 총 5가지이다. 이 중 동전이 2 번 앞면이 나와야 하므로 주사위의 눈이 2 일 때, 확률은
${}_2C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, 주사위의 눈이 3 일 때, 확률은
${}_3C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ …… 주사위의 눈이 6 일 때, 확률은
${}_4C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ 이다. 이 중 권욱이의 주사위가 홀수의 눈이 나왔을 확률은 조건부확률로서

$$\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}}$$

이다. (원래의 식은 위의 분수식처럼 주사위의 값이 나올 확률인 $\dfrac{1}{6}$ 을 곱한 값이지만 분모 분자 모두 6 으로 곱한 뒤 계산해도 좋다. 즉 주사위의 값이 나올 확률은 모두 같으므로 고려해주지 않아도 된다.)
따라서 답은 $\dfrac{1}{3}$

21. 함수의 그래프 이용하기(미분과 적분의 관계)
우선 $f(-3) = f(b+4) = 0$ 이다.
또, $b > 0$ 이기 때문에 경우를 3가지로 나눈다.
1. $a \le 0 < b$ 인 경우.
2. $0 \le a < b$ 인 경우.
3. $0 < b < a$ 인 경우.

그러나 2, 3 의 경우에는 (가)조건의 "함수 $y = |f(x)|$는 구간 $(-\infty,\ a)$에서 감소한다." 를 만족하지 않는다. 따라서 1의 경우만 가능한다.



위의 함수 $y = f'(x)$ 의 $a \le 0 < b$ 인 경우이다.
또, (가)조건에서 $(-\infty,\ a)$에서 감소한다고 하였는데 $f(-3) = 0$ 이므로, 만족하는 a 의 값은 -3 이다. ($-3 < a < 0$ 이라면, $y = |f(x)|$가 구간 $-3 < x < a$ 에서 증가하기 때문이다.)
따라서, $f(x) = \dfrac{1}{3}(x+3)^2(x-b-4)$ 극소점의 x좌표가 b이므로. $b = 5$
(이 문제의 핵심은 (나)의 "$x = b+4$ 에서 미분가능하지 않다" 이다. 즉 $f(x)$ 는 $x = b+4$ 를 근으로 가져야 한다. (=꺾인 점)

27. 사차함수의 극댓값
$f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{6}x^2 + \{f'(0)\}^3 x$에서
$f'(0)$ 의 값을 구하기 위해 양 변을 미분한 위 $x = 0$ 을 대입하면, $f'(0) = \{f'(0)\}^3$ 이다.
가능한 $f'(0)$ 의 값은 $-1,\ 0,\ 1$ 이다. 이 중, $y = f(x)$가 극댓값이 존재하려면, $f'(x) = 0$ 의 근이 서로 다른 세 실근이어야 한다.
$f'(x) = x^3 - \dfrac{1}{3}x + \{f'(0)\}^3$ 에서
만약 $f'(0)$이 ± 1이라면 한 실근과 두 허근을 갖는다.
따라서, $f'(0) = 0$ 이다.
($f'(0) = \pm 1$인 경우는 극댓값이 존재하지

않는다. 즉, $f'(0)=\pm 1$인 경우는 $y=f'(x)$가 $y=0$과 서로 다른 세 점에서 만나지 않는다.

$f'(x)=x^3-\frac{1}{3}x\pm 1$의 그래프는 $y=0$과 한 점에서 만난다.)

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^2$이다.

30. 증감에 따른 지수함수의 개형파악

① m이 1, 2, 3, 4일 때 함수 $y=\left(\frac{m}{5}\right)^x$는 감소함수.

② m이 5일 때, 함수 $y=\left(\frac{m}{5}\right)^x$는 상수함수. $(y=1)$

③ m이 6, 7일 때, 함수 $y=\left(\frac{m}{5}\right)^x$는 증가함수

④ n이 5, 6, 7일 때, 함수 $y=\left(\frac{4}{n}\right)^x$는 감소함수

⑤ n이 4일 때, 함수 $y=\left(\frac{4}{n}\right)^x$는 상수함수. $(y=1)$

⑥ n이 1, 2, 3일 때, 함수 $y=\left(\frac{4}{n}\right)^x$는 증가함수.

경우의 수를 하나씩 따져보면..

①, ④ 번일 경우에 $\overline{A_kB_k}=1$을 만족하는 k의 개수는 1개

①, ⑤ 번일 경우에 $\overline{A_kB_k}=1$을 만족하는 k의 개수는 1개

①, ⑥ 번일 경우에 $\overline{A_kB_k}=1$을 만족하는 k의 개수는 2개

이런 식으로 총 9가지의 경우의 수를 모두 구하면 $a=18$ $b=29$

※②, ⑤ 번일 경우에 $\overline{A_kB_k}=1$을 만족하는 k의 개수는 0개 , $m=4$, $n=5$일 때, k의 개수는 0개($\frac{m}{5}=\frac{4}{n}$을 만족하는 $(m,\ n)$을 제외)

$m=4$, $n=5$일 때는 두 함수가 $y=1$(직선)로 일치하기 때문이다.

이 문제의 핵심은 k값을 구하는 것이 아니라 어떤 조건일 때 함수가 증가인지, 감소인지 (case분류)를 따져 $\overline{A_kB_k}=1$를 만족하는 k가 있다는 정도로만 생각해주면 된다.)