

서울대 박사가 알려주는
《수학의 비밀》

스마트하게 성적을 올리는 수학 공략집

“절대로 읽지 마라! 그저 열심히‘만’ 공부해라!

성적이 오르지 않아도 괜찮다면!”

세 번째 비밀 : 연산

어수강 지음

머리말

: 그저 열심히‘만’ 공부 중이신가요? **열심히 공부하는데도 성적이 오르지 않는다면 공부 방법을 바꾸어야 합니다.**

우리가 몸짱이 되고자 운동을 할 때, 운동 관련 책이나 유튜브 또는 전문 트레이너를 통해 인체 구조와 운동의 원리에 대해 알고 운동한다면 무작정 피트니스에 등록해서 힘닿는 대로 운동하는 것보다 효율적이고 재미있을 것입니다.

수학 공부도 마찬가지입니다. 잘못된 방법으로 공부하면 효율도 떨어지고, 수학에 대한 흥미와 자신감마저 잃어버릴 수도 있습니다. **반면 수학의 구조와 원리를 알고 공부한다면 훨씬 효율적이고 재미있게 공부할 수 있을 것입니다.**

교육현장에서 문제집을 7-8권씩 푸는데도 성적이 오르지 않아 괴로워하는 학생들을 많이 봅니다. 고등학교 수학을 그저 열심히‘만’ 공부한다면 실패할 확률이 높습니다. **이 책은 ‘여러분의 노력이 헛되지 않도록, 적어도 노력한 만큼은 성적도 올라야 한다.’라는 마음으로 집필했습니다.**

이 책에서는 수학의 구조와 원리를 바탕으로 한 효율적인 공부 방법을 제시합니다.¹⁾ 그리고 이에 대한 이해를 돕기 위해 다양한 실전 문제(내신, 수능, 논술 및 면접 기출 문항 등)을 예로 들어 설명하였습니다.²⁾ 이 책을 통해 공부 방법을 숙지한 후에, **수학의 모든 개념과 문제에 이를 적용해 공부한다면 특별한 수학적 재능 없이도 높은 성취를 거둘 것이라 확신합니다.**

<이 책의 근간인 “수학의 구조 특강”과 이 책에 대한 후기>

안녕하세요. 이 책을 읽고나서 현직 수학교사로서 '신선한 충격'을 받게 되었습니다. 언제나 잘 가르치고 싶은 마음만 가득했는데 실제로 수학 공부의 방향이 어떻게 흘러가야 하고 어떠한 방식으로 공부를 해야하는지에 대해 정확하게 설명이 되어있는 책입니다. 강력히 추천합니다. 📌

kkiryco 2022-09-15 공감 (0) 댓글 (0) Thanks to 공감

알라딘, 현직 수학교사 리뷰

네 감사합니다! 쌤 근데 저 쌤이랑 수업하고 공부방법도 많이 바뀌고 그래서인지 다른 과목 성적도 많이 올랐어요 ㅎㅎ 생각하면서 공부해서 그런거 같아요! (요번 학기동안 4과목에서 1등해봤어요. 이런적 한번도 없었는데..) 공부하는 것도 훨씬 안두렵고 편해졌어요. 한학기 지나고 나니까 쌤 덕분에 변한 것 같다는 생각이들어요. 전반적으로 더 확실하고 정확하게 공부하게 된 것 같아요. 사실 저 1학기때는 통계 공부해도 5등급 밖에 안나왔거든요ㅋㅋ 정말 감사드려요~ 여러 방면에서 많은걸 배운 것 같아요!

미국 약학대학

감사합니다 ㅋㅋㅋㅋ
방학 때 공부가 많이 도움 된것 같아요. 나중에 쌤 수업 자랑할때 하나고 학생이 수학 5등급이었는데 방학때 잠깐 듣고 1찍었다고 ㅋㅋㅋ

서울대 컴퓨터공학과

선생님 안녕하세요. 저 연대치대 최종합격했습니다.
의대는 발표 기다리고 있구요.
3년 동안 흔들리지 않는 수학 실력을 완성시켜주셔서 너무 감사합니다.

경희대 의과대학

네 시험 2주전에 가서 선생님이 말씀하신 방법 전달해서 그대로 했는데 ~~ 그게 효과가 있었던거 같아요. 시험 끝나면 애들한테 숙제 보내주세요. 방학전 면학시간에 할수 있게요. 지금 자신감 회복으로 하려면 다 할 분위기에요 ㅎㅎ

카이스트 전산학부

아! 저 쌤이랑 수학하고나서 수학성적오르고 안내려가네여ㅋㅋㅋ

서강대 사학과

1)이 책은 저의 시그니처 수업인 “수학의 구조 특강”의 내용을 바탕으로 합니다.

2)이 공부 방법은 (이해를 돕기 위해 책에서 예로 든 실전 문제 뿐 아니라) 수학의 모든 개념과 모든 문제에 적용 가능합니다.

1. 누구를 위한 건가요?

- 본격적으로 고등학교 수학을 공부하고자 하는 학생
- 열심히 공부하는데도 성적이 오르지 않는 학생**
- 성실하게 공부하는데도 성적이 들쭉날쭉한 학생
- 고등학교 입학 후 성적이 곤두박질친 학생**
- 문제를 많이 푸는데도 처음 보는 고난도 문제가 두려운 학생
- 안정적인 1등급을 원하는 학생**
- 최상위권 대학 진학을 희망하는 학생**
- 내신·수능·논술·면접 준비를 한 큐에 끝내고 싶은 학생 및 선생님
- 위와 같은 어려움을 겪는 학생들을 지도하고 계신 선생님
- 1등급 학생 또는 1등급을 원하는 학생들을 지도하고 계신 선생님**

2. 얻을 수 있는 것은 무엇인가요?

- (수학의 구조와 원리를 바탕으로 한) **구체적이고 효과적인 공부 방법**
- 효과적인 공부로 노력 이상의 안정적이고 높은 성취**
- 안정적이고 높은 성취로 흥미와 자신감 향상**
- 수학 불안 및 시험 불안 해소
- 처음 보는 고난도 문제에 대한 두려움 해소
- 효과적인 내신·수능·논술·면접 준비 및 성공적인 대학 입시**
- 수학에 대한 메타적인 관점과 효과적인 수학 지도 방법
- 티칭 개선으로 인한 자신감 향상
- 학생들의 성취도 향상으로 인한 즐거움과 보람
- 최근 10년간 지도한 학생의 과반 이상 'SKY'에 진학시킨 저자의 인사이트 및 노하우**

3. 당부의 말

: 무엇을 얻을 수 있는지만 보고 **무작정 이 책을 구입하지 마세요.** 당연한 얘기지만 단순히 이 책을 읽는 것만으로 수학 성적이 향상되지는 않습니다. 이 책은 별로 노력하지 않고도 수학 1등급을 받게 해주는 책이 아닙니다.

이 책에서 제시하는 공부 방법에 대해 충분히 고민해보고, 예제의 풀이를 확인하기 전에 반드시 스스로의 힘으로 예제를 풀어볼 것을 권장합니다.³⁾ 공부 방법을 숙지한 후에는 수학의 모든 개념과 문제를 공부하는데 이를 적용하기 위해 노력해야 합니다. 이와 같이 '성실'하게 '노력'한다면 시행착오는 줄어들고, 수학 1등급까지 걸리는 시간은 단축되며, 그 과정은 즐거워질 것입니다.

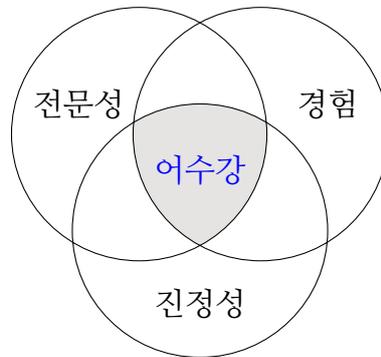
³⁾이 책에는 이해를 돕기 위한 고등학교 1학년 및 2학년 과정의 다양한 예제와 그 풀이가 수록되어 있습니다. 따라서 고등학교 2학년 과정까지 한 번 이상 공부한 후에 이 책을 보는 것을 권장합니다.

목차

| | |
|--------------------|----|
| 머리말 | 1 |
| 저자 소개 | 4 |
| 1 세 번째 비밀 : 연산 | 6 |
| [공부법 7] 연산법칙 | 7 |
| 맺음말 | 13 |

저자 소개

: 저자 어수강 박사는 전문성과 경험, 진정성을 바탕으로 공교육과 사교육을 넘나들며 학생들을 지도하고 있습니다. 학생들의 수학에 대한 흥미와 자신감 회복, 성취도 향상뿐 아니라 학생들의 하루하루가 빛날 수 있도록 고민하고 노력합니다.



* 전문성 : 수학 전공 이학박사로 첨단 수학의 연구 문제를 해결하여 국제 전문학술지에 다수의 논문을 게재하였고, 국제 전문학술지의 논문 심사위원으로서 다수의 논문을 심사하는 등 수학 전공자로서 뛰어난 전문성을 갖추고 있습니다.

* 경험 : 공교육과 사교육을 넘나들며 다양한 학생들을 지도하였습니다. 공교육에서 하나고등학교, 서울과학고등학교, EBS & KAIST 수학캠프, 서울대학교 과학영재원에서 학생들을 지도하였고, 사교육에서는 최상위권 학생 뿐 아니라 수학 5등급 이하의 학생들이 수학 1등급을 받고 최상위권 대학에 진학시킨 풍부한 경험을 갖추고 있습니다.

* 진정성 : 아이들이 겪는 어려움을 함께 고민하고, 아이들이 성장하는 과정에 함께하는 것을 기쁨과 보람으로 생각합니다. 형편이 어려운 학생들을 위해 무상으로 5년 이상 꾸준히 지도하고 소정의 장학금을 지급하기도 하였습니다.

[약력]

서울대학교 이학박사 (Ph.D. in Mathematics)

(前) 하나고등학교 교사

(前) 서울과학고등학교 교사

(前) EBS & KAIST 수학캠프 지도교사

(前) 서울대학교 과학영재원 지도교사

[논문]

석사논문

[A study on competition numbers of planar graphs \(2016\)](#)

박사논문

[Study on structures of digraphs and graphs in the aspect of their holes \(2019\)](#)

국제 전문학술지 게재 논문⁴⁾

1. [On \$\(1, 2\)\$ -step competition graphs of bipartite tournaments \(2017\)](#)
2. [The partial order competition dimensions of bipartite graphs \(2019\)](#)
3. [A graph with the partial order competition dimension greater than five \(2019\)](#)
4. [The graph grabbing game on \$\{0, 1\}\$ -weighted graphs \(2019\)](#)
5. [The niche graphs of bipartite tournaments \(2020\)](#)
6. [On \$m\$ -step competition graphs of bipartite tournaments \(2020\)](#)
7. [On chordal phylogeny graphs \(2021\)](#)

[홈페이지 및 이메일]

블로그 : blog.naver.com/math-fish

이메일 : mathfish@snu.ac.kr

전자도서 : www.upaper.net/mathfish

⁴⁾현재 국제 전문학술지에 투고하여 심사 중인 논문은 scholar.google.com에서 “Soogang Eoh”로 검색하면 확인하실 수 있습니다.

세 번째 비밀 : 연산

① 연산을 간단히 하는 도구들

: 고등학교 수학에서는

$$365 \times 2131$$

와 같이 세 자리 자연수와 네 자리 자연수를 곱하기를 해야 하는 문제는 접하기 어렵습니다. 뿐만 아니라

$$\left\{ 2 + \left(3 \times \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \right) \right\} \times \left\{ \frac{2}{3} - \left(2 + \frac{2}{5} \right) \right\} \div \frac{4}{3} - 1$$

과 같이 복잡한 유리수의 연산을 하는 경우도 거의 없습니다. **왜냐하면 복잡한 식의 연산을 있는 그대로 복잡하게 계산하는 것은 고등학교 수학의 학습목표가 아니기 때문입니다.** 고등학교 수학에서는 복잡해 보이지만 간단히 할 수 있는 식들이 주로 출제가 됩니다. 복잡한 식의 연산을 간단히 하지 못하면 시험에서 시간 내에 문제를 끝까지 풀지 못하거나 실수로 틀릴 가능성이 높습니다. 따라서 **복잡한 식의 연산을 마주했을 때, 그것을 있는 그대로 복잡하게 계산하기보다는 이를 간단히 하는 것에 초점을 맞추고 공부해야 합니다.**

② 효율적이고 체계적인 학습 방법

: 고등학교 수학에서 새로운 연산이 나오면 먼저 기본적인 연산을 손에 익힌 후에 연산을 간단히 하는 도구인

[공부법 7] 연산법칙

[공부법 8] 항등원과 역원

[공부법 9] 이 밖에 연산을 간단히 하는 도구들

에 초점을 맞추고 공부해야 합니다. 먼저 연산법칙부터 살펴보겠습니다.

[공부법 7] 연산법칙

: 연산법칙은 복잡한 식의 연산을 간단히 하는 가장 기본적인 도구입니다. 실수의 덧셈에 대한 교환법칙이나 결합법칙 뿐 아니라 지수법칙이나 시그마의 성질도 연산법칙으로 생각할 수 있습니다. 연산법칙은 연산에서 매우 중요한 역할을 하지만 이에 대해 제대로 인지하고 못하고 기계적으로 계산만 하는 경우가 대부분입니다. 하지만 기계적으로 빠르게 연산하는 연습에만 초점을 맞추고 공부한 경우, 시험에서 다소 생소한 형태의 문제를 맞닥뜨렸을 때 크게 당황할 가능성이 높습니다. 예제를 통해 이에 대해 알아보도록 하겠습니다.

[예제1-1] 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 연산 Δ 을

$$X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

라 하자. 이때 세 집합 A, B, C 에 대하여

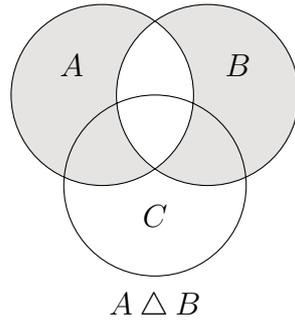
$$\{(A \Delta B) \Delta C\} \Delta (A \Delta C)$$

를 간단히 하시오.

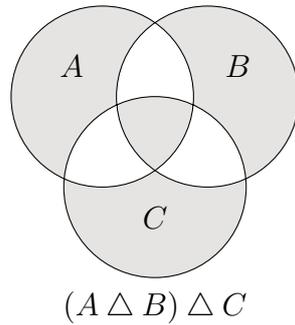
[풀이]

[풀이] 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

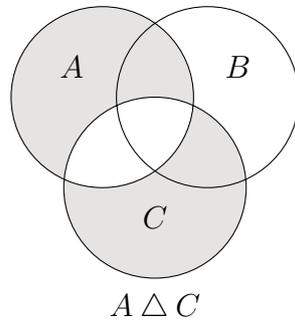
[풀이] 먼저 $A \triangle B$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 아래와 같다.



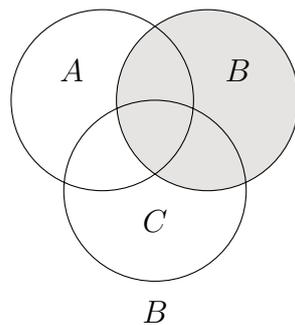
이제 두 집합 $(A \triangle B)$ 와 C 를 연산한 것을 아래의 벤 다이어그램으로 나타낼 수 있다.



한편, $A \triangle C$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 아래와 같다.



두 집합 $(A \triangle B) \triangle C$ 와 $A \triangle C$ 의 벤 다이어그램을 이용하여 $\{(A \triangle B) \triangle C\} \triangle (A \triangle C)$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 아래와 같음을 쉽게 알 수 있다.



따라서 $\{(A \triangle B) \triangle C\} \triangle (A \triangle C)$ 를 간단히 하면 B 가 된다. ■

아마도 대부분의 학생들이 [예제1-1]을 [풀이]와 같이 별도의 연산법칙을 이용하지 않고, 기계적으로 벤 다이어그램을 통해 해결했을 것이라 생각합니다. 아래의 예제 [예제1-2]도 연산법칙을 사용하지 않고 쉽게 해결할 수 있을지 생각해 봅시다.

[예제1-2] 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 연산 Δ 을

$$X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

라 하자. 이때 네 집합 A, B, C, D 와 공집합 \emptyset 에 대하여

$$\left[\{(A \Delta B) \Delta (C \Delta D)\} \Delta \{(A^c \Delta C^c) \Delta D\} \right] \Delta \{(\emptyset \Delta B) \Delta C\}$$

를 간단히 하시오.

[풀이1] [풀이2]

[풀이] 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

[풀이1] [예제1-2] [예제1-1]의 [풀이]와 같이 벤 다이어그램을 통해 해결하기 어렵다.¹⁾ ☒

많은 학생들이 [예제1-2]를 접하면 벤 다이어그램을 통해 문제를 해결하고자 합니다. 하지만 [예제1-2]는 [예제1-1]의 [풀이]과 같이 벤 다이어그램을 통해 해결하기엔 너무 복잡하고 어렵습니다. 때문에 벤 다이어그램을 그리는데 시간을 소비하고 문제는 해결하지 못할 확률이 높습니다. 이와 같이 복잡한 식의 계산이 어렵다면 연산을 간단히 하는 도구에 초점을 맞추어야 합니다.²⁾ [예제1-1]과 [예제1-2]에서 정의한 연산 \triangle 에 대한 아래의 정리를 살펴봅시다.

[정리1-1] 임의의 세 집합 A, B, C 와 공집합 \emptyset 에 대하여

1. $A \triangle B = B \triangle A$
2. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
3. $A \triangle \emptyset = \emptyset \triangle A = A$
4. $A \triangle A = \emptyset$
5. $A \triangle B = A^c \triangle B^c$

가 성립한다.

이제 [정리1-1]을 이용해 [예제1-1]에서 정의한 연산 \triangle 에 대한 식을 어떻게 간단히 할 수 있는지 생각해 봅시다.³⁾

[분석1-1] 먼저 [정리1-1]의 연산법칙 $A \triangle \emptyset = \emptyset \triangle A = A$ 에 대해 생각해 볼까요? 이는 **공집합 \emptyset 을 포함한 식을 간단히 할 수 있음을 의미합니다.** 공집합 \emptyset 을 포함한 식과 그 식에서 공집합 \emptyset 을 소거한 식이 서로 같기 때문입니다. **따라서 연산 \triangle 에 대한 식에서 공집합 \emptyset 을 만들어 낼 수 있다면 식을 간단히 하는데 도움이 됩니다.**⁴⁾

그런데 연산법칙 $A \triangle A = \emptyset$ 이 성립하므로 서로 같은 두 집합을 연산 \triangle 하면 식을 간단히 할 수 있을 것입니다.⁵⁾ 따라서 연산 \triangle 에 대한 교환법칙과 결합법칙을 이용하여 서로 같은 두 집합을 붙여서 연산하는 전략을 이용하면 연산 \triangle 에 대한 식을 간단히 할 수 있습니다.⁶⁾

이제 연산법칙 $A \triangle B = A^c \triangle B^c$ 이 남았습니다. 이 연산법칙을 연산 \triangle 에 대한 식을 간단히 하는데 어떻게 이용할 수 있을까요? 서로 같은 두 집합을 연산 \triangle 하면 공집합 \emptyset 이 되므로 식을 간단히 할 수 있다는 것을 알고 있으므로, 서로 다른 집합을 같게 하는 것이 하나의 좋은 전략일 것입니다. 따라서 $A \triangle B = A^c \triangle B^c$ 를 이용하면 집합 A^c, B^c 를 집합 A, B 로 바꾸거나 그 반대로 바꾸는데 이용할 수 있음을 알 수 있습니다. ■

¹⁾네 집합 A, B, C, D 를 하나의 벤 다이어그램으로 나타내는 것도 쉽지 않습니다.

²⁾연산을 간단히 하는 도구에는 연산법칙, 항등원, 역원 등이 있습니다.

³⁾증명은 벤 다이어그램을 통해 직접 해보는 것을 권장합니다. 본서에서는 증명을 생략합니다.

⁴⁾공집합 \emptyset 을 집합의 연산 \triangle 에 대한 ‘항등원’이라 합니다.

⁵⁾집합 A 를 집합의 연산 \triangle 에 대한 A 의 ‘역원’이라 합니다. 항등원과 역원의 정의는 ??와 같습니다.

⁶⁾[정리1-1]의 1, 2를 각각 교환법칙, 결합법칙이라 합니다.

이제 [정리1-1]을 이용하여 [예제1-2]를 다시 풀어본 후에 다음 페이지의 [풀이2]를 보도록 합시다.

[풀이] 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

[풀이2] 두 집합 A, B 에 대하여 $A \triangle B = A^c \triangle B^c$ 이므로 [예제1-2]의 준식은

$$\left[\{(A \triangle B) \triangle (C \triangle D)\} \triangle \{(A \triangle C) \triangle D\} \right] \triangle \{(\emptyset \triangle B) \triangle C\}$$

와 같다. 이 식에 연산 \triangle 에 대한 교환법칙과 결합법칙을 적용하여 서로 같은 집합끼리 최대한 연속하도록 하면

$$A \triangle A \triangle B \triangle B \triangle C \triangle C \triangle C \triangle D \triangle D \triangle \emptyset$$

가 된다. 그런데 서로 같은 두 집합을 연산 \triangle 하면 공집합 \emptyset 이 되므로 위 식은

$$\emptyset \triangle \emptyset \triangle \emptyset \triangle C \triangle \emptyset \triangle \emptyset$$

와 같다. 연산 \triangle 에 대한 식에서 공집합 \emptyset 은 소거해도 되므로 위 식은 C 와 같다. 따라서 [예제1-2]의 준식을 간단히 하면 C 가 된다. ■

[예제1-2]를 [예제1-1]의 [풀이]와 같이 벤 다이어그램을 통해 풀기는 어렵지만, 연산 \triangle 에 대한 연산법칙인 [정리1-1]을 이용하면 위의 [풀이2]와 같이 간단히 해결할 수 있게 됩니다. 이는 연산 법칙이 복잡한 식의 연산을 간단히 하는 강력한 도구이기 때문입니다. 하지만 이에 대해 제대로 인지하지 못한 채 기계적으로 연산하는 학생들이 많습니다. 복잡한 식의 연산을 간단히 하는 도구로써 연산법칙을 신경 써서 공부할 것을 권장합니다.

맺음말

: 그저 열심히‘만’ 공부 중인가요? **잘못된 방법으로 그저 열심히‘만’ 공부한다면 ‘노력’이 당신을 ‘배신’할 수도 있습니다.** 열심히 공부하는데도 성적이 오르지 않는다면 공부 방법을 바꾸어야 합니다. **수학의 구조와 원리에 대한 이해를 바탕으로 공부한다면 훨씬 쉽고 재미있게 공부할 수 있습니다.**⁷⁾

이 책에서는 효과적인 공부를 위해

“복잡한 식의 연산을 간단하게 하는 것”

에 착안하여, 아래의 3가지 공부 방법을 제시하였습니다.

[공부법 7] 연산법칙

[공부법 8] 항등원과 역원

[공부법 9] 이 밖에 연산을 간단히 하는 도구들

그리고 이에 대한 이해를 돕기 위해 내신 · 수능 · 논술 · 면접 기출 문항 등 다양한 예제를 제시하였지만, 사실은 수학의 모든 문제가 예제입니다. 공부 방법을 숙지한 후에는 수학의 개념과 문제에 이를 적용하기 위한 노력해야 합니다.

공부 방법을 바꾸는 것은 무척 어려운 일이지만 ‘의식적’으로 ‘노력’한다면 충분히 가능합니다. **이 책을 반복해서 공부함으로써 9가지 공부 방법과 예제에 대해 숙지한 후에 수학의 모든 개념과 문제에 이를 적용해 공부한다면, 시행착오는 줄어들고, 수학 1등급까지 걸리는 시간은 단축되며, 그 과정은 즐거워질 것입니다.** 이를 통해 수학에 대한 흥미와 자신감을 되찾고, 수학 시험뿐 아니라 대학 입시에서도 좋은 결과를 거두기를 바랍니다.

⁷⁾수학도 “知彼知己, 百戰不殆”입니다.

책 제목 : 서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀 - 세 번째 비밀 : 연산

발행일 : 2023년 2월 21일

저자 : 어수강

전자책 가격 : 10,000원

블로그 : blog.naver.com/math-fish

이메일 : mathfish@snu.ac.kr

전자도서 : 첫 번째 비밀 : 집합, 두 번째 비밀 : 명제

미리보기 : www.upaper.net/mathfish

★ 이 책의 저작권은 저자에게 있으며 무단 배포, 전재, 복제를 금합니다 ★