CHAPTER 01

다항식

개념 01 다항식의 연산법칙

다항식 A, B, C에 대하여 다음과 같은 연산법칙이 성립한다.

① 교환법칙 : $A+B=B+A$, $AB=BA$

② 결합법칙 : $(A+B)+C=A+(B+C)$, $(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙 : $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

개념 02 다항식의 덧셈과 뺄셈

① 괄호가 있는 경우 괄호부터 푼다.
(괄호 앞에 '−' 가 있으면 괄호 안의 각 항의 부호를 바꾼다.)

② 다항식을 한 문자에 대해 내림차순으로 정리한다.

③ 동류항끼리 모아서 간단히 한다.

개념 03 - 다항식의 곱셈

(1) 다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 다음과 같이 계산한 후, 동류항을 간단히 정리한다. 이 때, 괄호를 풀어 하나의 다항식으로 나타내는 것을 전개한다고 하고, 그 다항식을 전개식이라 한다.

(2) 곱셈 공식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

⑤ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑥ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑦ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑧ $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑨ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

⑩ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

(3) 곱셈 공식의 변형

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

③ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

④ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

⑤ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

이때, $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$이면 $a^3+b^3+c^3=3abc$

07

삼차식 $f(x)$와 일차식 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-2)=0$, $3-f(-1)=g(-1)$, $g(1)=8$
(나) $f(x)+g(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지는 $ax+5$이다.
(다) $f(x)g(x)$를 x^2+x-2로 나눈 나머지는 $R(x)$이다.

$R(-5)+a$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

08

홀수인 모든 자연수 n과 2이상의 자연수 m에 대하여 다항식 $x^{n+1}(x^3-2x^2+ax+b)$를 $(x+2)^m$으로 나누었을 때의 나머지가 $2^{n+2}(x+2)$일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

세미나(3) 조립제법의 고찰

조립제법은 제수가 이차식 이상일 때도 사용할 수 있다.
예를 들어 $(ax^3+bx^2+cx+d)\div(x^2+px-q)$
을 조립제법을 이용하여 구할 때 표의 왼쪽에 오는 수는 $x^2+px-q=0$에서 $x^2=q-px$의 우변의 상수항과 계수들을 세로로 나열시킨 뒤 맨 아랫줄의 수들과 곱한 수는 같은 줄에 오도록 한다.

	a	b	c	d
q			aq	$-apq+bq$
$-p$		$-ap$	ap^2-bp	
	a	$b-ap$	$c+aq+ap^2-bp$	$d-apq+bq$

관련 문제

다항식 x^3+ax^2+bx+4가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b을 구하여라.

일반 풀이

주어진 다항식을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3+ax^2+bx+4=(x-1)^2Q(x)$ ······ ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b+4=0$ $\quad\therefore b=-a-5$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^3+ax^2-ax-5x+4=(x-1)^2Q(x)$

$(x-1)\{x^2+(a+1)x-4\}=(x-1)^2Q(x)$

양변을 $x-1$로 나누면

$x^2+(a+1)x-4=(x-1)Q(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+1-4=0$

$\therefore a=2$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $b=-7$

랑데뷰 풀이

	1	a	b	4
-1			-1	$-a-2$
2		2	$2a+4$	
	1	$a+2$	$2a+b+3$	$-a+2$

$2a+b+3=0$, $-a+2=0$

$a=2$, $b=-7$

세미나(7) 브라마굽타 항등식

브라마굽타-피보나치 항등식

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

관련 문제 $a^2+b^2=2$, $c^2+d^2=2$, $ac+bd=\frac{1}{2}$일 때, $ad-bc$의 값을 구하여라. (단, $ad>bc$)

일반 풀이

먼저 $ac+bd=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하여 $a^2c^2+b^2d^2$을 구한다.

$ac+bd=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$(ac+bd)^2=\frac{1}{4}$

$a^2c^2+2abcd+b^2d^2=\frac{1}{4}$

$\therefore a^2c^2+b^2d^2=\frac{1}{4}-2abcd \quad \cdots\cdots ㉠$

$a^2+b^2=2$, $c^2+d^2=2$ 이므로

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=4$

$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=4$

이 식에 ㉠을 대입하면

$a^2d^2+b^2c^2+\frac{1}{4}-2abcd=4$

$(ad-bc)^2+\frac{1}{4}=4 \qquad \therefore (ad-bc)^2=\frac{15}{4}$

그런데 $ad>bc$이므로

$ad-bc=\frac{\sqrt{15}}{2}$

랑데뷰 풀이

브라마굽타-피보나치 항등식

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$에서

$2\times2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(ad-bc)^2$ 이므로

$(ad-bc)^2=\frac{15}{4}$

그런데 $ad>bc$이므로

$ad-bc=\frac{\sqrt{15}}{2}$

브라마굽타-피보나치 항등식의 응용

$$\begin{aligned}(a^2+kb^2)(c^2+kd^2)&=(ac+kbd)^2+k(ad-bc)^2\\&=(ac-kbd)^2+k(ad+bc)^2\end{aligned}$$

세미나(11) 대칭식을 이용한 인수분해

대칭식에서 $x+y$가 인수이면 $y+z$, $z+x$도 인수이다.

(1) **[대칭식이 어떤 형태의 항을 포함하면 반드시 이 형태와 같은 종류의 항을 포함한다.]**의 대칭식의 성질을 이용하여 $x+y$가 인수 이면 $y+z$, $z+x$도 인수임을 직관적으로 이해할 수 있다.

(2) x, y, z의 대칭식 $f(x, y, z)$가 $x+y$를 인수로 가지면 $f(x, -x, z)=0$을 만족한다.
역으로 $f(x, -x, z)=0$을 만족하면 $f(x, y, z)$은 $x+y$를 인수로 갖는다. 대칭식의 정의에 의해
$f(x, -x, z)=0 \to f(z, -x, x)=0 \to f(z, x, -x)=0$에서 z을 x로, x을 y로 바꾸면
$f(x, y, -y)=0$이고 이것은 $f(x, y, z)$가 $y+z$를 인수로 갖는 것을 의미한다.
또한 $f(x, -x, z)=0 \to f(-x, x, z)=0 \to f(-x, z, x)=0$에서 z을 y로, x을 z로 바꾸면
$f(-z, y, z)=0$이고 이것은 $f(x, y, z)$가 $z+x$를 인수로 갖는 것을 의미한다.
따라서 $x+y$가 인수 이면 $y+z$, $z+x$도 인수이다.

① $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ 을 인수분해 하여라.

풀이 $f(x, y, z)=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$라 두면 $f(x, y, z)$는 3차 대칭식이고
$f(x, -x, z)=(x-x+z)^3-x^3-(-x)^3-z^3=z^3-z^3=0$ 이므로 $f(x, y, z)$는 $x+y$를 인수로 갖는다.
따라서 대칭식의 성질에 의해 $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=A(x+y)(y+z)(z+x)$이고 $x=1, y=1, z=1$을 대입하면
$24=8A$에서 $A=3$
$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$

② $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ 을 인수분해 하여라.

풀이 $f(a, b, c)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ 라 두면 $f(a, b, c)$는 3차 대칭식이고
$f(a, -a, c)=a^2(-a+c)+a^2(c+a)+c^2(a-a)+2a(-a)c=-a^3+a^2c+a^2c+a^3-2a^2c=0$
이므로 $f(a, b, c)$는 $a+b$를 인수로 갖는다. 따라서 대칭식의 성질에 의해
$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=A(a+b)(b+c)(c+a)$에
$a=b=c=1$을 대입하면 $2+2+2+2=8A$이므로 $A=1$
$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=(a+b)(b+c)(c+a)$

③ $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$ 을 인수분해 하여라.

풀이 $f(a, b, c)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc$ 라 두면 $f(a, b, c)$는 3차 대칭식이고
$f(a, -a, c)=-a^2c\neq 0$이므로 대칭식이지만 $a+b$를 인수로 갖지 않는다. 따라서 $A(a+b)(b+c)(c+a)$꼴로는 인수분해 되지 않는다. 대칭식이므로 기본 대칭식으로 표현해 보면
$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=A(a+b+c)^3+B(a+b+c)(ab+bc+ca)+Cabc$이고 계수 비교하면 $A=0$
$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=B(a+b+c)(ab+bc+ca)+Cabc$에 $a=1, b=-1, c=1$을 대입하면
$-1=-B-C$ 이고 $a=1, b=1, c=-2$을 대입하면 $0=-2C$ 따라서 $B=1$, $C=0$
$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

심화유형 1-1

31

3이하의 자연수 n에 대하여 A_n을 다음과 같이 정의한다.

(가) $A_1 = 9+99+999$
(나) $A_n =$(세 수 9, 99, 999에서 서로 다른 $n(n \geq 2)$개를 택하여 곱한 수의 총합)

이때, $A_1+A_2+A_3-3$의 값을 100으로 나눈 나머지를 구하시오.

32

3이하의 자연수 n에 대하여 A_n을 다음과 같이 정의한다.

(가) $A_1 = 5+55+555$
(나) $A_n =$(세 수 5, 55, 555에서 서로 다른 $n(n \geq 2)$개를 택하여 곱한 수의 총합)

이때, $\dfrac{A_1A_2-A_3}{1000}$의 값의 일의 자리 수를 구하시오.

33

4이하의 자연수 n에 대하여 A_n을 다음과 같이 정의한다.

(가) $A_1 = 3+55+777+9999$
(나) $A_n =$(네 수 3, 55, 777, 9999에서 서로 다른 $n(n \geq 2)$개를 택하여 곱한 수의 총합)

이때, $A_1+A_2+A_3+A_4$의 값을 10000으로 나눈 나머지의 일의 자리 수를 구하시오.

95

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$ (나) $f(x) \leq f(6)$

실수 p에 대하여 $p+2 \leq x \leq p+4$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $m(p)$라 할 때, 함수 $m(p)$의 최댓값이 7이면 $f(10)$의 값은?

① 1　② 2　③ 4　④ 8　⑤ 16

96

이차항의 계수가 1인 두 이차함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(t,\ 4)$에서 서로 만난다. 두 이차함수에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ g(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

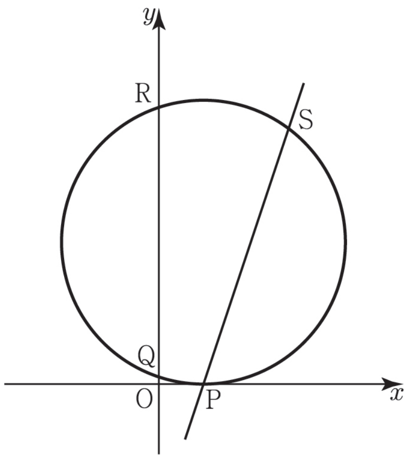
이라 하자. 임의의 실수 k에 대하여 x의 범위 $k \leq x \leq k+2$에서 함수 $h(x)$의 최솟값을 $m(k)$라고 할 때, $m(k)$는 아래와 같다.

$$m(k)=\begin{cases} f(k-2) & (k<-2) \\ f(0) & (-2 \leq k<1-\sqrt{3}) \\ g(k+2) & (1-\sqrt{3} \leq k<1) \\ g(3) & (1 \leq k<3) \\ g(k) & (3 \leq k) \end{cases}$$

직선 $y=ax+b$가 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 동시에 접할 때, $a+4b$의 값을 구하시오. (단, a, b, t는 상수)

251

그림과 같이 중심이 제1사분면 위에 있고 x축과 점 P에서 접하며 y축과 두 점 Q, R에서 만나는 원이 있다. 점 P를 지나고 기울기가 3인 직선이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 S라 할 때, $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PS}}=6$를 만족시킨다. 원 위의 점 S를 지나는 접선의 방정식의 x절편은?

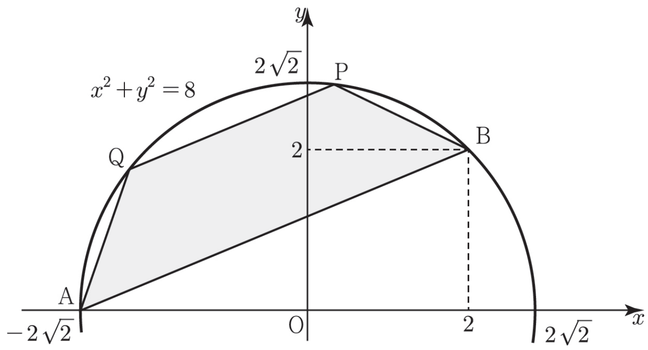


① $1+\sqrt{10}$ ② $2+\sqrt{10}$ ③ $1+3\sqrt{10}$
④ $2+2\sqrt{10}$ ⑤ $2+3\sqrt{5}$

252

그림과 같이 원 $x^2+y^2=8$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(-2\sqrt{2},\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$과 호 AB 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$에 대하여 사각형 ABPQ의 넓이의 최댓값은?

(단, $-2\sqrt{2}<c<a<2$, $b>0$, $d>0$)



① $4\sqrt{2}$ ② $12-4\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{2}-4$
④ $20-8\sqrt{2}$ ⑤ $16\sqrt{2}-8$

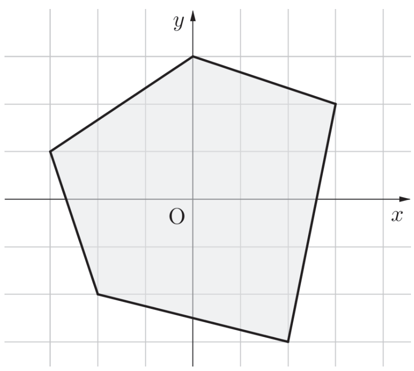
세미나(16) 사선 공식

Sarrus법칙 (사선공식)

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{array}\right|$$

→ 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에서 세 꼭짓점의 좌표를 세로로 차례로 쓴다. 단, 처음 쓴 좌표는 마지막에 다시 한 번 더 써야 한다. 그런 다음, 사선 방향으로 11시에서 5시 방향 선끼리, 1시에서 7시 방향 선끼리 각각 곱해서 더한다.
5시 방향으로 곱해서 더한 것은 $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1$, 7시 방향으로 곱해서 더한 것은 $x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3$
이 결과끼리 서로 뺀 것의 절댓값의 반 ($\frac{1}{2}\ |(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|$) 이 삼각형의 넓이이다. **이 법칙은 삼각형뿐만 아니라 모든 다각형에도 똑같이 적용된다. (변 따라 움직이기!!)**

관련 문제 꼭짓점이 $(0,3)$, $(3,2)$, $(2,-3)$, $(-2,-2)$, $(-3,1)$인 오각형의 넓이를 구하여라.



랑데뷰 풀이

$$\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccccc} 0 & 3 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{2}|(0-9-4-2-9)-(9+4+6+6+0)|$$

$$=\frac{1}{2}|-24-25|=\frac{49}{2}$$

설명 점 A와 직선 BC사이 거리 d라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times d$에서

$\overline{BC}=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$ 이고

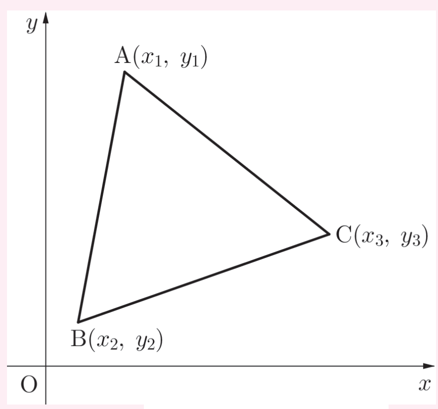
직선 BC의 방정식 $y-y_3=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}(x-x_3)$

$\rightarrow (y_2-y_3)x-(x_2-x_3)y+(x_2-x_3)y_3-(y_2-y_3)x_3=0$

$d=\frac{|(y_2-y_3)x_1-(x_2-x_3)y_1+(x_2-x_3)y_3-(y_2-y_3)x_3|}{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}}$ 이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times d$

$=\frac{1}{2}|(y_2-y_3)x_1-(x_2-x_3)y_1+(x_2-x_3)y_3-(y_2-y_3)x_3|=$



$$\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{array}\right|$$

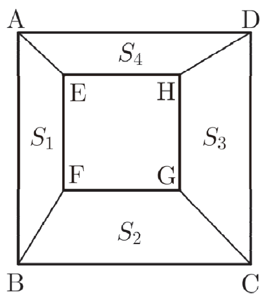
심화유형 3-3

275

다음 그림은 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 한 변의 길이가 2인 정사각형 EFGH를 두 선분 AB와 EF가 평행하도록 그린 것이다. 네 사다리꼴 ABFE, BCGF, CDHG, DAEH의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\overline{AE}^2+\overline{CG}^2=\overline{BF}^2+\overline{DH}^2$
ㄴ. $\overline{AE}=\overline{BF}$이면 $\overline{CG}=\overline{DH}$이다.
ㄷ. $S_1+S_3=S_2+S_4$



① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

276

다음은 랑랑이네 가족의 대화이다. 읽고 물음에 답하여라.

화랑 : 누나, 삼각형 무게중심은 구할 수 있는데 사각형 무게중심은 어떻게 구하는지 알아?
사랑 : 음... 사각형의 한 대각선을 그으면 두 삼각형으로 나뉘잖아. 그 두 삼각형의 각각의 무게중심을 구한 뒤 그 무게중심들을 지나는 직선과 같은 방법으로 나머지 다른 대각선을 그어 생긴 두 삼각형의 무게중심들을 지나는 직선의 교점이 사각형의 무게중심이야.
화랑 : 음... 복잡한데... 다른 방법은 없어?
아빠 : □ABCD에서 누나 말처럼 대각선 AC를 그은 뒤 나오는 두 삼각형의 무게중심과 각각의 넓이를 구해서 구해도 되. 예를 들어 △ABC의 무게중심이 G_1 넓이가 n, △ACD의 무게중심이 G_2 넓이가 m일 때, □ABCD의 무게중심 G는 G_1과 G_2를 $m:n$으로 내분하는 점이야.

A$(-3,\ 0)$, B$(6,\ 0)$, C$(3,\ 9)$, D$(0,\ 12)$으로 주어지는 사각형 ABCD의 무게중심의 좌표 $(a,\ b)$를 구할 때, $7(a+b)$의 값을 구하시오.

277

정사각형 OABC의 한 변 AB가 직선 $kx+(1-k)y-1=0$위에 있고, 이 변이 직선 $y=x$에 의해 이등분될 때, 가능한 모든 상수 k의 값의 곱을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

정답 및 해설

01 정답 ④

문항 선별 : 천둥T

[출제자 : 민지애T]

ㄱ. (거짓)

$(x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5)$가 3개 곱해진 모형이므로
최저차가 3이고 최고차가 15인 다항식인 모형, 즉
$a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_{15}x^{15}$꼴이므로
항의 개수는 13개이다.

ㄴ. (참)

$f(x)=(x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5)^3$라 하면
상수항을 포함한 모든 항의 계수는 $f(1)$이므로
$f(1)=(1+2+3+4+5)^3=15^3$이다.

ㄷ. (참)

x^{10}의 계수는

$x\times 4x^4\times 5x^5=20x^{10}$ 이고 이 모양은 6개이므로

⇨ $20\times 6=120$

$2x^2\times 3x^3\times 5x^5=30x^{10}$이고 이 모양은 6개이므로

⇨ $30\times 6=180$

$2x^2\times 4x^4\times 4x^4=32x^{10}$이고 이 모양은 3개이므로

⇨ $32\times 3=96$

$3x^3\times 3x^3\times 4x^4=36x^{10}$이고 이 모양은 3개이므로

⇨ $36\times 3=108$

$\therefore\ 120+180+96+108=504$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

02 정답 ②

문항 선별 : 천둥T

[출제자 : 민지애T]

$x^2+ax-y^2+by-\frac{1}{4}p=0$이라 하면

$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+4y^2-4by+p}}{2}$ 에서 두 일차식으로

인수분해 되려면

$a^2+4y^2-4by+p$가 완전제곱이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4b^2-4(a^2+p)=0$ 즉, $b^2-a^2=p$

이때, $p=(b+a)(b-a)$ 꼴이고

p가 소수이므로 $b+a$, $b-a$중 작은 수인 $b-a=1$이다.

$b+a$의 값에 의해 p가 결정되고, p가 소수이며 가장
작은 수는 $b+a=3$일 때이다.

따라서 $b=2$, $a=1$ (b가 소수)

$\therefore$ p의 최솟값은 3이다.

03 정답 ③

문항 선별 : 천둥T

[출제자 : 민지애T]

$\sqrt{483}=a$, $\sqrt{42}=b$라 하면

$483\sqrt{483}=a^3$, $42\sqrt{42}=b^3$

$(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6=483^3-42^3$이고 여기서

$483=21\times 23$, $42=21\times 2$

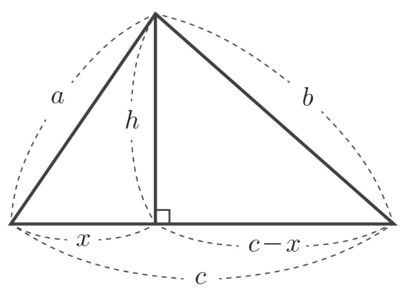
$$\begin{aligned}21^3\times 23^3-21^3\times 2^3&=21^3\times(23^3-2^3)\\&=21^3\times(23-2)(23^2+23\times 2+2^2)\\&=21^4\times m\text{에서}\end{aligned}$$

$\therefore\ m=23^2+23\times 2+2^2=579$

04 정답 ②

문항 선별 : 천둥T

[출제자 : 민지애T]



$h^2=a^2-x^2=b^2-(c-x)^2$

$x=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}$

따라서 $h^2=a^2-x^2=a^2-\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2$

$$=\frac{-a^4-b^4-c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{4c^2}$$

또

$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$이므로

$24=64-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=20$이다.

$\therefore\ S^2=\left(\frac{1}{2}ch\right)^2$

15 정답 ③

[출제자 : 오세준T]

조건 (가)에서

$f(x)=\{g(x)-x^3+2x^2\}(x^2+3)+g(x)-kx^2$

$f(x)-g(x)=\{g(x)-x^3+2x^2\}(x^2+3)-kx^2$ …… ㉠

조건 (나)에 의해

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)-g(-1)=\{g(-1)+3\}\times4-k=-k$

이므로 $g(-1)=-3$

㉠에 $x=3$를 대입하면

$f(3)-g(3)=\{g(3)-9\}\times12-9k=-9k$

이므로 $g(3)=9$

조건 (다)에 의해

$g(x)$는 $(-1,\ -3)$, $(3,\ 9)$을 지나는 일차식이다.

따라서 $g(x)=3x$

㉠에 대입하여 정리하면

$f(x)=(-x^3+2x^2+3x)(x^2+3)-kx^2+3x$

$f(2)=-12$이므로 대입하면

$f(2)=6\times7-4k+6=-12$

$\therefore\ k=15$

16 정답 ②

[출제자 : 최성훈T]

조건 (가)에서

$\{f(x)\}^3-\{g(x)\}^3$

$=\{f(x)-g(x)\}\{f(x)^2+f(x)g(x)+g(x)^2\}$

$f(x)-g(x)$는 일차식이므로 $(x+1)^2$을 인수로 갖기 위해서는

$f(x)^2+f(x)g(x)+g(x)^2$는 $(x+1)$를 인수로 가져야 한다.

따라서

$f(-1)^2+f(-1)g(-1)+g(-1)^2=0$이고,

$f(-1)$과 $g(-1)$의 값은 실수이므로

$f(-1)=0,\ g(-1)=0$이다.

따라서

$f(x)=(x+1)(x-\alpha),\ g(x)=(x+1)(x-\beta)$

(단, $\alpha\neq\beta$) …… ㉠

조건 (나)에서

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$

$=\{f(x)+g(x)\}\{f(x)^2-f(x)g(x)+g(x)^2\}$

$f(x)^2-f(x)g(x)+g(x)^2$이 $(x+3)$로 나누어 떨어지면,

$f(-3)^2-f(-3)g(-3)+g(-3)^2=0$이므로 $f(-3)=0$,

$g(-3)=0$이다. 즉 $\alpha=\beta$이므로 모순이다.

따라서 $f(-3)+g(-3)=0$이고 ㉠에 대입하여 정리하면

$\alpha+\beta=-6$ …… ㉡

조건 (다)에서

$f(-2)g(-4)=-3$,

$-(-2-\alpha)\times(-3)(-4-\beta)=-3$ 즉

$(\alpha+2)(\beta+4)=-1$ 이고 $\beta=-\alpha-6$을 대입하면

$(\alpha+2)(-\alpha-2)=-1$이고 정리하면 $(\alpha+2)^2=1$

따라서 $\alpha=-1$ 또는 $\alpha=-3$이다.

$\alpha=-3$이면 ㉡에서 $\beta=-3$이 되어 $\alpha=\beta$이므로 모순이다.

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=-5$

$f(x)=(x+1)^2,\ g(x)=(x+1)(x+5)$

따라서 $f(0)-g(0)=1-5=-4$

> **랑데뷰팁**
>
> 실수 $x,\ y$에 대해서 방정식 $x^2+xy+y^2=0$,
>
> $\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=0$이므로
>
> $x+\dfrac{y}{2}=0$이고, $\dfrac{3}{4}y^2=0$이어야 하므로 방정식의 근은 $x=y=0$이다.
>
> 같은 방법으로 $x^2-xy+y^2=0$의 실수인 근도 $x=y=0$이다.

17 정답 ④

[출제자 : 오세준T]

$\omega^3=1$에서 $\omega^2+\omega+1=0$

주어진 식에 $x=\omega$를 대입하면

$(1+\omega)^{50}$

$=a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+\cdots+a_{49}\omega^{49}+a_{50}\omega^{50}$

$=(a_0+a_3+\cdots+a_{48})+(a_1+a_4+\cdots+a_{49})\omega$

$\quad+(a_2+a_5+\cdots+a_{50})\omega^2$

$(1+\omega)^{50}=(-\omega^2)^{50}=\omega^{100}=\omega$이므로

$\omega=(a_0+a_3+\cdots+a_{48})+(a_1+a_4+\cdots+a_{49})\omega$

$\quad+(a_2+a_5+\cdots+a_{50})\omega^2$ …… ㉠

㉡에 의하여 $f(-2)=4a-2b+8=4$이므로

$b=2a+2$

$\therefore\ f(x)=ax^2+(2a+2)x+8$

$f(x^2+2x)=a(x^2+2x)^2+(2a+2)(x^2+2x)+8$

$=ax^4+4ax^3+(6a+2)x^2+(4a+4)x+8$ …… ㉢

$x^2f(x)+8x+8=ax^4+(2a+2)x^3+8x^2+8x+8$ …… ㉣

㉢=㉣이므로

$ax^4+4ax^3+(6a+2)x^2+(4a+4)x+8$

$=ax^4+(2a+2)x^3+8x^2+8x+8$에서

$4a=2a+2,\ 6a+2=8,\ 4a+4=8$

$\therefore\ a=1$

따라서 $f(x)=x^2+4x+8$이므로

$f(1)=1+4+8=13$

38 정답 2

등식 $f(x^2-x)=x^2f(x)+2x-1$에서

양변에 $x=0$를 대입하면

$f(0)=-1$ …… ㉠

양변에 $x=1$를 대입하면

$f(0)=f(1)+2-1,\ -1=f(1)+1$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ f(1)=-2$ …… ㉡

이때, 다항식 $f(x)$의 차수를 n차라 하면 $f(x^2-x)$의 차수는 $2n$차, $x^2f(x)+2x-1$의 차수는 $n+2$차이므로 $2n=n+2$ $\therefore\ n=2$

즉, $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

㉠에 의하여 $f(0)=c=-1$이므로 $c=-1$

㉡에 의하여 $f(1)=a+b-1=-2$이므로

$b=-a-1$

$\therefore\ f(x)=ax^2-(a+1)x-1$

$f(x^2-x)=a(x^2-x)^2-(a+1)(x^2-x)-1$

$=ax^4-2ax^3-x^2+(a+1)x-1$ …… ㉢

$x^2f(x)+2x-1=ax^4-(a+1)x^3-x^2+2x-1$ …… ㉣

㉢=㉣이므로

$\therefore\ a=1$

따라서 $f(x)=x^2-2x-1$이므로

$\therefore f(-1)=2$

39 정답 396

$f(x+1)-f(x)=f(x)-f(x-1)+4$에서

$g(x)=f(x)-f(x-1)$라 두면

$g(x+1)=g(x)+4$에서

$x=1,2,3,\cdots,x-1$을 대입하면

$g(2)=g(1)+4$

$g(3)=g(2)+4$

$g(4)=g(3)+4$

$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$

$g(x)=g(x-1)+4$ 변끼리 더하면

$\therefore\ g(x)=g(1)+4(x-1)$에서

$g(1)=f(1)-f(0)=0$이다.

$\therefore\ f(x)-f(x-1)=4x-4$

$f(100)-f(99)=4\times100-4=396$

40 정답 -6

다항식 $x^{n+2}+px^{n+1}+qx^n$을 $(x-2)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2^n(x-2)$이므로

$x^{n+2}+px^{n+1}+qx^n=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$

$x^n(x^2+px+q)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^n\}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $2^n(4+2p+q)=0$

$2^n\neq0$이므로 $4+2p+q=0$

$\therefore\ q=-2p-4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^n\{x^2+px+(-2p-4)\}=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^n\}$

$x^n(x-2)(x+p+2)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^n\}$

$x\neq2$일 때도 등식이 성립해야 하므로

$x^n(x+p+2)=(x-2)Q(x)+2^n$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면 $2^n(2+p+2)=2^n$

$2^n\neq0$이므로 위의 등식의 양변을 2^n으로 나누면

$4+p=1$에서 $p=-3$ $\therefore\ q=2$ ($\because$ ㉡)

$\therefore\ pq=(-3)\times2=-6$

랑데뷰팁

$x^n(x^2+px+q)=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$는 x에 대한 항등식이므로 $n=0$을 대입하면

$x^2+px+q=(x-2)^2Q(x)+(x-2)$에서 $Q(x)=1$이므로

$\therefore abc=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=1+3\times 2=7$

72 정답 3

$\dfrac{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}=k$

$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=(a+b)(b+c)(c+a)$

이므로 $k=3$

73 정답 아래 표 참조

n	P
0	0
1	0
2	1
3	$a+b+c$
4	$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$P=\dfrac{-a^n(b-c)-b^n(c-a)-c^n(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

(1) $n=0$ 일 때, 분자는

$-(b-c)-(c-a)-(a-b)=0$

$\therefore P=0$

(2) $n=1$ 일 때, 분자는

$-ab+ac-bc+ab-ac+bc=0$

$\therefore P=0$

(3) $n=2$일 때,

$=-\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

위의 식의 분자를 정리하면

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2$

$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore P=-\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$

(4) $n=3$일 때,

[랑데뷰세미나(12),(13) 참고]-교과외

$=-\dfrac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

위의 식의 분자를 정리하면

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$이고

이것은 문자가 3개인 4차 교대식이므로

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$=k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$에서

$a=1,\ b=-2,\ c=0$을 대입하면

$6=-6k$에서 $k=-1$

$\therefore a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

$\therefore P=-\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=a+b+c$

(5) $n=4$일 때,

[랑데뷰세미나(12),(13) 참고]-교과외

$=-\dfrac{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

위의 식의 분자를 정리하면

$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$

은 문자가 3개인 5차 교대식이므로

$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

$\{A(a+b+c)^2+B(ab+bc+ca)\}$에서

$a=1,\ b=-1,\ c=0$대입하면 $-2=B(-2)$, $\therefore B=1$

$a=1,\ b=2,\ c=0$대입하면 $30=2(9A+2B)$

$-14=2(9A+2)$ $\therefore A=-1$

$\{A(a+b+c)^2+B(ab+bc+ca)\}$

$=-(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)$

$=-(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

$\therefore P=-\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

랑데뷰팁

이 식을 [오일러 분수식]이라 한다.

[랑데뷰세미나(8) 참고]

95 정답 ③

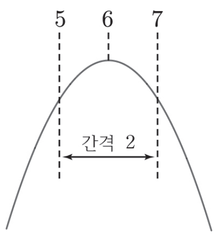
문항 선별 : 천둥T

[출제자 : 안형진T]

(가), (나)에 의해

$f(x)=-a(x-6)^2+36a \quad (a>0)$으로 나타낼 수 있다.

먼저 $p+2\le x\le p+4$에서 최댓값을 구해보자.



① $p+4<7$ 즉, $p<3$이면 $x=p+2$일 때 최소이므로

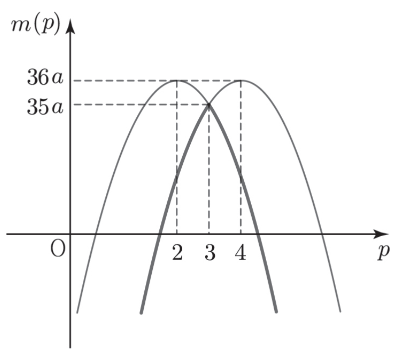
최솟값$=-a(p-4)^2+36a$

② $p+4\ge 7$ 즉, $p\ge 3$이면 $x=p+4$일 때 최소이므로

최솟값$=-a(p-2)^2+36a$

따라서 $m(p)=\begin{cases}-a(p-4)^2+36a & (p<3)\\ -a(p-2)^2+36a & (p\ge 3)\end{cases}$이고

그래프를 그려보면 다음 그림과 같다.



$m(p)$의 최댓값은 $35a$이고 이 값이 7이므로

$a=\dfrac{1}{5}$이다.

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{5}(x-6)^2+\dfrac{36}{5}$

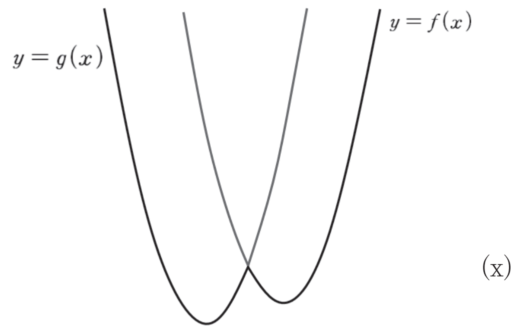
$\therefore f(10)=-\dfrac{16}{5}+\dfrac{36}{5}=\dfrac{20}{5}=4$

96 정답 10

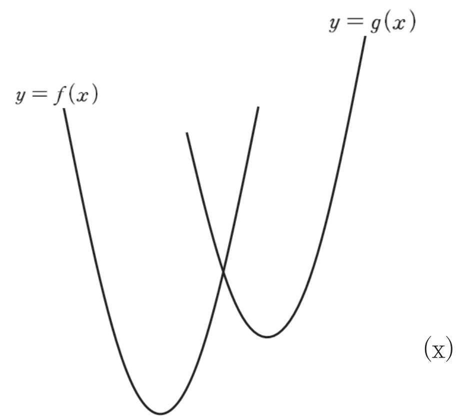
문항 선별 : 천둥T

[출제자 : 안형진T]

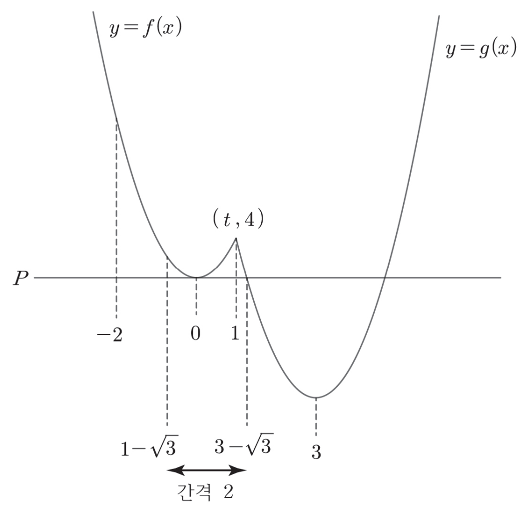
ⅰ) $m(k)$가 $h(x)$의 최솟값으로 정의된 함수이다.



$m(k)$의 구간별 함숫값 모형과 맞지 않으므로 $f(x)$가 왼쪽, $g(x)$가 오른쪽에 위치해야 함을 알 수 있다.

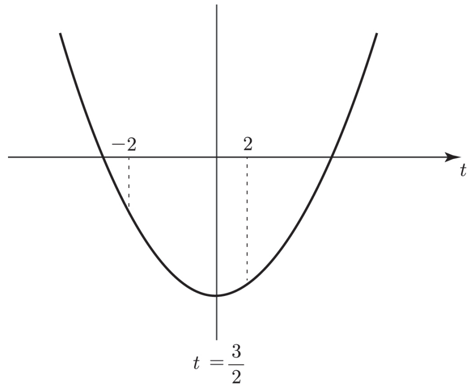


$m(k)$식 아래 셋째 줄에서 k값이 커질수록 g의 함숫값으로 최솟값이 정의되므로 g가 f보다 더 낮게 그려져야 함을 알 수 있다.



간격 2를 고려하면서 $h(x)$의 개형을 추정해보면 위 그림과 같다.

ⅱ) $f(0)$을 P라하면 $f(x)=x^2+P$,



①식에서 $x^2-tx+1=0$의 $D>0$에서 $t<-2$ or $t>2$이다. 이때 t의 값 두 개가 모두 2보다 크거나 -2보다 작으면 ②식에서 두 근의 합$=3$에 위배되므로 t값 중 하나는 2보다 크고, 나머지 하나는 -2보다 작아야 한다.

$f(t)=t^2-3t+a-2$라 하면 위 그림과 같으므로 $f(-2)<0$, $f(2)<0$이다.

$f(-2)<0 \quad \rightarrow \quad a<-8$

$f(2)<0 \quad \rightarrow \quad a<4$

$\therefore a<-8$

따라서 $m=-9$이고 $m^2=81$

101 정답 243

문항 선별 : 천둥T

[출제자 : 이호진T]

$x+y+z=3$, $xy+yz+zx=-1$, $xyz=-3$ 에서

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$
$$=9-(-2)=11$$

x, y, z를 세 근으로 하는 3차 방정식은

$t^3-3t^2-t+3=0$

나머지 정리에 의하여

$t^5=(t^3-3t^2-t+3)(t^2+3t+10)+30t^2+t-30$ 이므로

$$\therefore \ x^5+y^5+z^5=30(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)-30\times3$$
$$=30\times11+1\times3-30\times3$$
$$=243$$

랑데뷰팁

(교과과정 外)

$A_n=x^n+y^n+z^n$이라 하면

(풀이1) 과정처럼 x, y, z를 세 근으로 하는 방정식은 $t^3-3t^2-t+3=0$이다.

이때, $t^3=3t^2+t-3$이므로

$\Rightarrow$ $A_{n+3}=3A_{n+2}+A_{n+1}-3A_n$의 점화 관계로 표현한다.

$A_0=3 \qquad (x^0+y^0+z^0=3)$

$A_1=3 \qquad (x+y+z=3)$

$A_2=11 \qquad (x^2+y^2+z^2=11)$

$A_3=27$

$A_4=83$

$A_5=243$

102 정답 ④

문항 선별 : 천둥T

[출제자 : 이호진T]

$x^2=X$라고 하면

$X^2-(2a+1)X+(a-1)(a+2)=0$

$X=a-1$ 또는 $a+2$

$x^2=a-1$ 또는 $a+2$에서

$a<-2$일 때 $\qquad f(a)=0$

$a=-2$일 때 $\qquad f(a)=1$

$-2<a<1$일 때 $\qquad f(a)=2$

$a=1$일 때 $\qquad f(a)=3$

$a>1$일 때 $\qquad f(a)=4$

$\therefore \ f(-\sqrt{3})+f(-1)+f(\sqrt{2})+f(5)=2+2+4+4=12$

이다.

103 정답 ③

문항 선별 : 천둥T

[출제자 : 이호진T]

$x^2=t$라고 하면

$t^2+(2a+1)t+(a+3)(a-2)=0$ ······㉠ 꼴에서

x가 실근과 허근을 가지려면 t는 음수근과 0 이상의 근을 가진다.

㉠을 인수분해하면

$(t+a+3)(t+a-2)=0$에서

$(-a-3)<(-a+2)$이므로 $t=-a-3$은 음수인

$a(3+2\sqrt{2})+b(\sqrt{2}+2)+c=0$

$(3a+2b+c)+(2a+b)\sqrt{2}=0$

a, b, c가 유리수 이므로

$3a+2b+c=0$, $2a+b=0$이 성립한다.

$b=-2a$, $c=a$

따라서

$ax^2+\sqrt{2}bx+c$

$=a(x^2-2\sqrt{2}x+1)=0$

$x^2-2\sqrt{2}x+1=0$에서

두 근을 $\alpha=1+\sqrt{2}$, β라 하면

$\alpha+\beta=2\sqrt{2}$

$(1+\sqrt{2})+\beta=2\sqrt{2}$

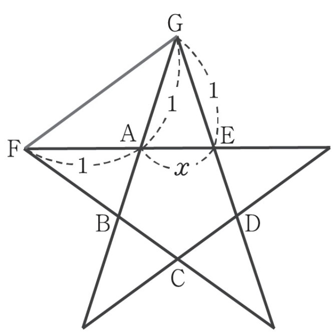
따라서 $\beta=\sqrt{2}-1$

그러므로 다른 한 근은 $\sqrt{2}-1$이다.

113 정답 $-3\sqrt{5}$

[출제자 : 이정배T]

다음 그림과 같이 직선 AB와 ED의 교점을 G라 하고 선분 FG를 그으면



$\triangle FEG \backsim \triangle GEA$이고 $\overline{GE}=1$이다.

이때, $\overline{FE}:\overline{EG}=\overline{GE}:\overline{EA}$이므로

$1+x:1=1:x$

$\therefore\ x^2+x-1=0$

양변을 x로 나누어 정리하면 $x-\dfrac{1}{x}=-1$

$x^4-\dfrac{1}{x^4}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$에서

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4=5$이므로

$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ $(\because\ x>0)$이고

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3$이다.

따라서 $x^4-\dfrac{1}{x^4}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=-1\times\sqrt{5}\times 3$

$=-3\sqrt{5}$

114 정답 -2

[출제자 : 최성훈T]

(ⅰ) $\dfrac{z}{1+z^2}$이 실수이므로

$\dfrac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\dfrac{z}{1+z^2}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}$

즉 $z(1+\overline{z}^2)=\overline{z}(1+z^2)$

$z+z\overline{z}^2-\overline{z}-\overline{z}z^2=0$

$(z-\overline{z})-\overline{z}z(z-\overline{z})=0$

$(z-\overline{z})(1-z\overline{z})=0$

$z\neq\overline{z}$이므로 $z\overline{z}=1$

(ⅱ) $\dfrac{z^2}{1+z}$이 실수이므로

$\dfrac{z^2}{1+z}=\overline{\left(\dfrac{z^2}{1+z}\right)}=\dfrac{\overline{z}^2}{1+\overline{z}}$

즉 $z^2(1+\overline{z})=\overline{z}^2(1+z)$

$z^2+z^2\overline{z}-\overline{z}^2-z\overline{z}^2=0$

$(z^2-\overline{z}^2)+z\overline{z}(z-\overline{z})=0$

$(z-\overline{z})(z+\overline{z}+z\overline{z})=0$

$z\neq\overline{z}$이므로 $z+\overline{z}=-z\overline{z}=-1$

$z^2+\overline{z}^2=(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}$

$=(-1)^2-2\cdot 1$

$=-1$

$\therefore\ 2(z^2+\overline{z}^2)=-2$

115 정답 -9

[출제자 : 최성훈T]

$ab=-5<0$이므로 $\dfrac{b}{a}<0$, $\dfrac{a}{b}<0$

$\therefore\ \left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+2\sqrt{\dfrac{b}{a}}\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}-2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}$

랑데뷰팁

n이 소수이고 $x^n=1$이 허근 z를 가지면 n개의 수 $1, z, z^2, \cdots, z^{n-1}$은 $x^n=1$의 서로 다른 해이다.

설명

방정식 $x^n=1$이 허근 z를 가지면 $z^n=1$이다.

$(z^n)^k=(z^k)^n=1$이므로

$z^k\ (k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$은 $x^n=1$의 해이다.

여기서 $z^k\ (k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 중 같은 수가 있다고 가정하면 $z^\alpha=z^\beta\ (0<\alpha<\beta<n)$인 자연수 α, β가 존재한다. 양변을 z^α로 나누면

$z^{\beta-\alpha}=1$이고

$(z^{\beta-\alpha})^t=1$이므로 n은 $\beta-\alpha$의 배수가 된다.

이는 n이 소수라는 가정에 모순이므로

$z^k\ (k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 중 같은 수는 존재할 수 없다.

따라서 n이 소수일 때는 $1, z, z^2, \cdots, z^{n-1}$은 모두 다른 값이다.

144 정답 $\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

$z^7=1$에서 $\overline{(z^7)}=1$이므로 $(\overline{z})^7=1$이다.

$(z\cdot\overline{z})^7=1$이므로 $z\cdot\overline{z}=1 \quad \therefore\ z=\dfrac{1}{\overline{z}}$

$z^4+z^2+z=\alpha$라 두면

$\overline{\alpha}=\overline{z^4+z^2+z}=(\overline{z})^4+(\overline{z})^2+(\overline{z})=z^3+z^5+z^6$

$\left(\because\ \overline{(z^4)}=\dfrac{1}{z^4}=z^3,\ \overline{(z^2)}=\dfrac{1}{z^2}=z^5,\ \overline{(z)}=\dfrac{1}{z}=z^6\right)$

이고 $z^7-1=0,\ z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$에서

$\alpha+\overline{\alpha}=(z^4+z^2+z)+(z^3+z^5+z^6)=-1$

$\alpha\times\overline{\alpha}=(z^4+z^2+z)\times(z^3+z^5+z^6)$

$=z^7+z^9+z^{10}+z^5+z^7+z^8+z^4+z^6+z^7$

$=3+(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z)=3-1=2$

$x^2+x+2=0$의 두 근을 $\alpha, \overline{\alpha}$라 하면

$\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

[다른 풀이]

$z^7-1=0,\ z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$에서

$z^4+z^2+z=\alpha$라 두면

$z^6+z^5+z^3=-1-\alpha$이고 양변을 제곱하면

$z^{12}+z^{10}+z^6+2(z^{11}+z^9+z^8)=\alpha^2+\alpha+1$

$z^5+z^3+z^6+2(z^4+z^2+z)=\alpha^2+\alpha+1$

$-1-\alpha+2\alpha=\alpha^2+2\alpha+1$

$\alpha^2+\alpha+2=0$에서 $\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

145 정답 30

$z=a+bi$에서 $\overline{z}=a-bi$이므로 $z^2-\overline{z}=0$에서

$(a+bi)^2-(a-bi)=0$

$(a^2-b^2-a)+(2ab+b)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2-a=0,\ 2ab+b=0$

(i) $2ab+b=0$에서 $b(2a+1)=0$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}\ (\because b>0)$

(ii) $a^2-b^2-a=0$에서 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-b^2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$,

$b^2=\dfrac{3}{4} \quad \therefore\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ (\because b>0)$

(i), (ii)에서 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$이므로 $2z+1=\sqrt{3}i$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3,\ 4z^2+4z+4=0$

$\therefore z^2+z+1=0$

위의 식의 양변에 $z-1$을 곱하면

$(z-1)(z^2+z+1)=0,\ z^3-1=0 \quad \therefore z^3=1$

$\therefore (z^5+z^4+z^3+z^2+1)^n=(z^2+z+1-z)^n$

$=(-z)^n=(-z^3)^{\frac{n}{3}}=(-1)^{\frac{n}{3}}$

따라서 n은 3의 배수인 두 자리의 자연수이므로 30개다.

랑데뷰팁

$z^2=\overline{z}$이므로

$z=\overline{(\overline{z})}=\overline{(z^2)}=(\overline{z})^2=(z^2)^2=z^4$에서

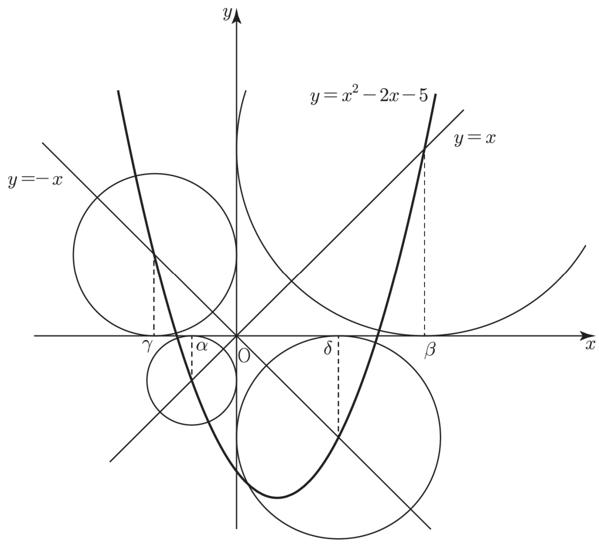
$z^4-z=0,\ z(z-1)(z^2+z+1)=0$

$z^2+z+1=0\ (\because z\neq0,\ z\neq1)$

146 정답 0, 3

$\overline{z}=-z^2$에서

$y=x^2-2x-5$와 $y=-x$의 교점의 x좌표를 γ, δ라 하자.



각 원의 반지름의 길이는 $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$, $|\delta|$이므로 찾는 값은 $\pi(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$이다.

(i) $x^2-2x-5=x$

$x^2-3x-5=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-5$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=3^2-2(-5)\\&=19\end{aligned}$$

(ii) $x^2-2x-5=-x$

$x^2-x-5=0$의 두 근이 γ, δ이므로

$\gamma+\delta=1$, $\gamma\delta=-5$

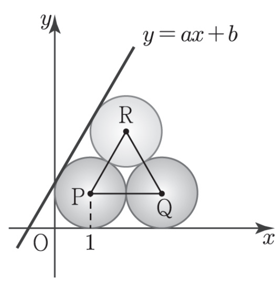
$$\begin{aligned}\gamma^2+\delta^2&=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\\&=1^2-2(-5)\\&=11\end{aligned}$$

$\therefore\ \pi(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=30\pi$

268 정답 3

[출제자 : 최성훈T]

직선 $l:y=ax+b$라 하면



$\triangle$PQR은 정삼각형이므로 $\angle$RPQ$=60^\circ$, $\overline{\text{PR}}\,/\!/\,l$

$\therefore\ a=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

l이 중심이 점 P인 원 P에 접하므로 중심 P와 직선l사이의 거리는 1이다.

P$(1,1)$이고 $\sqrt{3}x-y+b=0$이므로

$$\frac{|\sqrt{3}-1+b|}{\sqrt{3+1}}=1$$

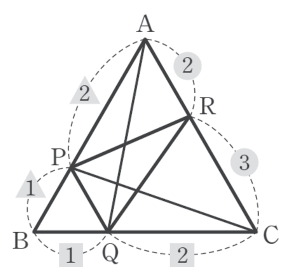
$|b+\sqrt{3}-1|=2$

$b=3-\sqrt{3}$ 또는 $b=-1-\sqrt{3}$

$b>0$이어야 하므로 $b=3-\sqrt{3}$

$\therefore a+b=\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})=3$

269 정답 9 : 2



그림과 같이 선분 PC를 그으면 삼각형 APC에서

$\overline{\text{AR}}:\overline{\text{RC}}=2:3$이므로 $\triangle\text{APR}=\dfrac{2}{5}\triangle\text{APC}$

삼각형 ABC에서 $\overline{\text{AP}}:\overline{\text{PB}}=2:1$이므로

$\triangle\text{APC}=\dfrac{2}{3}\triangle\text{ABC}$

이때, $\triangle$ABC의 넓이는 S이므로

$\triangle\text{APR}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{3}\triangle\text{ABC}=\dfrac{4}{15}S$ …… ㉠

또한, $\triangle\text{PBQ}\backsim\triangle\text{ABC}$이고, $\overline{\text{BP}}:\overline{\text{BA}}=1:3$이므로

$\triangle\text{PBQ}:\triangle\text{ABC}=1:9$

$\therefore\ \triangle\text{PBQ}=\dfrac{1}{9}\triangle\text{ABC}=\dfrac{1}{9}\text{S}$ …… ㉡

선분 AQ를 그으면 삼각형 ABC에서

$\overline{\text{BQ}}:\overline{\text{QC}}=1:2$이므로 $\triangle\text{AQC}=\dfrac{2}{3}\triangle$ABC이고,

$\triangle\text{RQC}=\dfrac{3}{5}\triangle$AQC이므로

$\triangle\text{RQC}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{3}\triangle\text{ABC}=\dfrac{2}{5}\text{S}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 삼각형 PQR의 넓이는

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=13$

$\overline{AB}=\overline{A'B'}=\sqrt{2(a-b)^2}=\sqrt{26}$

319 정답 $\sqrt{13}-\frac{2}{13}\sqrt{39}$

점 C는 점 A를 x축으로 2만큼, y축으로 -2만큼 평행이동한 점이므로 점 A가 직선 $3x-2y+20=0$ 위를 움직일 때, 점 C는 $3(x-2)-2(y+2)+20=0$

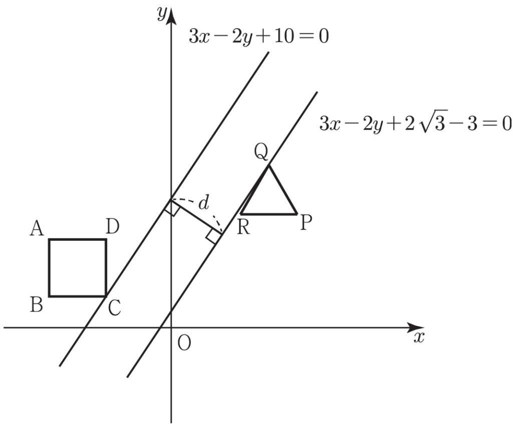
즉, $3x-2y+10=0$위를 움직인다.

또한 점 Q는 점 P를 x축으로 -1만큼, y축으로 $\sqrt{3}$만큼 평행이동한 점이므로 점 P가 직선 $3x-2y-6=0$위를 움직일 때, 점 Q는

$3(x+1)-2(y-\sqrt{3})-6=0$

즉, $3x-2y+2\sqrt{3}-3=0$위를 움직인다.

따라서 두 점 C와 Q 사이 거리 d의 최솟값은 두 직선 $3x-2y+10=0$, $3x-2y+2\sqrt{3}-3=0$사이의 거리이다.



따라서

$$d\geq\frac{10-(2\sqrt{3}-3)}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{13-2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}-\frac{2}{13}\sqrt{39}$$

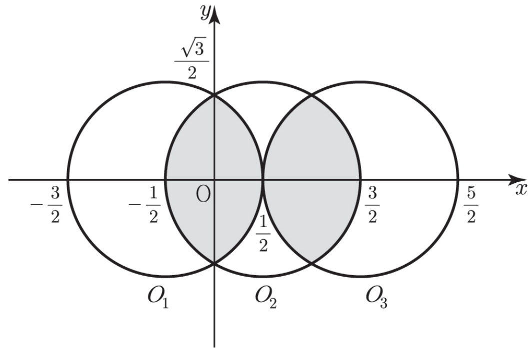
320 정답 $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

중심의 좌표가 $(-\frac{1}{2}, 0)$이고, 반지름의 길이가 1인 원 O_1의 방정식은 $(x+\frac{1}{2})^2+y^2=1$

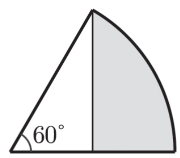
원 O_1을 y축에 대하여 대칭이동한 원 O_2의 방정식은 $(-x+\frac{1}{2})^2+y^2=1$

$\therefore (x-\frac{1}{2})^2+y^2=1$

따라서 구하는 공통부분의 넓이의 합은 다음 그림에서 어두운 부분의 넓이의 합과 같다.



이때, 어두운 부분의 넓이의 합을 S라 하면 S는 반지름의 길이가 1이고, 중심각의 크기가 60°인 부채꼴의 넓이에서 밑변의 길이가 $\frac{1}{2}$이고 높이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 직각삼각형의 넓이를 뺀 것의 8배와 같으므로



$$S=8\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

321 정답 $\sqrt{6}$

두 원의 공통현의 방정식은

$6x-8y+10r=0\rightarrow 3x-4y+5r=0$이다.

원 C_1은 중심이 $(0, 0)$, 반지름의 길이가 $2r$인 원이다.

이 때, 그림과 같이 공통현과 원 C_1이 만나는 점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 공통현에 내린 수선의 발을 H라 하자.