Contents

해설에 해설뿐만 아니라 해당 자작 문제에 필요한 개념들을 모두 정리하는 기출 모음 및 실전 개념이 적혀 있으므로 문항 하나 풀고 해설 보면서 뒤의 예제들을 같이 푸는 것을 가장 이상적인 학습법으로 지향하는 바입니다.

문제 난도는 상~최상이 섞여 있으며 문항 앞에 수능 기준 번호가 적혀있으니 참고 바랍니다. 온라인에 공개됐던 칼럼들과 미공개 칼럼이 섞여 있으며, 공개됐던 칼럼의 경우에도 문항을 추가하거나 수정 사항들이 꽤 반영되어 있어 학습에 보다 용이해졌을 겁니다.

기출 문제 해설의 경우에도 다양한 개념들을 안에 녹였기에 꼼꼼히 읽는 것을 추천합니다. 단순히 계산으로 푸는 풀이는 최대한 지양했으며, 암산이 가능할 정도로 극한의 사고를 추구했으니 열심히 보면서 공부해주시기 바랍니다!

여섯 번째 문항

30.[6]

$f(x)$는 최고차항의 계수가 p $(p>0)$인 삼차함수이다. 함수

$$g(x)=|f'(f(x))|$$

의 극댓점의 x좌표는 등차수열 $\alpha, 3, \beta$ $(\alpha<3<\beta)$ 뿐일 때, 다음 조건을 모두 만족한다.

(가) $g\left(\dfrac{3+\beta}{2}\right)=0$

(나) $g(\alpha)>g(3)>g(\beta)$

(다) $9\displaystyle\int_{\frac{-\beta+9}{2}}^{\beta}|f'(x)|dx=4$

$\dfrac{1}{p}\times g(1)$의 값을 구하시오.

Theme 1. 지수 문제 is started by 소인수분해

지수 문제 Case 분류는 소인수분해가 기본이다.
단일한 소인수인지, 소인수의 몇 제곱인지에 따라 Case 분류가 가능하기 때문이다.
이는 소인수분해와 전혀 상관없는 것 같은 여러 지수 문제들에서 유용하게 쓰인다.
일단 예시와 함께 살펴보자.

Theme 1-1

$80^x=2,\ \left(\frac{1}{10}\right)^y=4,\ a^z=8$ 을 만족시키는 세 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=1$ 이 성립할 때, 양수 a의 값은?

→ $80=2^{\frac{1}{x}}$, $\frac{1}{10}=2^{\frac{2}{y}}$, $a^{\frac{z}{3}}=2$로 변형하여 소인수로 큰 수들을 표현하는 것이다. 이렇게 되면 좋은 점이 큰 수들끼리의 등식을 만들면 저절로 계산이 되기 때문이다. '$80\times\frac{1}{10}=8$'이므로 이를 소인수들의 계산으로 바꾸면, $2^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}=2^3$ 이다. 발문에서 $8=2^3=2^{1+\frac{1}{z}}$ → $z=\frac{1}{2}$ → $a=64$ (답)

이런 내신 유형의 지수 문제도 소인수분해가 잘 먹힌다. 한 번만 더 해보자.

Theme 1-1-1

0이 아닌 세 실수 α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. $x^{\frac{1}{\alpha}}=y^{-\frac{1}{\beta}}=z^{\frac{2}{\gamma}}$일 때, $16xz^2+9y^2$의 최솟값을 구하시오. (단, x, y, z는 1이 아닌 양수이다.)

→ 큰 수를 소인수로 표현해야 하는데, 현재 큰 수만 등식에 있으므로 소인수를 잡아야 한다.

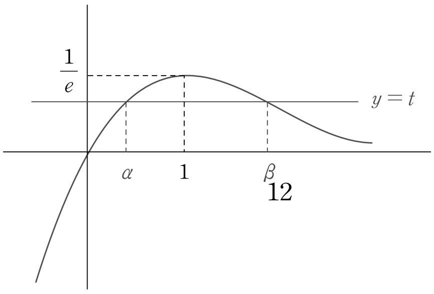
따라서, k라는 미지수를 새로 잡아 표현하자. ⋯ $x=k^{\alpha}$, $y=k^{-\beta}$, $z=k^{\frac{\gamma}{2}}$

$16xz^2+9y^2=16k^{\alpha+\gamma}+9k^{-2\beta}$

→ 두 수가 다 양수이므로 산술 기하를 사용하면, ⋯ $\geq 12\sqrt{k^{\alpha+\gamma-2\beta}}$

발문에서 등차수열이라고 했으므로, $2\beta=\alpha+\gamma$ 이므로, 부등식 우변의 값은 12 (답)!

이런 식으로 큰 수와 소인수의 비교임을 잊지 말자.



0~α의 넓이 S_1, α~β의 넓이 S_2, β~12의 넓이 S_3

(단, $t \leqq \frac{1}{e}$)

$g(t)=S_1+S_2+S_3$ -> 넓이의 변화율을 생각해보자.
t가 증가함에 따라 S_1과 S_3는 증가하고, S_2는 감소한다.
'넓이의 변화율은 길이'이다.

S_1의 증가 변화율= α S_2의 감소 변화율= $\beta-\alpha$ S_3의 증가 변화율=$12-\beta$

$g(t)$의 극소는 감소가 증가로 바뀔 때이다. 즉, 감소 변화율이 증가 변화율보다 크다가 작아지는 지점이다.
$\therefore t=k$일 때, $\alpha+(12-\beta)=\beta-\alpha$ -> $\beta=\alpha+6$

이를 계산하면 $y=k=\alpha e^{-\alpha}=(\alpha+6)e^{-(\alpha+6)}$ $\therefore a=\alpha=\dfrac{6}{e^6-1}$ -> $\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right)=6$

$t=1$: $|f(x)-t|=t-f(x)$ ($\because f(x)\leqq \dfrac{1}{e}$)

$\rightarrow$ $g(t)=\displaystyle\int_o^{12}|f(x)-t|\,dx=\int_0^{12}\{t-f(x)\}dx=12t-\int_0^{12}f(x)\,dx$ $\therefore g'(1)=12$

답 : $12+6=18$

직접 미분해보는 것이 아니라 넓이의 변화율을 바로 '길이'로 보는 관점을 얻으면 이같이
눈으로도 극소나 극대를 알 수 있다. 연습 한 번만 더 해보자.

ex 18. 대충 만든 문제

(가): $f(x)=x^3-9x^2+22x$
(나): $f(x)=tx$가 세 점에서 만나고, 세 근 중 가장 큰 근을 $\alpha(t)$라 하자.
(다): $g(t)=\displaystyle\int_0^{\alpha(t)}|f(x)-tx|\,dx$ ($\dfrac{7}{4}<t<22$)
$g(t)$는 $t=k$에서 최솟값 p를 갖는다. $k\times p$의 값은?